

APPLICATIONS

(corrigés)

Exercice 1

1. ★ On a $f([0, 1]) = \{\sin(\pi x) \mid x \in]0, 1]\} = [0, 1]$.

★ De plus :

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi x) = 0\} \\ = \mathbb{Z}$$

★ Et :

$$f^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [0, 1]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \sin(\pi x) \leq 1\} \\ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in g^{-1}(]-2, 0]) \iff g(x) \in]-2, 0] \iff -2 < x^2 - 3x \leq 0 \\ \iff x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ et } x^2 - 3x \leq 0 \\ \iff x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[\text{ et } x \in [0, 3]$$

On en déduit que :

$$g^{-1}(]-2, 0]) = [0, 1[\cup]2, 3]$$

3. Le domaine de définition de la fonction h est $\mathcal{D}_h =]-\infty, -3] \cup \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathcal{D}_h$. On a :

$$x \in h^{-1}([-1, 2]) \iff h(x) \in [-1, 2] \iff -1 \leq \sqrt{x^2 + 3x} \leq 2 \\ \iff \sqrt{x^2 + 3x} \leq 2 \quad (\text{car } \sqrt{x^2 + 3x} \geq 0) \\ \iff x^2 + 3x \leq 4$$

car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et car $\sqrt{x^2 + 3x}, 2 \in \mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$x \in h^{-1}([-1, 2]) \iff x^2 + 3x - 4 \leq 0 \iff x \in [-4, 1]$$

Finalement :

$$h^{-1}([-1, 2]) = \mathcal{D}_h \cap [-4, 1] = [-4, -3] \cup [0, 1]$$

4. (a) La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad k'(x) = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$$

On en déduit le tableau de variations de k suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$	0
k	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

On en déduit que :

$$k(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

- (b) Sur l'intervalle $[-1, 1]$, l'application k est strictement croissante car :

$$(\forall x \in]-1, 1[, \quad k'(x) > 0) \quad \text{et} \quad k(\pm 1) = 0$$

donc :

$$\text{l'application } k \text{ est strictement croissante sur } [-1, 1]$$

Notons j l'application $k|_{[-1, 1]}$. Soit $y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On résout l'équation $y = j(x)$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$:

$$j(x) = y \iff \frac{x}{x^2 + 1} = y \iff x = yx^2 + y \\ \iff yx^2 - x + y = 0$$

Si $y = 0$, alors cette équation admet pour solution $x = 0$. Supposons maintenant que $x \neq 0$. L'équation du second degré obtenue a pour discriminant $1 - 4y^2 \geq 0$ (car $|y| \leq \frac{1}{2}$). Celle-ci admet donc pour racines :

$$x_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^2}}{2y} \quad \text{et} \quad x_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$$

Ces deux racines sont confondues dans le cas où $y = \pm \frac{1}{2}$. Supposons que $y \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\setminus \{0\}$. On a alors $1 + \sqrt{1 - 4y^2} > 1$ et $|2y| < 1$ donc $|x_+| > 1$. Ainsi, $x_+ \notin [-1, 1]$. Par ailleurs (d'après les relations coefficients/racines) :

$$x_- x_+ = 1 \quad \text{donc} \quad |x_-| = \frac{1}{|x_+|} < 1$$

Ainsi, $x_- \in [-1, 1]$. La solution de l'équation $y = j(x)$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$ est donc x_- . Finalement, l'application j est bijective et :

$$j^{-1} : \begin{cases} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^2}}{2y} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

(c) L'application j est bijective de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et est strictement croissante.

L'application j^{-1} est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On en déduit que :

$$k^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]\right) = \left[j^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), j\left(\frac{1}{4}\right)\right] = \dots$$

Exercice 2

- On suppose que $A \subset B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$. Il existe alors $a \in A$ tel que $y = f(a)$. Or $A \subset B$, donc $a \in B$. Ainsi, $y = f(a)$ et $a \in B$ donc, par définition de l'image directe d'un ensemble, on a $y \in f(B)$. On a bien montré l'inclusion $f(A) \subset f(B)$. Ainsi :

$$(A \subset B) \implies (f(A) \subset f(B))$$

- Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on a les inclusions $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$ d'après la question 1. Par conséquent :

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Remarque : en général, la réciproque est fautive. Considérons par exemple l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

et les ensembles $A = \mathbb{R}_-$ et $B = \mathbb{R}_+$. Alors $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$. Par contre :

$$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\} \neq f(A) \cap f(B)$$

- Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ en raisonnant par double inclusion.

★ Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On distingue alors deux cas.

- Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$ et, comme $f(A) \subset f(A) \cup f(B)$, on a $y \in f(A) \cup f(B)$.
- Le cas $x \in B$ est analogue.

