Concours blanc

durée de l'épreuve : 4h

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
- *Les résultats non encadrés à la **règle** ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Le sujet comporte quatre pages et est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 (calcul d'une limite).

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

On veut déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers $+\infty$. On notera f_n la fonction définie par :

$$\forall t \in [0, n], \qquad f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

1. Montrer que :
$$\forall u \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1+u) \leqslant u$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) En utilisant l'inégalité précédente, établir que :
   $$\forall t \in [0, n], \qquad \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall t \in [0, n], \qquad f_n(t)\,\mathrm{e}^t \geqslant \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall t \in [0, n], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$$
   (d) À l'aide d'une étude de fonction, montrer que :
   $$\forall u \in [0, 1], \qquad 1 - (1-u)^n \leqslant nu$$
   (e) En utilisant les résultats précédents, démontrer que :
   $$\forall t \in [0, n], \qquad \mathrm{e}^{-t} - \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-t}}{n} \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

3. En intégrant ces inégalités, conclure que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite 1.

Exercice 2 (un résultat d'arithmétique).

L'objectif de cet exercice est de démontrer un théorème de Faulhaber [1].

Théorème (de Faulhaber) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel q **impair**, l'entier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ divise l'entier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^q$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Justifier que les entiers n et $n+1$ sont premiers entre eux.
2. *Démonstration du théorème de Faulhaber dans le cas particulier* $q = 3$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
   (b) En déduire le théorème pour $q = 3$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème dans le cas général ; n et q désignent donc des entiers naturels non nuls, q étant **impair**. Dans la suite, on posera $S_n(q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^q$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous voulons donc montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(1) \mid S_n(q) \qquad i.e. \qquad S_n(q) \equiv 0\,[S_n(1)]$$

3. (a) Énoncer le lemme de Gauss.
   (b) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que, si $a \mid c$ et $b \mid c$, alors $ab \mid c$.
4. (a) Justifier les égalités suivantes :
   $$S_n(q) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^q \qquad \text{et} \qquad S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} (n-k)^q$$
   (b) En déduire que $S_n(q) \equiv -S_n(q)\,[n+1]$ et que $S_n(q) \equiv -S_n(q)\,[n]$.
   (c) En utilisant la question 3., en déduire le théorème de Faulhaber.

1. Johann Faulhaber (1580-1635), mathématicien allemand

Exercice 3 (diagonalisation).

Dans ce problème, on considère les trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Calcul des puissances de A.**
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer l'égalité $A = PDP^{-1}$ puis exprimer D en fonction de A, P et P^{-1}.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer D^n en fonction de n.
   (d) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}$$

2. **Étude du commutant de A.**
   Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on appelle *commutant de* M, noté $\mathscr{C}(M)$, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec M, *i.e.* :
   $$\mathscr{C}(M) = \left\{ N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, MN = NM \right\}$$
   (a) Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence suivante :
   $$N \in \mathscr{C}(A) \iff P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D)$$
   (b) Montrer que $\mathscr{C}(D) = \mathscr{D}_3(\mathbb{R})$, où $\mathscr{D}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices diagonales de taille 3×3 à coefficients réels.
   Indication : étant donnée $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on résoudra directement l'équation $DX = XD$.
   (c) En déduire l'existence de trois matrices $X_1, X_2, X_3 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à expliciter telles que :
   $$\mathscr{C}(A) = \left\{ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \,\middle|\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

3. **Étude de trois suites imbriquées.**
   On définit trois suites réelles u, v et w en posant $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -3u_n - v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 3v_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n + v_n + 2w_n \end{array} \right.$$
   Pour tout entier naturel n, on pose encore $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir un lien matriciel entre X_{n+1} et X_n.
   (b) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n X_0$$
   (c) Conclure quant à l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 4 (résolution d'une équation fonctionnelle).

Dans cet exercice, nous nous intéressons à l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(xy) = f(x) + f(y) \tag{$*$}$$

1. **Questions préliminaires.**
   On considère une solution $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ de $(*)$.
   (a) Montrer que $f(1) = 0$.
   (b) Montrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$
   (c) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

2. **Solutions de $(*)$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$**
   (a) On se donne ici une solution $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ de $(*)$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En dérivant $(*)$ par rapport à la variable y, montrer que $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$.
   (b) En déduire que l'ensemble des solutions dérivables de $(*)$ est $\left\{x \longmapsto C\ln(x) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

3. **Solutions de $(*)$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$**
   Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ une solution de $(*)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x^n) = nf(x)$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x^n) = nf(x)$$
   Indication : on utilisera également la question 1.(c).
   (c) En utilisant la question 3.(a), montrer que :
   $$\forall q \in \mathbb{N}^*, \qquad f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{f(\mathrm{e})}{q}$$
   (d) En déduire que :
   $$\forall r \in \mathbb{Q}, \qquad f(\mathrm{e}^r) = rf(\mathrm{e})$$
   (e) Conclure que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(\mathrm{e}^x) = xf(\mathrm{e})$$
   (f) En déduire l'ensemble des solutions continues de $(*)$.

– FIN DE L'ÉPREUVE –