

# FRACTIONS RATIONNELLES

## Table des matières

<b>1 Corps des fractions rationnelles</b>	<b>1</b>
1.1 Notion de fraction rationnelle . . . . .	1
1.2 Degré d'une fraction rationnelle . . . . .	3
1.3 Racines et pôles . . . . .	4
<b>2 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle</b>	<b>4</b>
2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle . . . . .	4
2.2 Théorèmes de décomposition (en éléments simples) . . . . .	5
2.2.1 Le cas complexe ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) . . . . .	5
2.2.2 Le cas réel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) . . . . .	7
2.3 Dérivée logarithmique . . . . .	8
<b>3 Applications</b>	<b>9</b>
3.1 Intégration de fonctions rationnelles . . . . .	9
3.2 Calcul de dérivées successives de fonctions rationnelles . . . . .	10

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I – Corps des fractions rationnelles

### 1) Notion de fraction rationnelle

On sait que  $\mathbb{K}[X]$  est un anneau commutatif intègre, mais ce n'est pas un corps (par exemple car  $X$  n'admet pas d'inverse dans  $\mathbb{K}[X]$ ). On peut, à partir de cet anneau, construire ce qu'on appelle son *corps des fractions*. Il s'agit de l'ensemble des fractions rationnelles, dont la construction est hors programme.

**Définition (le corps  $\mathbb{K}(X)$ )** Il existe un corps, noté  $\mathbb{K}(X)$  et appelé corps des fractions rationnelles sur  $\mathbb{K}$ , vérifiant les propriétés suivantes :

- ★ les éléments de  $\mathbb{K}(X)$  s'écrivent sous la forme  $\frac{P}{Q}$ , où  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ ;
- ★  $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$ ;
- ★ l'égalité dans  $\mathbb{K}[X]$  est définie par :

$$\forall P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X], \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \iff P_1 Q_2 = P_2 Q_1$$

Un élément de  $\mathbb{K}(X)$  est appelé une *fraction rationnelle à coefficients dans  $\mathbb{K}$* .

L'ensemble  $\mathbb{K}(X)$  contient donc notamment :

- ★ les polynômes (si  $P \in \mathbb{K}[X]$ , alors  $P = \frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ );

★ les inverses des polynômes non nuls (si  $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ , alors  $\frac{1}{P} \in \mathbb{K}(X)$ ).

**Exemple** ★  $\frac{1}{X} \in \mathbb{K}(X)$ ,  $\frac{X-1}{X^3} \in \mathbb{K}(X)$ ,  $X^2 + 2024 \in \mathbb{K}(X)$

★ On a  $\frac{X}{X^2+1} = \frac{2X}{2X^2+2} = \frac{X^2}{X^3+X}$  ; on dit que ces trois fractions sont des représentants d'une même fraction rationnelle.

**Proposition (représentant irréductible d'une fraction rationnelle)** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . À constante multiplicative non nulle près, il existe un unique couple  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\})$  tel que :

- ★  $P \wedge Q = 1$  ;
- ★  $F = \frac{P}{Q}$ .

Cette fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$  est appelée *le représentant irréductible de F*.

**Démonstration** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . On traite séparément l'existence et l'unicité.

- ★ **Existence** : par définition de  $\mathbb{K}(X)$ , il existe  $(S, T) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\})$  tel que  $F = \frac{S}{T}$ . Comme  $T \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ , on a  $S \wedge T \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$  donc les polynômes  $P = \frac{S}{S \wedge T}$  et  $Q = \frac{T}{S \wedge T}$  sont bien définis, et  $Q$  est non nul. Par ailleurs, on a l'égalité  $F = \frac{P}{Q}$ . Il reste à vérifier que  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux. D'après la propriété sur la relation de Bézout, il existe  $U, V \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $SU + TV = S \wedge T$ . En divisant par  $S \wedge T$ , on obtient l'égalité  $PU + QV = 1$ . Le théorème de Bézout implique que  $P \wedge Q = 1$ .
- ★ **Unicité** : soient  $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$  et  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  tels que :

$$F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \quad \text{et} \quad P_1 \wedge Q_1 = P_2 \wedge Q_2 = 1$$

