Primitives et équations différentielles

Table des matières

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera :

- ⋆ $\mathscr{D}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- ⋆ $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I – Primitives

1) Définition et propriétés

Définition (notion de primitive) Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On appelle *primitive de f sur I* toute fonction $F \in \mathbb{K}^I$ telle que :

- ⋆ F est dérivable sur I ;
- ⋆ $F' = f$ sur I (*i.e.* : $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$).

Exemple ⋆ Une primitive de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ est la fonction $-\cos$.

⋆ Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Une primitive de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right.$ est $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{array} \right.$.

⋆ Une primitive de $\tan^2$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x \longmapsto \tan(x) - x$.

⋆ Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$.

Les deux résultats suivants seront démontrés dans le chapitre sur l'intégration.

Théorème Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. Alors :

- ⋆ f admet des primitives ;
- ⋆ si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est :

$$\left\{F + C^{\text{te}} \,\middle|\, C^{\text{te}} \in \mathbb{C}\right\}$$

Autrement dit, deux primitives de f diffèrent par une constante.

Démonstration résultat admis pour le moment ■

Exemple Les primitives de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Notation. Soient $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I. Pour tous $a, b \in I$, on appelle *intégrale de f entre a et b* l'élément de $\mathbb{K}$ noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ défini par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Cette définition a un sens car le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$

Avec cette définition, on a le résultat suivant.

Théorème (fondamental de l'Analyse) Soit $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. La fonction :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est dérivable sur I de dérivée f. Ainsi, F est une primitive de f sur I.

Démonstration résultat admis pour le moment ■

Notation. On pourra noter $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ une primitive générique de f (avec cette notation, on ne se soucie pas de la constante d'intégration). Par exemple, on peut écrire que :

$$\int^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{ou} \qquad \int^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2022 - \mathrm{e}^{-x}$$

2) Primitives usuelles

voir formulaire (à connaître parfaitement)

3) Calculs de primitives et d'intégrales

(a) Reconnaître une forme usuelle de primitivation

Si on reconnaît la dérivée d'une composée, on sait trouver une primitive de la fonction. *Voir formulaire*

Exemple

- ⋆ Une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $F : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)^2}{2}$.
- ⋆ Une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1,+\infty[$ est $F : x \longmapsto \ln(\ln(x))$.
- ⋆ Une primitive de tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ est $F : x \longmapsto -\ln(\cos(x))$.
- ⋆ Une primitive de $f : x \longmapsto (-5x+7)^3$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \longmapsto -\dfrac{(-5x+7)^4}{20}$

(b) Intégration par parties

Définition (fonction de classe $\mathscr{C}^1$) Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

- ⋆ f est dérivable sur I ;
- ⋆ et f' est continue sur I.

On note : $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$.

Exemple $\exp \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Théorème (intégration par parties) Soient $u, v \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ et soient a et b deux éléments de I. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

où :

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Démonstration La fonction uv est dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ (puisque les fonctions u et v le sont), de dérivée $(uv)' = u'v + uv'$. D'après les hypothèses, les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont continues sur l'intervalle $[a,b]$ donc les intégrales $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x$ sont bien définies. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et comme uv est une primitive de $(uv)'$ sur l'intervalle $[a,b]$,

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b,$$

ce qui achève la démonstration. ■

✎✎✎ **Exercice** Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 (t+1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Remarque : il faut penser à l'intégration par parties pour chercher des primitives de fonctions de la forme « polynôme × exponentielle » (on dérive le polynôme).

Exemple Détermination d'une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Changement de variable

On rappelle la formule de dérivation suivante :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$$

Théorème (de changement de variable) Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}(\varphi(I),\mathbb{K})$. Pour tous $a,b \in I$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit qu'*on a effectué le changement de variable* $x = \varphi(t)$.

Démonstration Comme f est continue sur $\varphi(I)$, elle admet une primitive F sur $\varphi(I)$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b (F'\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[(F\circ\varphi)(t)\Big]_a^b \qquad \text{(par définition de l'intégrale)} \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

■

Remarque : on se souviendra que, quand on pose $x = \varphi(t)$, alors « $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ ».