Dans les deux cas, on a bien $y \in f(A) \cup f(B)$. On a donc démontré l'inclusion $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

★ Montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$. D'après la question 1., on a les inclusions :

$$f(A) \subset f(A \cup B) \quad \text{et} \quad f(B) \subset f(A \cup B)$$

Par conséquent, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Finalement, on a l'égalité :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Exercice 3

- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $a \in A$. Alors $f(a) \in f(A)$ et donc, par définition de l'image réciproque d'un ensemble, on a bien $a \in f^{-1}(f(A))$. Par conséquent :

$$A \subset f^{-1}(f(A))$$

2. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Montrons que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe alors $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$ par définition de l'image réciproque d'un ensemble, c'est-à-dire $y \in B$. On a bien démontré l'inclusion :

$$\boxed{f(f^{-1}(B)) \subset B}$$

3. On raisonne par double implication.

★ On suppose que f est injective. Montrons alors que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On sait que $A \subset f^{-1}(f(A))$ d'après la question 1. Montrons maintenant que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition de l'image réciproque d'un ensemble, on a $f(x) \in f(A)$, ce qui signifie qu'il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Comme f est injective, cela implique que $x = a$. Ainsi, $x \in A$. Ceci démontre l'inclusion annoncée. Finalement, on a bien l'égalité $A = f^{-1}(f(A))$.

★ Réciproquement, supposons que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

et montrons que f est injective. Soit $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$ et montrons que $x = y$. Considérons la partie $A = \{x\}$ de E . Par hypothèse, on sait que :

$$f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$$

Or, par définition de l'image réciproque d'un ensemble, on a :

$$f^{-1}(f(\{x\})) = \{z \in E \mid f(z) \in f(\{x\})\}$$

et on a $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ donc :

$$f^{-1}(f(\{x\})) = \{z \in E \mid f(z) = f(x)\}$$

Par définition de y , on a $y \in f^{-1}(f(\{x\}))$ et donc $y \in \{x\}$, ce qui signifie que $y = x$. Ainsi, f est injective.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est injective} \iff (\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A)}$$

4. Soit $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

★ Soit $x \in E$. Alors, par définition de l'image réciproque d'un ensemble, on a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cup B') &\iff f(x) \in B \cup B' \iff f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B') \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien l'égalité :

$$\boxed{f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')}$$

★ On peut démontrer la deuxième égalité de la même manière.

Exercice 4 On raisonne par double implication.

★ Supposons que f soit injective. Montrons que :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

Soit $A, A' \in \mathcal{P}(E)$. On raisonne par double inclusion.

- On sait déjà (cf. exercice 2) que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
- Montrons maintenant que $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$. Soit $y \in f(A) \cap f(A')$. Alors $y \in f(A)$ et $y \in f(A')$. Par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, il existe $a, a' \in A$ tels que :

$$y = f(a) \quad \text{et} \quad y = f(a')$$

En particulier, $f(a) = f(a')$ et, comme f est injective, on a l'égalité $a = a'$. Ainsi, $a \in A \cap A'$ et comme $y = f(a)$, on peut conclure que $y \in f(A \cap A')$. On a donc l'inclusion $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$.

Finalement, on a bien l'égalité $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

★ On suppose que :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

Montrons que f est injective. Soit $x, x' \in E$ tel que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Considérons les parties $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$ de E . D'après notre hypothèse, on a :

$$f(A \cap A') = f(A) \cap f(A'),$$

c'est-à-dire :

$$f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$$

soit encore :

$$f(\{x\} \cap \{x'\}) = \{f(x)\} \cap \{f(x')\} = \{f(x)\}$$

car, par hypothèse sur x et x' , on a $f(x) = f(x')$. Or, si $x \neq x'$, alors :

$$\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset \quad \text{et} \quad f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

ce qui est absurde. Donc $x = x'$. On peut donc conclure que f est injective.

Finalement :

$$f \text{ est injective} \iff (\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A'))$$

Exercice 5

1. En choisissant $m = n = 0$ dans l'équation fonctionnelle vérifiée par f , on obtient :

$$f(f(0)) = f(f(0)) + f(0)$$

donc :

$$f(0) = 0$$

2. Le choix $n = 0$ dans l'équation fonctionnelle nous donne (puisque $f(0) = 0$) :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad f(m) = f(f(m))$$

Autrement dit :

$$f \circ f = f$$

3. On raisonne par double inclusion.

- ★ Soit $x \in f(\mathbb{N})$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = f(n)$. D'après la question précédente, on a :

$$f(n) = (f \circ f)(n) \quad i.e. \quad x = f(f(n)) = f(x)$$

Ainsi, $x \in \text{Fix}(f)$. Ceci démontre l'inclusion $f(\mathbb{N}) \subset \text{Fix}(f)$.

- ★ Soit $n \in \text{Fix}(f)$. Alors $n = f(n) \in f(\mathbb{N})$ (par définition de $f(\mathbb{N})$). On a donc l'inclusion $\text{Fix}(f) \subset f(\mathbb{N})$.

On peut donc conclure que :

$$f(\mathbb{N}) = \text{Fix}(f)$$

4. Soit $n \in \text{Fix}(f)$. Le choix $m = 1$ dans l'équation fonctionnelle vérifiée par f nous donne :

$$f(1 + f(n)) = f(f(1)) + f(n)$$

Or on sait que $1, n \in \text{Fix}(f)$ donc cette égalité se réécrit $f(n+1) = n+1$. Autrement dit, $n+1 \in \text{Fix}(f)$. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n+1 \in \text{Fix}(f)$$

5. On sait que :

- ★ $0 \in \text{Fix}(f)$;
- ★ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \in \text{Fix}(f)$, alors $n+1 \in \text{Fix}(f)$ (d'après la question précédente).

