Concours blanc

un corrigé

Exercice 1 (calcul d'une limite).

1. La fonction $f : u \longmapsto u - \ln(1+u)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall u \in]-1,+\infty[, \qquad f'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$$

On en déduit le tableau de signes de f' et de variations de f suivants :

u	-1		0		$+\infty$
$f'(u)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est positive sur $]-1,+\infty[$, *i.e.* :

$$\forall u \in]-1,+\infty[, \qquad u - \ln(1+u) \geqslant 0,$$

soit encore :

$$\boxed{\forall u \in]-1,+\infty[, \qquad \ln(1+u) \leqslant u} \tag{$*$}$$

2. (a) Soit $t \in [0,n]$. En appliquant l'inégalité $(*)$ au point $x = \dfrac{t}{n} \geqslant 0 > -1$, on a :

$$\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leqslant \frac{t}{n} \qquad \text{puis} \qquad n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leqslant t$$

car $n \geqslant 0$. La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\exp\left[n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)\right] \leqslant \mathrm{e}^{\,t} \qquad \textit{i.e.} \qquad \exp\left[\ln\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\right)\right] \leqslant \mathrm{e}^{\,t},$$

d'où l'on tire que $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{\,t}$.

Quant à la deuxième inégalité, on remarque qu'elle est immédiate si $t = n$ (en effet, le nombre de gauche est nul tandis que $\mathrm{e}^{\,-n} \geqslant 0$). Si $t \in [0,n[$, alors $-\dfrac{t}{n} > -1$ donc on peut appliquer l'inégalité $(*)$ au point $x = -\dfrac{t}{n}$:

$$\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$$

Le même raisonnement que celui mené pour démontrer la première inégalité nous permet d'obtenir que $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{\,-t}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in [0,n], \qquad \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{\,t} \qquad \text{et} \qquad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{\,-t}}$$

(b) Soit $t \in [0,n]$. On sait que $\mathrm{e}^{\,t} \geqslant \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n$ (question 2.(a)) donc, en multipliant par $f_n(t) \geqslant 0$, on obtient l'inégalité :

$$f_n(t)\,\mathrm{e}^{\,t} \geqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \left[\left(1-\frac{t}{n}\right)\left(1+\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in [0,n], \qquad f_n(t)\,\mathrm{e}^{\,t} \geqslant \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n}$$

(c) Soit $t \in [0, n]$.

⋆ D'après la deuxième inégalité établie à la question 2.(a), on a :

$$\mathrm{e}^{-t} - f_n(t) = \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$$

⋆ De plus, d'après la question 2.(b), on sait que (en multipliant par $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$) :

$$f_n(t) \geqslant \mathrm{e}^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \qquad \text{puis} \qquad -f_n(t) \leqslant -\mathrm{e}^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$$

En ajoutant e^{-t}, il vient :

$$\mathrm{e}^{-t} - f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n = \mathrm{e}^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in [0, n], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]}$$

(d) On considère la fonction $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & nu + (1-u)^n - 1 \end{array}\right.$. La fonction φ est dérivable sur $[0, 1]$ (comme fonction polynomiale) et :

$$\forall u \in [0, 1], \qquad \varphi'(u) = n - n(1-u)^{n-1} = n\big[1 - (1-u)^{n-1}\big]$$

Pour tout $u \in [0, 1]$, on a $1 - u \in [0, 1]$ puis $(1-u)^{n-1} \in [0, 1]$ (en effet, $n - 1 \geqslant 0$ donc la fonction puissance $t \longmapsto t^{n-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).

u	0 $\qquad\qquad$ 1
$\varphi'(u)$	$+$
φ	$0 \nearrow n-1$

La fonction φ est positive sur $[0, 1]$, *i.e.* :

$$\forall u \in [0, 1], \qquad nu + (1-u)^n - 1 \geqslant 0,$$

soit encore :

$$\boxed{\forall u \in [0, 1], \qquad 1 - (1-u)^n \leqslant nu}$$

(e) Soit $t \in [0, n]$. On a $\dfrac{t^2}{n^2} \in [0, 1]$ donc, d'après la question 2.(d), on a :

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leqslant n \times \frac{t^2}{n^2} = \frac{t^2}{n} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{e}^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] \leqslant \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-t}}{n}$$

car $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$. Ainsi, les inégalités de la question 2.(c) impliquent que :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - f_n(t) \leqslant \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-t}}{n}$$

En isolant $f_n(t)$ dans ces inégalités, on obtient bien :

$$\boxed{\forall t \in [0, n], \qquad \mathrm{e}^{-t} - \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-t}}{n} \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise la propriété de croissance de l'intégrale :

$$\int_0^n \left(\mathrm{e}^{-t} - \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-t}}{n}\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

i.e. (par linéarité de l'intégrale) :

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant I_n \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-t} = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-n}$ et, en utilisant une double intégration par parties, on a :

$$\int_0^n t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2 - n^2\,\mathrm{e}^{-n} - 2n\,\mathrm{e}^{-n} - 2\,\mathrm{e}^{-n}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 - \mathrm{e}^{-n} - \frac{1}{n}\left(2 - n^2\,\mathrm{e}^{-n} - 2n\,\mathrm{e}^{-n} - 2\,\mathrm{e}^{-n}\right) \leqslant I_n \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-n}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente de limite } 1}$$

Exercice 2 (arithmétique).

