

# LIMITES ET CONTINUITÉ

## I – Préambule : notion de voisinage

**Définition (voisinsages d'un point de  $\overline{\mathbb{R}}$ )** Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . On appelle *voisinage de  $a$*  tout ensemble de la forme :

- ★  $[a - \delta, a + \delta]$  où  $\delta > 0$  si  $a \in \mathbb{R}$  ;
- ★  $[M, +\infty[$  où  $M \in \mathbb{R}$  si  $a = +\infty$  ;
- ★  $]-\infty, M]$  où  $M \in \mathbb{R}$  si  $a = -\infty$ .

On note  $\mathcal{V}(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$ .

**Exemple** ★ Un voisinage de  $+\infty$  est  $\mathbb{R}_+^*$ . On a donc  $\mathbb{R}_+^* \in \mathcal{V}(+\infty)$ .

★ L'ensemble des voisinages de 0 est  $\mathcal{V}(0) = \{[-\varepsilon, \varepsilon] \mid \varepsilon > 0\}$ .

**Proposition** Soit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Alors :

- ★ l'intersection de deux voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$  ;
- ★  $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} V = \begin{cases} \{a\} & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$ .

**Démonstration** ★ Il suffit de faire une disjonction de cas suivant que  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \pm \infty$ . Par exemple, si  $a \in \mathbb{R}$  et si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux voisinages de  $a$ , alors il existe  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$  tels que :

$$V_1 = [a - \delta_1, a + \delta_1] \quad \text{et} \quad V_2 = [a - \delta_2, a + \delta_2]$$

En posant  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ , on a  $V_1 \cap V_2 = [a - \delta, a + \delta]$  qui est bien un voisinage de  $a$ . Si  $a = +\infty$ , et si  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(+\infty)$ , alors il existe  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $V_1 = [M_1, +\infty[$  et  $V_2 = [M_2, +\infty[$ . Alors  $V_1 \cap V_2 = [\max(M_1, M_2), +\infty[ \in \mathcal{V}(+\infty)$ . Le cas  $a = -\infty$  se traite de la même manière.

★ Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} V = \{a\}$  en raisonnant par double inclusion.

$\square$  Soit  $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} V$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ , ce qui implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x - a| \leq \frac{1}{n} \quad \text{i.e.} \quad a - \frac{1}{n} \leq x \leq a + \frac{1}{n}$$

Or  $a \pm \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$  donc le théorème des gendarmes entraîne que  $x = a$ .

$\square$  Pour tout voisinage  $V$  de  $a$ , on a  $a \in V$  par définition d'un voisinage de  $a$ . Donc on a bien l'inclusion  $\{a\} \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}(a)} V$ .

□ Supposons maintenant que  $a = +\infty$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que  $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(+\infty)} V \neq \emptyset$  et considérons  $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(+\infty)} V$ . Posons  $M = x + 1 > x$ . Alors  $x \notin [M, +\infty[$  alors que  $[M, +\infty[ \in \mathcal{V}(+\infty)$ , ce qui est absurde. Le cas  $a = -\infty$  se traite de la même manière. ■

**Proposition (séparation de  $\overline{\mathbb{R}}$ )** Soient  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $a \neq b$ . Alors il existe  $V \in \mathcal{V}(a)$  et  $W \in \mathcal{V}(b)$  tels que  $V \cap W = \emptyset$ .

**Remarque :** étant donnés deux points distincts de la droite réelle achevée  $\overline{\mathbb{R}}$ , on peut donc trouver deux voisinages de ces points qui ne se rencontrent pas. En topologie, on dit que  $\overline{\mathbb{R}}$  est un espace métrique *séparé*.

**Démonstration** On distingue plusieurs cas.

- ★ Si  $a$  et  $b$  sont des nombres réels, considérons  $\delta := \frac{|b - a|}{3} > 0$ . Il est alors clair que  $V = [a - \delta, a + \delta]$  et  $W = [b - \delta, b + \delta]$  sont des voisinages de  $a$  et  $b$  respectivement qui sont disjoints.
- ★ Si  $a \in \mathbb{R}$  et  $b = +\infty$ , alors  $[a - 1, a + 1]$  et  $[a + 2, +\infty[$  sont des voisinages de  $a$  et  $b$  respectivement qui sont disjoints.
- ★ Les autres cas se traitent de manière analogue. ■

**Définition (propriété vraie au voisinage d'un point de  $\overline{\mathbb{R}}$ )** Soient  $I$  un ensemble non vide et  $(\mathcal{P}(x))_{x \in I}$  une famille de propriétés. Soit encore  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . On dit que  $\mathcal{P}$  est vraie au voisinage de  $a$  si :

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V \cap I, \mathcal{P}(x)$$

- Exemple**
- ★ L'inégalité  $x^2 \leq 1$  est vraie au voisinage de 0 (dans le voisinage  $[-1, 1] \in \mathcal{V}(0)$  par exemple).
  - ★ L'inégalité  $\ln \leq 0$  est vraie au voisinage de  $\frac{1}{2}$  (il suffit en effet de considérer le voisinage  $[0, 1]$  dans la définition précédente).
  - ★ La fonction  $x \mapsto x^2$  est décroissante au voisinage de  $-\infty$  (elle l'est par exemple sur le voisinage  $]-\infty, 0]$  de  $+\infty$ ).