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in \text{Fix}(f)$$

Autrement dit :

$$\text{Fix}(f) = \mathbb{N}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n,$$

i.e. :

$$f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$$

Exercice 6

1. ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geq 0$. Ainsi, $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$ et donc $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$. L'application f n'est donc pas surjective (elle n'est donc pas bijective non plus).
★ On remarque que $f(0) = f(-2) = 1$. Comme $-2 \neq 0$, l'application f n'est pas injective.
2. ★ On peut vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq g(x) \leq 1$ donc $g(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$. Par conséquent, $g(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ et donc g n'est pas surjective (elle n'est donc pas bijective non plus).
★ On peut vérifier que $\frac{1}{2}$ admet deux antécédents distincts par l'application g dans $\mathbb{R}$ donc g n'est pas injective.
3. ★ On peut vérifier que la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc l'application h est injective.
★ De plus, on a $h(\mathbb{R}_+) = \left] -\frac{1}{2}, 3 \right] \neq \mathbb{R}$ donc h n'est pas surjective (elle n'est donc pas bijective non plus).
4. La fonction k est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. L'application k est donc bijective (et injective, surjective).
5. ★ On a $\varphi((0, 0)) = \varphi((-3, 2))$ et $(0, 0) \neq (-3, 2)$ donc φ n'est pas injective (ni bijective).
★ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t = \varphi\left(\left(\frac{t}{2}, 0\right)\right)$ donc $\left(\frac{t}{2}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$ est un antécédent de t par l'application φ dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, φ est surjective.
6. ★ Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Si $\psi(m) = \psi(n)$, alors $2m + 5 = 2n + 5$, d'où l'on tire que $m = n$. L'application ψ est donc injective.
★ Pour montrer que ψ n'est pas surjective (ni bijective), il suffit par exemple de montrer que $0 \in \mathbb{Z}$ n'admet pas d'antécédent par l'application ψ dans $\mathbb{Z}$. Par l'absurde, s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 = \psi(n)$, alors $2n + 5 = 0$, i.e. $n = -\frac{5}{2}$. Ceci est absurde car $-\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 7

On note f l'application proposée. Soient $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2$. On suppose qu'on a l'égalité $f((a, b)) = f((a', b'))$. Montrons que $(a, b) = (a', b')$ (c'est-à-dire que $a = a'$ et $b = b'$). Par hypothèse, on a $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$, ce qui implique que :

$$a - a' = (b' - b)\sqrt{2}$$

Par l'absurde, supposons que $b \neq b'$. Alors :

$$\sqrt{2} = \frac{a - a'}{b' - b}$$

est le quotient de deux entiers relatifs donc $\sqrt{2}$ est un rationnel, ce qui est absurde. On en déduit que $b = b'$ et donc $a - a' = 0$ puis $a = a'$. Finalement, $(a, b) = (a', b')$. On peut donc conclure que :

l'application f est injective

Exercice 8

On suppose que f est surjective et que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrons que $g_1 = g_2$. On veut donc montrer que :

$$\forall y \in F, \quad g_1(y) = g_2(y)$$

Soit $y \in F$. Comme f est une surjection de E sur F et puisque $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc :

$$g_1(y) = g_1(f(x)) = (g_1 \circ f)(x) \quad \text{et} \quad g_2(y) = g_2(f(x)) = (g_2 \circ f)(x)$$

Or $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ donc $g_1(y) = g_2(y)$, ce qu'il fallait démontrer. Finalement :

on a bien l'égalité $g_1 = g_2$

Exercice 9

1. On suppose que f et g sont injectives. Montrons que $g \circ f \in G^E$ est injective, *i.e.* que :

$$\forall x, y \in E, \quad (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \implies x = y$$

Soient $x, y \in E$. On suppose que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, *i.e.* $g(f(x)) = g(f(y))$. Montrons que $x = y$.

- ★ L'application g est injective et on a $g(f(x)) = g(f(y))$ donc $f(x) = f(y)$.
- ★ L'application f est injective et on a $f(x) = f(y)$ donc $x = y$.

Finalement :

l'application $g \circ f$ est injective

2. On suppose que f et g sont surjectives. Montrons que $g \circ f \in G^E$ est surjective, *i.e.* que :

$$\forall z \in G, \exists x \in E, z = (g \circ f)(x)$$

Soit $z \in G$.

- ★ L'application $g \in G^F$ est surjective et $z \in G$ donc il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
- ★ L'application $f \in F^E$ est surjective et $y \in F$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Ainsi :

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Finalement :

l'application $g \circ f$ est surjective

3. On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective. Montrons que $g \in G^F$ est injective, *i.e.* que :

$$\forall y, z \in F, \quad g(y) = g(z) \implies y = z$$

Soient $y, z \in G$. On suppose que $g(y) = g(z)$.

- ★ On sait que $y, z \in F$ et que $f \in F^E$ est surjective. Il existe donc $a, b \in E$ tels que $y = f(a)$ et $z = f(b)$.
- ★ L'égalité $g(y) = g(z)$ se réécrit donc $g(f(a)) = g(f(b))$, soit encore $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$. Or l'application $g \circ f$ est injective donc $a = b$. Il s'ensuit alors que $f(a) = f(b)$, *i.e.* que $y = z$.

