

# CONCOURS BLANC

*un corrigé*

## Exercice.

1. Soient  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Comme  $f$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\ln(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq \lambda \ln(f(x)) + (1 - \lambda) \ln(f(y))$$

Or la fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc :

$$\lambda \ln(f(x)) + (1 - \lambda) \ln(f(y)) \leq \ln(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$$

Par transitivité de la relation  $\leq$ , on obtient :

$$\ln(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq \ln(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$$

Par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ , il vient :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Ainsi :

la fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Démontrons les deux propriétés par récurrence (simultanément).

★ On a  $f(1) = 1$  (propriété (i)) et  $0! = 1$ . De plus, d'après (ii), on a :

$$f(x+1) = xf(x) = f(x) \prod_{k=0}^0 (x+k)$$

Les deux égalités sont donc vraies au rang  $n = 1$ .

★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que :

$$f(n) = (n-1)! \quad \text{et} \quad f(x+n) = f(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)$$

Alors (en utilisant (ii)) :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= nf(n) = n(n-1)! = n! \quad \text{et} \quad f(x+n+1) = (x+n)f(x+n) \\ &= \underbrace{(x+n)}_{k=n} f(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \\ &= f(x) \prod_{k=0}^n (x+k) \end{aligned}$$

Les égalités sont donc vraies au rang  $n+1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = (n-1)!) \quad \text{et} \quad \left( \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x+n) = f(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right)$

3. Soit  $x \in ]0, 1]$ .

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Comme  $x \in ]0, 1]$ , on a  $n - 1 < n < n + x \leq n + 1$ . La convexité de la fonction  $\ln \circ f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et les inégalités des pentes permettent d'écrire que :

$$\frac{\ln(f(n)) - \ln(f(n-1))}{n - (n-1)} \leq \frac{\ln(f(n+x)) - \ln(f(n))}{(n+x) - n} \leq \frac{\ln(f(n+1)) - \ln(f(n))}{(n+1) - n}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \ln(f(n)) - \ln(f(n-1)) \leq \frac{\ln(f(n+x)) - \ln(f(n))}{x} \leq \ln(f(n+1)) - \ln(f(n))}$$

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On sait que  $f(n+1) = n!$ ,  $f(n) = (n-1)!$  et  $f(n-1) = (n-2)!$  donc :

$$\ln(f(n)) - \ln(f(n-1)) = \ln\left(\frac{(n-1)!}{(n-2)!}\right) = \ln(n-1) \quad \text{et} \quad \ln(f(n+1)) - \ln(f(n)) = \ln(n)$$

Les inégalités obtenues à la question précédente se réécrivent donc (en multipliant par  $x > 0$ ) :

$$x \ln(n-1) \leq \ln(f(n+x)) - \ln((n-1)!) \leq x \ln(n),$$

i.e. :

$$\ln((n-1)^x (n-1)!) \leq \ln(f(n+x)) \leq \ln(n^x (n-1)!)$$

La croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$  permet de conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad (n-1)^x (n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x (n-1)!}$$

- (c) Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . D'après les questions 2. et 3.(b), on obtient en divisant par  $\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) > 0$  :

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$$

L'inégalité de droite ci-dessus est précisément la majoration de  $f(x)$  souhaitée. Par ailleurs :

$$f(x) \left(\frac{n}{n-1}\right)^x \geq \frac{n^x}{(n-1)^x} \times \frac{(n-1)^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} = \frac{n^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \leq f(x) \left(\frac{n}{n-1}\right)^x}$$

On a :

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^x = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right)^x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

par continuité de la fonction  $t \mapsto t^x$  en 1 (cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ) et d'après la caractérisation séquentielle de la continuité. Le théorème des gendarmes et les inégalités précédentes permettent de conclure que :

$$\boxed{f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}}$$

# Problème (formule de Stirling).

## Partie A : Préliminaires

1. On a :

$$\boxed{J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{J_1 = \left[ -\cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$$

Par ailleurs, la formule de duplication du cosinus nous donne :

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \, dt = \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad i.e. \quad \boxed{J_2 = \frac{\pi}{4}}$$

