Matrices et systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p, q, r sont des entiers naturels non nuls.

I – Généralités

1) Notion de matrice

Définition (matrice) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

- ⋆ On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute application :

$$M : [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$$

- ⋆ L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Notation : nous représenterons une matrice sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes ; pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, le coefficient situé en ligne i et en colonne j du tableau correspondra à la valeur $M(i, j)$.

Exemple La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \qquad \text{aussi notée} \qquad M = \begin{bmatrix} ,1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est telle que $M(1, 3) = 3$.

Remarque : si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice, les coefficients seront notés $m_{i,j}$ (au lieu de $M(i, j)$) et on écrira $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

✎✎✎ **Exercice** Expliciter la matrice $M = (i + j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$.

Vocabulaire :

- ⋆ On appelle *matrice nulle*, notée $0_{n,p}$, l'élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls (on la note simplement 0_n si $n = p$).
- ⋆ Lorsque $n = p$, on parle de matrice *carrée*. L'ensemble des matrices carrées à n lignes est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *diagonale* d'une matrice carrée, la données des coefficients $m_{k,k}$ où $k \in [\![1, n]\!]$.
- ⋆ Tout élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelé une *matrice colonne*.
- ⋆ Tout élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelé une *matrice ligne*.
- ⋆ Soit $D = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que D est une matrice diagonale si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad i \neq j \implies d_{i,j} = 0$$

Une telle matrice est donc de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & d_2 & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & d_n \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

- ⋆ On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une *matrice scalaire* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$A = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \lambda & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}$$

En particulier, on appelle matrice *identité*, notée I_n, la matrice scalaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux valent 1, *i.e.* :

$$I_n = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}})$$

- ⋆ On dit que $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad i > j \implies t_{i,j} = 0$$

- ⋆ On définit de la même manière la notion de matrice triangulaire inférieure.

Remarque : les matrices qui sont triangulaires inférieures et supérieures sont les matrices diagonales.

2) Combinaison linéaire de matrices de mêmes tailles

On définit deux lois de composition dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de la manière suivante.

- ⋆ **somme de deux matrices**
  Soient $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $N = (n_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $M + N$ par :

$$M + N = (m_{i,j} + n_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

  La loi $+$ ainsi définie est une loi de composition interne dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui est associative, commutative et qui admet la matrice nulle comme élément neutre.

- ⋆ **multiplication d'une matrice par un scalaire**
  Soient $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en posant :

$$\lambda M = (\lambda m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque : toute matrice de la forme $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \cdots + \lambda_\ell M_\ell$ où $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{K}$ et $M_1, \dots, M_\ell \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée *combinaison linéaire* des matrices $M_1, \dots, M_\ell$.

3) Matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition (symbole de Kronecker) Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarques :

- ⋆ $\forall a, b \in \mathbb{N},\ \delta_{a,b} = \delta_{b,a}$
- ⋆ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N},\ \delta_{a,b}\delta_{c,d} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \text{ et } c = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Définition (matrice élémentaire) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On appelle matrice élémentaire d'indices i et j la matrice $E_{i,j}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $E_{i,j} = \left(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant p}}$.

Par exemple, les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ sont :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Proposition (les matrices élémentaires engendrent $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) Tout élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'exprime comme combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors on a clairement l'égalité :

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}E_{i,j},$$

d'où le résultat. ■

4) Produit matriciel

Définition (produit matriciel) Soient :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

On appelle *produit de A par B* la matrice $AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Remarque : pour calculer le produit matriciel AB, il faut que ce produit soit *compatible* (le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B).

