

# PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tout ce chapitre,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point et  $\mathbb{K}$  désigne l'un des deux ensembles  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On notera :

- ★  $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  ;
- ★  $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

## I – Primitives

### 1) Définition et propriétés

**Définition (notion de primitive)** Soit  $f \in \mathbb{K}^I$ . On appelle *primitive de  $f$  sur  $I$*  toute fonction  $F \in \mathbb{K}^I$  telle que :

- ★  $F$  est dérivable sur  $I$  ;
- ★  $F' = f$  sur  $I$  (i.e. :  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$ ).

**Exemple**      ★ Une primitive de la fonction sin sur  $\mathbb{R}$  est la fonction  $-\cos$ .

★ Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Une primitive de la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\alpha \end{cases}$  est  $F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{cases}$ .

★ Une primitive de  $\tan^2$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $x \mapsto \tan(x) - x$ .

★ Si  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , alors une primitive de  $x \mapsto e^{\alpha x}$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ .

Les deux résultats suivants seront démontrés dans le chapitre sur l'intégration.

**Théorème**      Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . Alors :

- ★  $f$  admet des primitives ;
- ★ si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $I$  est :

$$\{F + C^{\text{te}} \mid C^{\text{te}} \in \mathbb{C}\}$$

Autrement dit, deux primitives de  $f$  diffèrent par une constante.

**Démonstration**      résultat admis pour le moment ■

**Exemple**      Les primitives de la fonction  $x \mapsto e^{2x}$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{e^{2x}}{2} + c$  où  $c \in \mathbb{R}$ .

**Notation.** Soient  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Pour tous  $a, b \in I$ , on appelle *intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$*  l'élément de  $\mathbb{K}$  noté  $\int_a^b f(t) dt$  défini par :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Cette définition a un sens car le nombre  $F(b) - F(a)$  ne dépend pas de la primitive  $F$  choisie.

**Exemple**  $\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0$

Avec cette définition, on a le résultat suivant.

**Théorème (fondamental de l'Analyse)** Soit  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . La fonction :

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

est dérivable sur  $I$  de dérivée  $f$ . Ainsi,  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**Démonstration** résultat admis pour le moment ■

**Notation.** On pourra noter  $\int^x f(t) dt$  une primitive générique de  $f$  (avec cette notation, on ne se soucie pas de la constante d'intégration). Par exemple, on peut écrire que :

$$\int^x e^{-t} dt = -e^{-x} \quad \text{ou} \quad \int^x e^{-t} dt = 2022 - e^{-x}$$

## 2) Primitives usuelles

*voir formulaire* (à connaître parfaitement)

## 3) Calculs de primitives et d'intégrales

### (a) Reconnaître une forme usuelle de primitivation

Si on reconnaît la dérivée d'une composée, on sait trouver une primitive de la fonction. *Voir formulaire*

**Exemple** ★ Une primitive de  $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $F : x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{2}$ .

★ Une primitive de  $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$  sur  $]1, +\infty[$  est  $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$ .

★ Une primitive de  $\tan$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  est  $F : x \mapsto -\ln(\cos(x))$ .

★ Une primitive de  $f : x \mapsto (-5x + 7)^3$  sur  $\mathbb{R}$  est  $F : x \mapsto -\frac{(-5x + 7)^4}{20}$

### (b) Intégration par parties

**Définition (fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ )** Soit  $f \in \mathbb{K}^I$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  si :

- ★  $f$  est dérivable sur  $I$  ;
- ★ et  $f'$  est continue sur  $I$ .

On note :  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ .