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $t \mapsto \sin(t)^n$  est continue et positive sur le segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Par positivité de l'intégrale, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \, dt \geq 0}$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t)^{n+1} - \sin(t)^n) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n (\sin(t) - 1) \, dt$$

Pour tout  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\sin(t) \leq 1$  et  $\sin(t)^n \geq 0$  donc  $\sin(t)^n (\sin(t) - 1) \leq 0$ . Par positivité de l'intégrale, il vient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} - J_n \leq 0}$$

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On effectue le changement de variable indiqué dans l'intégrale  $I_n$  :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^n \times (-1) \, du = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin(u)^n \, du \quad (\text{formule de symétrie}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)^n \, du \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = J_n}$$

## Partie B : Obtention d'une relation de récurrence

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos(t) & v(t) &= \cos(t)^{n+1} \\ u(t) &= \sin(t) & v'(t) &= -(n+1) \sin(t) \cos(t)^n \end{aligned}$$

Comme  $u, v \in \mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ , on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t)^{n+1} \, dt = \underbrace{\left[ \sin(t) \cos(t)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1) \sin(t)^2 \cos(t)^n \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2) \cos(t)^n \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)^n - \cos(t)^{n+2}) \, dt \\ &= (n+1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{n+2} \, dt \right) \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

On en déduit que  $I_{n+2} + (n+1)I_{n+2} = (n+1)I_n$ , i.e.  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ . En divisant par  $n+2 \neq 0$ , on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$$

4. On procède par récurrence.

★ On sait que  $I_0 = J_0 = \frac{\pi}{2}$  et on a :

$$\frac{(2 \times 0)!}{4^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1 \times 1} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = I_0$$

donc l'égalité est vérifiée au rang 0.

★ Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ . D'après la question 3., on a :

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} = I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{4(p+1)^2 4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{4^{p+1}((p+1) \times p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(p+1))!}{4^{p+1}((p+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang  $p+1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

5. On utilise à nouveau un raisonnement par récurrence.

★ On sait que  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  et que  $I_1 = J_1 = 1$  donc :

$$(0+1)I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$$

L'égalité est donc vraie au rang 0.

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ . D'après la question 3., on sait que  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ .

En multipliant par  $(n+2)I_{n+1}$ , on obtient :

$$(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$$

par hypothèse de récurrence. L'égalité est donc vérifiée au rang  $n+1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}}$$

## Partie C : Vers la formule de Stirling

6. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{2(n-t)+1}{2t} dt &= \int_n^{n+1} \frac{2n+1-2t}{2t} dt = \int_n^{n+1} \left( \frac{2n+1}{2t} - 1 \right) dt \\ &= \left[ \frac{2n+1}{2} \ln(t) - t \right]_n^{n+1} \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln(n+1) - (n+1) - \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln(n) + n \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_n^{n+1} \frac{2(n-t)+1}{2t} dt}$$

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On effectue le changement de variable  $t = n + u$  (i.e.  $u = t - n$ ) dans l'intégrale de la question précédente :

$$\int_n^{n+1} \frac{2(n-t)+1}{2t} dt = \int_0^1 \frac{1-2u+1}{2(u+n)} du$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 \frac{1-2u}{2(n+u)} du}$$

7. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

★ Soit  $u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{n+t}$  étant décroissante sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , on a :

$$\frac{1}{2(n+\frac{1}{2})} \leq \frac{1}{2(n+u)} \leq \frac{1}{2n} \quad i.e. \quad \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2(n+u)} \leq \frac{1}{2n}$$

De plus  $1-2u \geq 0$  (car  $u \leq \frac{1}{2}$ ) donc :

$$\forall u \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1-2u}{2n+1} \leq \frac{1-2u}{2(n+u)} \leq \frac{1-2u}{2n}$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2u) du \leq r_n \leq \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2u) du$$

Or :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2u) du = \left[u - u^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

On en déduit bien que :

$$\boxed{\frac{1}{4(2n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{8n}}$$