Exemple En effectuant le changement de variable $x = \ln(t)$, calculons l'intégrale :

$$I = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

La fonction $\varphi : t \longmapsto \ln(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[1, \sqrt{3}]$ et la fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ est continue sur $[0, \ln(\sqrt{3})]$ (ici, $[0,1] = \varphi([1, \sqrt{3}])$. D'après le théorème de changement de variable, on a :

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

4) Primitives d'inverses de trinômes du second degré

Nous donnons ici une méthode permettant de déterminer une primitive d'une fonction de la forme :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Notons Δ le discriminant du trinôme du second degré $aX^2 + bX + c$ (*i.e.* $\Delta = b^2 - 4ac$). On distingue deux cas.

- **Premier cas :** $\Delta = 0$
  Il existe alors $r \in \mathbb{R}$ tel que :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}, \qquad f(x) = \frac{1}{a(x-r)^2}$$
  Une primitive de f est alors la fonction :
  $$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{r\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{a(x-r)} \end{array} \right.$$
- **Deuxième cas :** $\Delta > 0$
  Alors le trinôme du second degré $aX^2 + bX + c$ admet deux racines réelles distinctes notées r_1 et r_2. On a alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ax^2 + bx + c = a(x-r_1)(x-r_2)$$
  L'idée est alors de chercher $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
  $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}, \qquad f(x) = \frac{\lambda}{x-r_1} + \frac{\mu}{x-r_2}$$
  Ensuite, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-r}$ (pour $r \in \mathbb{R}$) sur $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ est $x \longmapsto \ln(|x-r|)$.
- **Troisième cas :** $\Delta < 0$
  Ici, on écrit le polynôme sous forme canonique et on se ramène à la dérivée de $\arctan \circ u$.

✎✎✎ **Exercice** Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x-3}$;
2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+4x+4}$;
3. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

II – Équations différentielles linéaires du premier ordre

1) Définitions

Définition (équation différentielle, équation homogène) ⋆ On appelle *équation différentielle linéaire* (en abrégé EDL) *d'ordre* 1 *sur* I toute équation fonctionnelle de la forme :

$$\forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \tag{E}$$

où $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et y est une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ à déterminer. Par abus de notation, cette équation est souvent notée :

$$y' + ay(x) = b(x) \tag{E}$$

⋆ On appelle *équation (différentielle) homogène associée à* (E) l'équation différentielle :

$$y' + a(x)y = 0 \tag{H}$$

Exemple ⋆ $y' - y = 0$ est une EDL du premier ordre sur $\mathbb{R}$ dont la fonction exponentielle est solution

⋆ $y' + xy = 3x\,\mathrm{e}^{x^2}$ est une EDL du premier ordre sur $\mathbb{R}$ dont la fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{x^2}$ est solution

Vocabulaire :

- ⋆ La fonction b est appelée le second membre de l'équation différentielle.
- ⋆ *Résoudre* (ou *intégrer* l'équation différentielle (E) (ou (H)), c'est déterminer toutes les fonctions y dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ satisfaisant l'équation différentielle. Résoudre (E), c'est donc déterminer l'ensemble :

$$\mathscr{S}_E := \left\{ y \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K}) \,\middle|\, \forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \right\}$$

Remarques :

- ⋆ Si $y \in \mathscr{S}_E$, alors la fonction y en automatiquement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. En effet, on a l'égalité :

$$\forall x \in I, \qquad y' = -a(x)y + b(x)$$

t les fonctions a, y et b sont continues sur I. On peut même montrer par récurrence que y est en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

- ⋆ Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, la fonction α ne s'annulant pas sur l'intervalle I (*i.e.* : $\forall x \in I,\ \alpha(x) \neq 0$), alors l'équation différentielle :

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x) \tag{E'}$$

est équivalente à l'équation différentielle (du type précédemment défini) sur I suivante :

$$y' + \frac{\beta}{\alpha}y = \frac{\gamma}{\alpha}$$

On dit qu'on a *normalisé* l'équation différentielle (E').

2) Résolution de (E)

Le théorème suivant propose un plan de résolution de l'équation différentielle (E).

