

CONCOURS BLANC

un corrigé

Problème 1.

Partie A – étude des intégrales de Wallis

1. On a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ et :

$$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi :

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = 1 \quad \text{et} \quad W_2 = \frac{\pi}{4}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n (\cos(t) - 1) dt$$

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(t)^n (\cos(t) - 1) \leq 0$ car $\cos(t)^n \geq 0$ et $\cos(t) \leq 1$. La propriété de positivité de l'intégrale implique que $W_{n+1} - W_n \leq 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (W_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t)^{n+1} dt$. On pose :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos(t) & v(t) &= \cos(t)^{n+1} \\ u(t) &= \sin(t) & v'(t) &= -(n+1) \sin(t) \cos(t)^n \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \underbrace{\left[\sin(t) \cos(t)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1) \sin(t)^2 \cos(t)^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2) \cos(t)^n dt \\ &= (n+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{n+2} dt \right) \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en multipliant par W_{n+1} dans l'égalité précédente :

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } ((n+1)W_nW_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante}}$$

La valeur de la constante est $(0+1)W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$. En divisant par $W_n > 0$ (*admis dans l'énoncé*), on obtient $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. Or $\frac{W_{n+2}}{W_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$ d'après la question 3. donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1}$$

6. Comme $\frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, les inégalités obtenues à la question précédente et le théorème des gendarmes impliquent que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. Par ailleurs, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nW_n^2 = (n+1)W_nW_{n+1} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{W_n}{W_{n+1}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{W_n}{W_{n+1}}$$

On a donc bien :

$$\boxed{nW_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2} \text{ puis } \sqrt{n}W_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

par positivité de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et par continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en $\frac{\pi}{2}$.

Partie B – calcul de l'intégrale de Gauss

7. Soit $x \in [1, +\infty[$. D'après la relation de Chasles, on a $F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_x^1 e^{-t^2} dt$. Pour tout $t \in [1, x]$, on a $t^2 \geq t$ (en effet, $t^2 - t = t(t-1) \geq 0$) donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ (par décroissance de la fonction $u \mapsto e^{-u}$ sur \mathbb{R}). Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens : $x \geq 1$), on obtient :

$$\int_x^1 e^{-t^2} dt \leq \int_x^1 e^{-t} dt$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \quad F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_x^1 e^{-t} dt}$$

Or $\int_x^1 e^{-t} dt = e^{-1} - e^{-x} \leq e^{-1}$ donc, en posant $M = \int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1} \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad F(x) \leq M$$

Autrement dit, la fonction F est majorée par M sur $[1, +\infty[$. De plus, F est croissante sur $[1, +\infty[$ (puisque celle-ci est dérivable sur $[1, +\infty[$ de dérivée la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ qui est positive). Le théorème de la limite monotone permet de conclure que :

$\boxed{\text{la fonction } F \text{ admet une limite finie en } +\infty}$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Remarquons que l'inégalité de gauche est évidente pour $u = n$ (le membre de gauche est nul et $e^{-n^2} \geq 0$). Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on sait que $\ln(1+x) \leq x$ donc, pour tout $u \in [0, n[$, on a (puisque $-\frac{u^2}{n^2} > -1$) :

$$\ln\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right) \leq -\frac{u^2}{n^2} \quad \text{donc} \quad n^2 \ln\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right) \leq -u^2 \quad (\text{car } n^2 \geq 0)$$

puis (par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R}) :

$$\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)} \leq e^{-u^2}$$

La deuxième inégalité se démontre de la même manière (et il n'y a pas de cas particulier à traiter à part). Ainsi :

$$\boxed{\forall u \in [0, n], \quad \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leq e^{-u^2} \leq \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2}}$$

(b) Le changement de variable $u = n \tan(t)$ (i.e. $t = \text{Arctan}(u/n)$) fournit :

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan(t)^2)^{-n^2} n(1 + \tan(t)^2) dt \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan(t)^2)^{1-n^2} dt \end{aligned}$$

Comme $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)^{2n^2-2} dt}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La question 8.(a) et la croissance de l'intégrale nous donnent :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du \leq F(n) \leq \int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du$$

