GELSON IEZZI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Trigonometria

3

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

1ª PARTE

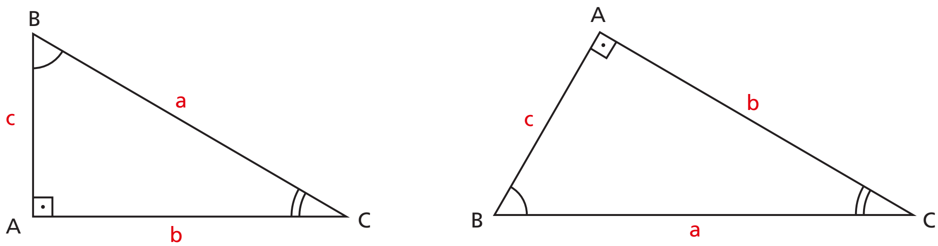
Trigonometria no triângulo retângulo

CAPÍTULO II

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

I. Triângulo retângulo: conceito, elementos, teorema de Pitágoras

17. Sabemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto.



18. Como é habitual, vamos utilizar a notação seguinte para os elementos de um triângulo ABC:

lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$

ângulos internos: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$

medidas dos lados:
a = medida de $\overline{BC}$
b = medida de $\overline{AC}$
c = medida de $\overline{AB}$

medidas dos ângulos:
$\hat{A}$ = medida de $B\hat{A}C$
$\hat{B}$ = medida de $A\hat{B}C$
$\hat{C}$ = medida de $A\hat{C}B$

19. Sempre que tratarmos de um triângulo ABC retângulo, daqui por diante estaremos pensando que o ângulo interno $\hat{A}$ mede 90°.

Sabemos que o lado $\overline{BC}$, oposto ao ângulo reto, é chamado **hipotenusa** e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, adjacentes ao ângulo reto, são chamados **catetos** do triângulo ABC.

Para simplificar nossa linguagem, diremos que o triângulo ABC tem hipotenusa *a* e catetos *b* e *c*, isto é, vamos atribuir a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ suas respectivas medidas *a*, *b* e *c*. Analogamente, diremos que os ângulos internos do triângulo são $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

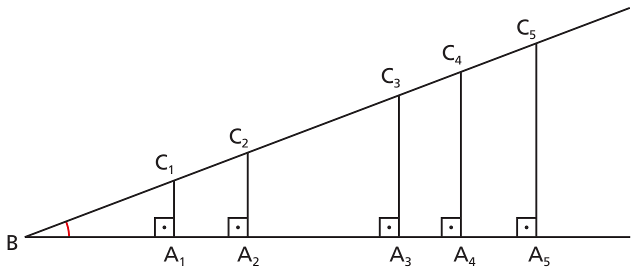
20. Teorema de Pitágoras

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

II. Triângulo retângulo: razões trigonométricas

21. Dado um ângulo agudo $\hat{B}$, vamos marcar sobre um de seus lados os pontos A_1, A_2, A_3, ... e vamos conduzir, por eles, as perpendiculares $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$, $\overline{A_3C_3}$, ... (conforme figura abaixo).



Os triângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3 ... são todos semelhantes entre si. Então decorrem as seguintes relações:

1ª) $\dfrac{A_1C_1}{BC_1} = \dfrac{A_2C_2}{BC_2} = \dfrac{A_3C_3}{BC_3} = \dots$ (fixado $\hat{B}$, o **cateto oposto** a $\hat{B}$ e a **hipotenusa** são diretamente proporcionais)

2ª) $\dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BA_2}{BC_2} = \dfrac{BA_3}{BC_3} = \dots$ (fixado $\hat{B}$, o **cateto adjacente** a $\hat{B}$ e a **hipotenusa** são diretamente proporcionais)