Théorème (sur la structure de l'ensemble des solutions de (E)) Notons $\mathscr{S}_E$ (respectivement $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (E) (respectivement (H)) sur I. Si f_0 est une solution (particulière) de (E) sur I, alors :

$$\mathscr{S}_E = \left\{ f_0 + g \,\middle|\, g \in \mathscr{S}_H \right\}$$

Démonstration On raisonne par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ On considère un élément f de $\{f_0 + g \,|\, g \in \mathscr{S}_H\}$. Il existe $g \in \mathscr{S}_H$ tel que $f = f_0 + g$ (on a donc $g' + a(x)\,g = 0$). Alors la fonction f est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables et :

$$f' + af = (f_0 + g)' + a(f_0 + g) = \underbrace{(f_0' + af_0)}_{=b} + \underbrace{(g' + ag)}_{=0} = b$$

et donc f est une solution de l'équation différentielle (E), c'est-à-dire $f \in \mathscr{S}_E$.

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in \mathscr{S}_E$. On veut montrer qu'il existe $g \in \mathscr{S}_H$ tel que $f = f_0 + g$. Ceci revient à dire que la fonction $f - f_0$ est solution de l'équation différentielle (H). La fonction $f - f_0$ est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables et

$$(f - f_0)' + a\,(f - f_0) = \underbrace{(f' + a\,f)}_{=b} - \underbrace{(f_0' + a\,f_0)}_{=b} = b - b = 0$$

donc $f - f_0 \in \mathscr{S}_H$, ce qui démontre la deuxième inclusion. ■

Méthode : le théorème précédent suggère le plan de résolution suivant :

- ⋆ on résout l'équation homogène (H) ;
- ⋆ on cherche une solution de l'équation (E) ;
- ⋆ on conclut en donnant l'ensemble des solutions de (E) (on applique le théorème précédent).

3) Résolution de l'équation homogène (H)

Notons que a est continue sur l'intervalle I donc elle y admet des primitives.

Théorème (ensemble des solutions de (H)) Soit A une primitive de a sur l'intervalle I. L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions de l'équation différentielle (H) sur l'intervalle I est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration Montrons l'égalité annoncée en raisonnant par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ *(l'inclusion facile)*

Soient $\mathrm{C} \in \mathbb{K}$ et $y : x \longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$. Montrons que $y \in \mathscr{S}_H$. On sait que la fonction A est dérivable sur I puisque A est une primitive de a (et : $\forall x \in I,\ \mathrm{A}'(x) = a(x)$). De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction y est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \qquad y'(x) = -\mathrm{C}\,\mathrm{A}'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} = -\mathrm{C}\,a(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$$

Ainsi :

$$\forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = -\mathrm{C}\,a(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} + a(x)\,\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} = 0$$

Donc y est solution de l'équation différentielle (H) sur l'intervalle I. Autrement dit, $y \in \mathscr{S}_H$. On a donc démontré l'inclusion :

$$\left\{ x \longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathscr{S}_H$$

$\boxed{\subset}$ *(l'inclusion non triviale)* [1]

Soit $y \in \mathscr{S}_H$. Montrons que $y \in \left\{ x \longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{K} \right\}$. Considérons la fonction $z : x \longmapsto y(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$. La fonction y est dérivable sur I (puisqu'elle est solution de (H) sur I), la fonction A est dérivable sur I

1. Il faut montrer que la fonction y appartient à $\mathscr{S}_H$. Étant donnée l'inclusion à démontrer, il s'agit donc d'établir que la fonction
$x \longmapsto \frac{y(x)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}}$ (c'est cette fonction que j'ai appelé « z ») est constante (« égale à C ») sur I.