1. On a la relation $1 \times (n+1) + (-1) \times n = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout :

$$\boxed{\text{les entiers } n \text{ et } n+1 \text{ sont premiers entre eux}}$$

2. (a) On utilise un raisonnement par récurrence.

   ⋆ D'une part, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = 1$, et d'autre part, $\dfrac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ donc l'égalité est vraie au rang 1.

   ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^2(n+1)}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},\end{aligned}$$

   ce qu'il fallait démontrer. L'égalité est établie au rang $n+1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, les nombres $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ sont clairement des entiers (une somme d'entiers étant un entier). De plus, d'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \qquad \text{donc} \qquad \sum_{k=1}^{n} k \quad \text{divise} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3$$

   Ainsi :

$$\boxed{\text{le théorème de Faulhaber est vrai si } q = 3}$$

3. (a) Le lemme de Gauss s'énonce comme suit :

$$\boxed{\text{Soit } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ tels que } a \mid bc \text{ et } a \wedge b = 1. \text{ Alors } a \mid c.}$$

   (b) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$. On suppose que $a \mid c$ et $b \mid c$. Comme $a \mid c$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = ka$. Ensuite $b \mid ka$ et $a \wedge b = 1$ donc $b \mid k$ d'après le lemme de Gauss. On en déduit que $ab \mid ka$, *i.e.* que $ab \mid c$. Ainsi :

$$\boxed{\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \qquad (a \wedge b = 1 \text{ et } a \mid c \text{ et } b \mid c) \implies ab \mid c}$$

4. (a) Les changements d'indices (décroissants) $\ell = n+1-k$ dans la première somme et $p = n-k$ dans la seconde fournissent :

$$\sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^q = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^q \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (n-k)^q = \sum_{p=0}^{n} p^q = \sum_{p=1}^{n} p^q$$

   car $0^q = 0$ (puisque $q \geqslant 1$). Autrement dit :

$$\boxed{S_n(q) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^q = \sum_{k=0}^{n} (n-k)^q}$$

(b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $n+1-k \equiv -k\,[n+1]$ et $n-k \equiv -k\,[n]$ puis, par compatibilité de la relation de congruence avec l'exponentiation positive entière :

$$(n+1-k)^q \equiv (-k)^q \equiv -k^q\,[n+1] \qquad \text{et} \qquad (n-k)^q \equiv (-k)^q \equiv -k^q\,[n]$$

car $(-k)^q = (-1)^q k^q = -k^q$ (en effet, l'entier q est impair). En sommant les relations de congruences, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^q \equiv -\sum_{k=1}^{n}k^q\,[n] \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}(n-k)^q \equiv -\sum_{k=1}^{n}k^q\,[n]$$

En utilisant la question précédente, ces relations se réécrivent :

$$\boxed{S_n(q) \equiv -S_n(q)\,[n+1] \qquad \text{et} \qquad S_n(q) \equiv -S_n(q)\,[n]}$$

(c) D'après la question 4.(a), on a $2S_n(q) \equiv 0\,[n+1]$ et $2S_n(q) \equiv 0\,[n]$. Autrement dit, l'entier $2S_n(q)$ est divisible par n et par $n+1$. Or n et $n+1$ sont premiers entre eux (d'après la question 1.) donc $n(n+1)$ divise $2S_n(q)$ (d'après la question 3.(b)). Autrement dit, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $2S_n(q) = \alpha n(n+1)$, ce qui se réécrit :

$$S_n(q) = \alpha\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{soit encore} \qquad S_n(q) = \alpha S_n(1)$$

Autrement dit, $S_n(1) \mid S_n(q)$. Finalement :

$$\boxed{\text{le théorème de Faulhaber est démontré}}$$

Exercice 3 (diagonalisation).