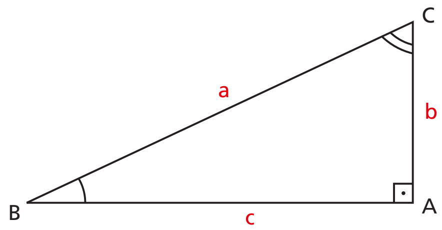
3ª) $\dfrac{A_1C_1}{BA_1} = \dfrac{A_2C_2}{BA_2} = \dfrac{A_3C_3}{BA_3} = \dots$ (fixado $\hat{B}$, os **catetos oposto** e **adjacente** a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais)

4ª) $\dfrac{BA_1}{A_1C_1} = \dfrac{BA_2}{A_2C_2} = \dfrac{BA_3}{A_3C_3} = \dots$ (fixado $\hat{B}$, os **catetos adjacente** e **oposto** a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais)

em que A_1C_1 = medida de $\overline{A_1C_1}$
BC_1 = medida de $\overline{BC_1}$
A_2C_2 = medida de $\overline{A_2C_2}$ e assim por diante.

Verificamos que as relações anteriores não dependem do tamanho dos triângulos $\triangle BA_1C_1$, $\triangle BA_2C_2$, $\triangle BA_3C_3$, ..., mas dependem apenas do valor do ângulo $\hat{B}$.

22. Considere o triângulo retângulo a seguir:



Fixando um ângulo agudo $\hat{B}$, temos as relações a seguir:

1ª) **Seno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a}$$

2ª) **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$

3ª) **Tangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$$

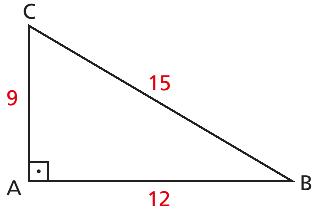
4ª) **Cotangente** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao ângulo.

$$\operatorname{cotg} \hat{B} = \frac{c}{b}$$

EXERCÍCIOS

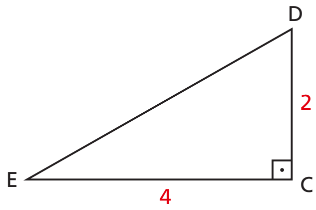
1. Dado o triângulo ABC, retângulo em A, calcule:

a) sen $\hat{B}$
b) cos $\hat{B}$
c) tg $\hat{B}$
d) cotg $\hat{B}$
e) sen $\hat{C}$
f) cos $\hat{C}$
g) tg $\hat{C}$
h) cotg $\hat{C}$



2. Dado o triângulo retângulo CDE, reto em C, calcule:

a) sen $\hat{D}$
b) cos $\hat{D}$
c) tg $\hat{D}$
d) cotg $\hat{D}$
e) sen $\hat{E}$
f) cos $\hat{E}$
g) tg $\hat{E}$
h) cotg $\hat{E}$

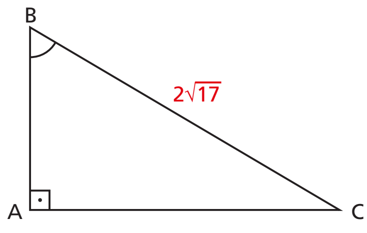


3. Calcule as razões trigonométricas seno, cosseno, tangente e cotangente dos ângulos agudos do triângulo retângulo em que um dos catetos mede 3 e a hipotenusa $2\sqrt{3}$.

4. Num triângulo ABC reto em A, determine as medidas dos catetos, sabendo que a hipotenusa vale 50 e sen $\hat{B} = \dfrac{4}{5}$.

5. Na figura ao lado, a hipotenusa mede $2\sqrt{17}$ e cos $\hat{B} = \dfrac{2\sqrt{51}}{17}$.

Calcule os catetos.

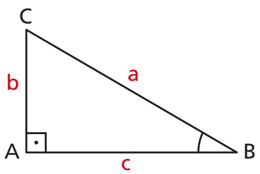


6. Seja ABC um triângulo retângulo em A. São dados tg $\hat{B} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ e hipotenusa $a = 6$. Calcule os catetos *b* e *c*.