L'intégrale de droite a été calculée à la question précédente :

$$\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)^{2n^2-2} dt \leq n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n^2-2} dt = nW_{2n^2-2}$$

car $n \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n^2-2} dt \geq 0$. Calculons l'intégrale de gauche à l'aide du changement de variable $u = n \sin(t)$ (i.e. $t = \text{Arcsin}(u/n)$) :

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(t)^2)^{n^2} n \cos(t) dt \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n^2} \cos(t) dt \\ &= nW_{2n^2+1} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nW_{2n^2+1} \leq F(n) \leq nW_{2n^2-2}}$$

10. D'après la question 6., la suite extraite $((\sqrt{2n^2+1}W_{2n^2+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Donc :

$$nW_{2n^2+1} = \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}} \sqrt{2n^2+1}W_{2n^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2n^2}}} \sqrt{2n^2+1}W_{2n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De la même façon, on montre que $nW_{2n^2-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Le théorème des gendarmes et les inégalités obtenues à la question précédente impliquent que $F(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Comme on sait que la fonction F admet une limite en $+\infty$ (question 7.), la caractérisation séquentielle de la limite nous donne :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Partie C – calcul de $\zeta(2)$

11. On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On sait que $W_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{0!}{4^0(0!)^2}$. L'égalité est donc vraie pour $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$. D'après la question 3., on a :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} &= \frac{2n+1}{2(n+1)} W_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2(n+1)^2} \times \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}}$$

12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a $W_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos(t)^{2p} dt$. Posons :

$$\begin{aligned} u'(t) &= 1 & v(t) &= \cos(t)^{2p} \\ u(t) &= t & v'(t) &= -2p \sin(t) \cos(t)^{2p-1} \end{aligned}$$

Une intégration par parties fournit :

$$W_{2p} = \underbrace{\left[t \cos(t)^{2p} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2p \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos(t)^{2p-1} dt$$

Posons :

$$\begin{aligned} u'(t) &= t & v(t) &= \sin(t) \cos(t)^{2p-1} \\ u(t) &= \frac{t^2}{2} & v'(t) &= \cos(t)^{2p} - (2p-1) \sin(t)^2 \cos(t)^{2p-2} \end{aligned}$$

et intégrons à nouveau par parties :

$$\begin{aligned} W_{2p} &= 2p \underbrace{\left[\frac{t^2}{2} \sin(t) \cos(t)^{2p-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - 2p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (\cos(t)^{2p} - (2p-1) \sin(t)^2 \cos(t)^{2p-2}) dt \\ &= -p \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{2p} dt + p(2p-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (1 - \cos(t)^2) \cos(t)^{2p-2} dt \\ &= p(2p-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{2p-2} dt - 2p^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{2p} dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad W_{2p} = p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p}$$

13. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$K_{p-1} - K_p = \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-2)!} J_{p-1} - \frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} J_p$$

D'après la question précédente, on a $J_{p-1} = \frac{2p}{2p-1} J_p + \frac{1}{p(2p-1)} W_{2p}$ donc :

$$\begin{aligned} K_{p-1} - K_p &= \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-2)!} \left(\frac{2p}{2p-1} J_p + \frac{1}{p(2p-1)} W_{2p} \right) - \frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} J_p \\ &= \frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} J_p + \frac{1}{2p^2} \times \underbrace{\frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} W_{2p}}_{=\frac{\pi}{2}} - \frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} J_p \end{aligned}$$

en utilisant la question précédente. Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad K_{p-1} - K_p = \frac{\pi}{4p^2}}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les égalités précédentes sur les entiers $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{p=1}^n (K_{p-1} - K_p) = \sum_{p=1}^n \frac{\pi}{4p^2} = \frac{\pi}{4} S_n$$

La somme de gauche est télescopique :

$$\sum_{p=1}^n (K_{p-1} - K_p) = K_0 - K_n \quad \text{et} \quad K_0 = J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \frac{\pi^3}{24}$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{24} - K_n \right)}$$

15. La fonction \sin est concave sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (car elle est dérivable sur cet intervalle et car $\sin' = \cos$ y est décroissante). La courbe \mathcal{C}_{\sin} est donc au-dessus de la corde (C) joignant les points de coordonnées $(0, \sin(0))$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. L'équation de (C) est :

$$(C) : y = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} t = \frac{2}{\pi} t$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)}$$

16. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a (par croissance de $u \mapsto u^2$ sur \mathbb{R}_+ et car $\cos^{2p} \geq 0$) :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leq t^2 \cos(t)^{2p} \leq \frac{\pi^2}{4} \sin(t)^2 \cos(t)^{2p}$$

La propriété de croissance de l'intégrale implique que :

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2 \cos(t)^{2p} dt$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2 \cos(t)^{2p} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2) \cos(t)^{2p} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2p} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2(p+1)} dt \\ &= W_{2p} - W_{2p+2} \\ &= W_{2p} - \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \\ &= \frac{1}{2p+2} W_{2p} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2 W_{2p}}{8(p+1)}}$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'encadrement de J_n fournit :

$$0 \leq K_n \leq \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \times \frac{\pi^2 W_{2n}}{8(n+1)} = \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

en utilisant la question 11. Or $\frac{\pi^3}{16(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $K_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. La question 14. permet donc de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente de limite } \frac{\pi^2}{6}}$$

Problème 2.

Partie A : trace d'une matrice carrée

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $A + \lambda B = (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ donc, par définition de la trace,

$$\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \sum_{k=1}^n (a_{k,k} + \lambda b_{k,k}) = \sum_{k=1}^n a_{k,k} + \lambda \sum_{k=1}^n b_{k,k} = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$$

à nouveau par définition de la trace. Ainsi :

l'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = A$. Alors $AB = A^2 = I_2$ donc $\operatorname{tr}(AB) = 2$ tandis que $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)^2 = 0$. Ainsi :

l'assertion est fausse

Partie B – calcul d'une racine cubique de I_2

3. On a :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (bc - ad) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

on a l'égalité $M^2 = \operatorname{tr}(M)M - \det(M)I_2$ (les nombres $\alpha = \operatorname{tr}(M)$ et $\beta = -\det(M)$ conviennent)

4. (a) Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$M^3 = M(\alpha M + \beta I_2) = \alpha M^2 + \beta M = \alpha(\alpha M + \beta I_2) + \beta M$$

i.e. :

$$M^3 = (\alpha^2 + \beta)M + \alpha\beta I_2$$

- (b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \operatorname{Vect}(I_2)$. On utilise une analyse-synthèse.

- ★ Supposons que $M^3 = I_2$. D'après les propriétés du déterminant, on a $\det(M)^3 = \det(I_2) = 1$. Or $\det(M) \in \mathbb{R}$ (car M est une matrice réelle) donc $\det(M) = 1$ *i.e.* $\beta = -1$. L'égalité obtenue à la question 4.(a) se réécrit alors $I_2 = (\alpha^2 - 1)M - \alpha I_2$. En appliquant la trace et en utilisant la linéarité de cette application, il vient :

$$\operatorname{tr}(I_2) = (\alpha^2 - 1)\operatorname{tr}(M) - \alpha \operatorname{tr}(I_2) \quad \text{i.e.} \quad 2 = (\alpha^2 - 1)\alpha - 2\alpha$$

soit encore $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0$. On remarque que :

$$X^3 - 3X - 2 = (X + 1)(X^2 - X - 2) = (X + 1)^2(X - 2)$$

donc $\operatorname{tr}(M) = \alpha \in \{-1, 2\}$.

- ★ Supposons que $\beta = -1$.

— Si $\alpha = -1$, alors l'égalité de la question 4.(a) nous donne $M^3 = I_2$.

— Si $\alpha = 2$, alors on a $M^3 = 3M - 2I_2$. Par l'absurde, si $M^3 = I_2$, alors $3M = 3I_2$ *i.e.* $M = I_2$. Ceci est absurde car M n'est pas une matrice scalaire.

Ainsi :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \operatorname{Vect}(I_2), \quad M^3 = I_2 \iff (\det(M) = 1 \text{ et } \operatorname{tr}(M) = -1)$$

- (c) On cherche des nombres réels a, b, c, d tels que :

$$bc \neq 0, \quad a + d = -1 \quad \text{et} \quad ad - bc = 1$$

Pour $a = 0$, on a $d = -1$ et on peut choisir $b = 1$ et $c = -1$. Ainsi :

la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ convient

Partie C – matrices réelles symétriques cycliques

5. Soient $M, N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a par linéarité de la transposition :

$$(\lambda M + \mu N)^T = \lambda M^T + \mu N^T = \lambda M + \mu N$$

car M et N sont symétriques donc :

$$\lambda M + \mu N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

(b) On utilise un raisonnement par récurrence.