## II – Limite d'une fonction en un point

### 1) Définitions

**Définition (intérieur, adhérence)** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ . On appelle :

- ★ *intérieur* de  $I$  l'ensemble  $\overset{\circ}{I} = I \setminus \{a, b\} \subset \mathbb{R}$  ;
- ★ *adhérence* de  $I$  l'ensemble  $\overline{I} = I \cup \{a, b\} \subset \overline{\mathbb{R}}$ .

- Exemple**
- ★  $\overline{[0, 2[} = [0, 2], [0, 2[ = ]0, 2[$

$$\star \overline{[0, +\infty[} = [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}_+}, [0, +\infty[ \overset{\circ}{=} ]0, +\infty[$$

Dans toute la suite du paragraphe,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide (autrement dit,  $I = [a, b]$  ou  $I = ]a, b[$  ou  $I = ]a, b]$  ou  $I = [a, b[$ , avec  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a < b$ ) et  $f \in \mathbb{R}^I$ .

**Définition (les neuf cas possibles)** Soient  $a \in \overline{I}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

★ Si  $a, \ell \in \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$ , noté  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On peut aussi avoir les cas  $a = \pm \infty$  ou  $\ell = \pm \infty$ .

★  $a \in \mathbb{R}$  et  $\ell = +\infty$  :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq M$$

★  $a \in \mathbb{R}$  et  $\ell = -\infty$  :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies f(x) \leq M$$

★  $a = +\infty$  et  $\ell \in \mathbb{R}$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

★  $a = -\infty$  et  $\ell \in \mathbb{R}$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

★  $a = +\infty$  et  $\ell = -\infty$  :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq M \implies f(x) \leq m$$

★  $a = -\infty$  et  $\ell = +\infty$  :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq M \implies f(x) \geq m$$

★  $a = +\infty$  et  $\ell = +\infty$  :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq M \implies f(x) \geq m$$

★  $a = -\infty$  et  $\ell = -\infty$  :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq M \implies f(x) \leq m$$

**Exemple** On a  $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . En effet :

$$\forall M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq \ln(M) \implies e^x \geq M$$

par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ .

On peut unifier les définitions précédentes à l'aide de la notion abstraite de voisinage.

**Définition (avec les voisinages)** Soient  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ . On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap I) \subset V$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

**Remarques :**

★ L'assertion  $f(W \cap I) \subset V$  signifie :

$$\forall x \in W \cap I, \quad f(x) \in V$$

★ Pour tout  $W \in \mathcal{V}(a)$ , on a  $W \cap I \neq \emptyset$ .

★ En français : « pour tout voisinage  $V$  de  $\ell$ , si  $x$  est *suffisamment* proche de  $a$ , alors  $f(x)$  appartiendra à  $V$  ».

## 2) Premières propriétés

**Proposition (unicité de la limite)** Lorsqu'elle existe, la limite d'une fonction en un point (de  $\bar{I}$ ) est unique.

**Démonstration** Soit  $a \in \bar{I}$ . On suppose que  $f$  admet deux limites différentes  $\ell$  et  $\ell'$  en  $a$ , avec  $(\ell, \ell') \in (\bar{\mathbb{R}})^2$ . Soient  $V \in \mathcal{V}(\ell)$  et  $V' \in \mathcal{V}(\ell')$  tels que  $V \cap V' = \emptyset$  (ce qui est possible car  $\ell \neq \ell'$ ). Par définition de la limite, il existe deux voisinages  $W$  et  $W'$  de  $a$  tels que :

$$f(W \cap I) \subset V \quad \text{et} \quad f(W' \cap I) \subset V'$$

On a  $W \cap W' \cap I \subset W \cap I$  donc :

$$f(W \cap W' \cap I) \subset f(W \cap I) \subset V \quad \text{et, de même,} \quad f(W \cap W' \cap I) \subset V'$$

Comme  $W \cap W'$  est un voisinage de  $a$ , on a  $W \cap W' \cap I \neq \emptyset$ . Considérons un élément  $x$  de  $W \cap W' \cap I$ . Alors  $f(x) \in V \cap V'$ . On en déduit que  $V \cap V' \neq \emptyset$ , ce qui est absurde. ■

**Proposition (limite finie et bornitude)** Soit  $a \in \bar{I}$ . Si  $f$  admet une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

**Démonstration** Notons  $\ell \in \mathbb{R}$  la limite de  $f$  en  $a$ . Considérons le voisinage  $V = [\ell - 1, \ell + 1]$  de  $\ell$ . Alors il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que  $f(W \cap I) \subset V$ . Donc :

$$\forall x \in W \cap I, \quad \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1,$$

ce qui prouve que  $f$  est bornée sur  $W \cap I$ . Autrement dit,  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ . ■