Par définition de la relation d'égalité dans  $\mathbb{K}(X)$ , on a  $P_1Q_2 = P_2Q_1$ . Ainsi,  $Q_1 \mid P_1Q_2$  et comme  $P_1 \wedge Q_1 = 1$ , le lemme de Gauss implique que  $Q_1 \mid Q_2$ . De la même manière, on a  $Q_2 \mid Q_1$ . Les polynômes  $Q_1$  et  $Q_2$  sont donc associés, ce qui signifie qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $Q_1 = \lambda Q_2$ . Ensuite :

$$P_1Q_2 = P_2Q_1 = \lambda P_2Q_2 \quad \text{puis} \quad (P_1 - \lambda P_2)Q_2 = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Or  $Q_2 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$  et l'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est intègre donc  $P_1 - \lambda P_2 = 0_{\mathbb{K}[X]}$ , i.e.  $P_1 = \lambda P_2$ . Finalement,  $(P_1, Q_1) = (\lambda P_2, \lambda Q_2)$  d'où l'unicité, à constante multiplicative non nulle près du représentant irréductible d'une fraction rationnelle. ■

**Exemple** Le représentant irréductible de  $F = \frac{X-1}{X^2-3X+2}$  est  $\frac{1}{X-2}$ .

**Définition (règles de calculs dans  $\mathbb{K}(X)$ )** On définit dans  $\mathbb{K}(X)$  la somme  $+$ , le produit  $\times$  et la multiplication par un scalaire par les formules suivantes. Pour tous  $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ , pour tous  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ , et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on pose :

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}, \quad \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2} \quad \text{et} \quad \lambda \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\lambda P_1}{Q_1}$$

**Remarque** : on peut vérifier que les résultats de ces opérations ne dépendent pas des représentants choisis et que  $(\mathbb{K}(X), +, \times)$  est un corps commutatif.

## 2) Degré d'une fraction rationnelle

La notion de degré d'une fraction rationnelle étend celle déjà vue pour les polynômes.

**Proposition/définition** Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ , où  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ . On appelle *degré de  $F$* , noté  $\deg(F)$ , l'élément de  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  défini par :

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$$

**Démonstration** Pour que la définition soit cohérente, il faut vérifier que la différence des degrés ne dépend pas du représentant choisi. Soient  $F \in \mathbb{K}(X)$  et  $P, R \in \mathbb{K}[X]$  et  $Q, S \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  tels que  $F = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ . Alors  $PS = QR$  (par définition de la relation d'égalité dans  $\mathbb{K}(X)$ ) et donc (propriété des degrés dans  $\mathbb{K}[X]$ ) :

$$\deg(P) + \deg(S) = \deg(Q) + \deg(R) \quad i.e. \quad \deg(P) - \deg(Q) = \deg(R) - \deg(S)$$

La notion de degré, pour une fraction rationnelle, est donc bien définie. ■

**Remarques :**

- ★ Le degré de  $F$  vaut  $-\infty$  si et seulement si  $F$  est la fraction rationnelle nulle.
- ★ Une fraction rationnelle de degré 0 peut ne pas être constante. Par exemple,  $\deg\left(\frac{X}{X+1}\right) = 0$ .
- ★ On a :

$$\deg(F) \leq 0 \iff \deg(P) \leq \deg(Q)$$

**Exemple**  $\deg\left(\frac{X^2+1}{X^3}\right) = -1$

Les propriétés sur les degrés sont les mêmes que dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**Proposition (propriétés du degré dans  $\mathbb{K}(X)$ )** Soient  $F, G \in \mathbb{K}(X)$ . Alors :

- ★  $\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$  avec égalité si  $\deg(F) \neq \deg(G)$  ;
- ★  $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$ .

**Démonstration** Soient  $F, G \in \mathbb{K}(X)$ . Il existe  $P, R \in \mathbb{K}[X]$  et  $Q, S \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  tels que  $F = \frac{P}{Q}$  et  $G = \frac{R}{S}$ .

- ★ Par définition de l'addition dans  $\mathbb{K}(X)$ , on a  $F + G = \frac{PS + QR}{QS}$  donc :

$$\begin{aligned} \deg(F + G) &= \deg(PS + QR) - \deg(QS) \\ &\leq \max(\deg(PS), \deg(QR)) - \deg(Q) - \deg(S) \quad (\text{propriété du degré dans } \mathbb{K}[X]) \\ &= \max(\deg(P) + \deg(S), \deg(Q) + \deg(R)) - \deg(Q) - \deg(S) \\ &= \max(\deg(P) - \deg(Q), \deg(R) - \deg(S)) \\ &= \max(\deg(F), \deg(G)) \end{aligned}$$

Si  $\deg(F) \neq \deg(G)$ , *i.e.* si  $\deg(PS) \neq \deg(QR)$ , alors on a égalité (d'après le cas du degré d'une somme dans  $\mathbb{K}[X]$ ).