**Exemple**  $\exp \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

**Théorème (intégration par parties)** Soient  $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  et soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ . Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx$$

où :

$$[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

**Démonstration** La fonction  $uv$  est dérivable sur l'intervalle  $[a, b]$  (puisque les fonctions  $u$  et  $v$  le sont), de dérivée  $(uv)' = u'v + uv'$ . D'après les hypothèses, les fonctions  $u'v$ ,  $uv'$  et  $(uv)'$  sont continues sur l'intervalle  $[a, b]$  donc les intégrales  $\int_a^b u'(x)v(x) \, dx$ ,  $\int_a^b u(x)v'(x) \, dx$  et  $\int_a^b (uv)'(x) \, dx$  sont bien définies. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)'(x) \, dx &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \, dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx \end{aligned}$$

et comme  $uv$  est une primitive de  $(uv)'$  sur l'intervalle  $[a, b]$ ,

$$\int_a^b (uv)'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b,$$

ce qui achève la démonstration. ■

 **Exercice** Calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 (t + 1)e^{-t} \, dt$ .

**Remarque :** il faut penser à l'intégration par parties pour chercher des primitives de fonctions de la forme « polynôme  $\times$  exponentielle » (on dérive le polynôme).

**Exemple** Détermination d'une primitive de la fonction  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### (c) Changement de variable

On rappelle la formule de dérivation suivante :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

**Théorème (de changement de variable)** Soient  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  et  $f \in \mathcal{C}(\varphi(I), \mathbb{K})$ . Pour tous  $a, b \in I$ , on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) \, dt$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable  $x = \varphi(t)$ .

**Démonstration** Comme  $f$  est continue sur  $\varphi(I)$ , elle admet une primitive  $F$  sur  $\varphi(I)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) dt &= \int_a^b (F' \circ \varphi)(t)\varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \left[ (F \circ \varphi)(t) \right]_a^b \quad (\text{par définition de l'intégrale}) \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt \end{aligned}$$

**Remarque :** on se souviendra que, quand on pose  $x = \varphi(t)$ , alors «  $dx = \varphi'(t) dt$  ».

**Exemple** En effectuant le changement de variable  $x = \ln(t)$ , calculons l'intégrale :

$$I = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto \ln(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[1, \sqrt{3}]$  et la fonction  $x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$  est continue sur  $[0, \ln(\sqrt{3})]$  (ici,  $[0, 1] = \varphi([1, \sqrt{3}])$ ). D'après le théorème de changement de variable, on a :

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1 + t^2} \times \frac{1}{t} dt = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

#### 4) Primitives d'inverses de trinômes du second degré

Nous donnons ici une méthode permettant de déterminer une primitive d'une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ . Notons  $\Delta$  le discriminant du trinôme du second degré  $aX^2 + bX + c$  (i.e.  $\Delta = b^2 - 4ac$ ). On distingue deux cas.

★ **Premier cas :**  $\Delta = 0$

Il existe alors  $r \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}, \quad f(x) = \frac{1}{a(x - r)^2}$$

Une primitive de  $f$  est alors la fonction :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{r\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{a(x - r)} \end{cases}$$

★ **Deuxième cas :**  $\Delta > 0$

Alors le trinôme du second degré  $aX^2 + bX + c$  admet deux racines réelles distinctes notées  $r_1$  et  $r_2$ . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

L'idée est alors de chercher  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}, \quad f(x) = \frac{\lambda}{x - r_1} + \frac{\mu}{x - r_2}$$

Ensuite, une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x - r}$  (pour  $r \in \mathbb{R}$ ) sur  $\mathbb{R} \setminus \{r\}$  est  $x \mapsto \ln(|x - r|)$ .

★ **Troisième cas** :  $\Delta < 0$

Ici, on écrit le polynôme sous forme canonique et on se ramène à la dérivée de arctan ou.

 **Exercice** Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$  ;
2.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$  ;
3.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$ .

## II – Équations différentielles linéaires du premier ordre

### 1) Définitions

**Définition (équation différentielle, équation homogène)** ★ On appelle *équation différentielle linéaire* (en abrégé EDL) d'ordre 1 sur  $I$  toute équation fonctionnelle de la forme :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \tag{E}$$

où  $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et  $y$  est une fonction dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  à déterminer.