★ Soit  $u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . On a :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2(n+u)} \leq \frac{1}{2(n+\frac{1}{2})} \quad \text{puis} \quad \frac{1-2u}{2n+1} \leq \frac{1-2u}{2(n+u)} \leq \frac{1-2u}{2(n+1)}$$

car  $1-2u \leq 0$ . Par croissance et linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\frac{1}{2n+1} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2u) du \leq s_n \leq \frac{1}{2(n+1)} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2u) du,$$

avec :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2u) du = \left[u - u^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 = (1-1) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

Par conséquent :

$$\boxed{-\frac{1}{4(2n+1)} \leq s_n \leq -\frac{1}{8(n+1)}}$$

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En sommant membre à membre les inégalités obtenues à la question précédente, on a pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  (en utilisant le fait que  $u_k = r_k + s_k$ ) :

$$0 \leq u_k \leq \frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k+1)} \quad i.e. \quad \boxed{0 \leq u_k \leq \frac{1}{8k(k+1)}}$$

En sommant ces inégalités, il vient :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Or la somme dans le membre de droite est télescopique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq \frac{1}{8}}$$

- (c) La suite  $S$  est croissante et majorée (par  $1/8$ ) donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite  $S$  est convergente. Notons  $\ell \in \mathbb{R}$  la limite de cette suite. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad v_n = e^{1-S_{n-1}}$$

Or  $S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  donc, par continuité de la fonction exponentielle au point  $1 - \ell$  (et d'après la caractérisation séquentielle de la continuité), on a  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{1-\ell}$ . La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives sur  $\mathbb{R}$ , on a  $e^{1-\ell} > 0$ . Finalement :

$$\boxed{\text{la suite } v \text{ est convergente de limite } C \text{ strictement positive}}$$

8. On raisonne par récurrence.

★ On a  $S_1 = u_1 = \frac{3}{2} \ln(2) - 1$  et :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \ln(2) - 1 - \underbrace{\ln(1!)}_{=0} = \frac{3}{2} \ln(2) - 1 = u_1$$

donc l'égalité est vérifiée au rang 1.

★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - \ln(n!)$ . Alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^n u_k + u_{n+1} \\ &= S_n + u_{n+1} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - \ln(n!) + \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - 1 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - (n+1) - \ln(n!) + \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+2) - \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) \\ &= \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+2) - (n+1) - (\ln(n!) + \ln(n+1)) \end{aligned}$$

et :

$$\ln(n!) + \ln(n+1) = \ln(n! \times (n+1)) = \ln((n+1)!)$$

donc l'égalité est vérifiée au rang  $n+1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - \ln(n!)}$$

9. Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Par définition de la suite  $v$ , et en utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \exp(1 - S_{n-1}) = \exp\left[-\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n + \ln((n-1)!)\right] \\ &= n^{-n+\frac{1}{2}} e^n (n-1)! \\ &= \frac{(n-1)! \times \sqrt{n}}{n^n e^{-n}} \times \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}_{=1} \end{aligned}$$

Comme enfin  $n(n-1)! = n!$ , on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad v_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}}$$

On a  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C > 0$  donc  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n}$ . Par conséquent :

$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

## Problème 2 (matrices magiques et semi-magiques).

### Partie I : généralités

1. La somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne de la matrice  $J$  est égale à  $n \times 1 = n$  donc :

$$\boxed{J \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \sigma(J) = n}$$

2. Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a  $A + \lambda B = (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

★ Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\sum_{j=1}^n (A + \lambda B)_{i,j} = \sum_{j=1}^n (a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^n b_{i,j} = \sigma(A) + \lambda \sigma(B)$$

car les matrices  $A$  et  $B$  sont semi-magiques (et par définition de  $\sigma(A)$  et  $\sigma(B)$ ).

★ De la même façon, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n (A + \lambda B)_{i,j} = \sigma(A) + \lambda \sigma(B)$$

La somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne de la matrice  $A + \lambda B$  est la même donc :

$$\boxed{A + \lambda B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \sigma(A + \lambda B) = \sigma(A) + \lambda \sigma(B) \text{ par définition de } \sigma(A + \lambda B)}$$

3. (a) Tout d'abord,  $\text{SMag}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$  est non vide car (par exemple) la matrice  $J$  est semi-magique. Enfin, on sait d'après la question précédente (avec  $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$ ) que pour tous  $A, B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$ , on a  $A - B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi :

$$\boxed{\text{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

- (b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$(JA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n J_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \quad \text{et} \quad (AJ)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} J_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}$$

On raisonne par double implication.