★ La matrice $M^0 = I_n$ est symétrique.

★ Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la matrice M^k est symétrique. Alors :

$$\begin{aligned} (M^{k+1})^T &= (M^k M)^T = M^T (M^k)^T && \text{(propriété de la transposition)} \\ &= M M^k && \text{(car } M \text{ et } M^k \text{ sont symétriques)} \\ &= M^{k+1} \end{aligned}$$

La matrice M^{k+1} est donc symétrique.

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, M^k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

6. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On procède par récurrence.

★ On a :

$$M \left(a^0, \frac{(a+bn)^0 - a^0}{n} \right) = M(1, 0) = I_n = M(a, b)^0$$

L'égalité est donc vraie pour $p = 0$.

★ Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$M(a, b)^p = M \left(a^p, \frac{(a+bn)^p - a^p}{n} \right) = a^p I_n + \frac{(a+bn)^p - a^p}{n} H$$

Alors :

$$\begin{aligned} M(a, b)^{p+1} &= M(a, b)^p M(a, b) \\ &= \left(a^p I_n + \frac{(a+bn)^p - a^p}{n} H \right) (a I_n + b H) \\ &= a^{p+1} I_n + \left(a^p b + a \times \frac{(a+bn)^p - a^p}{n} \right) H + b \times \frac{(a+bn)^p - a^p}{n} H^2 \end{aligned}$$

par bilinéarité du produit matriciel. Or $H^2 = nH$ (calcul immédiat) donc :

$$M(a, b)^{p+1} = a^{p+1} I_n + \alpha H,$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha &= a^p b + \frac{a(a+bn)^p - a^{p+1}}{n} + b(a+bn)^p - a^p b = \frac{a(a+bn)^p - a^{p+1} + bn(a+bn)^p}{n} \\ &= \frac{(a+bn)^{p+1} - a^{p+1}}{n} \end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité $M(a, b)^{p+1} = M \left(a^{p+1}, \frac{(a+bn)^{p+1} - a^{p+1}}{n} \right)$.

Ainsi :

$$\forall p \in \mathbb{N}, M(a, b)^p = M \left(a^p, \frac{(a+bn)^p - a^p}{n} \right)$$

(b) Soient $(a, b), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M(a, b) = M(\alpha, \beta)$. Alors :

$$aI_n + bH = \alpha I_n + \beta H \quad \text{i.e.} \quad xI_n + yH = 0_n$$

en posant $x = a - \alpha$ et $y = b - \beta$. Les coefficients sur la diagonale de la matrice de gauche (dans la dernière égalité) sont tous égaux à $x + y$ et les autres coefficients valent y . On a donc $x + y = 0$ et $y = 0$, i.e. $x = y = 0$. Ainsi, $a = \alpha$ et $b = \beta$. Autrement dit, $(a, b) = (\alpha, \beta)$. Finalement :

l'application M est injective

(c) Soit $M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}$. Comme $M \in \mathcal{E}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = M(a, b)$. De plus, $M \in \mathcal{C}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M(a, b)^p = I_n$. D'après la question précédente, on a :

$$M^p = M\left(a^p, \frac{(a + bn)^p - a^p}{n}\right) = I_n = M(1, 0)$$

Or l'application M est injective donc $a^p = 1$ et $\frac{(a + bn)^p - a^p}{n} = 0$. On a donc $a \in \{-1, 1\}$ i.e.

$a^2 = 1$. On a $\left(\frac{a + bn}{a}\right)^p = 1$ donc $\left(\frac{a + bn}{a}\right)^2 = 1$ puis $(a + bn)^2 = a^2$. On en déduit que :

$$M^2 = M\left(a^2, \frac{(a + bn)^2 - a^2}{n}\right) = M(1, 0) = I_2$$

Ainsi :

$$\forall M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}, \quad M^2 = I_n$$

7. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On sait que $M^2 = \left(\sum_{k=1}^n m_{i,k} m_{k,j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ et donc, par définition de la trace :

$$\begin{aligned} \text{tr}(M^2) &= \sum_{i=1}^n (M^2)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k} \underbrace{m_{k,i}}_{=m_{i,k}} \quad (\text{car } M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \\ &= \sum_{1 \leq i, k \leq n} m_{i,k}^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car une somme de nombre positifs est positive. Une telle somme est nulle si et seulement si chaque sommant est nul donc :

$$\text{tr}(M^2) = 0 \iff (\forall i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,k}^2 = 0) \iff (\forall i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,k} = 0) \iff M = 0_n$$