Par abus de notation, cette équation est souvent notée :

$$y' + ay(x) = b(x) \tag{E}$$

★ On appelle *équation (différentielle) homogène associée* à (E) l'équation différentielle :

$$y' + a(x)y = 0 \tag{H}$$

**Exemple** ★  $y' - y = 0$  est une EDL du premier ordre sur  $\mathbb{R}$  dont la fonction exponentielle est solution

★  $y' + xy = 3xe^{x^2}$  est une EDL du premier ordre sur  $\mathbb{R}$  dont la fonction  $x \mapsto xe^{x^2}$  est solution

**Vocabulaire :**

- ★ La fonction  $b$  est appelée le second membre de l'équation différentielle.
- ★ *Résoudre* (ou *intégrer*) l'équation différentielle (E) (ou (H)), c'est déterminer toutes les fonctions  $y$  dérivables sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  satisfaisant l'équation différentielle. Résoudre (E), c'est donc déterminer l'ensemble :

$$\mathcal{S}_E := \{y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) \mid \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)\}$$

**Remarques :**

★ Si  $y \in \mathcal{S}_E$ , alors la fonction  $y$  est automatiquement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . En effet, on a l'égalité :

$$\forall x \in I, \quad y' = -a(x)y + b(x)$$

t les fonctions  $a, y$  et  $b$  sont continues sur  $I$ . On peut même montrer par récurrence que  $y$  est en fait de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

★ Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ , la fonction  $\alpha$  ne s'annulant pas sur l'intervalle  $I$  (i.e. :  $\forall x \in I, \alpha(x) \neq 0$ ), alors l'équation différentielle :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x) \tag{E'}$$

est équivalente à l'équation différentielle (du type précédemment défini) sur  $I$  suivante :

$$y' + \frac{\beta}{\alpha}y = \frac{\gamma}{\alpha}$$

On dit qu'on a *normalisé* l'équation différentielle (E').

## 2) Résolution de (E)

Le théorème suivant propose un plan de résolution de l'équation différentielle (E).

**Théorème (sur la structure de l'ensemble des solutions de (E))** Notons  $\mathcal{S}_E$  (respectivement  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de (E) (respectivement (H)) sur  $I$ . Si  $f_0$  est une solution (particulière) de (E) sur  $I$ , alors :

$$\mathcal{S}_E = \{f_0 + g \mid g \in \mathcal{S}_H\}$$

**Démonstration** On raisonne par double inclusion.

$\square$  On considère un élément  $f$  de  $\{f_0 + g \mid g \in \mathcal{S}_H\}$ . Il existe  $g \in \mathcal{S}_H$  tel que  $f = f_0 + g$  (on a donc  $f' + a(x)f = 0$ ). Alors la fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  comme somme de fonctions dérivables et :

$$f' + af = (f_0 + g)' + a(f_0 + g) = \underbrace{(f_0' + af_0)}_{=b} + \underbrace{(g' + ag)}_{=0} = b$$

et donc  $f$  est une solution de l'équation différentielle (E), c'est-à-dire  $f \in \mathcal{S}_E$ .

$\square$  Soit  $f \in \mathcal{S}_E$ . On veut montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{S}_H$  tel que  $f = f_0 + g$ . Ceci revient à dire que la fonction  $f - f_0$  est solution de l'équation différentielle (H). La fonction  $f - f_0$  est dérivable sur  $I$  comme différence de fonctions dérivables et

$$(f - f_0)' + a(f - f_0) = \underbrace{(f' + af)}_{=b} - \underbrace{(f_0' + af_0)}_{=b} = b - b = 0$$

donc  $f - f_0 \in \mathcal{S}_H$ , ce qui démontre la deuxième inclusion. ■

**MÉTHODE :** le théorème précédent suggère le plan de résolution suivant :

- ★ on résout l'équation homogène (H) ;
- ★ on cherche une solution de l'équation (E) ;
- ★ on conclut en donnant l'ensemble des solutions de (E) (on applique le théorème précédent).

## 3) Résolution de l'équation homogène (H)

Notons que  $a$  est continue sur l'intervalle  $I$  donc elle y admet des primitives.