Exemple On a :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Proposition (produit de deux matrices élémentaires) Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ et $(k,\ell) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$. Alors :

$$\underbrace{E_{i,j}^{(n,p)}}_{n\times p}\underbrace{E_{k,\ell}^{(p,q)}}_{p\times q} = \delta_{j,k}\underbrace{E_{i,\ell}^{(n,q)}}_{n\times q}$$

Démonstration Posons $E_{i,j}^{(n,p)}E_{k,\ell}^{(p,q)} = (c_{a,b})_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\ 1\leqslant b\leqslant q}}$. Soit $(a,b)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$. Le coefficient $c_{a,b}$ est égal à :

$$c_{a,b} = \sum_{c=1}^{p} (E_{i,j}^{(n,p)})_{a,c}(E_{k,\ell}^{(p,q)})_{c,b} = \sum_{c=1}^{p} \delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{k,c}\delta_{\ell,b} = \delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\sum_{c=1}^{p}\delta_{j,c}\delta_{k,c}$$

puisque $E_{i,j}^{(n,p)} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant p}}$ et $E_{k,\ell}^{(p,q)} = (\delta_{k,\alpha}\delta_{\ell,\beta})_{\substack{1\leqslant \alpha\leqslant p\\ 1\leqslant \beta\leqslant q}}$. On distingue deux cas.

- ⋆ **Premier cas :** $j\neq k$
  Pour tout $c\in[\![1,p]\!]$, on a $\delta_{j,c}\delta_{k,c}=0$ (car l'un des deux symboles de Kronecker est nul) et alors $c_{a,b}=0$.
- ⋆ **Deuxième cas :** $j=k$
  Alors $\displaystyle\sum_{c=1}^{q}\delta_{j,c}\delta_{j,c} = \delta_{j,j}\delta_{j,j} = 1$ et alors $c_{a,b}=\delta_{i,a}\delta_{\ell,b}$.

On en déduit que $c_{a,b}=\delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\delta_{j,k}$. Comme $\delta_{i,a}\delta_{\ell,b} = (E_{i,\ell}^{(n,q)})_{a,b}$ donc on a bien l'égalité $E_{i,j}E_{k,\ell}=\delta_{j,k}E_{i,\ell}$. ■

Proposition (propriétés algébriques du produit matriciel) Le produit matriciel est :

- ⋆ associatif, *i.e.* :

$$\forall (A,B,C)\in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})\times\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\qquad (AB)C = A(BC)$$

- ⋆ *bilinéaire*, *i.e.* : pour tous $A,B\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C,D\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$,

$$(\lambda A+\mu B)C = \lambda AC+\mu BC \qquad \text{et} \qquad B(\lambda C+\mu D) = \lambda BC+\mu BD$$

- ⋆ la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication :

$$\forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\qquad I_nA = AI_p = A$$

Démonstration ⋆ Soit $(A,B,C)\in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})\times\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On pose :

$$A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant p}}\qquad B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant q}}\qquad\text{et}\qquad C=(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant r}}$$

Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\big((AB)C\big)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{q}(AB)_{i,\ell}c_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,\ell}\right)c_{\ell,j} &= \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,\ell}c_{\ell,j}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q}a_{i,k}b_{k,\ell}c_{\ell,j}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{q}b_{k,\ell}c_{\ell,j}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{q}a_{i,k}(BC)_{k,j}\\ &= \big(A(BC)\big)_{i,j},\end{aligned}$$

ce qui démontre l'associativité du produit matriciel.

⋆ Avec des notations naturelles, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda A+\mu B)C=(\lambda a_{i,j}+\mu b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\times(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}&=\left(\sum_{k=1}^{p}(\lambda a_{i,k}+\mu b_{i,k})c_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}\\&=\left(\lambda\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}c_{k,j}+\mu\sum_{k=1}^{p}b_{i,k}c_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}\\&=\lambda\left(\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}c_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}+\mu\left(\sum_{k=1}^{p}b_{i,k}c_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}\\&=\lambda AC+\mu BC\end{aligned}$$

La deuxième identité se démontre de manière analogue.

⋆ Comme $I_n=(\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$:

$$(AI_p)_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}\delta_{k,j}=a_{i,j}$$

Autrement dit, $AI_p=A$. On démontre la deuxième identité de la même manière. ■

Remarque : le produit matriciel n'est pas commutatif. Par exemple :

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

Proposition (effet d'une multiplication par une matrice ligne/colonne) Pour tout entier $j\in[\![1,p]\!]$, on note X_j la matrice colonne à p lignes dont le j^{e} coefficient vaut 1, les autres coefficients étant nuls. Autrement dit :

$$X_j=\begin{pmatrix}\delta_{1,j}\\\delta_{2,j}\\\vdots\\\delta_{p,j}\end{pmatrix}$$

Soit $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1,\dots,C_p\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ les matrices colonnes de A.