- ★ Par définition du degré de la fraction rationnelle  $FG = \frac{PR}{QS}$ , on a :

$$\begin{aligned} \deg(FG) &= \deg(PR) - \deg(QS) = \deg(P) + \deg(R) - (\deg(Q) + \deg(S)) \\ &= \deg(P) - \deg(Q) + \deg(R) - \deg(S) \\ &= \deg(F) + \deg(G), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

### 3) Racines et pôles

**Définition (racines, pôles)** Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$  une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible (i.e. telle que  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\})$  et  $P \wedge Q = 1$ ).

- ★ On appelle :
  - *racines* de  $F$  les racines de  $P$  dans  $\mathbb{K}$ ;
  - *pôles* de  $F$  les racines de  $Q$  dans  $\mathbb{K}$ .
- ★ La multiplicité d'une racine (respectivement d'un pôle) de  $F$  est définie comme étant sa multiplicité en tant que racine du polynôme  $P$  (respectivement de  $Q$ ).
- ★ On note  $\text{Rac}_{\mathbb{K}}(F)$  (respectivement  $\text{Pol}_{\mathbb{K}}(F)$ ) l'ensemble des racines (respectivement des pôles) de  $F$  dans  $\mathbb{K}$ .

**Remarques :**

- ★ Il est important que la fraction rationnelle soit écrite sous forme irréductible. Par exemple, 0 n'est ni un pôle, ni une racine, de la fraction rationnelle  $F = \frac{X(X+1)}{X}$ .  
En fait,  $F = X + 1$  n'a pas de pôle et  $-1$  et sa seule racine.
- ★ Toute fraction rationnelle admet un nombre fini de pôles.
- ★ Toute fraction rationnelle *non nulle* admet un nombre fini de racines.

**Exemple** Si  $F = \frac{X}{(X^2 + 1)^2}$ , alors :

$$\text{Rac}_{\mathbb{R}}(F) = \text{Rac}_{\mathbb{C}}(F) = \{0\}, \quad \text{Pol}_{\mathbb{R}}(F) = \emptyset \quad \text{et} \quad \text{Pol}_{\mathbb{C}}(F) = \{-i, i\}$$

Les pôles complexes  $\pm i$  sont doubles.

De la même manière que pour les fonctions polynomiales, on peut définir la notion de *fonction rationnelle*.

**Définition (fonction rationnelle)** Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ . On appelle *fonction rationnelle* associée à  $F$  la fonction :

$$\tilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} \setminus \text{Pol}_{\mathbb{K}}(F) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \frac{P(x)}{Q(x)} \end{cases}$$

**Remarque :** si  $F \in \mathbb{R}(X)$ , alors  $\tilde{F}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \text{Pol}_{\mathbb{R}}(F)$ .

## II – Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

### 1) Partie entière d'une fraction rationnelle

**Proposition/définition (partie entière d'une fraction rationnelle)** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . Il existe un unique polynôme  $E \in \mathbb{K}[X]$  et une unique fraction rationnelle  $G \in \mathbb{K}(X)$  tels que :

- ★  $F = E + G$ ;
- ★  $\text{deg}(G) < 0$ .

Le polynôme  $E$  est appelé la *partie entière* de  $F$  (on le note parfois  $E(F)$ ).

**Démonstration** Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . On démontre l'existence et l'unicité séparément.

- ★ **Existence** : par définition d'une fraction rationnelle, il existe  $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$  tel que  $F = \frac{A}{B}$ . D'après le théorème de la division euclidienne, il existe également  $E, R \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $A = BE + R$  avec  $\deg(R) < \deg(B)$ . Ainsi :

$$F = \frac{BE + R}{B} = E + \frac{R}{B} \quad \text{et} \quad \deg\left(\frac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$$

En posant  $G = \frac{R}{B} \in \mathbb{K}(X)$ , on a bien la décomposition annoncée.