**Proposition (valeur de la limite en un point de  $I$ )** Soit  $a \in I$  (donc  $a \in \mathbb{R}$ ). Si  $f$  possède une limite en  $a$ , alors cette limite est finie et est égale à  $f(a)$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Démonstration** On suppose qu'il existe  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ . Alors :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap I) \subset V$$

Pour tout voisinage  $W$  de  $a$ , on a  $a \in W$  et  $a \in I$  donc  $a \in W \cap I$ , ce qui implique que  $f(a) \in V$ . Ainsi,  $f(a) \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(\ell)} V$ . Cette intersection est donc non vide, ce qui implique que  $\ell \in \mathbb{R}$  et que :

$$f(a) \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}(\ell)} V = \{\ell\},$$

c'est-à-dire  $f(a) = \ell$ . ■

**Proposition (limite nulle)** Soit  $a \in \overline{I}$ . Alors :

★  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0;$

★ si  $g$  est une fonction bornée au voisinage de  $a$  et si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , alors  $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

**Démonstration** ★ Il suffit d'écrire la définition.

★ La démonstration analogue à celle pour les suites. ■

**Exemple** On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$  car la fonction sinus est bornée sur  $\mathbb{R}$  et car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

### 3) Limite à gauche, limite à droite

La fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 0. En effet, si tel était le cas, et en notant  $\ell \in \mathbb{R}$  la limite de  $f$  en 0, alors :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{1}{2}$$

On a alors :

$$2 = |f(-\delta) - f(\delta)| \leq 2 \times \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde.

Pour cette fonction, on peut néanmoins étudier la limite à gauche en 0 (ou la limite à droite en 0).

**Définition (limite à gauche, limite à droite)** Soit  $a \in \overline{I}$  et  $f \in \mathbb{R}^I$ .

★ Si  $a \neq \inf(I)$ , on appelle *limite à gauche de  $f$  en  $a$* , si elle existe, la quantité notée  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , définie par :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{I \cap ]-\infty, a[}(x)$$

★ Si  $a \neq \sup(I)$ , on appelle *limite à droite de  $f$  en  $a$* , si elle existe, la quantité notée  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , définie par :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{I \cap ]a, +\infty[}(x)$$

**Exemple** ★ La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  admet une limite à droite en 0 égale à  $+\infty$ .

★ La fonction  $f$  de l'exemple précédent admet une limite à gauche en 0 (qui vaut  $-1$ ) et une limite à droite en 0 (qui vaut 1).

**Proposition** Soient  $a \in \overset{\circ}{I}$  et  $f \in \mathbb{R}^I$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ★  $f$  admet une limite en  $a$  ;
- ★  $f$  admet une limite à gauche et à droite en  $a$  qui sont égales à  $f(a)$ .

**Démonstration**  $\implies$  On sait que si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$ , avec  $a \in \overset{\circ}{I}$ , alors nécessairement  $\ell = f(a)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

En particulier :

$$\forall x \in I \cap ]-\infty, a[, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

donc  $f$  admet une limite à gauche en  $a$  qui vaut  $f(a)$ . De même,  $f$  admet une limite à droite en  $a$  qui vaut  $f(a)$ .

$\impliedby$  Supposons que  $f$  admette une limite à gauche et à droite en  $a$  toutes les deux égales à  $f(a)$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . On sait qu'il existe  $\delta > 0$  et  $\delta' > 0$  tel que :

$$\forall x \in I \cap ]-\infty, a[, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

et :

$$\forall x \in I \cap ]a, +\infty[, |x - a| \leq \delta' \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

En posant  $\alpha = \min(\delta, \delta') > 0$ , on a :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

et on peut remplacer  $I \setminus \{a\}$  par  $I$  dans cette proposition (puisque  $f(a) - f(a) = 0$ ). Donc  $f$  admet une limite en  $a$  (égale à  $f(a)$ ). ■

**Remarques :**

- ★ Il est important que les limites à gauche et à droite en  $a$  soient égales à  $f(a)$  pour assurer l'existence de la limite de  $f$  en  $a$  (cf. l'exemple précédent).
- ★ De même, si  $a \in \overset{\circ}{I}$  et si  $f \in \mathbb{R}^{I \setminus \{a\}}$ , alors  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$  si et seulement si :
  - $f$  admet une limite à gauche et à droite en  $a$  ;
  - et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

**Exemple** En considérant les limites à gauche et à droite, on obtient que  $\frac{1}{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ .

**Proposition (Théorème de la limite monotone)** On suppose que  $f \in \mathbb{R}^I$  est une fonction monotone. Alors :

- ★ en tout point de  $\overset{\circ}{I}$ ,  $f$  admet une limite à gauche et à droite ;
- ★  $f$  admet une limite à gauche au point  $\sup(I)$  ;
- ★  $f$  admet une limite à droite au point  $\inf(I)$ .