(en tant que primitive de la fonction a sur I) et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit et composition, la fonction z est donc dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \qquad z'(x) = y'(x)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{A}(x)} + y(x)\,\mathrm{A}'(x)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{A}(x)} = \underbrace{\big(y'(x) + a(x)y(x)\big)}_{=0}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{A}(x)} = 0$$

car $y \in \mathscr{S}_H$. La fonction z (qui a une dérivée nulle sur l'intervalle I) est donc constante sur I. Il existe donc $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \qquad z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{A}(x)} = \mathrm{C} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{A}(x)}$$

On a donc démontré l'inclusion :

$$\mathscr{S}_H \subset \left\{ x \longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{A}(x)} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}$$

Par double inclusion, l'égalité annoncée est établie. ■

Remarque (un cas très particulier) : si a est la fonction constante égale à α, alors une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \longmapsto \alpha x$ donc :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\,-\alpha x} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}$$

✎✎✎ **Exercice** Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{y}{t} = 0 \qquad (H)$$

Une solution. L'équation différentielle (H) est linéaire du premier ordre homogène. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et une primitive est $t \longmapsto \ln(t)$. L'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto \frac{C}{t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

4) Recherche d'une solution particulière f_0 de (E)

(a) Recherche d'une solution « évidente »

C'est la situation idéale : on trouve une solution sans faire aucun calcul.

Exemple ⋆ Une solution particulière de $y' + 3y = 1$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{3}$.

⋆ Une solution particulière de $y' + xy = x$ est $x \longmapsto 1$.

(b) Méthode de la variation de la constante

L'idée est simple : il s'agit de remplacer la constante « C » qui apparaît dans l'expression d'une solution de $(\mathscr{S}_H)$ par une fonction dérivable sur I (c'est pourquoi on parle de « faire varier la constante »). On considère donc une fonction de la forme :

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & C(x)\,\mathrm{e}^{\,-A(x)} \end{array} \right. ,$$

où $C \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ (rappelons que A désigne ici une primitive sur I de la fonction a). La fonction y est dérivable sur I comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in I, \qquad y'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{\,-A(x)} - a(x)C(x)\,\mathrm{e}^{\,-A(x)}$$

donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\iff (\forall x \in I,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x)) \\ &\iff \forall x \in I,\ C'(x)\,\mathrm{e}^{\,-A(x)} = b(x) \\ &\iff \forall x \in I,\ C'(x) = b(x)\,\mathrm{e}^{\,A(x)} \qquad (\text{car } \mathrm{e}^{\,A(x)} \neq 0) \end{aligned}$$

Pour obtenir ensuite une solution particulier de (E), il *suffit* de trouver une primitive de $x \longmapsto b(x)\,\mathrm{e}^{\,A(x)}$ et de multiplier ensuite cette fonction par $x \longmapsto \mathrm{e}^{\,-A(x)}$.

✎✎✎ **Exercice** Trouver une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{y}{t} = \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} \tag{E}$$

sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. On utilise la méthode de la variation de la constante. On considère la fonction $y : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{C}(t)}{t}$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(t) = \frac{\mathrm{C}'(t)}{t} - \frac{\mathrm{C}(t)}{t^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\mathrm{C}'(t)}{t} - \frac{\mathrm{C}(t)}{t^2} + \frac{1}{t} \times \frac{\mathrm{C}(t)}{t} = \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{C}'(t) = \mathrm{e}^{\,t} \end{aligned}$$

Par exemple, $\mathrm{C} : t \longmapsto \mathrm{e}^{\,t}$ convient. Ainsi, une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\,t}}{t}$.

5) Principe de superposition

Le principe de superposition est utilisé pour chercher une solution d'une équation différentielle lorsque le second membre s'exprime comme une somme de plusieurs fonctions.

Proposition (principe de superposition) Soient $a, b_1, \dots, b_n$ des fonctions continues sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle suivante sur I :

$$y' + a(x)y = b_1(x) + \cdots + b_n(x) \tag{E}$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on suppose que y_k est une solution particulière de l'équation différentielle suivante sur I :

$$y' + a(x)y = b_k(x)$$

Alors la fonction $y_0 = y_1 + \cdots + y_n$ est une solution particulière de (E) sur I.

Démonstration La fonction y_0 est dérivable sur I comme somme de fonctions qui le sont et, par linéarité de la dérivation, on a :

$$y_0' + ay_0 = \sum_{k=1}^{n} y_k' + a\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} (y_k' + ay_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k = b$$

La fonction y_0 est donc solution de (E) sur I. ■

Exemple Considérons l'équation différentielle $y' + y = \mathrm{e}^{\,x} + 1$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

- ⋆ une solution particulière de $y' + y = \mathrm{e}^{\,x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{2}$;
- ⋆ une solution particulière de $y' + y = 1$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto 1$.

Donc une solution de l'équation différentielle initiale sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{2} + 1$.

6) Problème de Cauchy

Définition (problème de Cauchy) On appelle *problème de Cauchy linéaire du premier ordre sur I* tout système de la forme :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

Théorème (de Cauchy-Lispchitz) Tout problème de Cauchy linéaire du premier ordre admet une unique solution.

Démonstration Avec les notations de la définition précédente, y est solution de (E) sur I si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y : x \longmapsto y_0(x) + C\,\mathrm{e}^{-A(x)}$, où y_0 est une solution particulière fixée de (E). La résolution de l'équation $y(x_0) = y_0$ nous donne une unique solution $C \in \mathbb{R}$. ■

✎✎✎ **Exercice** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ le problème de Cauchy (linéaire du premier ordre suivant) :

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{t} y = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

III – Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1) Définitions

Définition ⋆ On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* toute équation de la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (E)$$

où $a, b \in \mathbb{K}^2$, $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et où y est une fonction deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ à déterminer.

⋆ On appelle *équation (différentielle) homogène associée à* (E) l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

Remarques :

- ⋆ La fonction f est appelée le second membre de l'équation différentielle.
- ⋆ Résoudre (E) sur l'intervalle I, c'est déterminer toutes les fonctions $y \in \mathscr{D}^2(I, \mathbb{K})$ telles que :

$$\forall x \in I, \qquad y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

- ⋆ Si y est une solution de (E) sur I, alors f est de classe $\mathscr{C}^2$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

Exemple ⋆ $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{ix}$ est une telle équation différentielle ;

- ⋆ $y'' + y = 0$ est de plus homogène et on sait que les fonctions cosinus et sinus sont solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

2) Résolution de (E)

Le théorème général, qui propose un plan de résolution de l'équation différentielle pour le premier ordre, reste valable dans le cadre des équations différentielles du second ordre.

Théorème (sur la structure de l'ensemble des solutions de (E)) Notons $\mathscr{S}$ (respectivement $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (E) (respectivement (H)) sur I. Si y_0 est une solution (particulière) de (E) sur I, alors :

$$\mathscr{S} = \left\{ y_0 + y \,\middle|\, y \in \mathscr{S}_H \right\}$$

Démonstration La démonstration est analogue. ∎

3) Résolution de l'équation homogène (H)

On considère ici l'équation homogène sur l'intervalle I suivante :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{H}$$

où $a, b \in \mathbb{C}$. On notera $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H) sur I.

Définition (équation caractéristique associée à H) On appelle *équation caractéristique associée à l'équation différentielle* H l'équation du second degré :

$$x^2 + ax + b = 0$$

Exemple L'équation caractéristique associée à $y'' + 2y = 0$ est $x^2 + 2 = 0$.

La résolution de cette équation caractéristique permet de trouver l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_H$ de l'équation homogène (H).

Théorème On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$ (*i.e.* $\Delta = a^2 - 4b$). Alors :

- ⋆ si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (H) est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{r_1 x} + B\,\mathrm{e}^{r_2 x} \,\middle|\, A, B \in \mathbb{C} \right\}$$

- ⋆ si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ et l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (H) est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto (Ax + B)\,\mathrm{e}^{r_0 x} \,\middle|\, A, B \in \mathbb{C} \right\}$$

Démonstration résultat admis à ce stade ∎

Remarque : si $a, \in \mathbb{R}$ et si $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$, alors l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (H) est :

$$\mathscr{S}_H = \left\{ x \longmapsto (C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x))\,\mathrm{e}^{\alpha x} \,\middle|\, C, D \in \mathbb{R} \right\},$$

où on a noté $\alpha \pm i\beta$ les deux racines conjuguées distinctes de l'équation caractéristique (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Exemple Considérons l'équation différentielle (H) : $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

* ⋆ les solutions complexes de (H) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{ix} + B\,\mathrm{e}^{-ix} \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{C},$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$x \longmapsto C\cos(x) + D\sin(x) \qquad \text{où } C, D \in \mathbb{C}$$

* ⋆ les solutions réelles de (H) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto E\cos(x) + F\sin(x) \qquad \text{où } E, F \in \mathbb{R}$$

✎✎✎ **Exercice** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1. $y'' + 3y' + y = 0$;
2. $y'' + y' + y = 0$;
3. $4y'' - 4y' + y = 0$;
4. $y'' + iy = 0$.