- ★ **Unicité** : soient  $(E_1, G_1), (E_2, G_2) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$  tels que :

$$F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2 \quad \text{avec} \quad \deg(G_1) < 0 \quad \text{et} \quad \deg(G_2) < 0$$

Alors  $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$  donc :

$$\deg(E_2 - E_1) = \deg(G_2 - G_1) \leq \max(\deg(G_2), \deg(G_1)) < 0$$

Mais  $E_1 - E_2 \in \mathbb{K}[X]$  (comme différence de deux polynômes) donc  $\deg(E_1 - E_2) = -\infty$ , i.e.  $E_1 = E_2$ . Il s'ensuit alors que  $G_1 = G_2$ . Ceci démontre l'unicité de la décomposition. ■

**Exemple** ★ On a  $\frac{X+1}{X} = 1 + \frac{1}{X}$ . Comme  $\deg\left(\frac{1}{X}\right) = -1 < 0$  et  $1 \in \mathbb{K}[X]$ , on a nécessairement  $E\left(\frac{X+1}{X}\right) = 1$  par unicité de la partie entière.

- ★ On a  $\frac{X}{X^2+1} = 0 + \frac{X}{X^2+1}$  et  $\deg\left(\frac{X}{X^2+1}\right) < 0$  donc  $E\left(\frac{X}{X^2+1}\right) = 0$ .

- ★ Déterminons  $E(F)$  où  $F = \frac{2X^2+1}{X+1}$ . On a (on effectue la division euclidienne de  $2X^2+1$  par  $X+1$ ) :

$$2X^2+1 = (2X+2)(X+1) - 3 \quad \text{donc} \quad F = 2X+2 - \frac{3}{X+1}$$

donc  $E(F) = 2X+2$  (car  $2X+2 \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\deg\left(-\frac{3}{X+1}\right) < 0$  et par unicité de la partie entière).

## 2) Théorèmes de décomposition (en éléments simples)

Les théorèmes suivants, qui assurent l'existence de la « décomposition en éléments simples » de toute fraction rationnelle en précisant leur forme, sont admis. On distingue le cas complexe du cas réel.

### (a) Le cas complexe ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )

**Théorème (décomposition en éléments simples, cas complexe)** Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$  où  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X]$  est tel que :

$$Q = C_Q \prod_{\ell=1}^n (X - a_\ell)^{k_\ell},$$

les nombres complexes  $a_1, \dots, a_n$  étant deux à deux distincts (ce sont les pôles de  $F$ ) et où  $k_1, \dots, k_n$  sont des entiers naturels non nuls. On peut décomposer  $F$  d'une unique manière sous la forme :

$$F = E(F) + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^{k_j} \frac{\alpha_{j,\ell}}{(X - a_j)^\ell},$$

les  $\alpha_{j,\ell}$  étant des nombres complexes.

**Remarque :** le cadre le plus simple pour décomposer en éléments simples est celui où tous les pôles de  $F$  sont simples. Supposons que :

$$F = \frac{P}{(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)}$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$  (i.e.  $\deg(P) < n$  de sorte que  $E(F) = 0_{\mathbb{C}[X]}$ ) et où les nombres complexes  $a_1, \dots, a_n$  sont deux à deux distincts. D'après le théorème, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  tels que :

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

Expliquons comment déterminer simplement  $\lambda_1$ . On multiplie  $F$  par  $X - a_1$  :

$$\frac{P}{(X - a_2) \dots (X - a_n)} = (X - a_1)F = \lambda_1 + (X - a_1) \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

En évaluant en  $a_1$ , on a donc  $\lambda_1 = \frac{P(a_1)}{(a_1 - a_2) \dots (a_1 - a_n)}$ .

**Exemples** ★ Soit  $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)} \in \mathbb{C}(X)$ . On a  $\deg(F) = -3 < 0$  donc  $E(F) = 0_{\mathbb{C}[X]}$  et, d'après le théorème précédent, il existe un unique triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  tel que :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$$

★ Soit  $G = \frac{X}{(X-i)^2(X+i)^2} \in \mathbb{C}(X)$ . Comme  $\deg(F) = -3 < 0$ , on a  $E(G) = 0_{\mathbb{C}[X]}$  et on sait d'après le théorème précédent qu'il existe un unique  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$  tel que :

$$G = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\beta}{(X-i)^2} + \frac{\gamma}{X+i} + \frac{\delta}{(X+i)^2}$$

**Proposition (coefficient pour un pôle simple)** Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$  (où  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X]$ ) une fraction rationnelle et  $a \in \mathbb{C}$  un pôle simple de  $F$ . L'élément simple  $\frac{\lambda}{X-a}$  dans la décomposition en éléments simples de  $F$  est tel que :

