

CONCOURS BLANC

un corrigé

Exercice.

1. On a :

$$Q = X^2(X^2 - 2X) - (X^2 - 2X) = (X^2 - 1)(X^2 - 2X) = X(X - 1)(X + 1)(X - 2)$$

Ceci est bien la factorisation de Q en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ car tout polynôme de degré 1 est irréductible sur $\mathbb{R}$.

2. Comme $\deg(X^2 + 5X - 2) < \deg(Q)$, on a $E(F) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{X - 2}$$

et on sait que :

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x - 2}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 2}{x(x + 1)(x - 2)} = -2$$

et :

$$c = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 2}{x(x - 1)(x - 2)} = 1, \quad d = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)F(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 2}{x(x - 1)(x + 1)} = 2$$

La décomposition en éléments simples demandée est donc :

$$F = \frac{1}{X + 1} - \frac{1}{X} + \frac{2}{X - 2} - \frac{2}{X - 1}$$

3. (a) Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. D'après la question 2., on a :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=3}^N F(n) = \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{2}{n-2} - \frac{2}{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + 2 \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{N+1} - \frac{1}{3} + 2 \left(1 - \frac{1}{N-1} \right) \end{aligned}$$

car les sommes obtenues sont télescopiques. On a donc bien :

$$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad S_N = \frac{5}{3} + \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N-1}$$

(b) Comme $\frac{1}{N \pm 1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, on peut conclure que :

$$\text{la suite } (S_N)_{N \geq 3} \text{ est convergente de limite } \frac{5}{3}$$

Problème 1 (fonction Γ).

I – Questions préliminaires

1. Les inégalités sont les suivantes :

$$(\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x) \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x)$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{k - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} \geq 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. L'inégalité précédente nous donne :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \quad (\text{somme télescopique}) \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Ceci démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$$

et on remarque que l'inégalité reste valable pour $n = 1$ (la somme vaut 1 dans ce cas). Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \geq 1}$ est majorée (par 2). Celle-ci est de plus croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

Le théorème de la limite monotone nous permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \geq 1} \text{ est convergente}}$$

3. (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) = -\ln \left(\frac{p}{p+1} \right) = -\ln \left(1 - \frac{1}{p+1} \right)$$

et on sait (d'après l'inégalité de concavité du logarithme) que :

$$\ln \left(1 - \frac{1}{p+1} \right) \leq -\frac{1}{p+1}$$

donc :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \geq \frac{1}{p+1}}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

★ Étudions la monotonie de la suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

d'après l'inégalité précédemment démontrée. La suite u est donc décroissante.

★ Montrons maintenant que la suite u est minorée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de concavité de la fonction $\ln$, on sait que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{1}{k} \geq \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

donc :

$$\begin{aligned} u_n &\geq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) - \ln(n) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

La suite u est donc minorée (par 0).

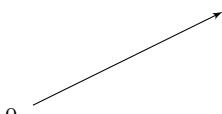
Le théorème de la limite monotone nous permet de conclure que :

la suite u est convergente

4. La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f'(t) &= \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1 - (1+t) + t(1+t)}{1+t} \\ &= \frac{t^2}{1+t} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0	$+\infty$
f	0	

Par conséquent, f est minorée par $f(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \geq 0,$$

soit encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$$

II – Vers la fonction Γ

5. (a) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1 + \frac{1}{n} > 0$, on peut écrire que :

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t \geq 1 + t$$

donc :

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^x \geq 1 + x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

La question 3.(a) nous donne l'inégalité :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \geq \frac{1}{n+1}$$

donc, en multipliant par $x > 0$, il vient :

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \geq \frac{x}{n+1}$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \geq 1 + \frac{x}{n+1}}$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(\gamma_n(x))_{n \geq 1}$ est à valeurs strictement positives donc celle-ci est croissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\gamma_{n+1}(x)}{\gamma_n(x)} \geq 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n+1}(x)}{\gamma_n(x)} &= \frac{(n+1)^x (n+1)!}{x(x+1) \cdots (x+n)(x+n+1)} \times \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{n^x n!} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n+1}{x+n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \frac{n+1}{x+n+1} \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \geq 1 + \frac{x}{n+1},$$

c'est-à-dire :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \geq \frac{x+n+1}{n+1}$$

En multipliant par $\frac{n+1}{x+n+1} \geq 0$ dans cette dernière inégalité, on obtient :

$$\frac{\gamma_{n+1}(x)}{\gamma_n(x)} \geq 1$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la suite } (\gamma_n(x))_{n \geq 1} \text{ est croissante}}$$

