Généralités sur les fonctions

I – Préambule valable pour tout le cours

Abréviations

- ⋆ « Déf » : Définition
- ⋆ « Prop » : Proposition
- ⋆ « Thm » : Théorème
- ⋆ « *i.e.* » : abréviation de *id est* qui signifie *c'est-à-dire* en latin
- ⋆ « Rq » : Remarque
- ⋆ « Démo » : Démonstration

Notations

- ⋆ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: ensemble des entiers naturels
- ⋆ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: ensemble des entiers relatifs
- ⋆ $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$: ensemble des nombres réels
- ⋆ $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$: ensemble des réels positifs
- ⋆ $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$
- ⋆ $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

On décrira souvent un ensemble à l'aide d'une propriété :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \text{ vérifiant la propriété } \mathscr{P}\right\}$$

On parle d'écriture *en compréhension* de l'ensemble.

Exemple ⋆ $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x + 1 \geqslant 0\right\} = [-1, +\infty[$

- ⋆ $\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, n^2 \leqslant 4\right\} = \{0, 1, 2\}$

Symboles

- ⋆ Si E est un ensemble (non vide), on écrira souvent « $\forall x \in E$ » pour dire « quelque soit x dans l'ensemble E ». Le symbole « $\in$ » signifie « appartient ».
- ⋆ On utilise aussi le quantificateur $\exists$ qui signifie « il existe ».

Exemple ⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$

- ⋆ $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 10$

Dans tout ce chapitre, I désigne un sous-ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$ qui est soit un intervalle, soit une réunion d'intervalle. Par exemple :

- — $I =]0, 1]$;
- — ou $I = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;
- — ou $I =]0, 1[\cup]1, +\infty[$;
- — ou $I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;
- — ou ...

II – Notion de fonction

On rappelle qu'une fonction f (ou une application) est un « procédé » qui à tout nombre x d'un ensemble (de départ) I associe un unique nombre réel ou complexe noté $f(x)$ que l'on appelle l'image de x par f. On décrit une fonction de la manière suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Exemple ⋆ $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est autre que la fonction carrée ;

⋆ $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+i}{x-i} \end{array} \right.$ (où $i \in \mathbb{C}$ est tel que $i^2 = -1$).

Attention : il ne faut pas confondre la fonction f et le nombre $f(x)$. Écrire « la fonction x^2 n'a aucun sens ».

Dans toute la suite, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

1) Ensemble de définition d'une fonction

Définition (ensemble de définition) L'ensemble (ou domaine) de définition de la fonction f est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $f(x)$ soit bien défini (c'est à dire, tels que $f(x)$ ait un sens). Il est souvent noté $\mathscr{D}_f$.

Exemple

1. L'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$.
2. L'ensemble de définition de $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ est $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

✎✎✎ **Exercice** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

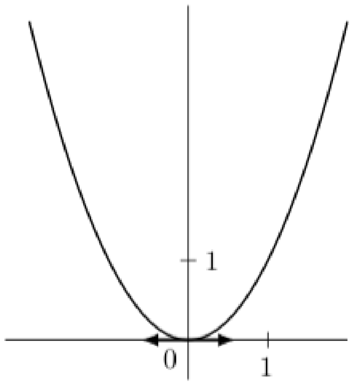
1. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{-x+3}}$;
2. $g : x \longmapsto \ln(\ln(x))$.

2) Représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles

Définition (représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles) Pour une fonction à valeurs réelles $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, la représentation graphique de f (ou « courbe représentative de f ») dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble suivant (appelé graphe de f) :

$$\mathscr{G} = \left\{ (x, f(x)) \,\middle|\, x \in I \right\}$$

Exemple Représentation graphique de la fonction carrée sur $\mathbb{R}$:



3) Obtention du graphe de $x \longmapsto f(x+a)$ et de $x \longmapsto f(ax)$ connaissant celui de f.

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

⋆ Considérons la fonction $g : x \longmapsto f(x+a)$. L'ensemble de définition de g est :

$$\mathscr{D}_g = \{x - a \,|\, x \in I\} \overset{\text{noté}}{=} \mathscr{D}_f - a$$

Le graphe de g dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $-a\vec{i}$ de la représentation graphique de f.

Exemple La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, tandis que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x+1}$ est définie sur $[-1, +\infty[$.