⋆ Pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, on a l'égalité $AX_j=C_j$.

⋆ Plus généralement, pour tout $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (*matrice colonne*), on a l'égalité :

$$AX=\sum_{j=1}^{p}x_jC_j\qquad\text{(ainsi, } AX \text{ est une combinaison linéaire des colonnes de } A\text{)}$$

⋆ Pour tout $Y=\begin{pmatrix}y_1&\dots&y_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ (*matrice ligne*), on a l'égalité :

$$YA=\sum_{i=1}^{n}y_iL_i,$$

en notant $L_1,\dots,L_n$ les matrices lignes de A.

Démonstration Posons $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

⋆ Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Il est clair que $AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$(AX_j)_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\delta_{k,j} = a_{i,j}$$

Donc $AX_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} = C_j$ (j^{e} colonne de A).

⋆ Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors $X = \sum_{j=1}^{p} x_j X_j$ puis, par bilinéarité du produit matriciel :

$$AX = \sum_{j=1}^{p} x_j AX_j = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j$$

en utilisant le point précédent le premier point.

⋆ On démontre de la même manière cette identité. ■

Exemple Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ et si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors :

$$AX = \begin{pmatrix} a+2b+3c \\ d+2e+3f \\ g+2h+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

5) Transposition

Définition (transposée) Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée* de A l'élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, noté A^{T}, dont le coefficient situé en ligne $i \in [\![1,p]\!]$ et en colonne $j \in [\![1,n]\!]$ est $a_{j,i}$. Autrement dit :

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemple ⋆ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

⋆ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 42 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$

Proposition (propriétés de la transposition) Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

⋆ $(\lambda A + \mu B)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}}$ (*linéarité de la transposition*) ;

⋆ $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$ (la transposition est dite *involutive*) ;

⋆ $(AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Démonstration Posons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.

- ⋆ On a :

$$\begin{aligned}(\lambda A+\mu B)^{\mathrm{T}} = \Big((\lambda a_{i,j}+\mu b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\Big)^{\mathrm{T}} &= (\lambda a_{j,i}+\mu b_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} \qquad \text{(définition de la transposition)}\\ &= \lambda (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} + \mu (b_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}\\ &= \lambda A^{\mathrm{T}} + \mu B^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

  à nouveau par définition de la transposition.
- ⋆ C'est immédiat.
- ⋆ Par définition du produit matriciel, on a :

$$(AC)^{\mathrm{T}} = \left[\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}c_{k,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}\right]^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{j,k}c_{k,i}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant n}} = \left(\sum_{k=1}^{p} c_{k,i}a_{j,k}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant n}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

  car $C^{\mathrm{T}} = (c_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $A^{\mathrm{T}} = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$. ■

Définition (matrice symétrique, matrice antisymétrique) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (matrice carrée). On dit que :

- ⋆ A est une matrice *symétrique* si $A^{\mathrm{T}} = A$;
- ⋆ A est une matrice *antisymétrique* si $A^{\mathrm{T}} = -A$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

Remarques :

- ⋆ Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si et seulement si :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \qquad a_{i,j} = a_{j,i}$$

- ⋆ Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \qquad a_{i,j} = -a_{j,i}$$

  Ceci implique que les coefficients diagonaux de A sont nuls.
- ⋆ Toute combinaison linéaire de matrices symétriques (respectivement antisymétriques) est une matrice symétrique (respectivement antisymétrique).

Exemple ⋆ Toute matrice diagonale (par exemple I_n) est symétrique.

- ⋆ La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ est antisymétrique.
- ⋆ La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -4\\ -3 & 4 & \boxed{1}\end{pmatrix}$ n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

II – L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On ne considère dans cette partie que des matrices carrées.

