Analyse asymptotique

1 Équivalents (et DL)

Exercice 1 Déterminer les limites des expressions suivantes, notées $f(x)$, aux points indiqués :

1. $x(x+3)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)}$ en 0^+
2. $\dfrac{(1-\cos(x^2))\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^5+x^3}$ en 0^+
3. $\dfrac{(1-\mathrm{e}^{x})(1-\cos(x))}{3x^3+2x^4}$ en 0
4. $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ en $\dfrac{\pi}{4}$
5. $\mathrm{th}(x)^{\ln(x)}$ en $+\infty$
6. $\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ en $+\infty$
7. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en 0^+
8. $\tan(x)\tan(2x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$
9. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$
10. $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x}-\mathrm{e}^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ en 1
11. $\dfrac{\cos(3x)-\cos(x)}{x^2}$ en 0
12. $\dfrac{a^x-b^x}{x}$ en 0 $(0<a<b)$
13. $\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)}$ en 1
14. $\dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$ en $\dfrac{\pi}{3}$
15. $\dfrac{1}{\sin(x)^2}-\dfrac{1}{x^2}$ en 0
16. $\ln(x)\ln(1-x)$ en 1^-

Exercice 2 Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction :

$$f : x \longmapsto \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$$

Exercice 3 Soit $f : x \longmapsto x\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$.

1. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $g : x \longmapsto \left(\mathrm{e}^{f(x)}-1\right)\ln(x)$.
3. Soit $h : x \longmapsto \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x-1\right]\ln(x)$. Déterminer la limite de h en $+\infty$.

Exercice 4 Déterminer un équivalent *simple* des expressions suivantes, notées $f(x)$, aux points indiqués :

1. $x\ln(1+x)-(x+1)\ln(x)$ en $+\infty$
2. $\ln(\cos(x))$ en 0
3. $\lfloor x\rfloor\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$
4. $x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ en $+\infty$
5. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}$ en 0
6. $\tan\left(\dfrac{\pi x}{2x^2+3}\right)$ en $+\infty$
7. $\cos(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$
8. $\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2}$ en 1
9. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-\cos(x)}$ en 0
10. $\arcsin(x)+\cos(x)-1$ en 0
11. $\arccos(x)-\dfrac{\pi}{2}$ en 0
12. $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{2}\right)-\dfrac{4x+x^2}{8}$

Exercice 5 Déterminer un équivalent *simple* du terme général suivant quand n tend vers $+\infty$:

$$u_n = 2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

2 Développements limités

Exercice 6 Déterminer les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des expressions suivantes, notées $f(x)$, pour la valeur de n indiquée :

1. $\mathrm{e}^{x}\sin(x)$ pour $n=3$
2. $\sin(x)^3-x^3\cos(x)$ pour $n=3$
3. $x^3\sqrt{1+x}$ pour $n=5$
4. $\sqrt{4-x}$ pour $n=3$
5. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ pour $n=2$
6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$ pour $n=3$
7. $\mathrm{e}^{\tan(x)}$ pour $n=3$
8. $\ln(3\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$ pour $n=3$
9. $\dfrac{1}{1+\cos(x)}$ pour $n=4$
10. $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1-x}}$ pour $n=4$

Exercice 7 Calculer les développements limités à l'ordre 4 des expressions suivantes aux points x_0 indiqués :

1. e^x pour $x_0 = 1$
2. $\cos(x)$ pour $x_0 = \frac{\pi}{4}$
3. $\arctan(x)$ pour $x_0 = 1$
4. $\ln(x)$ pour $x_0 = e$
5. $\tan(x)^{\tan(2x)}$ pour $x_0 = \frac{\pi}{4}$
6. $\frac{1}{1+x^2}$ pour $x_0 = 1$
7. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ pour $x_0 = +\infty$
8. $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$ pour $x_0 = +\infty$

Exercice 8 (DL d'une bijection réciproque) On considère la fonction f définie sur $I =]-1, 1[$ par :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = x + \ln(1+x)$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.
2. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
3. Justifier l'existence du développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} au voisinage de 0 puis le déterminer.

Exercice 9 Soit la fonction $f : x \longmapsto x^{1+\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer la position de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f par rapport à sa tangente au voisinage de 1.

Exercice 10 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{3x-2}}{1+\ln(x)}$ admet un maximum local en $x = 1$.

3 Applications

Exercice 11

1. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 12 (suite implicite)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\cos(x) = nx$ possède une unique solution notée x_n dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13 (suite récurrente) On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$$

1. Justifier que la suite u est bien définie et positive.
2. Déterminer la limite de la suite u.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant n$.
4. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n + \mathcal{O}(1)$.
5. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} + o(1)$.
6. En utilisant le développement limité de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, montrer que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 15 (étude locale) On cherche à déterminer le comportement au voisinage de 0 de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{\arcsin(x)} - \frac{1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. *On notera encore f ce prolongement.*
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Étudier la position relative du graphe de f et de sa tangente au voisinage de l'origine.

Exercice 16 (étude locale) Soit la fonction $f : x \longmapsto (1+x)e^{\frac{1}{x}}$. Étudier les branches infinies de f et déterminer la position relative des asymptotes par rapport à la courbe représentative de f.