⋆ Supposons que $a \in \mathbb{R}_+^*$ et considérons $h : x \longmapsto f(ax)$. L'ensemble de définition de h est :

$$\left\{ \frac{x}{a} \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f \right\} \overset{\text{noté}}{=} a^{-1}\mathscr{D}_f$$

Exemple Si $\mathscr{D}_f = [1, +\infty[$, alors la fonction $g : x \longmapsto f(2x)$ est définie sur $\mathscr{D}_g = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, tandis que $h : x \longmapsto h\left(\frac{1}{2}x\right)$ est définie sur $\mathscr{D}_h = [2, +\infty[$.

On obtient le graphe de h par contraction ou dilatation de f suivant l'axe des abscisses d'un facteur $\frac{1}{a}$. Si a est négatif, il faut de plus procéder à une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

⋆ On obtient le graphe de $g : x \longmapsto f(-x)$ par symétrie du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction g est définie sur :

$$-\mathscr{D}_f \overset{\text{notation}}{=} \{-x \,|\, x \in \mathscr{D}_f\}$$

Exemple graphe de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

4) Opérations sur les fonctions : somme, produit, quotient et composition

Définition (opérations simples sur les fonctions) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On peut définir :

- ⋆ la *combinaison linéaire* $\lambda f + \mu g$ comme étant la fonction

$$\lambda f + \mu g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array} \right.$$

- ⋆ le *produit* de f et de g par :

$$f \times g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

- ⋆ si g ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire si : $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$), on peut définir le *quotient de f par g* par :

$$\frac{f}{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$$

Exemple Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \cos(x)$, alors $f + 3g$ est la fonction $x \longmapsto x^2 + 3\cos(x)$ (qui est définie sur $\mathbb{R}$).

Définition (composition de deux fonctions) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \in J$$

On peut alors définir la fonction *composée de g par f* par :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

Exemple Considérons les fonctions $f : x \longmapsto x + 1$ et $g : x \longmapsto \ln(x)$. Alors $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}_+^*$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) \in \mathbb{R} = \mathscr{D}_f$$

Il est donc possible de définir $f \circ g$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(x) + 1$$

Par contre, il n'est pas possible de définir $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$ (car, par exemple, $f(-2) = -1 \notin \mathbb{R}_+^*$). Par contre, on peut définir $g \circ f$ sur $]-1, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(x + 1)$$

✎✎✎ **Exercice** Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$
2. $g : x \longmapsto \ln(x^2 + 4)$
3. $h : x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x-3}\right)$

5) Symétries

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal.

Définition (parité, imparité) ⋆ On dit que f est *paire* si :

— I est symétrique par rapport à 0 (*i.e.* : $\forall x \in I,\ -x \in I$) ;

— $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

⋆ On dit que f est *impaire* si :

— I est symétrique par rapport à 0 ;

— $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à O.

Exemple Les fonctions carré $x \longmapsto x^2$ et cosinus sont paires sur $\mathbb{R}$ (graphes), les fonctions cubes et sinus sont impaires sur $\mathbb{R}$.

Définition (périodicité) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que f est $T-$périodique (ou qu'elle est périodique de période T) si on a :

⋆ $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \iff x + T \in I$;

⋆ $\forall x \in I,\ f(x+T) = f(x)$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le graphe de f est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Exemple

1. La fonction $f : x \longmapsto \sin(x)$ est périodique de période 2π car $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
2. La fonction $g : x \longmapsto \sin(3x)$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(3\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin(3x)$.

Remarque : les symétries permettent de réduire le domaine d'étude d'une fonction.

Exemple Étudions les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

6) Monotonie (pour les fonctions à valeurs réelles uniquement)

Définition (croissance, décroissance) On dit que :

⋆ f est croissante si :
$$\forall x, y \in I, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

⋆ f est décroissante si :
$$\forall x, y \in I, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

⋆ f est strictement croissante si :
$$\forall x, y \in I, \qquad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

⋆ f est strictement décroissante si :
$$\forall x, y \in I, \qquad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

⋆ f est monotone si et seulement si f est croissante sur I ou si f est décroissante sur I

⋆ f est strictement monotone si et seulement si f est strictement croissante sur I ou si f est strictement décroissante sur I.

Exemple — La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.
— La fonction inverse décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$, mais elle ne décroît pas sur $\mathbb{R}^*$.
— La fonction cosinus n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Remarque : la somme de deux fonctions croissantes est croissante.