Finalement :

l'application g est injective.

4. On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective. Montrons que $f \in F^E$ est surjective, *i.e.* que :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Soit $y \in F$.

- ★ On a $g(y) \in G$ et l'application $g \circ f \in G^E$ est surjective. Il existe donc $x \in E$ tel que $g(y) = (g \circ f)(x)$, *i.e.* $g(y) = g(f(x))$.
- ★ L'application g est injective et on a l'égalité $g(y) = g(f(x))$ donc $y = f(x)$.

Finalement :

l'application g est surjective

Exercice 10 On raisonne par double implication.

- ★ On suppose que l'application T_f est injective. Montrons que f est injective, *i.e.* que :

$$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y$$

Soient $x, y \in E$. On suppose que $f(x) = f(y)$. Considérons les applications :

$$\varphi_x : \begin{cases} G & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_y : \begin{cases} G & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & y \end{cases}$$

Par hypothèse, on a :

$$\forall t \in G, T_f(\varphi_x)(t) = f(\varphi_x(t)) = f(x) = f(y) = T_f(\varphi_y)(t)$$

Ainsi, $T_f(\varphi_x) = T_f(\varphi_y)$. Or l'application T_f est injective donc $\varphi_x = \varphi_y$. En considérant un élément (quelconque) t de G , on a $\varphi_x(t) = \varphi_y(t)$, *i.e.* $x = y$. Finalement, l'application f est injective.

- ★ On suppose que f est injective. Montrons que T_f est injective, *i.e.* que :

$$\forall \varphi, \psi \in G^E, T_f(\varphi) = T_f(\psi) \implies \varphi = \psi$$

Soient $\varphi, \psi \in G^E$. On suppose que $T_f(\varphi) = T_f(\psi)$. Pour tout $t \in G$, on a :

$$T_f(\varphi)(t) = T_f(\psi)(t) \quad \text{i.e.} \quad f(\varphi(t)) = f(\psi(t)) \quad \text{soit encore} \quad \varphi(t) = \psi(t)$$

car f est injective. Ainsi, $\varphi = \psi$. Finalement, l'application T_f est injective.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est injective si et seulement si } T_f \text{ est injective}}$$

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $f(n) \leq n$. Montrons que $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$, *i.e.* que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \text{Id}_{\mathbb{N}}(n) = n$$

On utilise une récurrence *forte*.

- ★ On sait que $f(0) \in \mathbb{N}$ et que $f(0) \leq 0$. Ceci entraîne que $f(0) = 0$.
 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(k) = k$$

Montrons que $f(n+1) = n+1$. Par hypothèse, on sait que $f(n+1) \leq n+1$, donc :

$$f(n+1) \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$$

Il existe donc $j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ tel que $f(n+1) = j$. Par l'absurde, supposons que $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors on a $f(n+1) = j$ et, par hypothèse de récurrence, on a aussi $f(j) = j$. L'égalité $f(n+1) = f(j)$ et l'injectivité de f entraînent que $j = n+1$, ce qui contredit la définition de j . Ainsi, $j = n+1$ et donc $f(n+1) = n+1$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f(n) = n, \text{ ce qui signifie que } f = \text{Id}_{\mathbb{N}}}$$

Exercice 12

1. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrons que $f = \text{Id}_E$. On distingue deux cas.

- ★ **Premier cas :** f est injective

On veut montrer que $f = \text{Id}_E$, *i.e.* que :

$$\forall x \in E, f(x) = x$$

Soit $x \in E$. Comme $f \circ f = f$, on a $(f \circ f)(x) = f(x)$, *i.e.* $f(f(x)) = f(x)$. Or f est injective donc $f(x) = x$. Finalement, $f = \text{Id}_E$.

- ★ **Deuxième cas :** f est surjective

Soit $y \in E$. Comme $f \in E^E$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a (puisque $f \circ f = f$)

$$f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = y$$

Ainsi, $f = \text{Id}_E$.

Finalement :

$$\boxed{\text{on a l'égalité } f = \text{Id}_E}$$

2. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrons que f est injective si et seulement si f est surjective en raisonnant par double implication.

- ★ On suppose que f est injective. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in E$. On a $f \circ f \circ f = f$ donc :

$$(f \circ f \circ f)(y) = f(y) \quad \text{i.e.} \quad f(f(f(y))) = f(y)$$

Or f est injective donc $f(f(y)) = y$. Donc $f(y) \in E$ est un antécédent de y par l'application f dans E . L'application f est donc surjective.

★ On suppose que f est surjective. Montrons que f est injective.

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$. Comme f est surjective, il existe $a, b \in E$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. On a :

$$\begin{aligned} x = f(a) &= (f \circ f \circ f)(a) = f(f(f(a))) = f(f(x)) = f(f(y)) \quad (\text{car } x = y) \\ &= f(f(f(a))) \\ &= f(a) \\ &= y \end{aligned}$$

Exercice 13

1. C'est faux en général : par exemple, l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$ est injective sur $\mathbb{R}_+$, injective sur $\mathbb{R}_-$ (puisque f est strictement monotone sur chacun de ces deux intervalles), mais elle n'est pas injective sur la réunion $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$. En effet, l'élément $1 \in \mathbb{R}$ (par exemple) admet deux antécédents par f dans $\mathbb{R}$, à savoir -1 et 1 .

