

MATHÉMATIQUES

Concours blanc (8h-12h)

- La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.
- La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte cinq pages et est composé d'un exercice et deux problèmes, tous indépendants.

Exercice.

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) $f(1) = 1$;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = xf(x)$;
- (iii) f est *log-convexe* sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui signifie que la fonction $\ln \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

La question 1. est indépendante de la suite de l'exercice.

1. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = (n-1)!) \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x+n) = f(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \right)$$

3. Soit $x \in]0, 1]$.

- (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$\ln(f(n)) - \ln(f(n-1)) \leq \frac{\ln(f(n+x)) - \ln(f(n))}{x} \leq \ln(f(n+1)) - \ln(f(n))$$

- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x (n-1)!$$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \leq f(x) \left(\frac{n}{n-1} \right)^x$$

et conclure que :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \quad (\text{formule de Gauss})$$

Problème 1 (formule de Stirling).

Quelques rappels d'intégration.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

- ▷ Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \mu \int_a^b g(x) \, dx$ (linéarité de l'intégrale).
- ▷ Si pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$ (croissance de l'intégrale).
- ▷ Si pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ (positivité de l'intégrale).
- ▷ Pour tout $c \in [a, b]$, on a $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$ (relation de Chasles).

Étant donnée deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulant pas, on dit que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont *équivalentes*, noté $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Le but de ce problème est de démontrer le résultat suivant.

Théorème (De Moivre/Stirling)

On a l'équivalent suivant de $n!$ quand n tend vers $+\infty$:

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Historiquement, Abraham DE MOIVRE¹ a dans un premier temps établi l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Dans ce problème, nous allons démontrer cette estimation sans chercher à calculer la constante C . On doit à James STIRLING² la valeur de C (elle vaut donc $C = \sqrt{2\pi}$).

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \, dt$$

Partie A : préliminaires

1. Calculer les intégrales J_0 , J_1 et J_2 .
2. Dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque.
 - (a) Justifier que $J_n \geq 0$.
 - (b) Montrer que $J_{n+1} - J_n \leq 0$.
 - (c) En utilisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, établir que $I_n = J_n$.

On a donc établi que les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont égales, positives et décroissantes.

1. mathématicien Français (1667-1754)
 2. mathématicien Écossais (1692-1770)

Partie B : obtention d'une relation de récurrence

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4. En déduire par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

5. En utilisant la question 3., établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$$

Partie C : vers la formule de Stirling

On définit trois suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$, $S = (S_n)_{n \geq 1}$ et $v = (v_n)_{n \geq 2}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

et, si $n \geq 2$, on pose $v_n = e^{1-S_{n-1}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\int_n^{n+1} \frac{2(n-t)+1}{2t} dt = u_n$.

(b) À l'aide d'un changement de variable, en déduire que $u_n = \int_0^1 \frac{1-2u}{2(n+u)} du$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-2u}{2(n+u)} du \quad \text{et} \quad s_n = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-2u}{2(n+u)} du,$$

de sorte que $u_n = r_n + s_n$.

(a) Montrer les encadrements suivants :

$$\frac{1}{4(2n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{8n} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{4(2n+1)} \leq s_n \leq -\frac{1}{8(n+1)}$$

(b) En déduire un encadrement de u_n , puis montrer que $S_n \leq \frac{1}{8}$.

On admet que la suite S est croissante.

(c) En déduire que la suite v est convergente de limite strictement positive.

On note C la limite de la suite v .

8. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - \ln(n!)$$

9. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad v_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$$

et conclure.

Problème 2 (matrices magiques et semi-magiques).

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On souhaite étudier la notion de matrice *semi-magique* définie comme suit.

Définition (matrice semi-magique)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite *semi-magique* s'il existe $\sigma(A) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sigma(A) \right) \quad \text{et} \quad \left(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sigma(A) \right)$$

Autrement dit, A est une matrice semi-magique si et seulement si toutes ses lignes et toutes ses colonnes donnent la même somme.

On note $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I : généralités

On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Montrer que la matrice J est semi-magique et expliciter $\sigma(J)$.
2. Soient $A, B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $A + \lambda B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$ et établir que :

$$\sigma(A + \lambda B) = \sigma(A) + \lambda \sigma(B)$$

3. Étude de l'ensemble $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$

- (a) Justifier que $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$.
- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir que :

$$A \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, JA = AJ = \lambda J) \quad (*)$$

et exprimer λ en fonction de $\sigma(A)$.

- (c) En déduire que :

$$\forall A, B \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}), \quad AB \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$$

- (d) En utilisant (*), établir que $\text{SMag}_n(\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (e) Soit $A \in \text{SMag}_n(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$. En utilisant (*), montrer que $\sigma(A) \neq 0$, $A^{-1} \in \text{SMag}_n(\mathbb{R})$ et $\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$.

Partie II : matrices magiques dans le cas $n = 3$

Dans toute cette partie, on se place dans le cas $n = 3$ et on étudie les matrices *magiques* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition (matrice magique)

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *magique* si elle est semi-magique et si de plus :

$$\sigma(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = a_{1,3} + a_{2,2} + a_{3,1}$$

On note $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Soient $A, B \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $A + \lambda B \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

5. Montrer que :

$$\forall A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R}), \quad \sigma(A) = 3a_{2,2} \quad (**)$$

6. Montrer que si $A \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

7. À l'aide de (**), déterminer quelles sont les matrices symétriques et antisymétriques de $\text{Mag}_3(\mathbb{R})$.

8. (a) Montrer que (ici uniquement, n est quelconque) :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists! (S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), M = S + A,$$

où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) En déduire que toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique.

9. Conclure que :

$$\text{Mag}_3(\mathbb{R}) = \{ \alpha J + \beta K + \gamma L \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \},$$

où :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

– FIN DE L'ÉPREUVE –