**Théorème (ensemble des solutions de (H))** Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur l'intervalle  $I$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de l'équation différentielle (H) sur l'intervalle  $I$  est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{-A(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

**Démonstration** Montrons l'égalité annoncée en raisonnant par double inclusion.

$\square$  (l'inclusion facile)

Soient  $C \in \mathbb{R}$  et  $y : x \mapsto C e^{-A(x)}$ . Montrons que  $y \in \mathcal{S}_H$ . On sait que la fonction  $A$  est dérivable sur  $I$  puisque  $A$  est une primitive de  $a$  (et :  $\forall x \in I, A'(x) = a(x)$ ). De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc, par composition, la fonction  $y$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = -C A'(x) e^{-A(x)} = -C a(x) e^{-A(x)}$$

Ainsi :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = -C a(x) e^{-A(x)} + a(x) C e^{-A(x)} = 0$$

Donc  $y$  est solution de l'équation différentielle (H) sur l'intervalle  $I$ . Autrement dit,  $y \in \mathcal{S}_H$ . On a donc démontré l'inclusion :

$$\left\{ x \mapsto C e^{-A(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{S}_H$$

□ (l'inclusion non triviale)<sup>1</sup>

Soit  $y \in \mathcal{S}_H$ . Montrons que  $y \in \{x \mapsto C e^{-A(x)} \mid C \in \mathbb{K}\}$ . Considérons la fonction  $z : x \mapsto y(x) e^{A(x)}$ . La fonction  $y$  est dérivable sur  $I$  (puisque'elle est solution de  $(H)$  sur  $I$ ), la fonction  $A$  est dérivable sur  $I$  (en tant que primitive de la fonction  $a$  sur  $I$ ) et la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Par produit et composition, la fonction  $z$  est donc dérivable sur  $I$  et on a :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = y'(x) e^{A(x)} + y(x) A'(x) e^{A(x)} = \underbrace{(y'(x) + a(x)y(x))}_{=0} e^{A(x)} = 0$$

car  $y \in \mathcal{S}_H$ . La fonction  $z$  (qui a une dérivée nulle sur l'intervalle  $I$ ) est donc constante sur  $I$ . Il existe donc  $C \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = y(x) e^{A(x)} = C \quad \text{c'est-à-dire} \quad y(x) = C e^{-A(x)}$$

On a donc démontré l'inclusion :

$$\mathcal{S}_H \subset \{x \mapsto C e^{-A(x)} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Par double inclusion, l'égalité annoncée est établie. ■

**Remarque (un cas très particulier)** : si  $a$  est la fonction constante égale à  $\alpha$ , alors une primitive de  $a$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction  $x \mapsto \alpha x$  donc :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto C e^{-\alpha x} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

 **Exercice** Résoudre l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$y' + \frac{y}{t} = 0 \tag{H}$$

**Une solution.** L'équation différentielle  $(H)$  est linéaire du premier ordre homogène. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et une primitive est  $t \mapsto \ln(t)$ . L'ensemble des solutions de  $(H)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est donc :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto \frac{C}{t} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

#### 4) Recherche d'une solution particulière $f_0$ de $(E)$

##### (a) Recherche d'une solution « évidente »

C'est la situation idéale : on trouve une solution sans faire aucun calcul.

**Exemple** ★ Une solution particulière de  $y' + 3y = 1$  est  $x \mapsto \frac{1}{3}$ .

★ Une solution particulière de  $y' + xy = x$  est  $x \mapsto 1$ .

