

MATHÉMATIQUES

Concours blanc (4h)

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte quatre pages et est composé d'un exercice et de deux problèmes, tous indépendants les uns des autres.

Exercice.

On considère la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^2 + 5X - 2}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X} \in \mathbb{R}(X)$$

1. Décomposer le polynôme $Q = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle F dans $\mathbb{R}(X)$.
3. Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3, on pose :

$$S_N = \sum_{n=3}^N \frac{n^2 + 5n - 2}{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n}$$

- (a) Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad S_N = \frac{5}{3} + \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N-1}$$

- (b) La suite $(S_N)_{N \geq 3}$ est-elle convergente ? Préciser la limite le cas échéant.

Problème 1 (fonction Γ).

Les deux parties de ce problème ne sont pas indépendantes : les résultats de la partie I sont utiles pour traiter la deuxième partie.

I – Questions préliminaires

1. Rappeler *sans démonstration* :

- l'inégalité de concavité relative à la fonction $\ln$;
- et l'inégalité de convexité relative à la fonction $\exp$.

2. (a) Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

(b) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \geq 1}$ est convergente.

3. (a) Justifier que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) \geq \frac{1}{p+1}$$

(b) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n \geq 1}$ est convergente.

4. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$$

II – Vers la fonction Γ

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \geq 1 + \frac{x}{n+1}$$

(b) En déduire que la suite $(\gamma_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante.

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\ln(x\gamma_n(x)) = x \ln(n) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

(b) En déduire que la suite $(\gamma_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note dans la suite $\Gamma(x)$ la limite de la suite $(\gamma_n(x))_{n \geq 1}$.

7. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) > 0$.

8. Montrer que $\Gamma(1) = 1$.

9. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on commencera par exprimer $\gamma_n(x+1)$ en fonction de $\gamma_n(x)$.

10. Étude de la convexité logarithmique de Γ .

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question 6.(a), montrer que la fonction $\ln \circ \gamma_n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) En déduire que $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

On dit que la fonction Γ est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Conclure que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Problème 2 (diagonalisation d'une matrice).

Dans les parties I et III, A désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

I – Calcul des puissances de A

On pose :

$$J = \frac{1}{4}(A + 3I_3) \quad \text{où} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On souhaite calculer les puissances de la matrice A en utilisant deux méthodes différentes.

1. Première méthode

(a) Expliciter la matrice J et calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Donner la valeur de $\alpha = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}$.

(c) Exprimer A en fonction de J et de I_3 .

En utilisant la formule du binôme de Newton montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un nombre β_n à expliciter tel que $A^n = \alpha J + \beta_n I_3$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter la matrice A^n à l'aide de ses neuf coefficients.

2. Deuxième méthode

On pose :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

(b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$$

(d) Déterminer enfin les puissances de D .

En développant le produit PD^nP^{-1} , on obtiendrait donc A^n . Il n'est pas demandé de le faire.

II – Commutant d'une matrice, propriétés générales

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle commutant de M l'ensemble noté $\mathcal{C}(M)$ suivant :

$$\mathcal{C}(M) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MN = NM\}$$

3. Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$.

4. Montrer que si $N \in \mathcal{C}(M)$ est une matrice inversible, alors $N^{-1} \in \mathcal{C}(M)$.

III – Calcul du commutant de A

Les matrices A et D ci-dessous sont celles introduites dans la partie I.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence suivante :

$$M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$$

6. Calculer le commutant de D .

On montrera que :

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

7. Conclure qu'il existe cinq matrices carrées d'ordre trois, X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 , que l'on explicitera uniquement en fonction des matrices P, P^{-1} et des matrices élémentaires, telles que :

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^5 \alpha_i X_i \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –