

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

1 Équivalents (et développements limités)

Exercice 1 Déterminer les limites des expressions suivantes, notées $f(x)$, aux points indiqués :

- $x(x+3)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$ en 0^+
- $\frac{(1-\cos(x^2))e^{\frac{1}{x}}}{x^5+x^3}$ en 0^+
- $\frac{(1-e^x)(1-\cos(x))}{3x^3+2x^4}$ en 0
- $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en $\frac{\pi}{4}$
- $\text{th}(x)^{\ln(x)}$ en $+\infty$
- $\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$
- $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ en 0^+
- $\tan(x)\tan(2x)$ en $\frac{\pi}{2}$
- $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$
- $\frac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ en 1
- $\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x^2}$ en 0
- $\frac{a^x-b^x}{x}$ en 0 ($0 < a < b$)
- $\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)}$ en 1
- $\frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$ en $\frac{\pi}{3}$
- $\frac{1}{\sin(x)^2}-\frac{1}{x^2}$ en 0
- $\ln(x)\ln(1-x)$ en 1^-

Exercice 2 Soient a , b et c trois nombres réels strictement positifs. Déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction :

$$f : x \mapsto \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right)^x$$

Exercice 3 Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Calculer la limite, quand x tend vers 1 , de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1}$$

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} \right)$.

- Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$.
- En déduire la limite en $+\infty$ de $g : x \mapsto (e^{f(x)} - 1) \ln(x)$.
- Soit $h : x \mapsto \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^x - 1 \right] \ln(x)$. Déterminer la limite de h en $+\infty$.

Exercice 5 Déterminer un équivalent *simple* des expressions suivantes, notées $f(x)$, aux points indiqués :

- $x \ln(1+x) - (x+1) \ln(x)$ en $+\infty$
- $\ln(\cos(x))$ en 0
- $[x] \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$ en $+\infty$
- $x \left(e^{\frac{1}{x}} - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ en $+\infty$
- $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}$ en 0
- $\tan \left(\frac{\pi x}{2x^2+3} \right)$ en $+\infty$
- $\cos(x)$ en $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}$ en 1
- $\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos(x)}$ en 0
- $\arcsin(x) + \cos(x) - 1$ en 0
- $\arccos(x) - \frac{\pi}{2}$ en 0
- $\ln \left(\frac{e^x+1}{2} \right) - \frac{4x+x^2}{8}$

Exercice 6 Déterminer un équivalent *simple* du terme général suivant quand n tend vers $+\infty$:

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

2 Développements limités

Exercice 7 Déterminer les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des expressions suivantes, notées $f(x)$, pour la valeur de n indiquée :

1. $e^x \sin(x)$ pour $n = 3$
2. $\sin(x)^3 - x^3 \cos(x)$ pour $n = 3$
3. $x^3 \sqrt{1+x}$ pour $n = 5$
4. $\sqrt{4-x}$ pour $n = 3$
5. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ pour $n = 2$
6. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ pour $n = 3$
7. $e^{\tan(x)}$ pour $n = 3$
8. $\ln(3e^x + e^{-x})$ pour $n = 3$
9. $\frac{1}{1+\cos(x)}$ pour $n = 4$
10. $\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}}$ pour $n = 4$

Exercice 8 Calculer les développements limités à l'ordre 4 des expressions suivantes aux points x_0 indiqués :

1. e^x pour $x_0 = 1$
2. $\cos(x)$ pour $x_0 = \frac{\pi}{4}$
3. $\arctan(x)$ pour $x_0 = 1$
4. $\ln(x)$ pour $x_0 = e$
5. $\tan(x)^{\tan(2x)}$ pour $x_0 = \frac{\pi}{4}$
6. $\frac{1}{1+x^2}$ pour $x_0 = 1$
7. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ pour $x_0 = +\infty$
8. $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$ pour $x_0 = +\infty$

Exercice 9 (DL d'une bijection réciproque) On considère la fonction f définie sur $I =]-1, 1[$ par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = x + \ln(1+x)$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
2. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
3. Justifier l'existence du développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} au voisinage de 0 puis le déterminer.

Exercice 10 Soit $f : x \mapsto x e^x$.

1. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble à déterminer.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f^{-1} .
3. Déterminer un équivalent simple de f^{-1} en $+\infty$.

Exercice 11 Soit la fonction $f : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer la position de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f par rapport à sa tangente au voisinage de 1.

Exercice 12 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{3x-2}}{1+\ln(x)}$ admet un maximum local en $x = 1$.

3 Applications

Exercice 13 1. Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 14 (suite implicite) 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos(x) = nx$ possède une unique solution notée x_n dans l'intervalle $[0, 1]$.

2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 15 (suites implicites) 1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, l'équation $x = \ln(x) + n$ admet deux solutions x_n et y_n dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $x_n < y_n$.

2. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.
 (b) Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$.
 (c) Montrer que $x_n - e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-2n}$.
 (d) Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de $x_n - e^{-n} - e^{-2n}$.
3. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.
 (b) Montrer que $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
 (c) Montrer que $y_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
 (d) Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de $y_n - n - \ln(n)$.

Exercice 16 (suite récurrente) On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$$

1. Justifier que la suite u est bien définie et positive.
2. Déterminer la limite de la suite u .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq n$.

4. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \mathcal{O}(1)$.
5. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1)$.
6. En utilisant le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, montrer que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 17 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 18 (étude locale) On cherche à déterminer le comportement au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\arcsin(x)} - \frac{1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f .
2. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. *On notera encore f ce prolongement.*
3. La fonction f est-elle dérivable en 0?
4. Étudier la position relative du graphe de f et de sa tangente au voisinage de l'origine.

Exercice 19 (étude locale) Soit la fonction $f : x \mapsto (1+x)e^{\frac{1}{x}}$. Étudier les branches infinies de f et déterminer la position relative des asymptotes par rapport à la courbe représentative de f .

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$