**Démonstration** Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on peut supposer que la fonction  $f$  est croissante. Soit  $a \in \overset{\circ}{I}$  et considérons l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{f(x) \mid x \leq a\}$$

L'ensemble  $\mathcal{E}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  qui est non vide (elle contient  $f(a)$ ) et majorée par  $f(a)$  (par croissance de  $f$  sur  $I$ ). D'après la propriété de la borne supérieure,  $\mathcal{E}$  admet donc une borne supérieure que l'on note  $M$ . Comme  $f(a)$  majore l'ensemble  $\mathcal{E}$ , on a nécessairement  $M \leq f(a)$ .

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , le nombre  $M - \varepsilon$  ne majore pas  $\mathcal{E}$  (puisque la borne supérieure est le plus petit majorant) donc il existe  $x_0 \in I$  tel que  $x_0 \leq a$  et  $f(x_0) > M - \varepsilon$ . Soit  $x \in [x_0, a]$ . Alors (par croissance de  $f$  sur  $I$ ) :

$$M - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq M$$

c'est-à-dire  $|f(x) - M| \leq \varepsilon$ . On en déduit que  $f$  admet une limite à gauche en  $a$  égale à  $M$ . On procède de manière analogue pour la limite à droite et pour les cas  $a = \sup(I)$  et  $a = \inf(I)$ . ■

#### 4) Caractérisation séquentielle de la limite

**Théorème (caractérisation séquentielle de la limite)** Soient  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ★  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  ;
- ★ pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , on a  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

**Démonstration** On effectue la démonstration dans le cas  $a \in \mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$  (les démonstrations dans les autres cas sont analogues en adaptant le voisinage).

$\Rightarrow$  Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$  une suite convergente de limite  $a$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  admet une limite en  $a \in \mathbb{R}$  égale à  $\ell \in \mathbb{R}$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

De plus, par définition de la convergence d'une suite,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \delta$$

Pour tout entier  $n \geq N$ , on a donc  $|f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$ . Ainsi,  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

$\Leftarrow$  On raisonne par contraposition. Supposons que  $f$  ne tende pas vers  $\ell$  en  $a$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall \delta > 0, \exists x_\delta \in I, |x_\delta - a| \leq \delta \text{ et } |f(x_\delta) - \ell| > \varepsilon$$

En choisissant  $\delta = \frac{1}{n}$  (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ), on trouve donc une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de points de  $I$  telle que  $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$ . Ainsi, la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $a$  et  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  ne converge pas vers  $\ell$ , d'où le résultat. ■

**Exemple** Ce résultat peut permettre de montrer qu'une fonction donnée n'admet pas de limite en un point. Considérons par exemple la fonction sin sur  $\mathbb{R}$ . Si cette fonction admettait une limite (notée  $\ell$ ) en  $+\infty$ , alors pour toute suite  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$ , on aurait  $\sin(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ . Les choix  $x_n = 2n\pi$  et  $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$  fournissent deux suites qui admettent deux limites différentes (à savoir 0 et 1), ce qui est absurde.

#### 5) Opérations sur les limites

Les propriétés suivantes sont analogues à celles vues sur les suites numériques.

**Proposition** Soient  $f, g \in \mathbb{R}^I$ ,  $a \in \bar{I}$  et  $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$  tels que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ . Alors on a les propriétés suivantes (à moins d'être dans un cas de forme indéterminée) :

- ★  $f(x) + \lambda g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell + \lambda \ell'$  ;
- ★  $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \ell'$  ;
- ★ si  $\ell \neq 0$ , alors  $f$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  et  $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{\ell}$ .

**Démonstration** Il suffit d'adapter la démonstration de la propriété analogue vue pour les suites. ■

**Proposition (composition des limites)** Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  (non vides et non réduit à des points),  $f \in \mathbb{R}^I$ ,  $g \in \mathbb{R}^J$ ,  $a \in \bar{I}$ ,  $b \in \bar{J}$  et  $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ . On suppose que :

- ★  $f(I) \subset J$  ;
- ★  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  ;
- ★  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell$  ;

Alors  $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

**Démonstration** Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ .

- ★ Comme  $g$  admet pour limite  $\ell$  en  $b$ , il existe un voisinage  $W$  de  $b$  tel que  $g(W \cap J) \subset V$ .
- ★ Ensuite,  $f$  admet pour limite  $b$  en  $a$  donc il existe un voisinage  $W'$  de  $a$  tel que  $f(W' \cap I) \subset W$ . On a aussi  $f(W' \cap I) \subset J$  (car  $f$  est à valeurs dans  $J$  par hypothèse) donc  $f(W' \cap I) \subset W \cap J$ .

Par conséquent :

$$(g \circ f)(W' \cap I) = g(f(W' \cap I)) \subset g(W \cap J) \subset V$$

Par définition de la limite, on a bien  $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ . ■

**Exemple** On a  $\sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

## 6) Limites et inégalités

**Proposition (passage à la limite dans des inégalités larges)** Soient  $f, g \in \mathbb{R}^I$ ,  $a \in \bar{I}$  et  $\ell, \ell' \in \bar{\mathbb{R}}$ . On suppose que  $f \leq g$  au voisinage de  $a$  (i.e. :  $\exists W \in \mathcal{V}(a)$ ,  $\forall x \in W \cap I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ ). Alors :

- ★  $\ell \leq \ell'$  ;
- ★ en particulier, si  $\ell = +\infty$  alors  $\ell' = +\infty$ , et si  $\ell' = -\infty$  alors  $\ell = -\infty$  (théorème de comparaison).