Ainsi :

pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(M^2) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $M = 0_n$

8. (a) Soit $M \in \mathcal{C}_4$ (on a donc $M^4 = I_n$). Les matrices M^2 et $-I_n$ commutent (car $-I_n$ est une matrice scalaire) donc :

$$(M^2 - I_n)^2 = M^4 + I_n - 2M^2 = 2(I_n - M^2)$$

De la même façon (les matrices M^3 et $-M$ commutent) :

$$(M^3 - M)^2 = M^6 - 2M^4 + M^2 = 2(M^2 - I_n)$$

Comme M et I_n sont des matrices symétriques, on a $M^2 - I_n, M^3 - M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La question 10. nous donne :

$$\text{tr}((M^2 - I_n)^2) \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}((M^3 - M)^2) \geq 0$$

i.e., en utilisant les calculs précédents et la linéarité de la trace :

$$\text{tr}(I_n - M^2) \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(M^2 - I_n) \geq 0$$

En multipliant par -1 dans la dernière inégalité et en utilisant la linéarité de la trace, on obtient $\text{tr}(I_n - M^2) \leq 0$. Ainsi, $\text{tr}(I_n - M^2) = 0$ et donc $\text{tr}((M^2 - I_n)^2) = 0$. La matrice $M^2 - I_n$ étant symétrique, la question 7. fournit l'égalité $M^2 - I_n = 0_n$. Ainsi :

$$M^2 = I_n$$

- (b) Soient $s \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{C}_{2^s}$. Si $s = 0$, alors $M = I_n$ et donc $M^2 = I_n$. Si $s = 1$, alors $M^2 = I_n$ par définition de \mathcal{C}_2 . Supposons maintenant que $s \geq 2$ et montrons par récurrence que :

$$\forall k \in \llbracket 0, s-1 \rrbracket, \quad M^{2^{s-k}} = I_n$$

- ★ Par définition de \mathcal{C}_{2^s} , la propriété est vraie pour $k = 0$.
- ★ Soit $k \in \llbracket 0, s-2 \rrbracket$. On suppose que $M^{2^{s-k}} = I_n$. Montrons que $M^{2^{s-(k+1)}} = I_n$. On a $s-k-2 \geq 0$ et $(M^{2^{s-k-2}})^4 = I_n$ (par hypothèse) donc $M^{2^{s-k-2}} \in \mathcal{C}_4$. D'après la question précédente, on a :

$$(M^{2^{s-k-2}})^2 = I_n \quad i.e. \quad M^{2^{s-(k+1)}} = I_n$$

La propriété est vraie au rang $k+1$.

Pour $k = s-1$, on obtient $M^2 = I_n$. Ainsi :

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathcal{C}_{2^s}, M^2 = I_n}$$

9. Soient $u \in 2\mathbb{N} + 1$ et $M \in \mathcal{C}_u$. On pose $S = \sum_{k=0}^{u-1} M^k$.

- (a) Par bilinéarité du produit matriciel, on a :

$$MS = \sum_{k=0}^{u-1} M^{k+1} = \sum_{\ell=1}^u M^\ell = \underbrace{I_n}_{\ell=n} + \sum_{\ell=1}^{u-1} M^\ell = \sum_{\ell=0}^{u-1} M^\ell$$

car $M \in \mathcal{C}_u$. On a donc :

$$\boxed{MS = S}$$

Par une récurrence immédiate, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k S = S$$

On en déduit que (en utilisant la bilinéarité du produit matriciel) :

$$S^2 = \left(\sum_{k=0}^{u-1} M^k \right) S = \sum_{k=0}^{u-1} M^k S = \sum_{k=0}^{u-1} S = \left(\sum_{k=0}^{u-1} 1 \right) S$$