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

**Démonstration** D'après le théorème précédent, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  une fraction rationnelle  $G \in \mathbb{C}(X)$  n'admettant pas  $a$  comme pôle tels que :

$$F = \frac{\lambda}{X-a} + G$$

En multipliant par  $X - a$ , on obtient :

$$(X - a) \frac{P}{Q} = \lambda + (X - a)G \quad \text{i.e.} \quad \frac{P}{\frac{Q-Q(a)}{X-a}} = \lambda + (X - a)G$$

On sait que  $Q'(a) \neq 0$  (puisque  $a$  est un pôle simple de  $F$ ) donc, en faisant tendre  $X$  vers  $a$ , on obtient bien l'égalité  $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$ . ■

 **Exercice** Décomposer  $F = \frac{X}{(X-1)(X-2)}$  sur  $\mathbb{C}$ .

**Solution.** On sait qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  tels que :

$$F = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2}$$

On propose ensuite deux méthodes pour trouver  $\lambda$  et  $\mu$ .

★ **Première méthode.**

En multipliant par  $(X-1)$ , on a :

$$(X-1)F = \frac{X}{X-2} = \lambda + \mu \frac{X-1}{X-2}$$

En évaluant ensuite en 1, on obtient  $\lambda = -1$ . En multipliant  $F$  par  $X-2$  et en évaluant en 2, on trouve que  $\mu = 2$ .

★ **Deuxième méthode.**

Comme 1 et 2 sont des pôles simples de  $F$ , on sait que  $\lambda = \frac{P(1)}{Q'(1)}$  et  $\mu = \frac{P(2)}{Q'(2)}$  où  $P = X$  et  $Q = (X-1)(X-2)$ . Par simple calcul, on obtient  $\lambda = -1$  et  $\mu = 2$ .

Voyons maintenant un exemple avec un pôle multiple.

**Exemple** Considérons la fraction rationnelle  $F = \frac{X}{(X-1)(X-2)^2}$ . Celle-ci est de degré  $-2$  (donc la partie entière est nulle) avec un pôle simple et un pôle double. On sait qu'il existe  $\lambda, \mu, \theta \in \mathbb{C}$  tels que :

$$F = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2} + \frac{\theta}{(X-2)^2}$$

- ★ L'une des méthodes vues plus haut permet de trouver le coefficient relatif au pôle simple ; on obtient  $\lambda = 1$ .
- ★ Ensuite, en multipliant la fraction rationnelle par  $(X-2)^2$  et en évaluant en 2, on obtient  $\theta = \frac{2}{2-1} = 2$ .
- ★ Pour obtenir  $\mu$ , on peut par exemple évaluer en 0. On obtient  $\mu = -1$ . On peut aussi multiplier  $F$  par  $X$  puis faire tendre  $X$  vers  $+\infty$ . Avec cette seconde méthode, on obtient :

$$0 = \lambda + \mu \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mu = -1$$

**(b) Le cas réel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )**

**Théorème (décomposition en éléments simples, cas réel)** Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$  (où  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X]$ ) une fraction rationnelle telle que :

$$Q = C_Q \prod_{\ell=1}^n (X - a_\ell)^{\alpha_\ell} \prod_{\ell=1}^m (X^2 + p_\ell X + q_\ell)^{\beta_\ell}$$

la décomposition en produit de facteurs irréductibles de  $Q$  sur  $\mathbb{R}$ , où :

- ★  $C_Q \in \mathbb{R}^*$  est le coefficient dominant de  $Q$  ;
- ★ les  $\alpha_\ell, \beta_\ell$  sont des entiers naturels non nuls ;
- ★ les  $a_\ell, p_\ell, q_\ell$  sont des nombres réels tels que  $p_\ell^2 - 4q_\ell < 0$ .

Alors on peut décomposer  $F$  de manière unique sous la forme :

$$F = E(F) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - a_i)^j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\mu_{i,j}X + \nu_{i,j}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j},$$

les  $\lambda_{i,j}, \mu_{i,j}$  et  $\nu_{i,j}$  étant des nombres réels.

