

APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Application linéaire, isomorphisme

Exercice 1 Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(2) - 2P'(0) \end{cases}$$

$$2. g : \begin{cases} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, 2x + 5iz) \end{cases}$$

$$3. h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 3y, x + y, z + 2) \end{cases}$$

$$4. j : \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \exp \circ f \end{cases}$$

$$5. k : \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f \times \cos \end{cases}$$

$$6. \ell : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m+1} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, \dots, u_m) \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{N} \text{ est fixé}$$

$$7. j : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A - 2A^T \end{cases}$$

Exercice 2 Soient f et g les endomorphismes de \mathbb{R}^2 définis par :

$$f : (x, y) \longmapsto (x + y, 2x) \quad \text{et} \quad g : (x, y) \longmapsto (y, x)$$

1. Montrer que f et g sont des automorphismes de \mathbb{R}^2 et déterminer f^{-1} et g^{-1} .
2. On pose $h = f \circ g - g \circ f$. Justifier que $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
3. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? L'application h est-elle injective?
4. L'application h est-elle surjective?

Exercice 3 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$u \circ v - v \circ u = u$$

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$$

Exercice 4 Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Pour tout entier naturel k non nul, on pose :

$$f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$$

On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que f^n soit l'application identiquement nulle.

1. Soit $x \in \text{Ker}(\text{Id}_E - f)$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^k(x) = x$$

En déduire que $\text{Id}_E - f$ est injectif.

2. Simplifier les expressions :

$$(\text{Id}_E - f) \circ (\text{Id}_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$$

et :

$$(\text{Id}_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (\text{Id}_E - f)$$

En déduire que $\text{Id}_E - f$ est un automorphisme de E .

3. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme $\text{Id}_E - f^k$ de E est inversible. On précisera l'expression de son inverse.

Exercice 5 Pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, on considère la fonction $f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k e^{2x} \end{cases}$

et on note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par ces trois vecteurs.

1. Quelle est la dimension de E ? En donner une base.
2. On note D l'opérateur de dérivation défini par :

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f'$$

Montrer que $D \in \mathcal{L}(E)$.

3. Montrer que $D \in \text{GL}(E)$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0)) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur \mathbb{K}^{n+1} .

Exercice 7 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que f est nilpotent et on note p le plus petit entier naturel non nul tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre.

(b) En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. Montrer que f est nilpotent si :

$$\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^*, \quad f^p(x) = 0$$

3. Trouver un contre-exemple au résultat de la question 2.(a) dans le cas où E n'est pas de dimension finie.

2 Noyaux et images

Exercice 8 Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires dont les expressions sont les suivantes. Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$

2. $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$

3. $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y - z, x + 2y + 2z)$

4. $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$

Exercice 9 Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leur noyau et leur image. Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & X(P'(X+1) - P'(1)) \end{cases}$

2. $\psi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' - P(0) \end{cases}$

3. $\theta : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M \end{cases}$

Exercice 10 Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que :

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$

Montrer que :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) \quad \text{et} \quad F = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$$

Exercice 11 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Exercice 12 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriels et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Montrer que f est surjective et que g est injective.

2. Montrer que $p = g \circ f$ est un projecteur de E .

3. Établir que $\text{Im}(p) = \text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(f)$.

4. Montrer que :

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$$

Exercice 13 On considère \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel. On considère l'application :

$$u : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz - i\bar{z} \end{cases}$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

2. Déterminer le noyau et l'image de u .

3. Calculer u^2 .

4. En déduire que $\text{Id}_{\mathbb{C}} + 2u$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 14 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Exercice 15 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$, comparer $\text{Ker}(f^p)$ et $\text{Ker}(f^q)$, puis $\text{Im}(f^p)$ et $\text{Im}(f^q)$.

Exercice 16 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors :

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$$

2. Montrer que si $f^3 = \text{Id}_E$, alors :

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$$

3 Projecteurs, symétries

Exercice 17 On pose $E = \mathbb{R}^4$,

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid z = y + t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x = y + z = 0\}$$

1. Montrer que F et G sont des plans vectoriels de E .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
3. Donner les expressions analytiques de p et s , respectivement projecteur sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Exercice 18 Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note \mathcal{A} le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions affines et on pose :

$$\mathcal{N} = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels \mathcal{A} et \mathcal{N} sont supplémentaires dans E .
2. Expliciter le projecteur sur \mathcal{A} parallèlement à \mathcal{N} .
3. Expliciter la symétrie par rapport à \mathcal{A} parallèlement à \mathcal{N} .

Exercice 19 Soient p et q deux projecteurs qui commutent d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que $p + q - p \circ q$ et $p \circ q$ sont des projecteurs.
2. Montrer que :

$$\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$$

Exercice 20 Montrer que l'application $s : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & (x \mapsto f(-x)) \end{cases}$ est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

4 Rang

Exercice 21 Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f, g deux endomorphismes de E tels que :

$$f + g = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$$

1. Montrer que :

$$E = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$$

2. Après avoir justifié l'égalité $f \circ g = g \circ f$, montrer que f et g sont des projecteurs de E .

Exercice 22 Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires de rang fini.

1. Montrer que :

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

2. Montrer que $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ si et seulement si :

$$\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E$$

5 Formes linéaires et hyperplans

Exercice 23 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble :

$$H = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 24 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f, g deux formes linéaires non nulles sur E .

1. Montrer qu'on a $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \lambda f$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f et g définissent le même hyperplan H . En déduire toutes les équations de H .

Exercice 25 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E dont l'image est une droite vectorielle $\text{Vect}(u)$ où $u \neq 0$. On pose alors :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \varphi(x)u$$

Montrer que φ est une forme linéaire sur E et justifier l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.