1) Structure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème Le triplet $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, il est non commutatif si $n \geqslant 2$. Les éléments neutres sont :

- ⋆ 0_n pour l'addition ;
- ⋆ I_n pour la multiplication.

Démonstration Tout d'abord, $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien car :

- ⋆ l'addition matricielle est une loi de composition interne sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
- ⋆ l'addition est associative et commutative ;
- ⋆ 0_n est élément neutre pour cette loi ;
- ⋆ tout élément M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet un inverse pour l'addition (à savoir $-M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

Par ailleurs :

- ⋆ la multiplication matricielle est une loi de composition interne sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
- ⋆ la multiplication est associative (et elle n'est pas commutative si $n \geqslant 2$) ;
- ⋆ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $I_n M = M I_n = M$;
- ⋆ la multiplication est distributive par rapport à l'addition (cas particulier de la propriété de bilinéarité du produit matriciel). ■

2) Pathologies de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

(a) Il est non intègre

On rappelle la définition de l'intégrité.

Définition (intégrité) Soit $(A, +, \times)$ un anneau (d'élément neutre noté 0_A). On dit que A est *intègre* si :

$$\forall a, b \in A, \qquad a \times b = 0_A \implies a = 0_A \text{ ou } b = 0_A$$

Si $n \geqslant 2$, l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

Remarque : on dit que les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ sont des *diviseurs de zéro.*

(b) Existence d'éléments nilpotents

Définition (matrice nilpotente) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$A^k = 0_n$$

Remarques :

- ⋆ La matrice nulle est une matrice nilpotente (dans la définition, $k = 1 \in \mathbb{N}^*$) convient.
- ⋆ Dans un anneau intègre, on ne peut pas trouver d'élément non nul qui soit nilpotent.

Si $n \geqslant 2$, on peut trouver des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont nilpotentes et non nulles.

Exemple La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est non nulle mais $A^2 = 0_2$. Donc A est une matrice nilpotente.

3) Identités remarquables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Les deux formules suivantes, bien connues dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, ont été vues dans un anneau quelconque.

Proposition Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent (*i.e.* sont telles que $AB = BA$).

- ⋆ **Formule du binôme de Newton :**

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

- ⋆ **Formule de factorisation :**

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$$

Démonstration Nous l'avons démontré dans le cas d'un anneau $(A, +, \times)$ quelconque (*cf.* chapitre 11). ■

Remarque : dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices scalaires (*i.e.* de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$) commutent avec tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad A(\lambda I_n) = \lambda A I_n = \lambda A \qquad \text{(et, de la même façon, } I_n A = A\text{)}$$

✎✎✎ **Exercice** Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (*i.e.* calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$).

Une solution. En posant $D = 3I_3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a l'égalité $A = D + N$. Les matrices D et N commutent car D est une matrice scalaire. De plus, $N^2 = 0_3$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \qquad N^k = N^2 N^{k-2} = 0_3 N^{k-2} = 0_3$$

Pour tout entier naturel p, on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k D^{p-k} = D^p + pND^{p-1} &= 3^p I_3 + p3^{p-1} N \\ &= 3^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + p3^{p-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^p & 0 & p3^{p-1} \\ 0 & 3^p & 0 \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4) Parties stables par produit

On note :

- ⋆ $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et n colonnes ;
- ⋆ $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et n colonnes ;

- ⋆ $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et n colonnes.

Remarque : si $A \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, alors $A^{\mathrm{T}} \in \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$. De même, si $A \in \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, alors $A^{\mathrm{T}} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Cette remarque va nous être utile pour démontrer le résultat de stabilité suivant.