2. On suppose que, pour tout entier naturel n , l'application $f|_{A_n}$ est injective. Montrons que $f : E \longrightarrow F$ est injective. Soit $x, y \in E$. On suppose que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$. Comme $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, il existe deux entiers naturels n_x et n_y tels que $x \in A_{n_x}$ et $y \in A_{n_y}$. Posons $N = \max(n_x, n_y)$. Comme la suite $(A_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, on a les inclusions :

$$A_{n_x} \subset A_N \quad \text{et} \quad A_{n_y} \subset A_N$$

On en déduit que $x \in A_N$ et $y \in A_N$. Or $f|_{A_N}$ est injective donc $x = y$ (puisque $x, y \in A_N$ et $f|_{A_N}(x) = f|_{A_N}(y)$). Donc :

l'application $f : E \longrightarrow F$ est injective

Exercice 14

1. Considérons $X_1 = \emptyset$ et $X_2 = \{1\}$. Alors X_1 et X_2 sont deux parties distinctes (*i.e.* $X_1 \neq X_2$) de $\mathbb{N}$ et, on a clairement :

$$\varphi(X_1) = \varphi(X_2) = \emptyset$$

On en déduit que :

l'application φ n'est pas injective

2. Pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a :

$$\varphi(X) = X \cap 2\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N} \quad (*)$$

La partie $\{1\}$ de $\mathbb{N}$ n'est pas incluse dans $2\mathbb{N}$ donc elle n'admet pas d'antécédent par φ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. On en déduit que :

l'application φ n'est pas surjective

Montrons que :

$$\varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathcal{P}(2\mathbb{N})$$

en raisonnant par double inclusion.

★ Montrons que $\varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \subset \mathcal{P}(2\mathbb{N})$.

Soit $Y \in \varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Alors il existe $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $Y = \varphi(X)$. D'après (*), on a $Y \subset 2\mathbb{N}$, c'est-à-dire $Y \in \mathcal{P}(2\mathbb{N})$. On a donc bien l'inclusion $\varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \subset \mathcal{P}(2\mathbb{N})$.

★ Montrons que $\mathcal{P}(2\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Soit $X \in \mathcal{P}(2\mathbb{N})$. Alors $X \subset 2\mathbb{N}$ donc $X \cap 2\mathbb{N} = X$. Comme $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, on a aussi $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ donc la dernière égalité se réécrit $\varphi(X) = X$. On a ainsi $X \in \varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, d'où l'inclusion $\mathcal{P}(2\mathbb{N}) \subset \varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Finalement, on a l'égalité :

$$\varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathcal{P}(2\mathbb{N})$$

Exercice 15

1. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $A = \emptyset$

Alors $\psi = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ et donc ψ est injective (en tant qu'application identité).

★ **Deuxième cas :** $A \neq \emptyset$

On remarque que $\psi(\emptyset) = \psi(A) = A$ donc, comme $A \neq \emptyset$, l'application ψ n'est pas injective.

Ainsi :

$$\boxed{\psi \text{ est injective si et seulement si } A = \emptyset}$$

2. On distingue à nouveau deux cas.

★ **Premier cas :** $A = \emptyset$

Alors $\psi = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ et donc ψ est surjective (en tant qu'application identité).

★ **Deuxième cas :** $A \neq \emptyset$

Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \subset \psi(X)$ (par définition de $\psi(X)$) et, comme $A \neq \emptyset$, on ne peut pas avoir l'égalité $\psi(X) = \emptyset$. En effet, supposons par l'absurde que $\psi(X) = \emptyset$. Alors :

$$\emptyset \subset A \subset \psi(X) = \emptyset,$$

ce qui implique que $A = \emptyset$, ce qui est absurde. On en déduit que $\emptyset$ n'admet pas d'antécédent par ψ dans $\mathcal{P}(E)$ et donc que ψ n'est pas surjective.

On en déduit que :

$$\boxed{\psi \text{ est surjective si et seulement si } A = \emptyset}$$

Dans tous les cas, montrons que :

$$\psi(\mathcal{P}(E)) = \{Y \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset Y\}$$

Remarque : dans le cas où $A = \emptyset$, on retrouve bien entendu le fait que :

$$\psi(\mathcal{P}(E)) = \mathcal{P}(E)$$

— Soit $Y \in \psi(\mathcal{P}(E))$. Il existe alors $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que :

$$Y = \psi(X) = X \cup A$$

Comme $A \subset X \cup A$, on a bien $A \subset Y$.

— Soit $Y \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \subset Y$. On remarque que :

$$\psi(Y) = Y \cup A = Y$$

puisque $A \subset Y$. On en déduit que $Y \in \psi(\mathcal{P}(E))$.