III. Relações entre seno, cosseno, tangente e cotangente

23. Relação fundamental

De um triângulo ABC, retângulo em A, sabemos:



$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{b}{a}$; $\cos \hat{B} = \dfrac{c}{a}$, então:

$b = a \cdot \text{sen } \hat{B}$; $c = a \cdot \cos \hat{B}$

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos $b^2 + c^2 = a^2$. Então:

$$(a \cdot \text{sen } \hat{B})^2 + (a \cdot \cos \hat{B})^2 = a^2$$

$$a^2 \cdot \text{sen}^2\, \hat{B} + a^2 \cdot \cos^2 \hat{B} = a^2$$

Portanto, vem a relação fundamental: $\boxed{\text{sen}^2\, \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1}$

24. Consideremos a razão $\dfrac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}$.

$$\frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg } \hat{B}$$

Isto é: $\boxed{\text{tg } \hat{B} = \dfrac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}}$

25. Consideremos a razão $\dfrac{\cos \hat{B}}{\text{sen } \hat{B}}$.

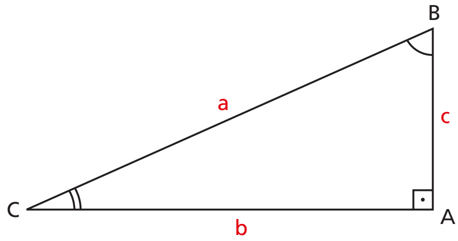
$$\frac{\cos \hat{B}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \text{cotg } \hat{B}$$

Isto é: $\boxed{\text{cotg } \hat{B} = \dfrac{\cos \hat{B}}{\text{sen } \hat{B}}}$

26. Verifica-se, facilmente, que $\boxed{\text{cotg } \hat{B} = \dfrac{1}{\text{tg } \hat{B}}}$

IV. Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares

Consideremos os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo retângulo.



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \\ \hat{A} = 90° \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{B} + \hat{C} = 90° \\ (\hat{B} \text{ e } \hat{C} \text{ são complementares}) \end{array}$$

Como $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, decorrem as seguintes relações:

1ª) $$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \hat{B} = \dfrac{b}{a} \\[2ex] \cos \hat{C} = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \hat{B} = \cos \hat{C}}$$

2ª) $$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \hat{C} = \dfrac{c}{a} \\[2ex] \cos \hat{B} = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \hat{C} = \cos \hat{B}}$$

3ª) $$\left.\begin{array}{l} \text{tg } \hat{B} = \dfrac{b}{c} \\[2ex] \text{cotg } \hat{C} = \dfrac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{tg } \hat{B} = \text{cotg } \hat{C}} \text{ ou } \boxed{\text{tg } \hat{B} = \dfrac{1}{\text{tg } \hat{C}}}$$

4ª) $$\left.\begin{array}{l} \text{tg } \hat{C} = \dfrac{c}{b} \\[2ex] \text{cotg } \hat{B} = \dfrac{c}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{tg } \hat{C} = \text{cotg } \hat{B}} \text{ ou } \boxed{\text{tg } \hat{C} = \dfrac{1}{\text{tg } \hat{B}}}$$

EXERCÍCIOS

7. Calcule cosseno, tangente e cotangente do ângulo $\hat{B}$, quando:

a) sen $\hat{B} = \dfrac{3}{5}$ c) sen $\hat{B} = 0{,}57$

b) sen $\hat{B} = \dfrac{2}{3}$ d) sen $\hat{B} = 0{,}95$

8. Calcule sen $\hat{B}$, tg $\hat{B}$ e cotg $\hat{B}$, sendo dado:

a) cos $\hat{B} = \dfrac{1}{2}$ c) cos $\hat{B} = 0{,}96$

b) cos $\hat{B} = \dfrac{2}{5}$ d) cos $\hat{B} = 0{,}17$

9. Sabendo que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, calcule sen $\hat{C}$, tg $\hat{C}$ e cotg $\hat{C}$, quando:

a) sen $\hat{B} = 0{,}34$ c) sen $\hat{B} = \dfrac{2}{3}$

b) sen $\hat{B} = \dfrac{4}{5}$ d) sen $\hat{B} = 0{,}9$

10. Sabendo que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, calcule cos $\hat{C}$, tg $\hat{C}$ e cotg $\hat{C}$, quando:

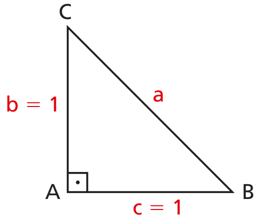
a) cos $\hat{B} = 0{,}57$ c) cos $\hat{B} = \dfrac{3}{5}$

b) cos $\hat{B} = \dfrac{5}{6}$ d) cos $\hat{B} = 0{,}7$

V. Razões trigonométricas especiais

27. Do ângulo de 45°

Consideremos um triângulo retângulo isósceles ABC com catetos de medida 1 (um).



$\hat{A} = 90°$ (ângulo reto)

$\hat{B} = \hat{C} = 45°$

$b = c = 1$

Pelo teorema de Pitágoras, vem: $a = \sqrt{2}$.

Então:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{tg } 45° = \frac{1}{1} = 1$$

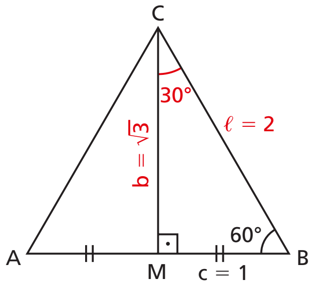
$$\text{cotg } \hat{B} = \frac{c}{b} \Rightarrow \text{cotg } 45° = \frac{1}{1} = 1$$

28. Do ângulo de 30°

Consideremos um triângulo equilátero ABC de lado $\ell = 2$ (dois). Então $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$.

Seja $\overline{CM}$ a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.

Da geometria plana sabemos que, no triângulo equilátero, $\overline{CM}$ é mediana, altura e bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$.



Portanto, no $\triangle MBC$, temos:

$\hat{M} = 90°$ ($\overline{CM}$ é altura)

$\hat{C} = 30°$ ($\overline{CM}$ é bissetriz)

$c = \dfrac{\ell}{2} = 1$ ($\overline{CM}$ é mediana)

$\ell^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2^2 = b^2 + 1^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

Então:

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{\ell} \Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{\ell} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotg } \hat{C} = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{cotg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

29. Do ângulo de 60°

Consideremos que, no triângulo MBC, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 30°$ são ângulos complementares.

Então:

$$\text{sen } \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{b}{\ell} \Rightarrow \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \hat{B} = \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{\ell} \Rightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{1}{\text{tg } \hat{C}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{tg } 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{cotg } \hat{B} = \frac{1}{\text{cotg } \hat{C}} = \frac{c}{b} \Rightarrow \text{cotg } 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Essas razões trigonométricas especiais podem ser colocadas numa tabela de dupla entrada:

razão \ ângulo	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

EXERCÍCIOS

11. Usando a tabela de razões trigonométricas (página 309), dê a forma decimal de:

a) cos 30°
b) sen 45°
c) tg 60°
d) sen 15°
e) cos 45°
f) tg 30°
g) sen 75°
h) cos 89°

12. Usando a tabela de razões trigonométricas, dê o valor dos ângulos:

a) sen $\hat{A} = 0{,}51504$
b) cos $\hat{B} = 0{,}76604$
c) tg $\hat{C} = 4{,}33148$
d) sen $\hat{D} = 0{,}86603$
e) cos $\hat{E} = 0{,}57358$
f) tg $\hat{F} = 0{,}17633$
g) sen $\hat{G} = 0{,}01745$
h) cos $\hat{H} = 0{,}08716$

13. Consultando a tabela de razões trigonométricas, verificamos que sen 35° = = 0,57358 e sen 36° = 0,58779, cos 45° = 0,70711 e cos 46° = 0,69466. Qual é o valor de:

a) sen 35°30′?
b) cos 45°20′?

Solução

a) A variação de 1°, de 35° para 36°, corresponde para o seno a uma variação de 0,01421 (0,58779 − 0,57358).

Assim: $1° = 60' \longrightarrow 0{,}01421$
$30' \longrightarrow x$
$x = 0{,}00711$

Portanto: 0,57358 + 0,00711 = 0,58069.

Então, sen 35°30′ = 0,58069.

b) A variação de 1°, de 45° para 46°, corresponde para o cosseno a uma variação de −0,01245 (0,69466 − 0,70711).

Assim: $1° = 60' \longrightarrow -0{,}01245$
$20' \longrightarrow y$
$y = -0{,}00415$

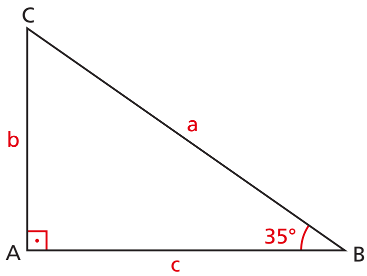
Portanto: 0,70711 + (−0,00415) = 0,70296.

Então, cos 45°20′ = 0,70296.
(O processo realizado nos itens *a* e *b* é chamado **interpolação**.)

14. Calcule consultando a tabela de razões trigonométricas:

a) sen $20°15'$
b) cos $15°30'$
c) tg $12°40'$
d) sen $50°12'$
e) cos $70°27'$
f) tg $80°35'$

15. No $\triangle ABC$ retângulo em A, $\hat{B} = 35°$ e $c = 4$ cm. Quais são os valores de *a* e *b*?

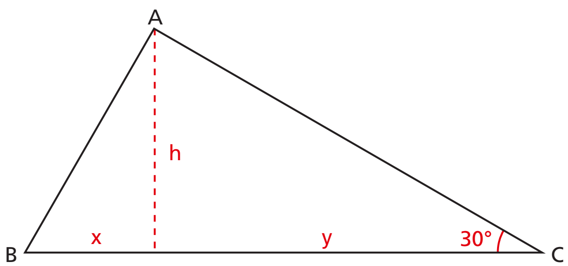


16. Calcule a medida dos lados de um triângulo retângulo, sabendo que a altura relativa à hipotenusa é $h = 4$ e um ângulo agudo é $\hat{B} = 30°$.

17. Calcule a medida dos lados de um triângulo retângulo, sabendo que a altura relativa à hipotenusa mede 4 e forma um ângulo de 15° com o cateto *b*.

Dados: $\text{sen } 75° = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ e $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

18. Considerando o $\triangle ABC$ retângulo em A, conforme figura abaixo, qual é a relação entre *x* e *y*?



19. Uma escada de bombeiro pode ser estendida até um comprimento máximo de 25 m, formando um ângulo de 70° com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2 m do solo. Qual é a altura máxima que a escada atinge em relação ao solo?

20. Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30 m, passa a ver o edifício sob ângulo de 45°. Qual é a altura do prédio?

Solução

No triângulo BXY, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

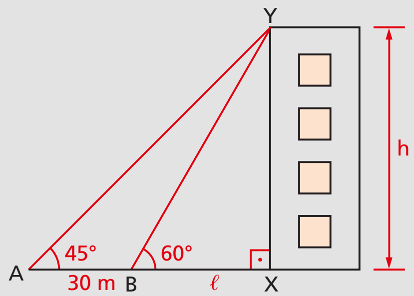
No triângulo AXY, temos:

$$\text{tg } 45° = \frac{h}{\ell + 30} \Rightarrow h = \ell + 30 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

