Applications

(quelques corrigés)

Exercice 6

On note f l'application proposée. Soient $(a,b),(a',b') \in \mathbb{Z}^2$. On suppose qu'on a l'égalité $f\big((a,b)\big) = f\big((a',b')\big)$. Montrons que $(a,b) = (a',b')$ (c'est-à-dire que $a = a'$ et $b = b'$). Par hypothèse, on a $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$, ce qui implique que :

$$a - a' = (b' - b)\sqrt{2}$$

Par l'absurde, supposons que $b \neq b'$. Alors :

$$\sqrt{2} = \frac{a - a'}{b' - b}$$

est le quotient de deux entiers relatifs donc $\sqrt{2}$ est un rationnel, ce qui est absurde. On en déduit que $b = b'$ et donc $a - a' = 0$ puis $a = a'$. Finalement, $(a,b) = (a',b')$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est injective}}$$

Exercice 7

On suppose que f est surjective et que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrons que $g_1 = g_2$. On veut donc montrer que :

$$\forall y \in F, \qquad g_1(y) = g_2(y)$$

Soit $y \in F$. Comme f est une surjection de E sur F et puisque $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc :

$$g_1(y) = g_1(f(x)) = (g_1 \circ f)(x) \qquad \text{et} \qquad g_2(y) = g_2(f(x)) = (g_2 \circ f)(x)$$

Or $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ donc $g_1(y) = g_2(y)$, ce qu'il fallait démontrer. Finalement :

$$\boxed{\text{on a bien l'égalité } g_1 = g_2}$$

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(n) \leqslant n$. Montrons que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, *i.e.* que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n) = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(n) = n$$

On utilise une récurrence *forte.*

- ⋆ On sait que $f(0) \in \mathbb{N}$ et que $f(0) \leqslant 0$. Ceci entraîne que $f(0) = 0$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

  $$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad f(k) = k$$

  Montrons que $f(n+1) = n+1$. Par hypothèse, on sait que $f(n+1) \leqslant n+1$, donc :

  $$f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$$

  Il existe donc $j \in [\![0, n+1]\!]$ tel que $f(n+1) = j$. Par l'absurde, supposons que $j \in [\![0, n]\!]$. Alors on a $f(n+1) = j$ et, par hypothèse de récurrence, on a aussi $f(j) = j$. L'égalité $f(n+1) = f(j)$ et l'injectivité de f entraînent que $j = n+1$, ce qui contredit la définition de j. Ainsi, $j = n+1$ et donc $f(n+1) = n+1$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f(n) = n, \text{ ce qui signifie que } f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}}$$

Exercice 10

1. Considérons $X_1 = \varnothing$ et $X_2 = \{1\}$. Alors X_1 et X_2 sont deux parties distinctes (c'est-à-dire $X_1 \neq X_2$) de $\mathbb{N}$ et, comme 1 est un entier naturel impair, on a :

   $$\varphi(X_1) = \varphi(X_2) = \varnothing$$

   On en déduit que :

   $$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ n'est pas injective}}$$

2. Pour tout $X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, on a :

   $$\varphi(X) = X \cap 2\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N} \qquad (*)$$

   La partie $\{1\}$ de $\mathbb{N}$ n'est pas incluse dans $2\mathbb{N}$ donc elle n'admet pas d'antécédent par φ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. On en déduit que :

   $$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ n'est pas surjective}}$$

Remarque : si E et F sont des ensembles et si $f \in F^E$, on appelle *image de f* l'ensemble $f(E)$.

Montrons que l'image de φ est :

$$\varphi(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathscr{P}(2\mathbb{N})$$

en raisonnant par double inclusion.

- ⋆ Montrons que $\varphi(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \subset \mathscr{P}(2\mathbb{N})$.
  Soit $Y \in \varphi(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Alors il existe $X \in \mathbb{N}$ tel que $Y = \varphi(X)$. D'après $(*)$, on a $Y \subset 2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $Y \in \mathscr{P}(2\mathbb{N})$. On a donc bien l'inclusion $\varphi(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \subset \mathscr{P}(2\mathbb{N})$.
- ⋆ Montrons que $\mathscr{P}(2\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Soit $X \in \mathscr{P}(2\mathbb{N})$. Alors $X \subset 2\mathbb{N}$ donc $X \cap 2\mathbb{N} = X$. Comme $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, on a aussi $X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ donc la dernière égalité se réécrit $\varphi(X) = X$. On a ainsi $X \in \varphi(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, d'où l'inclusion $\mathscr{P}(2\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Finalement, on a l'égalité :

$$\boxed{\varphi(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathscr{P}(2\mathbb{N})}$$

Exercice 11

1. On distingue deux cas.
   - ⋆ **Premier cas :** $A = \varnothing$
     Alors $\psi = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(E)}$ et donc ψ est injective (en tant qu'application identité).
   - ⋆ **Deuxième cas :** $A \neq \varnothing$
     On remarque que $\psi(\varnothing) = \psi(A) = A$ donc, comme $A \neq \varnothing$, l'application ψ n'est pas injective.

   Ainsi :

   $$\boxed{\psi \text{ est injective si et seulement si } A = \varnothing}$$

2. On distingue à nouveau deux cas.
   - ⋆ **Premier cas :** $A = \varnothing$
     Alors $\psi = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(E)}$ et donc ψ est surjective (en tant qu'application identité).
   - ⋆ **Deuxième cas :** $A \neq \varnothing$
     Pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $A \subset \psi(X)$ (par définition de $\psi(X)$) et, comme $A \neq \varnothing$, on ne peut pas avoir l'égalité $\psi(X) = \varnothing$. En effet, supposons par l'absurde que $\psi(X) = \varnothing$. Alors :

     $$\varnothing \subset A \subset \varphi(X) = \varnothing,$$

     ce qui implique que $A = \varnothing$, ce qui est absurde. On en déduit que $\varnothing$ n'admet pas d'antécédent par ψ dans $\mathscr{P}(E)$ et donc que ψ n'est pas surjective.

   On en déduit que :

   $$\boxed{\psi \text{ est surjective si et seulement si } A = \varnothing}$$

   Dans tous les cas, montrons que :

   $$\psi(\mathscr{P}(E)) = \left\{Y \in \mathscr{P}(E) \,\middle|\, A \subset Y\right\}$$

   Remarque : dans le cas où $A = \varnothing$, on retrouve bien entendu le fait que :

   $$\psi(\mathscr{P}(E)) = \mathscr{P}(E)$$

   - Soit $Y \in \psi(\mathscr{P}(E))$. Il existe alors $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que :

     $$Y = \psi(X) = X \cup A$$

     Comme $A \subset X \cup A$, on a bien $A \subset Y$.
   - Soit $Y \in \mathscr{P}(E)$ tel que $A \subset Y$. On remarque que :

     $$\psi(Y) = Y \cup A = Y$$

     puisque $A \subset Y$. On en déduit que $Y \in \psi(\mathscr{P}(E))$.

   Finalement, l'image de ψ est :

   $$\boxed{\psi(\mathscr{P}(E)) = \left\{Y \in \mathscr{P}(E) \,\middle|\, A \subset Y\right\}}$$