Finalement :

$$\boxed{\psi(\mathcal{P}(E)) = \{Y \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset Y\}}$$

Exercice 16

1. (a) Comme $\emptyset \cap A = \emptyset \cap B = \emptyset$, on a :

$$\boxed{f(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)}$$

(b) D'après la formule de De Morgan, on sait que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ donc (par associativité et commutativité de l'intersection) :

$$(\overline{A \cup B}) \cap A = (\overline{A} \cap A) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

et, de la même manière, on a aussi $(\overline{A \cup B}) \cap B = \emptyset$. Ainsi :

$$\boxed{f(\overline{A \cup B}) = (\emptyset, \emptyset)}$$

(c) On raisonne par double implication.

★ Supposons que $A \cup B \neq E$. Alors $\overline{A \cup B} \neq \emptyset$ (car si $\overline{A \cup B} = \emptyset$, alors $\overline{A \cup B} = \overline{\emptyset}$, i.e. $A \cup B = E$). D'après les questions 1.(a) et 1.(b), on a :

$$f(\emptyset) = f(\overline{A \cup B}) = (\emptyset, \emptyset) \quad \text{et} \quad \emptyset \neq \overline{A \cup B}$$

L'application f n'est donc pas injective.

★ Supposons maintenant que $A \cup B = E$ et montrons que f est injective. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. Montrons que $X = Y$. Comme $A \cup B = E$, on a :

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$$

par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion. Or on sait que $f(X) = f(Y)$ donc :

$$(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$$

i.e. :

$$X \cap A = Y \cap A \text{ et } X \cap B = Y \cap B$$

Ainsi :

$$X = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y$$

L'application f est donc injective.

On peut donc conclure que :

l'application f est injective si et seulement si $A \cup B = E$

2. (a) On raisonne par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : supposons que le couple $(\emptyset, B)$ admette un antécédent $X \in \mathcal{P}(E)$ par l'application f . Alors on a :

$$\begin{aligned} f(X) = (\emptyset, B) \quad & i.e. \quad (X \cap A, X \cap B) = (\emptyset, B) \\ & i.e. \quad \begin{cases} X \cap A = \emptyset \\ X \cap B = B \end{cases} \\ & i.e. \quad \begin{cases} X \subset \bar{A} \\ B \subset X \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci implique que $B \subset \bar{A}$.

★ **Synthèse** : supposons que $B \subset \bar{A}$. On a :

$$f(B) = (A \cap B, B \cap B) = (\emptyset, B)$$

En effet, comme $B \subset \bar{A}$, on a :

$$A \cap B \subset A \cap \bar{A} = \emptyset \quad \text{donc} \quad A \cap B = \emptyset$$

Ainsi, $B \in \mathcal{P}(E)$ est un antécédent du couple $(\emptyset, B)$ par l'application f dans $\mathcal{P}(E)$.

On peut donc conclure que :

le couple $(\emptyset, B)$ a un antécédent par f dans $\mathcal{P}(E)$ si et seulement si $B \subset \bar{A}$

(b) Montrons que f est surjective si et seulement si $B \subset \bar{A}$ en raisonnant par double implication.

★ Si B n'est pas inclus dans $\bar{A}$, alors le couple $(\emptyset, B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ n'admet pas d'antécédent par l'application f dans $\mathcal{P}(E)$. L'application f n'est donc pas surjective.

★ Supposons que $B \subset \bar{A}$ et montrons que f est surjective. Soit $(U, V) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Posons $X = U \cup V \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$X \cap A = (U \cup V) \cap A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$$

Or $U \subset A$ donc $U \cap A = U$ et $V \subset B \subset \bar{A}$ donc $V \cap A = \emptyset$. Ainsi, $X \cap A = U$. De la même manière, on a $X \cap B = V$. Par conséquent, on a l'égalité $f(X) = (U, V)$. Autrement dit, X est un antécédent de (U, V) par l'application f dans $\mathcal{P}(E)$. On peut donc conclure que f est surjective.

Finalement :

l'application f est surjective si et seulement si $B \subset \bar{A}$

Exercice 17 On commence par montrer que l'application φ est nécessairement injective. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\varphi(m) = \varphi(n)$. Alors :

$$\varphi(\varphi(m)) = \varphi(\varphi(n)) \quad \text{puis} \quad \varphi(\varphi(\varphi(m))) = \varphi(\varphi(\varphi(n)))$$

Ainsi :

$$\varphi(m) + \varphi(\varphi(m)) + \varphi(\varphi(\varphi(m))) = \varphi(n) + \varphi(\varphi(n)) + \varphi(\varphi(\varphi(n))),$$

i.e. $3m = 3n$, soit encore $m = n$. Ainsi, φ est injective.

Montrons que $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{N}^*}$. Pour cela, montrons à l'aide d'une récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi(n) = n$.