Proposition ⋆ Les ensembles $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par produits, *i.e.* :

$$(\forall A, B \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}),\ AB \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})) \qquad \text{et} \qquad (\forall A, B \in \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}),\ AB \in \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}))$$

⋆ De même, $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit et :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}, \qquad \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

et :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^p = \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$$

Démonstration ⋆ Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i > j$. On veut montrer que $(AB)_{i,j} = 0$. On a :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0} = 0 \qquad (\text{car } A, B \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}))$$

⋆ Soient $A, B \in \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$. D'après la remarque qui précède, on a $A^{\mathrm{T}}, B^{\mathrm{T}} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. D'après le point précédent, on a $B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$, *i.e.* $(AB) \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. Par conséquent :

$$AB = \left((AB)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$$

⋆ Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$. On pose :

$$D_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k} \qquad \text{et} \qquad D_\mu = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell E_{\ell,\ell}$$

Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$D_\lambda D_\mu = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_k \mu_\ell \underbrace{E_{k,k} E_{\ell,\ell}}_{=\delta_{k,\ell} E_{k,\ell}}}_{=\lambda_k \mu_k E_{k,k}} = \operatorname{diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

5) Groupe linéaire

On rappelle que, si $(A, +, \times)$ est un anneau, le groupe des éléments inversibles de A, noté $A^\times$, est :

$$A^\times = \left\{ a \in A \,\middle|\, \exists b \in A,\ a \times b = b \times a = 1_A \right\}$$

Nous nous intéressons dans cette partie (et dans une bonne partie du reste du chapitre) à l'étude du groupe des éléments inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition/définition (matrice inversible) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- ⋆ On dit que la matrice A est *inversible* (pour la multiplication matricielle) s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.
- ⋆ Si A est inversible, alors la matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$ est uniquement déterminée ; on l'appelle matrice inverse de A, et elle est notée A^{-1}.

Démonstration Nous avons déjà démontré l'unicité dans le chapitre 11. Réécrivons la démonstration : si $B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices telles que $AB = BA = AC = CA = I_n$, alors (par associativité du produit matriciel) :

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C,$$

d'où l'unicité. ■

Exemple ⋆ La matrice I_n est inversible d'inverse $I_n^{-1} = I_n$ car $I_n^2 = I_n$.

⋆ La matrice 0_n n'est pas inversible car, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $0_n B = 0_n \neq I_n$.

⋆ La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible d'inverse $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Définition (groupe linéaire) Le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est appelé groupe linéaire et il est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &= \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^\times \\ &= \left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA = I_n \right\} \end{aligned}$$

Exemple ⋆ $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;

⋆ $0_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;

⋆ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition (propriétés de l'inverse) Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- ⋆ A^{-1} est inversible d'inverse $(A^{-1})^{-1} = A$;
- ⋆ la matrice AB est inversible d'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- ⋆ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la matrice A^k est inversible d'inverse $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
- ⋆ la matrice A^{T} est inversible d'inverse $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Démonstration Les trois premières propriétés ont été démontrées dans le chapitre 11. Démontrons la dernière propriété. On a (en utilisant la formule donnant la transposée d'un produit) :

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = I_n^{\mathrm{T}} = I_n$$

De la même manière, on a $(A^{-1})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = I_n$. La matrice A^{T} est donc inversible d'inverse $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$. ■

6) Étude du groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$

Proposition/définition (description de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant* de A, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, le scalaire défini par :

$$\det(A) = ad - bc \in \mathbb{K}$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et, dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration Tout d'abord :

$$A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A = (ad-bc)I_2 \qquad (*)$$

et on vérifie qu'on a aussi $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A = (ad-bc)I_2$.

- ⋆ Si $ad-bc \neq 0$, alors (en divisant par $ad-bc$ dans les égalités précédentes et en utilisant la bilinéarité du produit matriciel) A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- ⋆ Supposons maintenant que A soit inversible. Par l'absurde, si $ad-bc=0$, alors en multipliant par A^{-1} dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}0_2 = 0_2$$

Par conséquent, $a=b=c=d=0$, *i.e.* $A=0_2$. Ceci est absurde car la matrice A est supposée inversible. Par conséquent, $\det(A)\neq 0$. ■

Exemple La matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible car $\det(A)=-2$. De plus, $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