**Démonstration** On utilise la caractérisation séquentielle de la limite ainsi que le résultat sur le passage à la limite dans des inégalités pour les suites. Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$  une suite de points qui converge vers  $a$  (une telle suite existe d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure). Par hypothèse, il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que :

$$\forall x \in W \cap I, \quad f(x) \leq g(x)$$

Comme  $x$  admet pour limite  $a$  et puisque  $W$  est un voisinage de  $a$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad x_n \in W$$

Ainsi :

$$\forall n \geq n_0, \quad f(x_n) \leq g(x_n)$$

Par ailleurs, les suites  $(f(x_n))_{n \geq n_0}$  et  $(g(x_n))_{n \geq n_0}$  convergent vers  $\ell$  et  $\ell'$  respectivement d'après la caractérisation séquentielle de la limite. En appliquant le résultat sur le passage à la limite dans des inégalités larges pour les suites, on obtient l'inégalité  $\ell \leq \ell'$ . ■

**Exemple** On a  $x^2 - x \cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Proposition (théorème d'encadrement ou des gendarmes)** Soient  $f, g, h \in \mathbb{R}^I$  des fonctions,  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On suppose que :

- ★  $f \leq g \leq h$  au voisinage de  $a$  ;
- ★  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  ;
- ★  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

Alors  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

**Démonstration** On peut procéder de la même manière : on utilise la caractérisation séquentielle de la limite ainsi que le théorème des gendarmes pour les suites. ■

 **Exercice** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ .

### III – Continuité en un point

On désigne toujours par  $I$  un intervalle non vide et non réduit à un point et  $f$  est un élément de  $\mathbb{R}^I$ .

#### 1) Continuité en un point

**Définition (continuité en un point)** Soit  $a \in I$ . On dit que  $f$  est continue au point  $a$  si :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

**Exemple** La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue en 1. Montrons en effet que :

$$\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sqrt{1} = 1$$

Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - 1| \leq \varepsilon &\iff -\varepsilon \leq \sqrt{x} - 1 \leq \varepsilon \iff 1 - \varepsilon \leq \sqrt{x} \leq \varepsilon + 1 \\ &\iff (1 - \varepsilon)^2 - 1 \leq x - 1 \leq (\varepsilon + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

En choisissant  $\delta = \min(1 - (1 - \varepsilon)^2, (\varepsilon + 1)^2 - 1)$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |x - 1| \leq \delta \implies |\sqrt{x} - 1| \leq \varepsilon$$

## 2) Prolongement par continuité en un point

Le problème est le suivant : on considère une fonction  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $a \in I$ . La fonction  $f$  n'est ici pas définie au point  $a$  de  $I$  et on se demande si on peut prolonger  $f$  en une fonction définie sur  $I$  et continue au point  $a$ .

**Définition (prolongement par continuité)** On dit que  $f$  est *prolongeable par continuité en  $a$*  s'il existe une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $I$  telle que :

- ★  $g$  soit continue au point  $a$  ;
- ★  $g|_{I \setminus \{a\}} = f$ .

Le résultat suivant va nous permettre d'étudier ce problème.

**Proposition** La fonction  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  si et seulement si  $f$  admet une limite finie en  $a$ .

**Démonstration**  $\implies$  Supposons qu'il existe une fonction  $g$  continue en  $a$  telle que  $g|_{I \setminus \{a\}} = f$ . Alors  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a)$  et, comme  $g|_{I \setminus \{a\}} = f$ , on a  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a)$ . La fonction  $f$  admet donc une limite finie en  $a$ .

$\impliedby$  Posons  $\ell = \lim_{t \rightarrow a} f(t)$  et considérons la fonction  $g$  définie sur  $I$  par :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

Comme  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$  par hypothèse, la fonction  $g$  est continue en  $a$ . De plus, elle prolonge clairement la fonction  $f$  sur  $I$ . ■

**Exemple** ★ Soit  $f : x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x + 1}$  qui est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) = x^2 - x + 1,$$

qui admet pour limite 3 quand  $x$  tend vers  $-1$ . On en déduit qu'on peut prolonger  $f$  par continuité en  $-1$ .

★ Soit  $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ . On peut prolonger  $f$  par continuité en 0 car  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  par composition des limites.

## 3) Continuité à droite, continuité à gauche

Considérons la fonction  $f : x \mapsto [x]$ . Cette fonction n'est pas continue en 0 car  $f(0) = 0$  mais  $f(x) = -1$  pour tout  $x \in [-1, 0[$ . On peut introduire les notions de continuité à droite ou à gauche en un point.