7) Fonctions majorée, minorée, bornée

Définition (fonction majorée, minorée, bornée)

- On dit que f est *majorée* sur I si :

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$$

- On dit que f est *minorée* sur I si :

$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ m \leqslant f(x)$$

- On dit que f est *bornée* sur I si f est majorée et minorée sur cet ensemble :

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$$

Exemple

1. La fonction $x \longmapsto \cos(3x+1)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est majorée sur lintervalle $]0, +\infty[$ mais elle n'est pas minorée. Elle est bornée sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

8) Extremum

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

- On dit que f admet un maximum sur I en x_0 si :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant f(x_0)$$

- On dit que f admet un minimum sur I en x_0 si :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \geqslant f(x_0)$$

- On dit que f admet un extremum en x_0 si f y admet un maximum ou un minimum.

Exemple la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2$ admet un minimum en 0 qui vaut 2 car

$$f(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 2$$

III – Dérivation

Dans cette partie, la plupart des résultats seront admis à ce stade ; ils seront démontrés dans le chapitre sur la dérivabilité. On commence par étudier les fonctions à valeurs réelles.

1) Définitions

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition (dérivabilité en un point, nombre dérivé, dérivée) ⋆ Soit $a \in I$. On dit que la fonction f est *dérivable au point* a si le *taux d'accroissement* $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. La limite est appelée *le nombre dérivé de* f *au point* a et il est noté $f'(a)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

- ⋆ On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
- ⋆ Dans ce cas, la dérivée de f est la fonction :

$$\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

Remarque. Le nombre dérivé est noté aussi $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$.

✎✎✎ **Exercice** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et retrouver l'expression bien connue de la dérivée de f.

Interprétation graphique : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a (graphique).

Définition (tangente en un point à la courbe représentative de f) Soit f une fonction dérivable en un point a. Alors on appelle tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $(a, f(a))$ la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(a)$. L'équation de cette droite est

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Exemple La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x+1$.

2) Dérivées des fonctions usuelles

voir formulaire.

3) Propriétés algébriques

voir formulaire.

Cas particuliers de la dérivée d'une composée :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}, \qquad (\mathrm{e}^u)' = u' \times \exp u, \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \qquad (u^n)' = nu'u^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z}^*)$$

et encore :

$$\cos(u)' = -u'\sin(u) \qquad \text{et} \qquad \sin(u)' = u'\cos(u)$$

✎✎✎ **Exercice** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité (c'est-à-dire le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$, au sens de l'inclusion, sur lequel la fonction est dérivable) ainsi que la fonction dérivée.

1. $f : x \longmapsto 3\sin(x) + 5x^4 - \dfrac{1}{x}$;
2. $g : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$;
3. $h : x \longrightarrow \tan(x)$;
4. $i : x \longmapsto \ln(x^2 - 1)$;
5. $j : t \longmapsto \sqrt{3t - 5}$;
6. $k : x \longmapsto (2x + 1)^4$;
7. $k : x \longmapsto \dfrac{1}{(2x + 1)^4}$;
8. $m : x \longmapsto \cos(\ln(x))$.

4) Monotonie et dérivée

Ici, l'ensemble I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point).
Le résultat suivant sera démontré dans le chapitre sur la dérivabilité.

Proposition (admis) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

- ⋆ Si :
$$\forall x \in I, \qquad f'(x) \geqslant 0,$$
alors f est croissante sur I.
- ⋆ Si :
$$\forall x \in I, \qquad f'(x) \leqslant 0,$$
alors f est décroissante sur I.
- ⋆ Si :
$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = 0,$$
alors f est constante sur I.

✎✎✎ **Exercice** Étudier les variations de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$$

Remarque (pour la monotonie stricte) : si f est dérivable sur I et si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

✎✎✎ **Exercice** Étudier les variations de $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} + x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$.

5) Fonction de classe $\mathscr{C}^1$, dérivées d'ordres supérieurs

Définition (fonction de classe $\mathscr{C}^1$) On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I. On note $f \in \mathscr{C}^1(I)$.

Exemple La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, *i.e.* $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On peut définir les dérivées d'ordres supérieurs de f par récurrence.

Définition (dérivées d'ordre supérieurs) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur I. On définit les dérivées successives $f^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de f par récurrence :

- la dérivée première de f n'est autre que la dérivée de f : $f^{(1)} = f'$;
- si f soit n fois dérivable sur I de dérivée n^{e} notée $f^{(n)}$, alors on dit qu'elle admet une dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ si la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur I et cette dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ de f est définie par $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

On note aussi $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x))$. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.

