

APPLICATIONS LINÉAIRES : ASPECT MATRICIEL

1 Matrice d'une application linéaire

Exercice 1 On admet que les applications suivantes sont linéaires. Écrire les matrices de celles-ci dans les bases canoniques des espaces vectoriels mis en jeu :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y, 2x) \end{cases} \quad k : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1) + P''(0)) \end{cases} \quad h : \begin{cases} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP + P' + P(1) \end{cases}$$

Exercice 2 1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^2 de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

2. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}_3[X]$ de matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. L'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est-il surjectif?

Exercice 3 Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose :

$$\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch}) \quad \text{et} \quad V = \text{Vect}(\mathcal{B})$$

- (a) Montrer que \mathcal{B} est une base de V .
(b) Montrer que V est stable par dérivation, *i.e.* que $D(V) \subset V$, où $D : f \mapsto f'$.
- On note D l'endomorphisme de V induit par la dérivation et M la matrice de D dans \mathcal{B} .
(a) Expliciter la matrice M .

(b) Montrer que D est un automorphisme de V et calculer la matrice de D^{-1} dans la base \mathcal{B} .

Exercice 4 On note $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice telle que :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad A_{i,j} = \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que A est inversible.
- Donner une expression simple de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique.
- En déduire A^{-1} .

Exercice 5 Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + a\bar{z} \end{cases}$.

- Former la matrice de l'endomorphisme f du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} dans la base $(1, i)$.
- Déterminer l'image et le noyau de f .

Exercice 6 On considère les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 suivants :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\} \quad \text{et} \quad D = \text{Vect}(w),$$

où $w = (1, 0, -1)$. On admettra que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. On note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , p la projection vectorielle sur P parallèlement à D , q celle sur D parallèlement à P et enfin s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D .

- Former la matrice de p dans la base \mathcal{B} .
- En déduire celles de q et s .

2 Changements de bases

Exercice 7 On note u l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par :

$$u(x, y, z, t) = (2x - y + z + 5t, -x + 2y + 3z - 4t, x + 5z + 6t)$$

- Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques des espaces mis en jeu.

2. Montrer que les familles :

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$$

et $\mathcal{C} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sont des bases de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 respectivement puis déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.

Exercice 8 On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On pose :

$$e_1 = (3, 1, 0), \quad e_2 = (-1, 1, 1) \quad \text{et} \quad e_3 = (0, 1, 1)$$

Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

3. Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base (e_1, e_2, e_3) .
4. En déduire A^n pour tout entier naturel n .

Exercice 9 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ suivant :

$$\varphi : P \longmapsto (X + 2)P'(X) + P(X - 1)$$

1. Calculer l'image des vecteurs $1, X + 1$ et $2X^2 + 4X + 3$ par φ .
2. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale. L'application φ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 10 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent d'indice n , c'est-à-dire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ mais que $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & I_{n-1} & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent d'indice 2, c'est-à-dire que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ mais que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

2. En déduire que, dans une certaine base de E , f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 1. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que, dans une certaine base de \mathbb{R}^3 , l'application f

admet pour matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} .
- (b) Montrer que M est semblable à son inverse.

Exercice 13 Montrer que les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Exercice 14 Montrer que les matrices A, B, C et D ci-dessous sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Rang

Exercice 15 Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$$

2. $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$

Exercice 16 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f^3$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2)$.

2. Montrer que si $\text{rg}(f - \text{Id}_E) = 2$, alors dans une certaine base de E , l'application f admet pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Plus généralement, montrer que dans une certaine base de E , f admet pour matrice 0_3 ou I_3 ou :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^2)$ et $\text{Im}(M) = \text{Im}(M^2)$.
2. En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles.
3. Obtenir une contradiction. Qu'a-t-on démontré ?

4 Trace d'un endomorphisme

Exercice 18 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace des endomorphismes suivants :

1. $P \mapsto P(aX + b)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$;
2. (a) $M \mapsto M^T$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
(b) $M \mapsto M^T$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
3. $M \mapsto AM$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.