**Définition (continuité à droite, continuité à gauche)** Soient  $f \in \mathbb{R}^I$  et  $a \in I$ .

- ★ Si  $a \neq \inf(I)$ , on dit que  $f$  est *continue à gauche en  $a$*  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .
- ★ Si  $a \neq \sup(I)$ , on dit que  $f$  est *continue à droite en  $a$*  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

**Exemple** Soit  $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$  (définie sur  $\mathbb{R}$ ). Alors  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ . Donc  $f$  est continue à droite en 0, et elle n'est pas continue à gauche en 0.

**Proposition (lien avec la continuité)** Soit  $a \in I$ . Alors  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en  $a$ .

**Démonstration** C'est une conséquence immédiate du résultat sur les limites à gauche et à droite. ■

 **Exercice** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'après la proposition précédente, la fonction  $f$  est continue en 0.

#### 4) Caractérisation séquentielle de la continuité

**Théorème (caractérisation séquentielle de la continuité)** Soit  $a \in I$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ★  $f$  est continue en  $a$  ;
- ★ pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a)$ .

**Démonstration** C'est une conséquence immédiate de la proposition sur la caractérisation séquentielle de la limite. ■

 **Exercice** On considère la fonction  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ . En considérant la suite  $x = (x_n)_{n \geq 1}$  définie par  $x_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que la fonction  $f$  n'est pas continue en 0.

**Une solution.** La suite  $x$  converge vers 0. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  donc  $f(x_n) = 0$ . Ainsi, la suite  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  est convergente de limite  $0 \neq f(0)$  (car  $f(0) = 1$ ). D'après le critère séquentiel de continuité, la fonction  $f$  n'est pas continue en 0.

#### 5) Continuité et opérations

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des opérations sur les limites.

**Proposition (propriétés algébriques)** Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues en un point  $a \in I$ . Alors :

- ★ pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f + \lambda g$  est continue en  $a$  ;
- ★ la fonction  $f \times g$  est continue en  $a$  ;
- ★ si  $f(a) \neq 0$ , alors la fonction  $\frac{1}{f}$  est définie dans un voisinage de  $a$  et est continue en  $a$ .

**Démonstration** Il suffit d'appliquer la proposition relative aux opérations sur les limites. ■

**Proposition (composition de fonctions continues)** Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  (non vides et non réduit à un point),  $a \in I$ ,  $f \in \mathbb{R}^I$  et  $g \in \mathbb{R}^J$ . On suppose que :

- ★  $f(I) \subset J$ ;
- ★ la fonction  $f$  est continue en  $a$ ;
- ★ la fonction  $g$  est continue en  $f(a)$ .

Alors la fonction  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Démonstration** Il suffit d'appliquer le théorème de composition des limites. ■

## 6) Continuité sur un intervalle

**Définition (continuité sur un intervalle)** On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .

**Notation :** on notera  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  (ou  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ) l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ .

On déduit de la proposition précédente la structure suivante de  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ .

**Corollaire** Le triplet  $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau commutatif dont les éléments neutres sont  $0_{\mathcal{C}(I, \mathbb{R})} : x \mapsto 0$  (pour l'addition) et  $1_{\mathcal{C}(I, \mathbb{R})} : x \in I \mapsto 1$  (pour la multiplication).

**Remarque :** en notant  $\mathcal{C}(I, I')$  l'ensemble des fonctions continues d'un intervalle  $I$  à valeurs dans un intervalle  $I'$ , alors le théorème de composition précédent entraîne que, si  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}(I, J) \times \mathcal{C}(J, \mathbb{R}), \quad g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$$

## IV – Théorèmes autour de la continuité

Les théorèmes suivants sont centraux en Analyse et seront fréquemment utilisés.

### 1) Théorème des valeurs intermédiaires

La question sous-jacente du théorème qui suit est la suivante : que dire de l'image d'un intervalle par une fonction continue ?

**Théorème (des valeurs intermédiaires)** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et soit  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

- ★ Si  $f(a)f(b) < 0$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .
- ★ Tout nombre  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  admet un antécédent par  $f$  dans  $[a, b]$ .

**Démonstration (du premier point en utilisant la propriété de la borne supérieure)** Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on peut supposer que  $f(a) < 0$  (et alors  $f(b) > 0$ ). Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{E} = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$$

Cet ensemble est une partie de  $\mathbb{R}$  qui est non vide (elle contient  $a$ ) et qui est majorée (par  $b$  par définition de l'ensemble); elle admet donc une borne supérieure que l'on note  $c$ . Montrons maintenant que  $c \notin \{a, b\}$  et  $f(c) = 0$ . On montre que  $f(c) = 0$  en montrant les deux inégalités  $f(c) \leq 0$  et  $f(c) \geq 0$ .

★ Comme  $c = \sup(\mathcal{E})$ , il existe  $x \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $c$ . Par définition de  $\mathcal{E}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) \leq 0,$$

puis, en utilisant le critère séquentiel de continuité au point  $c$  et le passage à la limite dans les inégalités, on obtient  $f(c) \leq 0$ .

