

APPLICATIONS LINÉAIRES

(corrigés)

Exercice 11 On raisonne par double implication.

★ On suppose que $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$. Montrons que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$ en raisonnant par double implication.

— Comme $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E , on a $0_E \in \text{Im}(f)$ et $0_E \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, $0_E \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$ i.e. $\{0_E\} \subset \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.

— Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Comme $x \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. De plus, $x \in \text{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0_E$ i.e. $f(f(y)) = 0_E$ soit encore $f^2(y) = 0_E$. Ainsi, $y \in \text{Ker}(f^2)$. Comme $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$, on a $y \in \text{Ker}(f)$, i.e. $f(y) = 0_E$. On a donc $x = 0_E$. Ceci démontre l'inclusion $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \subset \{0_E\}$.

Par double inclusion, on peut conclure que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

★ On suppose que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Montrons que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ en raisonnant par double inclusion.

— Soit $x \in \text{Ker}(f)$. On a $f(x) = 0_E$ donc :

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$$

car f est linéaire. Ainsi, $x \in \text{Ker}(f^2)$. Ceci démontre l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

— Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. On a $f^2(x) = 0_E$ i.e. $f(f(x)) = 0_E$. Ainsi, $f(x) \in \text{Ker}(f)$ et, par définition de l'image de f , on a aussi $f(x) \in \text{Im}(f)$. On a donc $f(x) \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Autrement dit, $f(x) = 0_E$ i.e. $x \in \text{Ker}(f)$. On a donc $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

Par double inclusion, on a bien $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Finalement :

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Exercice 17

1. Soient p et q deux projecteurs de E qui commutent.

★ Montrons que $r = p + q - p \circ q$ est un projecteur de E . On sait que $\mathcal{L}(E)$ est stable pour l'addition et pour la composition donc $r \in \mathcal{L}(E)$. De plus, on a

par bilinéarité de la composition (et en utilisant le fait que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $p \circ q = q \circ p$) :

$$\begin{aligned} r^2 &= (p + q - p \circ q) \circ (p + q - p \circ q) \\ &= p^2 + p \circ q - \underbrace{p^2 \circ q}_{=p \circ q} + q \circ p + q^2 - q \circ p \circ q - p \circ q \circ p - p \circ q^2 + (p \circ q)^2 \\ &= p + 2p \circ q + q - \underbrace{p \circ q^2}_{=p \circ q} - \underbrace{p^2 \circ q}_{=p \circ q} - p \circ q + \underbrace{p^2 \circ q^2}_{=p \circ q} \\ &= p + q - p \circ q \\ &= r \end{aligned}$$

Ainsi :

$$r = p + q - p \circ q \text{ est un projecteur de } E$$

★ L'application $s = p \circ q$ est un endomorphisme de E et, comme p et q commutent, on a :

$$s^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q = s$$

donc

$$s = p \circ q \text{ est un projecteur de } E$$

2. ★ Montrons que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$ en raisonnant par double inclusion.

— Soit $x \in \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$. Il existe $(y, z) \in \text{Ker}(p) \times \text{Ker}(q)$ tel que $x = y + z$. Alors :

$$\begin{aligned} (p \circ q)(x) &= (p \circ q)(y + z) \\ &= (p \circ q)(y) + (p \circ q)(z) \quad (\text{car } p \circ q \text{ est linéaire}) \\ &= q(p(y)) + p(q(z)) \quad (\text{car } p \circ q = q \circ p) \\ &= q(0_E) + p(0_E) \quad (\text{car } y \in \text{Ker}(p) \text{ et } z \in \text{Ker}(q)) \\ &= 0_E + 0_E \quad (\text{car } p \text{ et } q \text{ sont linéaires}) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in \text{Ker}(p \circ q)$. On a donc l'inclusion $\text{Ker}(p) + \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p \circ q)$.

— Soit $x \in \text{Ker}(p \circ q)$. On a $(p \circ q)(x) = 0_E$ i.e. $p(q(x)) = 0_E$. Ainsi, $q(x) \in \text{Ker}(p)$. Or :

$$x = \underbrace{q(x)}_{\in \text{Ker}(p)} + (x - q(x))$$

et on sait que $x - q(x) \in \text{Ker}(q)$. En effet, par linéarité et idempotence de q , on a :

$$q(x - q(x)) = q(x) - q^2(x) = q(x) - q(x) = 0_E$$

Finalement, $x \in \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$. Ceci démontre l'inclusion $\text{Ker}(p \circ q) \subset \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$.

Par double inclusion, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)}$$

★ Montrons que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$ en raisonnant par double inclusion.

— Soit $x \in \text{Im}(p \circ q)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = (p \circ q)(y)$. On a donc :

$$x = p(\underbrace{q(y)}_{\in E}) \in \text{Im}(p) \quad \text{et, comme } p \circ q = q \circ p, \quad x = q(\underbrace{p(y)}_{\in E}) \in \text{Im}(q)$$

Ainsi, $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$. On a donc l'inclusion $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

— Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$. Comme p et q sont des projecteurs, on a :

$$\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id}_E - p) \quad \text{et} \quad \text{Im}(q) = \text{Ker}(\text{Id}_E - q)$$

et x appartient à ces deux images donc :

$$\begin{aligned} (p \circ q)(x) &= p(q(x)) = p(x) && (\text{car } x \in \text{Im}(q)) \\ &= x && (\text{car } x \in \text{Im}(p)) \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in \text{Im}(p \circ q)$. On a donc l'inclusion $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p \circ q)$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \text{Im}(p \circ q)}$$

Exercice 18 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

★ On considère l'application $\varphi_\alpha : \begin{cases} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(\alpha) \end{cases}$. L'application φ est une forme linéaire sur $\mathbb{C}[X]$ car :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \quad \varphi_\alpha(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(\alpha) \\ &= P(\alpha) + \lambda Q(\alpha) \\ &= \varphi_\alpha(P) + \lambda \varphi_\alpha(Q) \end{aligned}$$

De plus, l'application φ_α est non nulle car $X^0 = 1 \in \mathbb{C}[X]$ et $\varphi_\alpha(1) = 1 \neq 0$. Enfin :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi_\alpha) &= \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \varphi_\alpha(P) = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\alpha) = 0\} \\ &= H \end{aligned}$$

Finalement, H est le noyau de la forme linéaire non nulle φ_α donc :

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } \mathbb{C}[X]}$$

★ Déterminons une base de H . Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in H &\iff P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X - \alpha)Q \\ &\iff \exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}, P = (X - \alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} q_n X^n \\ &\iff \exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}, P = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n (X - \alpha) X^n \\ &\iff P \in \text{Vect}((X - \alpha) X^n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$H = \text{Vect}((X - \alpha) X^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

On en déduit que $((X - \alpha) X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de H . De plus, cette famille est libre car il s'agit d'une famille de polynômes de degrés échelonnés. Finalement :

$$\boxed{\text{une base de } H \text{ est } ((X - \alpha) X^n)_{n \in \mathbb{N}}}$$