

APPLICATIONS

1 Image directe, image réciproque

- Exercice 1**
1. Soit $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f([0, 1])$, $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}([0, 1])$.
 2. Soit $g : x \mapsto x^2 - 3x$. Déterminer $g^{-1}([-2, 0])$.
 3. Déterminer l'image réciproque de $[-1, 2]$ par la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x}$.
 4. Soit $k : x \mapsto \frac{x}{1 + x^2}$.
 - (a) Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par k .
 - (b) Montrer que k est injective sur $[-1, 1]$ et déterminer $(k|_{[-1, 1]})^{-1}$.
 - (c) Déterminer $k^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]\right)$.

Exercice 2 Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$ et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $(A \subset B) \implies (f(A) \subset f(B))$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et que l'inclusion réciproque est fautive en général.
3. Montrer que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.

Exercice 3 Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

4. Montrer que, pour tous $B, B' \in \mathcal{P}(F)$, on a les égalités :

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

Exercice 4 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que f est injective si, et seulement si :

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application telle que $f(1) = 1$ et :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

On note $\text{Fix}(f)$ l'ensemble des *points fixes* de f . Autrement dit :

$$\text{Fix}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = n\}$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. En déduire que $f \circ f = f$.
3. Montrer que $f(\mathbb{N}) = \text{Fix}(f)$.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \text{Fix}(f), \quad n + 1 \in \text{Fix}(f)$$

5. En déduire que $\text{Fix}(f) = \mathbb{N}$ et déterminer f .

2 Injectivité et surjectivité

Exercice 6 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifier.

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x + 1| \end{cases} \qquad 2. g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$3. h : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{-x + 3}{2x + 1} \end{cases} \qquad 4. k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 \end{cases}$$

$$5. \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x + 3y \end{cases} \qquad 6. \psi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 2n + 5 \end{cases}$$

Exercice 7 Montrer que l'application $\varphi : (a, b) \mapsto a + b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Soient E, F et G trois ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$, $g_1 : F \longrightarrow G$ et $g_2 : F \longrightarrow G$ des applications. On suppose que f est surjective et que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

Exercice 9 Soient E, F et G trois ensembles non vides, $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

- Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective. Montrer que g est injective.
- On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective. Montrer que f est surjective.

Exercice 10 Soient E , F et G trois ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que l'application $T_f : \varphi \mapsto f \circ \varphi$ de E^G dans F^G est injective si et seulement si f l'est.

Exercice 11 Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel n , on ait $f(n) \leq n$.

Exercice 12 Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. *Les deux questions sont indépendantes.*

- On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer qu'alors $f = \text{Id}_E$.
- On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 13 1. Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur réunion ?
 2. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E . On suppose que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion, ce qui signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \subset A_{n+1}$$

Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f|_{A_n}$ est injective, alors $f : E \rightarrow F$ est injective.

Exercice 14 On considère l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ X & \longmapsto & X \cap 2\mathbb{N} \end{cases},$$

où $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs.

- L'application φ est-elle injective ?
- L'application φ est-elle surjective ? Déterminer $\varphi(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 15 Soient E un ensemble et A une partie de E . On considère l'application :

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cup A \end{cases}$$

- L'application ψ est-elle injective ?
- L'application ψ est-elle surjective ? Déterminer $\psi(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 16 Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . On considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

- Étude de l'injectivité de f .*
 - Calculer $f(\emptyset)$.
 - Calculer $f(\overline{A \cup B})$.
 - Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
- Étude de la surjectivité de f .*
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le couple $(\emptyset, B)$ admette un antécédent par f .
 - Conclure quant à la surjectivité de f .

Exercice 17 (difficile) Soit $\varphi \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\varphi + \varphi \circ \varphi + \varphi \circ \varphi \circ \varphi = 3\text{Id}_{\mathbb{N}^*}$. Déterminer φ .

3 Bijections

Exercice 18 On considère les deux applications :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$, mais que ni f ni g n'est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 19 Déterminer une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 20 Montrer que l'application :

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + 3y, x - y) \end{cases}$$

est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 21 On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \frac{2x}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$. L'application f est-elle surjective ?
2. L'application f est-elle injective ? Justifier.
3. Montrer que l'application $g : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \frac{2x}{x^2 + 1}$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque g^{-1} .

Exercice 22 1. Montrer que la fonction tangente hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et déterminer une expression explicite de sa réciproque.
2. Même question avec la fonction sinus hyperbolique sur son domaine de définition.

Exercice 23 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 24 Montrer que l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \\ (m, n) & \longmapsto \end{cases} 2^m(2n + 1)$$

est bijective.

Exercice 25 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$ deux applications. On suppose que :

$$g \circ f \circ g = f \quad \text{et} \quad f \circ g \circ f = g$$

1. On suppose que f est injective. Montrer que f et g sont bijectives.
2. On suppose que g est surjective. Montrer que f et g sont bijectives.