★ On suppose que  $A \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$ . Pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a alors (par définition d'une matrice semi-magique) :

$$\sum_{k=1}^n a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} = \sigma(A) \quad \text{i.e.} \quad (JA)_{i,j} = (AJ)_{i,j} = \sigma(A)$$

Or  $\sigma(A)J$  est la matrice dont tous les coefficients valent  $\sigma(A)$  donc  $JA = AJ = \sigma(A)J$ . La propriété est donc démontrée avec le nombre réel  $\lambda = \sigma(A)$ .

★ Réciproquement, supposons qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $JA = AJ = \lambda J$ . Alors :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (JA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,j} = \lambda \quad \text{et} \quad (AJ)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} = \lambda$$

La matrice  $A$  est donc semi-magique et  $\sigma(A) = \lambda$ .

Finalement :

$$\boxed{A \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ si et seulement s'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } JA = AJ = \lambda J \text{ et, dans ce cas, } \lambda = \sigma(A)}$$

- (c) Soient  $A, B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$ . D'après (\*), on a  $JA = AJ = \sigma(A)J$  et  $JB = BJ = \sigma(B)J$ . En utilisant l'associativité du produit matriciel, on a :

$$J(AB) = (JA)B = (\sigma(A)J)B = \sigma(A)JB = \sigma(A)\sigma(B)J$$

De la même manière, on a  $(AB)J = \sigma(A)\sigma(B)J$ . D'après (\*), on peut conclure que :

$$AB \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$$

- (d) On sait que  $(\text{SMag}_n(\mathbb{R}), +)$  est un sous-groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . De plus,  $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$  est stable par produit (d'après la question précédente) et la matrice  $I_n$  appartient à  $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$  (la somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne est égale à 1) donc :

$$\text{SMag}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-anneau de } (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$$

- (e) Soit  $A \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . On a  $JA = AJ = \sigma(A)J$  et  $A$  est inversible donc (en multipliant à gauche par  $A^{-1}$ ) :

$$A^{-1}JA = J = \sigma(A)A^{-1}J$$

La dernière égalité implique que  $\sigma(A) \neq 0$  (puisque  $J \neq 0_n$ ) et fournit l'égalité  $A^{-1}J = \frac{1}{\sigma(A)}J$ . En multipliant maintenant à droite par  $A^{-1}$  (dans l'égalité  $JA = \sigma(A)J$ ), on a :

$$J = \sigma(A)JA^{-1} \quad \text{donc} \quad JA^{-1} = \frac{1}{\sigma(A)}J$$

Ainsi  $A^{-1}$  est une matrice semi-magique et  $\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$ . Finalement :

$$\sigma(A) \neq 0, \quad A^{-1} \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$$

## Partie II : matrices magiques dans le cas $n = 3$

4. Soient  $A, B \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont semi-magiques donc  $A + \lambda B \in \text{SMag}_3(\mathbb{R})$  et  $\sigma(A + \lambda B) = \sigma(A) + \lambda\sigma(B)$  (d'après la question 2.). De plus :

$$\begin{aligned} (A + \lambda B)_{1,1} + (A + \lambda B)_{2,2} + (A + \lambda B)_{3,3} &= a_{1,1} + \lambda b_{1,1} + a_{2,2} + \lambda b_{2,2} + a_{3,3} + \lambda b_{3,3} \\ &= a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + \lambda(b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3}) \\ &= \sigma(A) + \lambda\sigma(B) \end{aligned}$$

car les matrices  $A$  et  $B$  sont magiques. De la même manière, on a :

$$(A + \lambda B)_{1,3} + (A + \lambda B)_{2,2} + (A + \lambda B)_{3,1} = \sigma(A) + \lambda\sigma(B)$$

La matrice  $A + \lambda B$  est donc magique. Ainsi :

$$\forall A, B \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad A + \lambda B \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$$

5. Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= 3\sigma(A) - 2\sigma(A) \\ &= (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3}) + (a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3}) - (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}) - (a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1}) \\ &= -a_{2,2} + (a_{1,2} + a_{3,2}) + (a_{2,1} + a_{2,3}) \\ &= -a_{2,2} + (\sigma(A) - a_{2,2}) + (\sigma(A) - a_{2,2}) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sigma(A) = 3a_{2,2}$$

6. Soit  $A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$ . La somme des coefficients sur la  $i^{\text{e}}$  ligne (respectivement colonne) de  $A^T$  est la somme des coefficients sur la  $i^{\text{e}}$  colonne (respectivement ligne) de  $A$ . Toutes ces sommes sont égales car  $A$  est magique. Il en va de même pour les deux diagonales. Donc :

$$\forall A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad A^T \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}) \text{ et } \sigma(A^T) = \sigma(A)$$

7. Soit  $A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$  tels que  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  étant magique, la relation (\*\*) nous donne le système :

$$\begin{cases} a + b + c &= 3d \\ b + d + e &= 3d \\ c + e + f &= 3d \\ a + d + f &= 3d \\ c + d + c &= 3d \end{cases},$$

d'où l'on tire que  $c = d$ ,  $e = a$  et  $f = b$ , i.e.  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ . Par ailleurs,  $3c = a + c + b$  donc  $b = 2c - a$ .

Finalement,  $A = \begin{pmatrix} a & 2c - a & c \\ 2c - a & c & a \\ c & a & 2c - a \end{pmatrix}$ . Réciproquement, on vérifie facilement que si  $A$  est de cette forme, alors elle est une matrice magique symétrique. Ainsi :

$$\boxed{\forall A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \iff \exists a, c \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} a & 2c - a & c \\ 2c - a & c & a \\ c & a & 2c - a \end{pmatrix}}$$

On procède de la même manière pour une matrice antisymétrique. On trouve :

$$\boxed{\forall A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \iff \exists a \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}}$$

8. (a) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : supposons qu'il existe  $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  tel que  $M = S + A$ .

Alors  $M^T = S^T + A^T = S - A$  par définition de  $S$  et  $A$ . Ces deux relations fournissent les égalités :

$$S = \frac{M + M^T}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{M - M^T}{2}$$

Ainsi, si  $S$  et  $A$  existent, alors elles sont uniquement déterminées.

★ **Synthèse** : on vérifie aisément que les matrices  $S$  et  $A$  obtenues précédemment sont respectivement symétrique et antisymétrique et que  $M = S + A$ .

Ainsi :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! (S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), M = S + A}$$

(b) Si  $M \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$ , alors les matrices  $S = \frac{M + M^T}{2}$  et  $A = \frac{M - M^T}{2}$  sont magiques (d'après les questions 4. et 6.) et elles sont respectivement symétrique et antisymétrique. D'après la question précédente, on peut donc conclure que :

toute matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique

9. On raisonne par double inclusion.

★ Soit  $M \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$ . D'après la question précédente, il existe des matrices magiques  $S, A$  respectivement symétrique et antisymétrique telles que  $M = S + A$ . D'après la question 7., il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que :

$$S = \begin{pmatrix} a & 2b - a & b \\ 2b - a & b & a \\ b & a & 2b - a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & c & -c \\ -c & 0 & c \\ c & -c & 0 \end{pmatrix} = cL$$

En résolvant l'équation  $S = \alpha J + \beta K$ , d'inconnue  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , on trouve que  $\alpha = b$  et  $\beta = a - b$ . Ainsi :

$$M = BJ + (a - b)K + cL$$

Ceci démontre l'inclusion  $\text{Mag}_3(\mathbb{R}) \subset \{\alpha J + \beta K + \gamma L \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ .

★ Les matrices  $J, K$  et  $L$  sont magiques (vérification immédiate) donc, d'après la question 4., la matrice  $\alpha J + \beta K + \gamma L$  est magique pour tous  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Ceci démontre l'inclusion réciproque.

Finalement :

$$\boxed{\text{Mag}_3(\mathbb{R}) = \{\alpha J + \beta K + \gamma L \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}}$$