##### (b) Méthode de la variation de la constante

L'idée est simple : il s'agit de remplacer la constante «  $C$  » qui apparaît dans l'expression d'une solution de  $(\mathcal{S}_H)$  par une fonction dérivable sur  $I$  (c'est pourquoi on parle de « faire varier la constante »). On considère donc une fonction de la forme :

$$y : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & C(x) e^{-A(x)} \end{cases} ,$$

1. Il faut montrer que la fonction  $y$  appartient à  $\mathcal{S}_H$ . Étant donnée l'inclusion à démontrer, il s'agit donc d'établir que la fonction

$x \mapsto \frac{y(x)}{e^{-A(x)}}$  (c'est cette fonction que j'ai appelé «  $z$  ») est constante (« égale à  $C$  ») sur  $I$ .

où  $C \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$  (rappelons que  $A$  désigne ici une primitive sur  $I$  de la fonction  $a$ ). La fonction  $y$  est dérivable sur  $I$  comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = C'(x)e^{-A(x)} - a(x)C(x)e^{-A(x)}$$

donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\iff (\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)) \\ &\iff \forall x \in I, C'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ &\iff \forall x \in I, C'(x) = b(x)e^{A(x)} \quad (\text{car } e^{A(x)} \neq 0) \end{aligned}$$

Pour obtenir ensuite une solution particulier de  $(E)$ , il *suffit* de trouver une primitive de  $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$  et de multiplier ensuite cette fonction par  $x \mapsto e^{-A(x)}$ .

 **Exercice** Trouver une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{y}{t} = \frac{e^t}{t} \tag{E}$$

sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Solution.** On utilise la méthode de la variation de la constante. On considère la fonction  $y : t \mapsto \frac{C(t)}{t}$  où  $C$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(t) = \frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = \frac{e^t}{t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2} + \frac{1}{t} \times \frac{C(t)}{t} = \frac{e^t}{t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*, C'(t) = e^t \end{aligned}$$

Par exemple,  $C : t \mapsto e^t$  convient. Ainsi, une solution particulière de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est la fonction  $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ .

### 5) Principe de superposition

Le principe de superposition est utilisé pour chercher une solution d'une équation différentielle lorsque le second membre s'exprime comme une somme de plusieurs fonctions.

**Proposition (principe de superposition)** Soient  $a, b_1, \dots, b_n$  des fonctions continues sur un intervalle  $I$ . On considère l'équation différentielle suivante sur  $I$  :

$$y' + a(x)y = b_1(x) + \dots + b_n(x) \tag{E}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on suppose que  $y_k$  est une solution particulière de l'équation différentielle suivante sur  $I$  :

$$y' + a(x)y = b_k(x)$$

Alors la fonction  $y_0 = y_1 + \dots + y_n$  est une solution particulière de  $(E)$  sur  $I$ .

**Démonstration** La fonction  $y_0$  est dérivable sur  $I$  comme somme de fonctions qui le sont et, par linéarité de la dérivation, on a :

$$y'_0 + ay_0 = \sum_{k=1}^n y'_k + a \sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n (y'_k + ay_k) = \sum_{k=1}^n b_k = b$$

La fonction  $y_0$  est donc solution de  $(E)$  sur  $I$ . ■

**Exemple** Considérons l'équation différentielle  $y' + y = e^x + 1$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors :

- ★ une solution particulière de  $y' + y = e^x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{e^x}{2}$  ;
- ★ une solution particulière de  $y' + y = 1$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto 1$ .

Donc une solution de l'équation différentielle initiale sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{e^x}{2} + 1$ .

### 6) Problème de Cauchy

**Définition (problème de Cauchy)** On appelle *problème de Cauchy linéaire du premier ordre* sur  $I$  tout système de la forme :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où  $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ .

**Théorème (de Cauchy-Lispchitz)** Tout problème de Cauchy linéaire du premier ordre admet une unique solution.

**Démonstration** Avec les notations de la définition précédente,  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si et seulement s'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $y : x \mapsto y_0(x) + C e^{-A(x)}$ , où  $y_0$  est une solution particulière fixée de  $(E)$ . La résolution de l'équation  $y(x_0) = y_0$  nous donne une unique solution  $C \in \mathbb{R}$ . ■

 **Exercice** Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  le problème de Cauchy (linéaire du premier ordre suivant) :

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{t}y = \frac{e^t}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

## III – Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

### 1) Définitions

**Définition** ★ On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* toute équation de la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{E}$$

où  $a, b \in \mathbb{K}^2$ ,  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et où  $y$  est une fonction deux fois dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  à déterminer.