★ On a $\varphi(1) + \varphi(\varphi(1)) + \varphi(\varphi(\varphi(1))) = 3$ et on sait que φ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $\varphi(1), \varphi(\varphi(1)), \varphi(\varphi(\varphi(1))) \in \mathbb{N}^*$. Ces trois entiers sont nécessairement égaux à 1. En particulier, $\varphi(1) = 1$. L'égalité est donc vérifiée au rang 1.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\varphi(k) = k$. Montrons que $\varphi(n+1) = n+1$. On a :

$$\varphi(n+1) + \varphi(\varphi(n+1)) + \varphi(\varphi(\varphi(n+1))) = 3n+3$$

On sait que φ est injective donc, par hypothèse de récurrence, on a $\varphi(n+1) \notin \llbracket 1, n \rrbracket$, i.e. $\varphi(n+1) \geq n+1$. Par injectivité, on a aussi $\varphi(\varphi(n+1)) \geq n+1$ et $\varphi(\varphi(\varphi(n+1))) \geq n+1$. On en déduit que :

$$n+1 \leq \varphi(n+1) = 3n+3 - \varphi(\varphi(n+1)) - \varphi(\varphi(\varphi(n+1))) \leq n+1$$

Par conséquent, $\varphi(n+1) = n+1$ et l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence forte, on peut conclure que :

$$\varphi = \text{Id}_{\mathbb{N}^*}$$

Exercice 18

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = n+1 \in \mathbb{N}^*$ donc :

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1) - 1 = n = \text{Id}_{\mathbb{N}}(n)$$

Ainsi :

$$g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$$

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = n+1 \geq 1$ donc $0 \in \mathbb{N}$ n'admet pas d'antécédent par f dans $\mathbb{N}$. Ainsi, f n'est pas surjective. En particulier :

f n'est pas une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$

★ On a $g(0) = g(1) = 0$ (et $0 \neq 1$) donc g n'est pas injective. En particulier :

 g n'est pas une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$

Cet exercice montre que si E et F sont des ensembles non vides et si $f \in F^E$ et $g \in E^F$ sont des applications, alors le fait que $g \circ f = \text{Id}_E$ ne garantit pas la bijectivité de f et de g . Si on a de plus $f \circ g = \text{Id}_F$ (ce qui n'est pas le cas dans l'exercice), alors on sait d'après le cours que f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Exercice 19 Considérons l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

Montrons que f est une application bijective.

★ Montrons que f est injective. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \neq n$. Montrons que $f(m) \neq f(n)$ en distinguant deux cas.

— **Premier cas** : m et n sont de parités différentes

Dans ce cas, les entiers $f(m)$ et $f(n)$ sont de signes distincts (l'un des deux étant non nul) donc $f(m) \neq f(n)$.

— **Deuxième cas** : m et n sont pairs

Comme $m \neq n$, on a $\frac{m}{2} \neq \frac{n}{2}$, i.e. $f(m) \neq f(n)$.

— **Troisième cas** : m et n sont impairs

On a à nouveau $f(m) \neq f(n)$.

L'application f est donc injective.

★ Montrons que f est surjective. Soit $m \in \mathbb{Z}$. On distingue deux cas.

— **Premier cas** : m est positif

L'entier $2m$ est positif et est pair donc :

$$f(2m) = \frac{2m}{2} = m$$

Ainsi, $2m$ est un antécédent de m par l'application f dans $\mathbb{N}$.

— **Deuxième cas** : m est strictement négatif

L'entier $-2m - 1$ est positif et est impair donc :

$$f(-2m - 1) = -\frac{(-2m - 1) + 1}{2} = m$$

Ainsi, $-2m - 1$ est un antécédent de m par l'application f dans $\mathbb{N}$.

Finalement, f est surjective.

On a démontré que :

 l'application f est une bijection (explicite) de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$

Exercice 20 Montrons que :

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2, (X, Y) = \psi((x, y))$$

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. On résout l'équation $\psi((x, y)) = (X, Y)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \psi((x, y)) = (X, Y) &\iff (2x + 3y, x - y) = (X, Y) \\ &\iff \begin{cases} 2x + 3y = X & \text{L}_1 \\ x - y = Y & \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 3y = X \\ -5y = -X + 2Y & \text{L}_2 \leftarrow 2\text{L}_2 - \text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{X}{5} + \frac{3Y}{5} \\ y = \frac{X}{5} - \frac{2Y}{5} \end{cases} \\ &\iff (x, y) = \left(\frac{X}{5} + \frac{3Y}{5}, \frac{X}{5} - \frac{2Y}{5} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, (x, y) admet un unique antécédent par l'application ψ dans $\mathbb{R}^2$, à savoir $\left(\frac{X}{5} + \frac{3Y}{5}, \frac{X}{5} - \frac{2Y}{5} \right)$. On peut donc conclure que :

l'application ψ est bijective et sa bijection réciproque est l'application :

$$\psi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X, Y) & \longmapsto & \left(\frac{X}{5} + \frac{3Y}{5}, \frac{X}{5} - \frac{2Y}{5} \right) \end{cases}$$

Exercice 21 cf. Exercice 1 question 4. et Exercice 6 question 2.