★ L'inégalité précédente entraîne que  $c < b$  (puisque  $f(c) \leq 0$  tandis que  $f(b) > 0$ ). On en déduit qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, \quad c + \frac{1}{n} \in [a, b]$$

Par ailleurs, on sait aussi que pour tout  $n \geq N$ , on a  $c + \frac{1}{n} \notin \mathcal{E}$  (par définition de la borne supérieure d'un ensemble) donc :

$$\forall n \geq N, \quad f\left(c + \frac{1}{n}\right) > 0$$

Le critère séquentiel de continuité nous donne alors, en passant à la limite :  $f(c) \geq 0$ .

Finalement, on a bien l'égalité  $f(c) = 0$  et  $c \notin \{a, b\}$ . ■

**Démonstration (du premier point en utilisant le principe de dichotomie)** Sans perte de généralité, on peut encore supposer que  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ . Posons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons avoir construit des nombres réels  $a_0, \dots, a_n$  et  $b_0, \dots, b_n$  tels que :

(i)  $a = a_0 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_0 = b$ ;

(ii) pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ ;

(iii) pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(a_k) \leq 0 \leq f(b_k)$ .

On construit alors les nombres réels  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  de la manière suivante. On commence par poser  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ .

Ensuite :

— si  $f(c_n) \geq 0$ , alors on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = c_n$ ;

— sinon, on pose  $a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

Dans chacun des deux cas, il est clair que  $a_n \leq a_{n+1}$  et  $b_{n+1} \leq b_n$ . Par ailleurs :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Par ailleurs,  $f(a_{n+1}) \leq 0 \leq f(b_{n+1})$  par construction.

Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont clairement adjacentes donc elles convergent de limite commune notée  $c \in [a, b]$ . Par ailleurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

La critère séquentiel de continuité de la fonction  $f$  au point  $c$  entraîne que les suites  $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(f(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent de limite  $f(c)$ . En passant à la limite dans les inégalités précédentes, on obtient donc que  $f(c) \leq 0 \leq f(c)$  et donc  $f(c) = 0$ . En particulier, on a  $c \notin \{a, b\}$ . ■

**Démonstration (du deuxième point)** Sans perte de généralité, on peut supposer que  $f(a) \leq f(b)$ . Soit  $y \in [f(a), f(b)]$ . Si  $y = f(a)$  (respectivement  $y = f(b)$ ), alors  $a$  (respectivement  $b$ ) est un antécédent de  $y$  par  $f$  dans  $[a, b]$ . Supposons maintenant que  $y \in ]f(a), f(b)[$  et considérons la fonction  $g : x \in [a, b] \mapsto f(x) - y$ . Alors  $g(a)g(b) < 0$  et  $g$  est continue sur  $[a, b]$  donc il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g(c) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $f(c) = y$ . ■

**Remarques :**

★ La condition  $f(a)f(b) < 0$  exprime simplement le fait que  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires.

★ Il n'y a pas nécessairement unicité du point  $c$  dans cet énoncé.

- ★ Le principe de dichotomie sera exploité en informatique pour approcher numériquement les points d'annulation d'une fonction.

 **Exercice** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

**Une solution.**

Il n'y a rien à faire si  $f(0) = 0$  ou si  $f(1) = 1$ . Supposons maintenant que  $f(0) > 0$  et  $f(1) < 1$  et considérons la fonction  $g : x \in [0, 1] \rightarrow x - f(x)$ . Alors  $g(0) = -f(0) < 0$  et  $g(1) = 1 - f(1) > 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires (la fonction  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  comme différence de fonctions qui le sont), il existe  $x \in ]0, 1[$  tel que  $g(x) = 0$ , ce qu'il fallait démontrer.

**Corollaire (image d'un intervalle par une fonction continue)** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Démonstration** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . On veut montrer que  $f(I)$  est un intervalle. Soient  $u, v \in f(I)$  tels que  $u \leq v$ . Il s'agit de montrer que  $[u, v] \subset f(I)$ . Soit  $y \in [u, v]$ . Par hypothèse sur  $u$  et  $v$ , il existe  $a, b \in I$  tels que  $u = f(a)$  et  $v = f(b)$ . Comme  $y$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , le théorème des valeurs intermédiaires entraîne qu'il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $y = f(x)$ . Comme  $I$  est un intervalle, on a  $x \in I$  (puisque  $x \in [a, b]$  et  $a, b \in I$ ) donc  $y \in f(I)$ . Finalement, on a bien montré que  $[u, v] \subset f(I)$  et donc  $f(I)$  est un intervalle. ■

**Remarque :** les intervalles  $I$  et  $f(I)$  peuvent être de natures différentes. Par exemple :

$$\sin(]-\infty, +\infty[) = [-1, 1]$$

## 2) Théorème des bornes atteintes

**Rappel :** on appelle *segment* de  $\mathbb{R}$  tout intervalle de la forme  $[a, b]$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  sont tels que  $a \leq b$ .