★ On appelle *équation (différentielle) homogène associée à (E)* l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{H}$$

**Remarques :**

- ★ La fonction  $f$  est appelée le second membre de l'équation différentielle.
- ★ Résoudre (E) sur l'intervalle  $I$ , c'est déterminer toutes les fonctions  $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$  telles que :

$$\forall x \in I, \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

- ★ Si  $y$  est une solution de (E) sur  $I$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  (et même de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $I$ .

**Exemple** ★  $y'' + 2y' + y = e^{ix}$  est une telle équation différentielle ;

- ★  $y'' + y = 0$  est de plus homogène et on sait que les fonctions cosinus et sinus sont solution de cette équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .

**2) Résolution de (E)**

Le théorème général, qui propose un plan de résolution de l'équation différentielle pour le premier ordre, reste valable dans le cadre des équations différentielles du second ordre.

**Théorème (sur la structure de l'ensemble des solutions de (E))** Notons  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de (E) (respectivement (H)) sur  $I$ . Si  $y_0$  est une solution (particulière) de (E) sur  $I$ , alors :

$$\mathcal{S} = \{y_0 + y \mid y \in \mathcal{S}_H\}$$

**Démonstration** La démonstration est analogue. ■

**3) Résolution de l'équation homogène (H)**

On considère ici l'équation homogène sur l'intervalle  $I$  suivante :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{H}$$

où  $a, b \in \mathbb{C}$ . On notera  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de (H) sur  $I$ .

**Définition (équation caractéristique associée à H)** On appelle *équation caractéristique associée à l'équation différentielle H* l'équation du second degré :

$$x^2 + ax + b = 0$$

**Exemple** L'équation caractéristique associée à  $y'' + 2y = 0$  est  $x^2 + 2 = 0$ .

La résolution de cette équation caractéristique permet de trouver l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_H$  de l'équation homogène  $(H)$ .

**Théorème** On note  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique  $x^2 + ax + b = 0$  (i.e.  $\Delta = a^2 - 4b$ ). Alors :

- ★ si  $\Delta \neq 0$ , alors l'équation caractéristique admet deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$  et l'ensemble des solutions à valeurs complexes de  $(H)$  est :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} \mid A, B \in \mathbb{C}\}$$

- ★ si  $\Delta = 0$ , alors l'équation caractéristique admet une racine double  $r_0 \in \mathbb{C}$  et l'ensemble des solutions à valeurs complexes de  $(H)$  est :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto (Ax + B) e^{r_0 x} \mid A, B \in \mathbb{C}\}$$

**Démonstration** résultat admis à ce stade ■

**Remarque :** si  $a, \beta \in \mathbb{R}$  et si  $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$ , alors l'ensemble des solutions à valeurs réelles de  $(H)$  est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto (C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \mid C, D \in \mathbb{R} \right\},$$

où on a noté  $\alpha \pm i\beta$  les deux racines conjuguées distinctes de l'équation caractéristique (avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).

**Exemple** Considérons l'équation différentielle  $(H) : y'' + y = 0$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors :

- ★ les solutions complexes de  $(H)$  sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto A e^{ix} + B e^{-ix} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{C},$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$x \mapsto C \cos(x) + D \sin(x) \quad \text{où } C, D \in \mathbb{C}$$

- ★ les solutions réelles de  $(H)$  sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto E \cos(x) + F \sin(x) \quad \text{où } E, F \in \mathbb{R}$$

 **Exercice** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles :

1.  $y'' + 3y' + y = 0$  ;
2.  $y'' + y' + y = 0$  ;
3.  $4y'' - 4y' + y = 0$  ;
4.  $y'' + iy = 0$ .

#### 4) Recherche d'une solution particulière $y_0$ de $(E)$

##### (a) Recherche d'une solution évidente

On commence par regarder si l'équation différentielle admet une solution immédiate.