III – Systèmes linéaires

1) Définitions

Définition (systèmes linéaires) Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$. On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues $x_1,\dots x_p$, à coefficients dans* $\mathbb{K}$ tout système $(\mathscr{S})$ de la forme :

$$(\mathscr{S})\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- Les nombres $a_{i,j}\in\mathbb{K}$ sont appelés les coefficients du système ;
- les nombres $b_1,\dots,b_n$ constituent ce qu'on appelle le second membre du système ;
- si $p=n$, alors on dit que le système est carré ;
- la i^{e} équation du système ou i^{e} ligne du système (pour $i\in[\![1,n]\!]$), notée L_i, est l'équation

$$\mathrm{L}_i : a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \dots + a_{i,p}\,x_p = b_p$$

- le système $(\mathscr{S})$ est dit *homogène* si tous les nombres b_i sont nuls $(\forall i\in[\![1,n]\!],\ b_i=0)$;
- le système est dit *compatible* s'il admet au moins une solution ;
- une *solution du système* est un p-uplet $(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{K}^p$ vérifiant chacune des n équations du système ;
- *résoudre le système* $(\mathscr{S})$, c'est trouver l'ensemble de toutes les solutions du système.

Exemple ⋆ Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$ est un système linéaire à deux équations et deux inconnues, que l'on peut interpréter géométriquement comme le lieu des points d'intersection de deux droites dans le plan.

⋆ Le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$ est un système linéaire à deux équations et trois inconnues, que l'on peut interpréter géométriquement comme le lieu des points d'intersection de deux plans dans l'espace

2) Systèmes échelonnés

Les systèmes les plus simples à résoudre sont ceux qui sont échelonnés.

Définition (système échelonné) On appelle système linéaire échelonné à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout système de la forme :

$$(\mathscr{E})\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{1,j_1}\,x_{j_1} & + & \cdots & \cdots & \cdots\;\cdots & + & \alpha_{1,p}\,x_p & = & \beta_1 \\ & & \alpha_{2,j_2}\,x_{j_2} & + & \cdots\;\cdots & + & \alpha_{2,p}\,x_p & = & \beta_2 \\ & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & \alpha_{r,j_r}\,x_{j_r} & + \;\cdots & + & \alpha_{r,p}\,x_p & = & \beta_r \\ & & & & & & 0 & = & \beta_{r+1} \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 0 & = & \beta_n \end{array}\right.$$

où $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$ et les $\alpha_{i,j}$ et β_i appartenant à $\mathbb{K}$.

Remarques :

- ⋆ Les dernières équations $(\mathrm{L}_{r+1}, \ldots, \mathrm{L}_n)$ sont appelées des *équations de compatibilité* ; le système est compatible si et seulement si ces équations sont satisfaites.
- ⋆ Lorsqu'il est compatible, on résout un tel système par la technique de la *remontée* : les inconnues, dites *principales* sont ici $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$.
- ⋆ On exprime celles-ci, en partant de la dernière équation, en fonction des autres inconnues s'il y en a (qui sont quant à elles qualifiées de *secondaires*).

Exemple Résoudre le système échelonné :

$$(\mathscr{E})\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

3) Algorithme du pivot de Gauss

Pour résoudre un système linéaire, on utilisera la *méthode du pivot de Gauss*. Pour cela, nous ferons des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Définition On appelle opération élémentaire :

- l'échange de deux lignes L_i et L_j du système, opération notée $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$;
- la multiplication d'une ligne L_i par un scalaire non nul $\alpha \in \mathbb{K}^*$, opération notée $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\,\mathrm{L}_i$;
- l'ajout d'une ligne L_j à la ligne L_i, opération notée $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \mathrm{L}_j$.