Ainsi :

$$\boxed{S^2 = uS}$$

- (b) Tout d'abord, φ est bien défini car le reste dans la division euclidienne par $u > 0$ appartient à $\llbracket 0, u-1 \rrbracket$. Montrons que φ est injective. Soient $k, \ell \in \llbracket 0, u-1 \rrbracket$ tels que $\varphi(k) = \varphi(\ell)$ i.e. tels que $r_k = r_\ell$. Par définition de r_k et de r_ℓ , on a $2k \equiv r_k [u]$ et $2\ell \equiv r_\ell [u]$. Par transitivité de la relation de congruence modulo u , on a $2k \equiv 2\ell [u]$ donc $u \mid 2(k-\ell)$. Or u est un nombre impair donc $u \wedge 2 = 1$. Le lemme de Gauss implique que $u \mid k-\ell$. Or $k, \ell \in \llbracket 0, u-1 \rrbracket$ donc $-(u-1) \leq k-\ell \leq u-1$. Le seul multiple de u appartenant à l'intervalle $\llbracket -(u-1), u-1 \rrbracket$ est 0 donc $k-\ell = 0$ i.e. $k = \ell$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est injective (même bijective, cf. énoncé)}}$$

- (c) Posons $A = \sum_{0 \leq i, j \leq u-1} (M^i - M^j)^2$. Pour tous $i, j \in \llbracket 0, u-1 \rrbracket$, les matrices M^i et M^j commutent donc :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{0 \leq i, j \leq u-1} (M^{2i} - 2M^i M^j + M^{2j}) \\ &= \sum_{0 \leq i, j \leq u-1} M^{2i} + \sum_{0 \leq i, j \leq u-1} M^{2j} - 2 \sum_{0 \leq i, j \leq u-1} M^i M^j \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq u-1} M^{2i} &= \sum_{j=0}^{u-1} \sum_{i=0}^{u-1} M^{2i} = \sum_{j=0}^{u-1} \sum_{i=0}^{u-1} M^{\varphi(i)} \quad (\text{car } M^u = I_n) \\ &= \sum_{j=0}^{u-1} \underbrace{\sum_{i=0}^{u-1} M^i}_{=S} \quad (\text{car } \varphi \text{ est bijective}) \\ &= uS \end{aligned}$$

De la même façon, on a $\sum_{0 \leq i, j \leq u-1} M^{2j} = uS$. Enfin :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq u-1} M^i M^j = \left(\sum_{i=0}^{u-1} M^i \right) \left(\sum_{j=0}^{u-1} M^j \right) = S^2 = uS$$

Finalement, $A = uS + uS - 2uS = 0_n$, *i.e.* :

$$\boxed{\sum_{0 \leq i, j \leq u-1} (M^i - M^j)^2 = 0_n}$$

- (d) Il n'y a rien à démontrer si $u = 1$ (puisqu'alors $M \in \mathcal{C}_1$). On suppose que $u \geq 3$. Par linéarité de la trace, on a :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq u-1} \text{tr} \left((M^i - M^j)^2 \right) = \text{tr}(0_n) = 0$$

Pour tous $i, j \in \llbracket 0, u-1 \rrbracket$, on a $M^i - M^j \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (car M est symétrique) donc $\text{tr} \left((M^i - M^j)^2 \right) \geq 0$. L'égalité précédente entraîne que chaque sommant est nul. En particulier, pour $i = 2$ et $j = 0$, on a $\text{tr} \left((M^2 - I_n)^2 \right) = 0$ ce qui implique que $M^2 = I_n$ (d'après la question 7.). Finalement :

$$\boxed{M^2 = I_n}$$

10. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{C}_p$.

- (a) On note $s = v_2(p) \in \mathbb{N}$ (valuation 2-adique de p). Par définition de s , l'entier naturel $\frac{p}{2^s}$ (que l'on note u) est impair et on a l'égalité $p = 2^s u$. Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe des entiers } s, u \in \mathbb{N} \text{ tels que } p = 2^s u, u \text{ étant impair}}$$

- (b) L'égalité $M^p = I_n$ se réécrit $(M^{2^s})^u = I_n$. Ainsi, la matrice M^{2^s} appartient à \mathcal{C}_u (notons que cette matrice est bien symétrique puisque M l'est) et u est impair donc, d'après la question 9.(d), on a $(M^{2^s})^2 = I_n$, *i.e.* $M^{2^{s+1}} = I_n$. D'après la question 8.(b) (appliquée avec $s' = s + 1 \in \mathbb{N}$), on a :

$$\boxed{M^2 = I_n}$$