6. (a) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(x\gamma_n(x)) &= \ln\left(\frac{n^x n!}{(x+1) \cdots (x+n)}\right) \\ &= \ln(n^x) + \ln(n!) - \sum_{k=1}^n \ln(x+k) \\ &= x \ln(n) + \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(x+k) \\ &= x \ln(n) - \sum_{k=1}^n (\ln(x+k) - \ln(k)) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(x\gamma_n(x)) = x \ln(n) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)}$$

- (b) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On reprend le résultat obtenu à la question précédente :

$$\ln(x\gamma_n(x)) = x \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^n \left[\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right]$$

On a démontré à la question 3.(b) que la suite $\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} - \ln(p)\right)_{p \geq 1}$ est minorée par 0 donc :

$$\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 0$$

D'autre part, on sait d'après la question 4. que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \leq \frac{x^2}{2k^2}$$

donc, en sommant les inégalités,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right] &\leq \frac{x^2}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &\leq x^2 \end{aligned}$$

car on a montré à la question 2.(b) que la suite $\left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2}\right)_{p \geq 1}$ est majorée par 2. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(x\gamma_n(x)) \leq x^2$$

En composant avec la fonction exponentielle (qui est croissante sur $\mathbb{R}$) puis en divisant par $x > 0$, on obtient que la suite $(\gamma_n(x))_{n \geq 1}$ est majorée par $\frac{e^{x^2}}{x}$. Comme cette suite est de plus croissante d'après la question 5.(b), le théorème de la limite monotone nous permet de conclure que :

la suite $(\gamma_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On sait que la suite $(\gamma_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante donc sa limite $\Gamma(x)$ est telle que :

$$\Gamma(x) \geq \gamma_1(x),$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma(x) \geq \frac{1}{x(x+1)} > 0$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) > 0$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\gamma_n(1) = \frac{n \times n!}{1 \times 2 \times \dots \times (n+1)} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

donc :

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(1) = 1$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \gamma_n(x+1) &= \frac{n^{x+1}n!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)(x+n+1)} \\ &= \frac{x}{x+n+1} \times n \times \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \\ &= x \times \frac{n}{n+x+1} \times \gamma_n(x) \\ &= x \times \frac{1}{1 + \frac{x+1}{n}} \times \gamma_n(x) \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{x+1}{n}} = 1$ donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité, on obtient bien par définition de $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $f_n = \ln \circ \gamma_n$. Il s'agit de montrer que la fonction f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après la question 3.(a), on a :

$$f_n(x) = x \ln(n) - \ln(x) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

La fonction f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f_n'(x) = \ln(n) - \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$$

puis :

$$f_n''(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} \geq 0$$

On en déduit que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit :

$$\text{la fonction } \ln \circ \gamma_n \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*$$

(b) On veut montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in [0, 1], \quad \ln(\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda \ln(\Gamma(x)) + (1-\lambda) \ln(\Gamma(y))$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction γ_n est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(\gamma_n(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda \ln(\gamma_n(x)) + (1-\lambda) \ln(\gamma_n(y)) \quad (*)$$

On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(t)$$

et la fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*) :

$$\ln(\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq \lambda \ln(\Gamma(x)) + (1 - \lambda) \ln(\Gamma(y))$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } \ln \circ \Gamma \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*}$$

(c) Soient $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\ln(\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq \lambda \ln(\Gamma(x)) + (1 - \lambda) \ln(\Gamma(y))$$

On sait également que la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\lambda \ln(\Gamma(x)) + (1 - \lambda) \ln(\Gamma(y)) \leq \ln(\lambda \Gamma(x) + (1 - \lambda) \Gamma(y))$$

Les deux inégalités précédentes fournissent donc :

$$\ln(\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq \ln(\lambda \Gamma(x) + (1 - \lambda) \Gamma(y))$$

En composant par la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \Gamma(x) + (1 - \lambda) \Gamma(y)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*}$$

Problème 2 (diagonalisation d'une matrice).

I – Calcul des puissances de A

1. Première méthode

(a) On a $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis $J^2 = J$. Par une récurrence immédiate, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J^n = J \quad (\text{et } J^0 = I_3)}$$

En effet, l'égalité est claire si $n = 1$ et si on l'égalité $J^n = J$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$J^{n+1} = J J^n = J J = J^2 = J$$

(b) D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\boxed{\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - (-3)^n = 1 - (-3)^n}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\boxed{A = 4J - 3I_3}$$