**Exemple** Si  $F = \frac{X^3 + 4}{(X - 1)^2(X^2 + X + 1)^2}$ , alors  $E(F) = 0_{\mathbb{R}[X]}$  (car  $\deg(F) = -3 < 0$ ) et il existe un unique  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^6$  tel que :

$$F = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2 + X + 1} + \frac{\lambda X + \mu}{(X^2 + X + 1)^2}$$

 **Exercice** Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  la fraction rationnelle :

$$F = \frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{(X - 1)(X^2 + X + 1)}$$

**Solution.** On a  $E(F) = 0_{\mathbb{R}[X]}$  (car  $\deg(F) = -3 < 0$ ). On sait qu'il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que :

$$F = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + X + 1}$$

★ En multipliant par  $X - 1$  et en évaluant en 1, on trouve que  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

★ En multipliant par  $X$  puis en faisant tendre  $X$  vers  $+\infty$ , on obtient  $\beta = -\frac{1}{3}$ .

★ En évaluant enfin en 0, on obtient  $\gamma = -\frac{2}{3}$ .

Finalement :

$$\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3(X - 1)} - \frac{X + 2}{3(X^2 + X + 1)}$$

### 3) Dérivée logarithmique

**Remarque :** si  $n \in \mathbb{N}^*$  et si  $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ , alors on peut montrer par récurrence que :

$$(u_1 \dots u_n)' = \sum_{i=1}^n u_i' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n u_j$$

Cette formule nous sera utile pour démontrer le résultat suivant.

**Proposition (dérivée logarithmique)** Soit  $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$ . Il existe  $C_P \in \mathbb{C}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n$  des nombres complexes deux à deux distincts et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$  tels que :

$$P = C_P \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{\alpha_i}$$

Alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{X - a_i}$$

**Démonstration** On a :

$$P' = C_P \sum_{i=1}^n \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)^{\alpha_j} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{X - a_i} \right) P,$$

d'où la décomposition annoncée. ■

**Remarque :** formellement, cela revient à écrire

$$\ll \ln(P) = \ln(C_P) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln(X - a_i) \gg$$

et à dériver, d'où l'intitulé « dérivée logarithmique ».

**Exemple** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Alors :

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

En effet, en posant  $P = X^n - 1$ , on sait que  $P = \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)$  et  $P' = nX^{n-1}$ .

### III – Applications

#### 1) Intégration de fonctions rationnelles

Pour déterminer une primitive d'une fonction rationnelle, on commencera par décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  la fonction. Il s'agit ensuite d'intégrer chaque élément simple, à savoir chaque fonction

$f : t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n}$  où  $a \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

★ Si  $n \geq 2$ , alors une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  est  $F : t \mapsto -\frac{1}{(n-1)(t-a)^{n-1}}$

★ Supposons maintenant que  $n = 1$ .


— Si  $a \in \mathbb{R}$ , alors une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  est  $F : t \mapsto \ln(|t-a|)$ .

— Si  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , alors il existe  $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  tel que  $a = p + iq$  et donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) &= \frac{1}{t - p - iq} = \frac{t - p + iq}{(t - p)^2 + q^2} \\ &= \frac{t - p}{(t - p)^2 + q^2} + i \frac{\frac{1}{q}}{\left(\frac{t-p}{q}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est donc :

$$F : t \mapsto \frac{\ln((t-p)^2 + q^2)}{2} + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-p}{q}\right)$$

 **Exercice** Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{t^2 - 1} dt$ .

**Solution.** On a :

$$\frac{X^3}{X^2 - 1} = \frac{X(X^2 - 1) + X}{X^2 - 1} = X + \underbrace{\frac{X}{X^2 - 1}}_{\text{notée } G}$$

On sait qu'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $G = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1}$  et on trouve que  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . Ainsi :

$$I = \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{\ln(1-t)}{2} + \frac{\ln(t+1)}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3) - \ln(2)}{2} = \frac{1}{8} - \ln(2) + \frac{\ln(3)}{2}$$

## 2) Calcul de dérivées successives de fonctions rationnelles

Pour calculer les dérivées successives d'une fonction rationnelle  $f$ , on commence par décomposer  $f$  en élément simples sur  $\mathbb{C}$ . Il s'agit ensuite de savoir calculer les dérivées de  $f : x \mapsto \frac{1}{(x+a)^n}$  où  $a \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

  **Exercice** Calculer les dérivées successives de  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ .

**Solution.** La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  (en tant que fonction rationnelle) et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

En notant  $f_\pm$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x \pm 1}$ , on conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad (f_\pm)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x \pm 1)^{n+1}},$$

ce que l'on vérifie ensuite par récurrence. On conclut alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left( \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$$