1. **Calcul des puissances de A.**

(a) Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrclc} 2x & - & y & - & z & = & X & \mathrm{L}_1 \\ -x & + & y & + & 2z & = & Y & \mathrm{L}_2 \\ -x & + & y & + & z & = & Z & \mathrm{L}_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrclc} 2x & - & y & - & z & = & X & \mathrm{L}_1 \\ & & y & + & 3z & = & X+2Y & \mathrm{L}_2 \leftarrow 2\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ & & y & + & z & = & X+2Z & \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\,\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrclc} 2x & - & y & - & z & = & X & \mathrm{L}_1 \\ & & y & + & 3z & = & X+2Y & \mathrm{L}_2 \\ & & & & 2z & = & 2Y-2Z & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On obtient un système de Cramer donc P est inversible et :

$$\begin{aligned}
P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}(X+y+z) = X+Z \\ y & = & X+2Y-3z = X-Y+3Z \\ z & = & Y-Z \end{array}\right. \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

En multipliant à gauche par P^{-1} dans cette égalité, il vient $P^{-1}A = P^{-1}PDP^{-1} = I_3DP^{-1} = DP^{-1}$ puis, en multipliant par P à droite, on obtient (puisque $P^{-1}P = I_3$) :

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

(c) La matrice D est diagonale donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

(d) On raisonne par récurrence.

- ⋆ D'une part, $A^0 = I_3$, et d'autre part :

$$PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = 0$.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors, en utilisant l'égalité obtenue à la question 1.(b) (et l'associativité du produit matriciel),

$$A^{n+1} = AA^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDI_3D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}}$$

2. **Étude du commutant de A.**

(a) Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} N \in \mathscr{C}(A) \iff AN = NA &\iff PDP^{-1}N = NPDP^{-1} \qquad \text{(d'après la question 1.(b))} \\ &\iff P^{-1}PDP^{-1}NP = P^{-1}NPDP^{-1}P \\ &\iff I_3DP^{-1}NP = P^{-1}NPDI_3 \\ &\iff D(P^{-1}NP) = (P^{-1}NP)D \\ &\iff P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall N \in \mathscr{C}(A), \qquad N \in \mathscr{C}(A) \iff P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D)}$$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{C}(D) \iff DX = XD &\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b & 2c \\ -d & e & 2f \\ -g & h & 2i \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -b & = & b \\ -c & = & 2c \\ d & = & -d \\ f & = & 2f \\ 2g & = & -g \\ 2h & = & h \end{array} \right. \\ &\iff b = c = d = f = g = h = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{C}(D) = \mathscr{D}_3(\mathbb{R})}$$

(c) Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. D'après les questions 2.(a) et 2.(b), on a :

$$\begin{aligned}
N \in \mathscr{C}(A) &\iff P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D) = \mathscr{D}_3(\mathbb{R}) \\
&\iff \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ P^{-1}NP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\
&\iff \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ P^{-1}NP = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{1,1}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{2,2}} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{3,3}} \\
&\iff \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ N = \alpha P E_{1,1} P^{-1} + \beta P E_{2,2} P^{-1} + \gamma P E_{3,3} P^{-1}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\mathscr{C}(A) = \left\{ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} \text{ où, pour tout } i \in \{1,2,3\}, \text{ on a posé } X_i = P E_{i,i} P^{-1}}$$

3. **Étude de trois suites imbriquées.**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3u_n - v_n - 3w_n \\ 2u_n + 3v_n \\ 2u_n + v_n + 2w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = AX_n}$$

(b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.

- ⋆ On a $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ donc l'égalité est vraie au rang $n = 0$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X_n = A^n X_0$. D'après la question précédente, on a $X_{n+1} = AX_n$ et donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient $X_{n+1} = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$ (par associativité du produit matriciel). L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n X_0}$$

(c) On a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par hypothèse. Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la question 1.(d) :

$$\begin{aligned}
X_n = A^n X_0 = PD^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} u_n & = & 2(-1)^n - 2^n \\ v_n & = & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ w_n & = & (-1)^{n+1} + 2^n \end{array} \right.}$$

Exercice 4 (résolution d'une équation fonctionnelle).

1. **Questions préliminaires.**

(a) Le choix $x = y = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ dans la relation $(*)$ vérifiée par f fournit :

$$f(1^2) = f(1) + f(1) \qquad i.e. \qquad f(1) = 2f(1),$$

soit encore :

$$\boxed{f(1) = 0}$$

(b) On utilise une récurrence simple.

★ Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f\left(\prod_{k=1}^{1} x_k\right) = f(x_1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{1} f(x_k) = f(x_1)$$

donc l'égalité est vérifiée au rang $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'égalité $f\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Soient $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{k=1}^{n+1} x_k\right) = f\left(\left[\prod_{k=1}^{n+1} x_k\right] \times x_{n+1}\right) &= f\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) + f(x_{n+1}) && \text{(d'après } (*)) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) + f(x_{n+1}) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) && \text{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$

La propriété est donc établie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant $(*)$ avec $y = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{i.e.} \qquad 0 = f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)}$$

2. **Solutions de $(*)$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.**

(a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant la relation $(*)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, en dérivant $(*)$ par rapport à la variable y, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad xf'(xy) = 0 + f'(y) \qquad \textit{i.e.} \qquad xf'(xy) = f'(y)$$

Le choix $y = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ dans cette nouvelle relation fournit l'égalité $xf'(x) = f'(1)$, *i.e.* $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$ (car $x \neq 0$). Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{f'(1)}{x}}$$

(b) Notons $\mathscr{S}_d$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $(*)$. On raisonne par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in \mathscr{S}_d$. D'après la question précédente, on a en posant $C = f'(1) \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{C}{x}$$

Il existe donc $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on ait $f(x) = C\ln(x) + D$. Or $f(1) = 1$ (d'après la question 1.(a)) et $\ln(1) = 0$ donc $D = 0$. Ainsi $\mathscr{S}_d \subset \{x \longmapsto C\ln(x) \mid C \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\supset}$ Soient $C \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $f : x \longmapsto C\ln(x)$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, en utilisant les propriétés du logarithme,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(xy) = C\ln(xy) = C\big[\ln(x) + \ln(y)\big] = C\ln(x) + C\ln(y) = f(x) + f(y)$$

Autrement dit, f vérifie la relation $(*)$ et donc $f \in \mathscr{S}_d$. On a bien l'inclusion réciproque.

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_d = \{x \longmapsto C\ln(x) \mid C \in \mathbb{R}\}}$$

3. **Solutions de $(*)$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$**

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ une solution de $(*)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait d'après la question 1.(b) que :

$$f(x^n) = f\left(\prod_{k=1}^{n} x\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x) = f(x)\sum_{k=1}^{n} 1$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x^n) = nf(x)}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 1.(c) appliquée au point $x^n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} f(x^n) &= -f\left(\frac{1}{x^n}\right) = -f(x^{-n}) = -(-n)f(x) \qquad \text{(d'après la question 3.(a) car } -n \in \mathbb{N}) \\ &= nf(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x^n) = nf(x)}$$

(c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On applique la question 3.(a) avec $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{q}} \in \mathbb{R}_+^*$et $n = q$:

$$qf\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{q}}\right) = f\left(\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{q}}\right]^q\right) = f(\mathrm{e}),$$

d'où l'égalité en divisant par $q \neq 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^*, \qquad f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{f(\mathrm{e})}{q}}$$

(d) Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \dfrac{p}{q}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}^{r}) = f\left(\mathrm{e}^{\frac{p}{q}}\right) = f\left(\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{q}}\right]^p\right) &= pf\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{q}}\right) \qquad \text{(question 3.(b) avec } x = \mathrm{e}^{1/q} \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n = p \in \mathbb{Z}) \\ &= p \times \frac{f(\mathrm{e})}{q} \qquad \text{(question 3.(c))} \\ &= rf(\mathrm{e}) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q}, \qquad f(\mathrm{e}^{r}) = rf(\mathrm{e})}$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ (d'après la caractérisation séquentielle de la densité). Par ailleurs, $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $\exp \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ donc, par composition, la fonction $f \circ \exp$ est continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, on obtient :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}^{x}) = \lim_{n \to +\infty} f(\mathrm{e}^{r_n}) &= \lim_{n \to +\infty} r_n f(\mathrm{e}) \qquad \text{(d'après la question 3.(d) car } r_n \in \mathbb{Q}) \\ &= xf(\mathrm{e}) \qquad \text{(puisque } r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(\mathrm{e}^{x}) = xf(\mathrm{e})}$$

(f) On note $\mathscr{S}_c$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et solutions de $(*)$. On raisonne par analyse-synthèse.

- ⋆ Soit $f \in \mathscr{S}_c$. D'après la question 3.(e), si on pose $C = f(\mathrm{e}) \in \mathbb{R}$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(\mathrm{e}^{t}) = Ct$$

  et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = f\big(\mathrm{e}^{\ln(x)}\big) = C\ln(x)$$

  On en déduit que $\mathscr{S}_c \subset \big\{x \longmapsto C\ln(x) \,\big|\, C \in \mathbb{R}\big\} = \mathscr{S}_d$.

- ⋆ Toute fonction dérivable sur un intervalle étant continue sur celui-ci, on a aussi $\mathscr{S}_d \subset \mathscr{S}_c$.

Finalement, on a l'égalité :

$$\boxed{\mathscr{S}_c = \mathscr{S}_d = \big\{x \longmapsto C\ln(x) \,\big|\, C \in \mathbb{R}\big\}}$$