✎✎✎ **Exercice** Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto x^2$;
2. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$;
3. $x \longmapsto \frac{1}{x}$;
4. $x \longmapsto \ln(1+x)$.

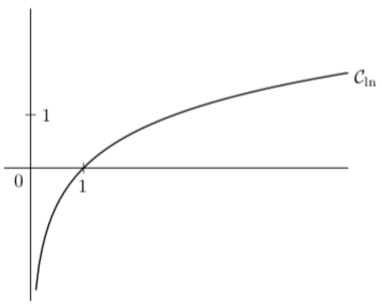
IV – Fonctions usuelles

1) Fonctions logarithmes et exponentielles

(a) Fonction ln

Définition (fonction ln) On appelle *logarithme népérien*, noté ln, l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- ⋆ $\ln(1) = 0$.



x	0	$+\infty$
ln	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Les propriétés de la fonction ln, admises à ce stade, sont les suivantes.

Proposition (admise) (i) ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

(iii) on a les propriétés algébriques suivantes :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall (x, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln x$

Définition (autres logarithmes) On appelle logarithme décimal et logarithme binaire, notés respectivement log et $\log_2$, les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \qquad \text{et} \qquad \log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

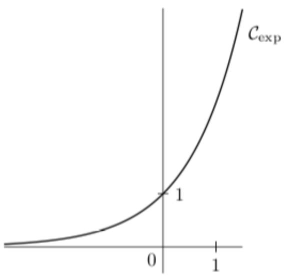
Les propriétés de ces fonctions (tableau de variation, graphe, limites, propriétés algébriques) sont les mêmes que celles de ln.

(b) Fonction exponentielle

Comme la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée ne s'annule pas, cette fonction admet une réciproque, la fonction exponentielle (et on a vu que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$).

Définition (fonction exponentielle) La fonction exponentielle, notée exp, est la réciproque de la fonction ln. On la note :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$$



x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 ↗	$+\infty$

Les propriétés de la fonction exp sont les suivantes.

Proposition (admise) (*i*) exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(*ii*) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$

(*iii*) $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

(*iv*) en posant $e = \exp(1)$, on a $\ln(e) = 1$

(*v*) on a de plus les propriétés algébriques suivantes :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ et $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(xy) = \exp(x)^y$

(*vi*) de plus :
$$(\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\ln(x)) = x) \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\exp(x)) = x)$$
(*vii*) enfin, on a les inégalités suivantes :
$$(\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x) \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x)$$

2) Fonctions puissances

(a) Définition

Définition (fonctions puissances) Soit $a \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

- ⋆ **Premier cas :** si $a \in \mathbb{N}$, on définit la fonction puissance a par :
$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a \end{array} \right.$$
où $x^a = x \times \cdots \times x$ (a fois).
- ⋆ **Deuxième cas :** si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on définit la fonction puissance a par :
$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = \dfrac{1}{x^{-a}} \end{array} \right. \qquad (\text{ici } -a \in \mathbb{N})$$
- ⋆ **Troisième cas :** si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on définit la fonction puissance a par :
$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)} \end{array} \right.$$

Remarque : dans les trois cas, l'expression de φ_a peut s'écrire, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$. Mais pour $a \in \mathbb{Z}$, on peut écrire différemment l'expression pour que la fonction ait un ensemble de définition plus grand.

Exemple Les fonctions φ_2 (carré), φ_3 (cube), φ_1 (inverse), φ_π.

(b) Propriétés des fonctions puissances

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates des propriétés de l'exponentielle.

Proposition (propriétés algébriques des fonctions puissances) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

(*i*) $x^a y^a = (xy)^a$;

(*ii*) $x^a x^b = x^{a+b}$;

(*iii*) $(x^a)^b = x^{ab}$;

(*iv*) $1^a = 1 = x^0$;

(*v*) $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

Démonstration Il suffit d'écrire les expressions sous forme exponentielle. ■

Proposition Soit $a \in \mathbb{R}$.

(i) La fonction φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}^*$ si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}$$

(ii) graphes et tableaux de variation de φ_a suivant que $a < 0$ ou $a > 0$ (le cas $a = 0$ n'est pas intéressant).

(iii) si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi_a(x) = 0$.