Les matrices $4J$ et $-3I_3$ commutent car $-3I_3$ est une matrice scalaire. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k J^k (-3I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k = \underbrace{(-3)^n I_3}_{k=0} + \alpha J$$

car on sait que $J^k = J$ si $k \geq 1$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha J + (-3)^n I_3 \quad (\text{donc } \beta_n = (-3)^n \text{ convient})}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$A^n = (1 - (-3)^n) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (-3)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1 + 2(-3)^n & 0 & -2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}}$$

2. Deuxième méthode

(a) Soient $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} -2x & + & z & = & X & \text{L}_1 \\ x & + & y & = & Y & \text{L}_2 \\ x & & - & z & = & Z & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x & + & z & = & X & \text{L}_1 \\ & 2y & + & z & = & X + 2Y & \text{L}_2 \leftarrow 2\text{L}_2 + \text{L}_1 \\ & & - & z & = & X + 2Z & \text{L}_3 \leftarrow 2\text{L}_3 + \text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & = & -X - Z \\ y & = & X + Y + Z \\ z & = & -X - 2Z \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) Il suffit de faire le calcul.

(c) On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On a $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$ donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. D'après la question précédente, on a $A = PDP^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} && \text{(par associativité du produit matriciel)} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

car $P^{-1}P = I_3$. L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut donc conclure que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$

(d) La matrice D étant diagonale, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

II – Commutant d'une matrice, propriétés générales

3. On a clairement $\mathcal{C}(M) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ La matrice nulle 0_n appartient à $\mathcal{C}(M)$ car $M0_n = 0_n$ et $0_n M = 0_n$. Ainsi, $\mathcal{C}(M)$ est non vide.

★ Soient $X, Y \in \mathcal{C}(M)$. En utilisant la bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= MX + MY = XM + YM && \text{(car } X, Y \in \mathcal{C}(M)) \\ &= (X + Y)M, \end{aligned}$$

à nouveau par bilinéarité du produit matriciel. Ainsi, $X + Y \in \mathcal{C}(M)$.

★ Soit $X \in \mathcal{C}(M)$. Par bilinéarité du produit matriciel, et puisque $X \in \mathcal{C}(M)$,

$$(-X)M = -XM = -MX = M(-X)$$

donc $-X \in \mathcal{C}(M)$.

Finalement :

$\mathcal{C}(M) \text{ est un sous-groupe de } (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$

4. Soit $N \in \mathcal{C}(M) \cap \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $MN = NM$. La matrice N est inversible donc, en multipliant à gauche et à droite par N^{-1} dans cette égalité, on obtient :

$$N^{-1}(MN)N^{-1} = N^{-1}(NM)N^{-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad N^{-1}MI_n = I_nMN^{-1}$$

par associativité du produit matriciel. Donc $N^{-1}M = MN^{-1}$, ce qui signifie que $N^{-1} \in \mathcal{C}(M)$. Finalement :

$$\boxed{\forall N \in \mathcal{C}(M), \quad N \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \implies N^{-1} \in \mathcal{C}(M)}$$

III – Calcul du commutant de A

5. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On sait que $A = PDP^{-1}$. Alors (on utilise encore l'associativité du produit matriciel) :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\iff MA = AM \iff MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \\ &\iff P^{-1}MPDP^{-1}P = P^{-1}PDP^{-1}MP \\ &\iff (P^{-1}MP)D = D(P^{-1}MP) \quad (\text{car } P^{-1}P = I_3) \\ &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad M \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)}$$

6. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{C}(D) &\iff DN = ND \iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & b & c \\ -3d & e & f \\ -3g & h & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette égalité matricielle est équivalente à la donnée des quatre égalités :

$$-3b = b \quad \text{et} \quad -3c = c \quad \text{et} \quad -3d = d \quad \text{et} \quad -3g = g,$$

qui sont encore équivalentes à $b = c = d = g = 0$. On en déduit que :

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} \mid a, e, f, h, i \in \mathbb{R} \right\},$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après les questions 5. et 6., on a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\iff \exists a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, \quad M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\iff \exists a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, \quad M = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{2,3}P^{-1} + dPE_{3,2}P^{-1} + ePE_{3,3}P^{-1} \end{aligned}$$

par bilinéarité du produit matriciel et en notant $E_{i,j}$ la matrice élémentaire (carrée d'ordre 3) dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut 1 (et les autres sont nuls). En posant finalement :

$$X_1 = PE_{1,1}P^{-1}, \quad X_2 = PE_{2,2}P^{-1}, \quad X_3 = PE_{2,3}P^{-1}, \quad X_4 = PE_{3,2}P^{-1} \quad \text{et} \quad X_5 = PE_{3,3}P^{-1},$$

on a bien l'égalité :

$$\boxed{\mathcal{C}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^5 \alpha_i X_i \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \right\}}$$