4) Recherche d'une solution particulière y_0 de (E)

(a) Recherche d'une solution évidente

On commence par regarder si l'équation différentielle admet une solution immédiate.

Exemple ⋆ Une solution particulière de $2y'' - 2y + 3y = 4$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{4}{3}$.

* ⋆ Une solution particulière de $y'' + y' + y = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

(b) Formes particulières de second membre

La méthode de la variation de la constante est hors programme pour le second ordre. Cependant, si f est l'une des trois fonctions ci-dessous, alors il faut savoir sous quelle forme on peut trouver une solution particulière f_0 de (E).

* ⋆ **Premier cas :** f est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ (par exemple $f : x \longmapsto x^4 + 2x^2 - 4x + 5$ est un polynôme de degré 4)
  Dans ce cas, on cherchera une solution f_0 de (E) sous la forme d'un polynôme :
  * de degré n si 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique (EC) (*i.e.* de $x^2 + ax + b = 0$)
  * de degré $n + 1$ si 0 est racine simple de (EC)
  * de degré $n + 2$ si 0 est racine double de (EC)
* ⋆ **Deuxième cas :** si $f : x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ où $A, \lambda \in \mathbb{C}$
  On pourra chercher une solution particulière f_0 de (E) sous la forme :
  * $f_0 : x \longmapsto B\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ si λ n'est pas racine de (EC)
  * $f_0 : x \longmapsto Bx\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ si λ est racine simple de (EC)
  * $f_0 : x \longmapsto Bx^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ si λ est racine double de (EC)

  où ici $B \in \mathbb{C}$.
* ⋆ **Troisième cas :** $f : x \longmapsto A\cos(\omega x)$ ou $f : x \longmapsto \sin(\omega x)$, où $A \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$
  On cherchera une solution f_0 de (E) sous la forme :
  * $f_0 : x \longmapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ si $i\omega$ n'est pas racine de (EC)
  * $f_0 : x \longmapsto x(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ si $i\omega$ est racine de (EC)

  où ici $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

✎✎✎ **Exercice** Trouver une solution particulière des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 2x + 3$ (E_1) ;
2. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}$ (E_2) ;
3. $y'' + y = \cos(x)$ (E_3).

(c) Principe de superposition

Le principe de superposition, que l'on a vu pour le premier ordre, s'énonce de manière identique pour le second ordre.

Exemple Une solution particulière de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + y = 1 + \cos(t) + \mathrm{e}^{\,t} \tag{E}$$

est $y : t \longmapsto 1 + \dfrac{t\sin(t)}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{\,t}}{2}$.

5) Problème de Cauchy

Définition (problème de Cauchy) On appelle *problème de Cauchy linéaire du second ordre sur I* tout système de la forme :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

où $a, b, f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$.

Théorème (de Cauchy-Lispchitz) Tout problème de Cauchy linéaire du premier ordre admet une unique solution.

Démonstration résultat admis ■

✎✎✎ **Exercice** Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathscr{C}) : \begin{cases} y'' + y = \cos(t) \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Une solution :

- ⋆ L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \cos(t)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\left\{ t \longmapsto \frac{t\sin(t)}{2} + \mathrm{A}\,\cos(t) + \mathrm{B}\,\sin(t) \;\middle|\; (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- ⋆ Soient $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ et $y : t \longmapsto \dfrac{t\sin(t)}{2} + \mathrm{A}\,\cos(t) + \mathrm{B}\,\sin(t)$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = \frac{\sin(t)}{2} + \frac{t\cos(t)}{2} - \mathrm{A}\,\sin(t) + \mathrm{B}\,\cos(t)$$

donc :

$$\begin{cases} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{A} &= 1 \\ \mathrm{B} &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, la solution du problème de Cauchy $(\mathscr{C}')$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{t\sin(t)}{2} + \cos(t)$.