Démonstration (i) Il suffit d'utiliser le théorème de dérivabilité d'une fonction composée. ■

(c) Fonctions racines n^{e}

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\varphi_{\frac{1}{n}}$ est appelée racine n^{e}. Il s'agit donc de la fonction :

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{n}} \end{array} \right.$$

Notation. On posera $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Proposition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors les fonctions $\varphi_{1/n} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sont réciproques l'une de l'autre.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\varphi_{1/n}(\varphi_n(x)) = \varphi_{1/n}(x^n) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x^n)\right) = \exp(\ln(x)) = x$$

et, de la même manière, on obtient $\varphi_n(\varphi_{1/n}(x))$. ■

Conséquence : graphe de $\varphi_{1/n}$ en fonction de celui de φ_n.

(d) Croissances comparées

Le résultat suivant sera démontré ultérieurement.

Proposition (croissances comparées) Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors :

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln(x)^b = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)^b}{x^a} = 0$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^b \, \mathrm{e}^{ax} = 0$$

3) Fonction cosinus, sinus et tangente hyperboliques

(a) Fonctions ch et sh

Définition (cosinus et sinus hyperboliques) Les fonctions cosinus hyperbolique (notée ch) et sinus hyperbolique (notée sh) sont les fonctions :

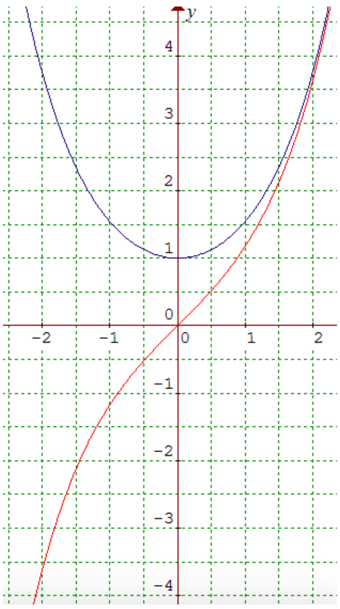
$$\mathrm{ch} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

Les propriétés de ces fonctions sont les suivantes.

Proposition (propriétés de ch et sh) (i) la fonction ch est paire sur $\mathbb{R}$;
(ii) la fonction sh est impaire sur $\mathbb{R}$;
(iii) les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$;
(iv) on a l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$$

Démonstration Il suffit de faire les calculs. ∎



\+ tableaux de variations (limites évidentes)

Remarquons en outre que :
— $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > 0$;
— ch atteint son minimum en 0 (ce minimum vaut 1) ;

(b) Fonction th

Définition (tangente hyperbolique) La fonction tangente hyperbolique (notée th) est la fonction :

$$\mathrm{th} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \end{array} \right.$$

Remarque : on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

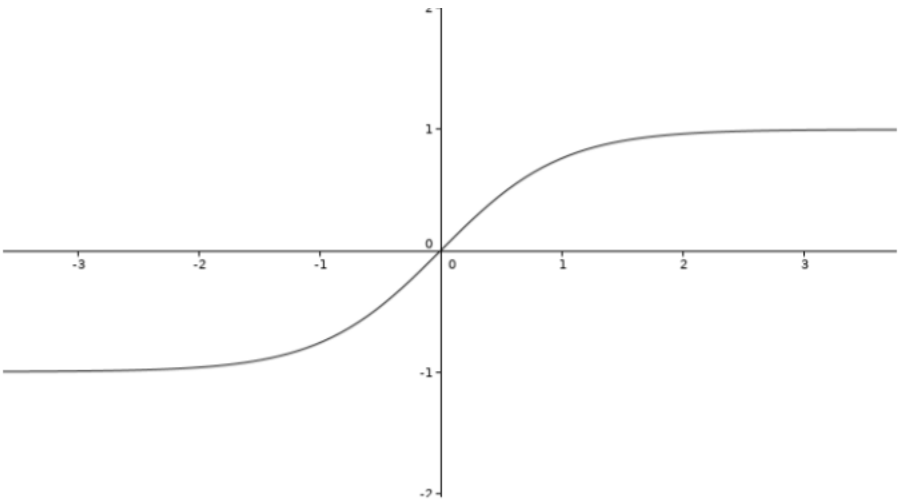
Proposition (propriétés de la fonction th) (i) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2$$

(ii) $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$

(iii) la fonction th est impaire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration immédiat ■



+ tableau de variation