Remarque : en effectuant des opérations opérations élémentaires sur les lignes du système, on conserve l'équivalence entre les systèmes. L'objectif est d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système pour obtenir un système, équivalent au système $(\mathscr{S})$ initial et qui est *échelonné*, c'est-à-dire de la forme :

Description de l'algorithme du privot de Gauss : (*repartons du système* $(\mathscr{S})$)

- ⋆ Supposons que $a_{1,1} \neq 0$. Sur chaque ligne $\mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_n$, on effectue l'opération élémentaire :
$$\mathrm{L}_k \leftarrow \mathrm{L}_k - \frac{a_{k,1}}{a_{k,k}} \mathrm{L}_k \qquad (\text{où } k \in [\![2, n]\!])$$
Ceci a pour effet d'éliminer l'inconnue x_1 sur les lignes $\mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_n$.
- ⋆ On poursuit le procédé pour éliminer x_2 sur les lignes $\mathrm{L}_3, \ldots, \mathrm{L}_n$.

On obtient à la fin du processus un système échelonné équivalent au premier système.

Exemple Résoudre les systèmes :

$$(\mathscr{S}_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & 3z & = & 3 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad (\mathscr{S}_2) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & 3z & = & 2 \end{array} \right.$$

IV – Calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée

1) Interprétation matricielle d'un système linéaire

Le système $(\mathscr{S})$ de la première définition est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$ où :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

On dit que :

- ⋆ A est la *matrice du système* ;
- ⋆ B est le *second membre du système* ;
- ⋆ X est l'inconnue.

L'équation homogène associée au système est $AX = 0_{n,1}$ (notée $(\mathscr{H})$).

Exemple Le système linéaire $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 42 \end{array} \right.$ se réécrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 42 \end{pmatrix}}_{=B}$$

Remarque : le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Proposition (ensemble des solutions de $AX = B$) Si le système $AX = B$ est compatible, alors son ensemble de solutions est :

$$\mathrm{Sol}(\mathscr{S}) = \left\{ X_0 + X_H \,\middle|\, X_H \in \mathrm{Sol}(\mathscr{H}) \right\},$$

où X_0 est une solution particulière du système $AX = B$ et où on a noté $\mathrm{Sol}(\mathscr{S})$ et $\mathrm{Sol}(\mathscr{H})$ les ensembles de solutions de $(\mathscr{S})$ et $(\mathscr{H})$ respectivement.

Démonstration On raisonne par double inclusion. On note E l'ensemble de droite de la proposition.

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. En posant $X_H = X - X_0$, on a bien l'égalité $X = X_0 + X_H$ et X_H et un élément de $\mathrm{Sol}(\mathscr{S})$ car, par bilinéarité du produit matriciel,

$$AX_H = AX - AX_0 = B - B = 0_{n,1}$$

Ainsi, $X \in E$, d'où l'inclusion $\mathrm{Sol}(\mathscr{S}) \subset E$.

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in E$. Il existe $X_H \in \mathrm{Sol}(\mathscr{H})$ tel que $X = X_0 + X_H$. Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$AX = AX_0 + AX_H = B + 0_{n,1} = B$$

donc $X \in \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$. D'où l'inclusion $E \subset \mathrm{Sol}(\mathscr{S})$.

Ceci prouve l'égalité annoncée. ∎

2) Étude de l'inversibilité d'une matrice carrée

Définition (système de Cramer) Un système linéaire est appelée un *système de Cramer* si :

- ⋆ il est carré (*i.e.* admet autant d'équations que d'inconnues) ;
- ⋆ il admet une unique solution.

Exemple Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 3 \end{array}\right.$ est un système de Cramer.

La remarque suivante va nous permettre de démontrer le résultat suivant.

Remarque : soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices colonnes de B étant notées $X_1, \dots, X_n$, ce que l'on peut écrire $B = (X_1 \,|\, \dots \,|\, X_n)$. Alors AB est la matrice dont les colonnes sont $AX_1, \dots, AX_n$, *i.e.* $AB = (AX_1 \,|\, \dots \,|\, AX_n)$.

Démonstration Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

⋆ D'une part :

$$X_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} \qquad \text{donc (par définition du produit matriciel)} \qquad AX_j = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,j} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{2,k} b_{k,j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{n,k} b_{k,j} \end{pmatrix}$$

⋆ D'autre part, $AB = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ donc la j^{e} colonne de la matrice AB est :

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,j} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{2,k} b_{k,j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{n,k} b_{k,j} \end{pmatrix} = AX_j,$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

Le lien avec l'inversibilité est le suivant.