**Exemple** ★ Une solution particulière de  $2y'' - 2y + 3y = 4$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{4}{3}$ .

- ★ Une solution particulière de  $y'' + y' + y = e^x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{e^x}{3}$ .

**(b) Formes particulières de second membre**

La méthode de la variation de la constante est hors programme pour le second ordre. Cependant, si  $f$  est l'une des trois fonctions ci-dessous, alors il faut savoir sous quelle forme on peut trouver une solution particulière  $f_0$  de  $(E)$ .

★ **Premier cas :**  $f$  est un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  (par exemple  $f : x \mapsto x^4 + 2x^2 - 4x + 5$  est un polynôme de degré 4)

Dans ce cas, on cherchera une solution  $f_0$  de  $(E)$  sous la forme d'un polynôme :

- de degré  $n$  si 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique (EC) (*i.e.* de  $x^2 + ax + b = 0$ )
- de degré  $n + 1$  si 0 est racine simple de (EC)
- de degré  $n + 2$  si 0 est racine double de (EC)

★ **Deuxième cas :** si  $f : x \mapsto A e^{\lambda x}$  où  $A, \lambda \in \mathbb{C}$

On pourra chercher une solution particulière  $f_0$  de  $(E)$  sous la forme :

- $f_0 : x \mapsto B e^{\lambda x}$  si  $\lambda$  n'est pas racine de (EC)
- $f_0 : x \mapsto B x e^{\lambda x}$  si  $\lambda$  est racine simple de (EC)
- $f_0 : x \mapsto B x^2 e^{\lambda x}$  si  $\lambda$  est racine double de (EC)

où ici  $B \in \mathbb{C}$ .

★ **Troisième cas :**  $f : x \mapsto A \cos(\omega x)$  ou  $f : x \mapsto \sin(\omega x)$ , où  $A \in \mathbb{C}$  et  $\omega \in \mathbb{R}$

On cherchera une solution  $f_0$  de  $(E)$  sous la forme :

- $f_0 : x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$  si  $i\omega$  n'est pas racine de (EC)
- $f_0 : x \mapsto x(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))$  si  $i\omega$  est racine de (EC)

où ici  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .

 **Exercice** Trouver une solution particulière des équations différentielles suivantes :

1.  $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 2x + 3$  ( $E_1$ );
2.  $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$  ( $E_2$ );
3.  $y'' + y = \cos(x)$  ( $E_3$ ).

**(c) Principe de superposition**

Le principe de superposition, que l'on a vu pour le premier ordre, s'énonce de manière identique pour le second ordre.

**Exemple** Une solution particulière de l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' + y = 1 + \cos(t) + e^t \tag{E}$$

est  $y : t \mapsto 1 + \frac{t \sin(t)}{2} + \frac{e^t}{2}$ .

**5) Problème de Cauchy**

**Définition (problème de Cauchy)** On appelle *problème de Cauchy linéaire du second ordre sur  $I$*  tout système de la forme :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

où  $a, b, f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ ,  $x_0 \in I$  et  $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$ .

**Théorème (de Cauchy-Lispchitz)** Tout problème de Cauchy linéaire du premier ordre admet une unique solution.

**Démonstration** résultat admis ■

 **Exercice** Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{C}) : \begin{cases} y'' + y = \cos(t) \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Une solution :**

★ L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + y = \cos(t)$  sur  $\mathbb{R}$  est :

$$\left\{ t \mapsto \frac{t \sin(t)}{2} + A \cos(t) + B \sin(t) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

★ Soient  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  et  $y : t \mapsto \frac{t \sin(t)}{2} + A \cos(t) + B \sin(t)$ . La fonction  $y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = \frac{\sin(t)}{2} + \frac{t \cos(t)}{2} - A \sin(t) + B \cos(t)$$

donc :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la solution du problème de Cauchy  $(\mathcal{C})$  est la fonction  $t \mapsto \frac{t \sin(t)}{2} + \cos(t)$ .