Exercice 22

1. On sait que $\text{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. Montrons que l'application :

$$\text{th} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, 1[\\ x & \longmapsto & \text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{cases}$$

est bijective. Soit $y \in]-1, 1[$. On résout l'équation $y = \text{th}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{th}(x) = y &\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \iff e^{2x} - 1 = y e^{2x} + y \\ &= e^{2x} (1 - y) = 1 + y \\ &\iff e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \quad (\text{car } y \neq -1) \\ &\iff x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) \end{aligned}$$

En effet, on a $\frac{1 + y}{1 - y} > 0$ car $y \in]-1, 1[$. Ainsi, y admet un unique antécédent par l'application th dans $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\text{l'application th est bijective et th}^{-1} : \begin{cases}]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) \end{cases}$$

2. On sait que $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Montrons que l'application :

$$\text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

est bijective. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation $y = \text{sh}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) = y &\iff e^x - e^{-x} = 2y \\ &\iff (e^x)^2 - 2y e^x - 1 = 0 \quad (\text{en multipliant par } e^x \neq 0) \\ &\iff X^2 - 2yX - 1 = 0 \quad (\text{en posant } X = e^x) \\ &\iff X = y - \sqrt{y^2 + 1} \text{ ou } X = y + \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Or $y^2 + 1 > y^2$ sont $\sqrt{y^2 + 1} > |y|$, d'où l'on tire que :

$$y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \quad \text{et} \quad y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

Ainsi :

$$\text{sh}(x) = y \iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$$

Par conséquent, y admet un unique antécédent par l'application sh dans $\mathbb{R}$ et on peut conclure que :

$$\text{l'application sh est bijective et sh}^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \end{cases}$$

Exercice 23 On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrons que f et g sont bijectives.

★ Montrons que f est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors :

$$(f \circ g)(f(x)) = (f \circ g)(f(y)) \quad \text{i.e.} \quad (f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g \circ f)(y)$$

Or l'application $f \circ g \circ f$ est injective (car elle est bijective) donc $x = y$. Ainsi, l'application f est injective.

★ Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. L'application $f \circ g \circ f \in F^E$ est surjective (car elle est bijective) donc il existe $x \in E$ tel que $y = (f \circ g \circ f)(x)$. On a donc $y = f(g(f(x)))$. Ainsi, $g(f(x)) \in E$ est un antécédent de y par l'application f dans E . L'application f est donc surjective.

À ce stade, nous venons de démontrer que :

l'application f est bijective

★ Comme f est bijective, on peut écrire que (en utilisant l'associativité de la composition et les égalités $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$) :

$$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$$

Les applications f^{-1} et $f \circ g \circ f$ sont bijectives et la composée d'applications bijectives est une application bijective donc :

l'application g est bijective

Exercice 24 Montrons que f est bijective.

★ Dire que f est surjective signifie que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \exists (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad a = 2^m(2n + 1)$$

Ceci est l'objet de l'exercice 20 de la fiche de TD#2.

- ★ Montrons maintenant que f est injective. Soient $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $f((m_1, n_1)) = f((m_2, n_2))$. Montrons que $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$. L'égalité $f((m_1, n_1)) = f((m_2, n_2))$ se réécrit :

$$2^{m_1}(2n_1 + 1) = 2^{m_2}(2n_2 + 1)$$

Supposons que $m_1 \neq m_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $m_1 < m_2$. L'égalité précédente se réécrit :

$$2n_1 + 1 = 2^{m_2 - m_1}(2n_2 + 1)$$

Comme $m_2 - m_1 \geq 1$, l'entier $2^{m_2 - m_1}(2n_2 + 1)$ est pair, ce qui est absurde car $2n_1 + 1$ est impair. On en déduit que $m_1 = m_2$. Il reste donc $2n_1 + 1 = 2n_2 + 1$, d'où l'on tire que $n_1 = n_2$. Finalement, $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$. L'application f est donc injective.

Finalement :

l'application f est bijective

Exercice 25

1. On suppose que f est injective. Montrons que f et g sont bijectives.

- ★ Montrons que g est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $g(x) = g(y)$. En composant avec l'application $g \circ f$, on a :

$$(g \circ f \circ g)(x) = (g \circ f \circ g)(y) \quad i.e. \quad f(x) = f(y)$$

car $g \circ f \circ g = f$. Or f est injective donc $x = y$. Ainsi, g est injective.

- ★ On a $f \circ g \circ f \circ f \circ g = f$. Pour tout $y \in E$, on a alors :

$$f((g \circ f \circ f \circ g)(y)) = f(y)$$

et comme f est injective, on a :

$$y = (g \circ f \circ f \circ g)(y) \quad i.e. \quad y = g(f(f(g(y))))$$

Donc $f(f(g(y)))$ est un antécédent de y par g dans E donc g est surjective.

- ★ L'application $g = f \circ g \circ f$ est surjective donc f est surjective (cf. exercice 8).

Finalement :

les applications f et g sont bijectives

2. On suppose que g est surjective. Montrons que f et g sont bijectives.

- ★ Comme $g = f \circ g \circ f$ est surjective, l'application f est surjective (cf. exercice 8).

- ★ Soient $x, y \in E$ tels que $g(x) = g(y)$. Comme f est surjective, il existe $a, b \in E$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Ainsi :

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \quad \text{puis} \quad (f \circ g \circ f)(a) = (f \circ g \circ f)(b),$$

i.e. $g(a) = g(b)$. En composant par $g \circ f$, on a :

$$(g \circ f \circ g)(a) = (g \circ f \circ g)(b) \quad \text{puis} \quad f(a) = f(b),$$

i.e. $x = y$. Donc g est injective.

- ★ Enfin, comme $g = f \circ g \circ f$ est injective, f est injective (cf. exercice 8).

Finalement :

les applications f et g sont bijectives