Proposition Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout second membre $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un système de Cramer.

Démonstration On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \qquad AX = Y \iff A^{-1}AX = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y$$

Le système $AX = Y$ admettant une unique solution, il s'agit bien d'un système de Cramer.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ est un système de Cramer. On veut montrer que A est inversible. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons Y_i la matrice colonne à n lignes dont le i^{e} coefficient vaut 1, les autres étant nuls ; par hypothèse, le système $AX = Y_i$ admet une unique solution que l'on note $X_i \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose alors $B = (X_1 \,|\, \dots \,|\, X_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. D'après la remarque précédente, on a :

$$AB = (AX_1 \,|\, \dots \,|\, AX_n) = (Y_1 \,|\, \dots \,|\, Y_n) = I_n$$

par définition de $Y_1, \dots, Y_n$. Il reste à montrer que $BA = I_n$. Or, par bilinéarité (et associativité) du produit matriciel, on a :

$$A(BA - I_n) = (AB)A - AI_n = I_nA - A = A - A = 0_n$$

En notant $Z_1, \dots, Z_n \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de la matrices $BA - I_n$, on a :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad AZ_j = 0_{n,1}$$

Or, chacun des systèmes ci-dessus admet pour solution $0_{n,1}$ (évident) et admet une unique solution par hypothèse. Par conséquent :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad Z_j = 0_{n,1},$$

et donc $BA - I_n = 0_n$, *i.e.* $BA = I_n$. On peut donc conclure que A est inversible (d'inverse B). ∎

Exemple Montrons que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculons A^{-1}.

Proposition (cas particulier) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff (\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_{k,k} \neq 0)$$

En particulier, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff (\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k \neq 0)$$

et, si D est inversible, alors :

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$$

Démonstration C'est une conséquence de l'algorithme du pivot de Gauss. ∎

3) Interprétation matricielle des opérations élémentaires

On souhaite ici comprendre ce qu'il se passe sur la matrice A lorsqu'on échelonne le système $(\mathscr{S})\ AX = B$ à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.

Rappel : pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, la matrice élémentaire $E_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{\ell,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Lemme Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, la matrice $E_{i,j} \times A$ est la matrice de taille $n \times p$ dont toutes les lignes sont nulles sauf la i^{e} qui est constituée de la j^{e} ligne de A.

Démonstration Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On sait que $A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell} \underbrace{E_{k,\ell}}_{n \times p}$ donc :

$$E_{i,j} A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell} \underbrace{E_{i,j}}_{n \times n} \underbrace{E_{k,\ell}}_{n \times p} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell} \delta_{j,k} \underbrace{E_{i,\ell}}_{n \times p} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{j,\ell} E_{i,\ell},$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

On introduit les nouvelles matrices (carrées cette fois) suivantes (où $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$) qui sont inversibles :

- ⋆ **matrice de dilatation :**

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{pour } \lambda \in \mathbb{K}^*)$$

- ⋆ **matrice de transvection :** $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$
- ⋆ **matrice de permutation :** $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$

Proposition Effectuer une opération élémentaire dans le système $(\mathscr{S})$ revient à multiplier A à gauche par l'une des matrices $D_i(\lambda)$, $T_{i,j}(\lambda)$ ou $P_{i,j}$. Plus précisément :

- ⋆ permuter L_i avec L_j dans $(\mathscr{S}$ nous donne le système $P_{i,j} AX = P_{i,j} B$;
- ⋆ multiplier L_i par $\lambda \, \mathrm{L}_i$ nous donne $D_i(\lambda) AX = D_i(\lambda) B$;
- ⋆ remplacer L_i par $L_i + \lambda L_j$ $(j \neq i)$ nous donne $T_{i,j}(\lambda) AX = T_{i,j}(\lambda) B$.

Démonstration Pour l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ par exemple, on a :

$$T_{i,j}(\lambda) A = (I_n + \lambda E_{i,j}) A = A + \lambda E_{i,j} A$$

On conclut avec le lemme. ■