**Théorème (des bornes atteintes)** ★ Toute fonction continue sur un segment  $y$  est bornée et atteint ses bornes.  
 ★ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

**Démonstration** ★ Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$  et  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . D'après le (corollaire du) théorème des valeurs intermédiaires,  $f([a, b])$  est un intervalle. Montrons que  $f$  possède un maximum (pour montrer que  $f$  possède un minimum, il suffit de montrer que  $-f$  possède un maximum et on est ramené au cas précédent). Posons :

$$s = \sup(f([a, b])) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Cette borne supérieure existe d'après la propriété de la borne supérieure :

- ou bien cet ensemble n'est pas majoré et alors la borne supérieure vaut  $+\infty$  ;
- ou bien  $f([a, b])$  est majorée, auquel cas la borne supérieure existe dans  $\mathbb{R}$ .

Dans les deux cas, on sait d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure que  $s$  est la limite d'une suite d'éléments de  $f([a, b])$  ; il existe donc  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  tel que  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} s$ .

La suite numérique  $x$  est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une suite extraite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  convergente, de limite notée  $c \in [a, b]$ . D'après le critère séquentiel de continuité, on a :

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = s$$

Par conséquent,  $s \in \mathbb{R}$  (ce qui montre que  $f$  est majorée) et comme  $s$  est une valeur atteinte par la fonction  $f$ , il s'agit du maximum de  $f$  sur  $[a, b]$  (atteint en  $c$ ).

- ★ Posons  $S = f([a, b])$ ,  $s = \sup(S)$  et  $i = \inf(I)$ . On sait que  $s, i \in \mathbb{R}$  d'après le point précédent. Montrons que  $S = [i, s]$ .
    - Par définition des bornes supérieure et inférieure (qui sont des majorant et minorant de  $S$  respectivement), on a l'inclusion  $S \subset [i, s]$ .
    - Les bornes  $i$  et  $s$  étant atteintes, on a  $i, s \in S$ . Or  $S$  est un intervalle (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) et  $i \leq s$  donc  $[i, s] \subset S$ .
- On a l'égalité  $S = [i, s]$  par double inclusion. ■

### 3) Continuité et monotonie stricte

Les résultats de ce paragraphe sont admis. Il est clair que toute fonction strictement monotone sur un intervalle est injective. La réciproque est fautive en général.

**Proposition (admis)**    Toute fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

Le résultat suivant renforce le théorème des valeurs intermédiaires.

**Théorème (de la bijection, admis)**    Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone. Alors :

- ★  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$  ;
- ★ la fonction  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est continue et strictement monotone sur  $J$  (de même monotonie que  $f$ ).

**Remarque :** dans un repère orthonormé, les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

## V – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Tous les résultats de ce chapitre qui ne font pas intervenir d'inégalités restent vrais pour les fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . En particulier, le théorème des valeurs intermédiaires ne se généralise pas. Remarquons que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x))$$

et que les fonctions  $\operatorname{Re}(f) : x \in I \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$  et  $\operatorname{Im}(f) : x \in I \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$  sont à valeurs réelles.

### 1) Limite

On peut définir la notion de limite pour une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  en un point  $a$  de  $\bar{I}$ . La limite est nécessairement un élément de  $\mathbb{C}$ .

**Définition**    Soient  $a \in \bar{I}$  et  $\ell \in \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$  si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap I) \subset V$$

Ici, un voisinage de  $\ell \in \mathbb{C}$  est un disque fermé  $\bar{D}(\ell, r)$  de centre  $\ell$  et de rayon  $r > 0$ .

**Proposition** Soient  $a \in \bar{I}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $\ell = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ . Alors :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha \\ \operatorname{Im}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \beta \\ \ell = \alpha + i\beta \end{cases}$$

**Démonstration**  $\implies$  Supposons que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ . Soit  $r > 0$ . Il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que :

$$\forall x \in I, x \in W \implies |f(x) - \ell| \leq r$$

Si  $x \in W \cap I$ , alors on a :

$$|\operatorname{Re}(f(x)) - \alpha| \leq |f(x) - \ell| \leq r$$

Donc  $\operatorname{Re}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha$ .

$\impliedby$  Supposons que  $\operatorname{Re}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha$  et  $\operatorname{Im}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \beta$  et soit  $r > 0$ . Par hypothèse, il existe des voisinages  $W$  et  $W'$  de  $a$  tels que :

$$\left( \forall x \in W \cap I, |\operatorname{Re}(f(x)) - \alpha| \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{et} \quad \left( \forall x \in W' \cap I, |\operatorname{Im}(f(x)) - \beta| \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

Posons  $U = W \cap W' \in \mathcal{V}(a)$ . Pour tout  $x \in U \cap I$ , on a :

$$|f(x) - \ell| = \sqrt{(\operatorname{Re}(f(x)) - \alpha)^2 + (\operatorname{Im}(f(x)) - \beta)^2} \leq \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = r \quad \blacksquare$$

**Exemple** On a  $e^{i\theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$  car  $\cos(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$  et  $\sin(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$ .

## 2) Continuité

Soit  $f \in \mathbb{C}^I$ .

- ★ Soit  $a \in I$ . La fonction  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- ★ La fonction  $f$  est dite continue sur  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .

**Proposition** La fonction  $f$  est continue en  $a \in I$  si et seulement si les fonctions  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont continues en  $a$ .

**Démonstration** C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. ■

**Exemple** La fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  le sont.