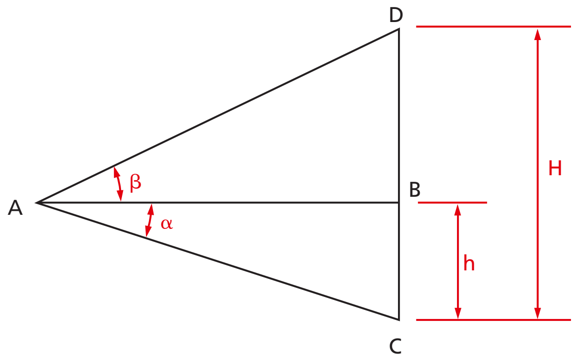
$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 30 \Rightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Resposta: $\dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ m.



21. Calcule a distância *h* entre os parapeitos de duas janelas de um arranha-céu, conhecendo os ângulos (α e β) sob os quais são observados de um ponto O do solo, à distância *d* do prédio.

22. Para obter a altura H de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal $\overline{AB}$ e mediu os ângulos α e β tendo a seguir medido BC = h. Determine a altura da chaminé.

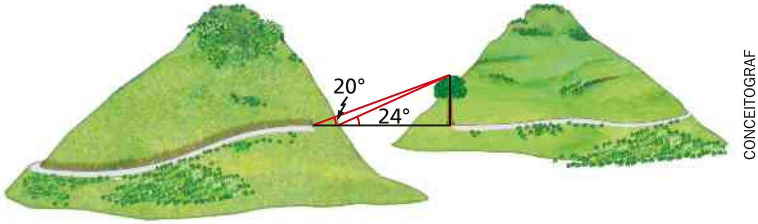


23. Um observador encontra-se na Via Anhanguera em trecho retilíneo, horizontal e situado no mesmo plano horizontal que contém uma torre de TV, localizada no pico do Jaraguá. De duas posições A e B desse trecho retilíneo e distantes 60 m uma da outra, o observador vê a extremidade superior da torre, respectivamente, sob os ângulos de 30° e 31°53′. O aparelho utilizado para medir os ângulos foi colocado 1,50 m acima da pista de concreto que está 721,50 m acima do nível do mar. Determine a altura da torre em relação ao nível do mar.

Dado: tg 31°53′ = 0,62.

24. Um avião está a 7 000 m de altura e inicia a aterrissagem (aeroporto ao nível do mar) em linha reta sob um ângulo de 6° com o solo. A que distância o avião está da cabeceira da pista? Qual distância o avião vai percorrer?

25. Uma empresa de engenharia deve construir uma ponte unindo duas montanhas, para dar continuidade a uma estrada. O engenheiro tomou como referência uma árvore, conforme figura abaixo. Qual será o comprimento da ponte?



26. Um pedreiro dispõe de uma escada de 3 m de comprimento e precisa, com ela, acessar o telhado de uma casa. Sabendo que o telhado se apoia sobre uma parede de 4 m de altura e que o menor ângulo entre a escada e a parede para a escada não cair é 20°, a que altura do chão ele deve apoiar a escada?

2ª PARTE

Trigonometria na circunferência

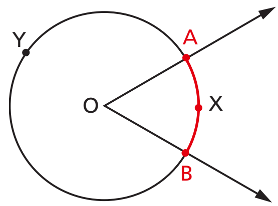
CAPÍTULO III

Arcos e ângulos

I. Arcos de circunferência

30. Definição

Consideremos uma circunferência de centro O e um ângulo central $A\hat{O}B$, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência.



A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um **arco de circunferência**:

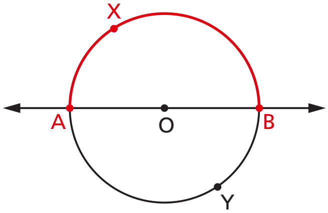
arco de circunferência $\overset{\frown}{AXB}$ e

arco de circunferência $\overset{\frown}{AYB}$

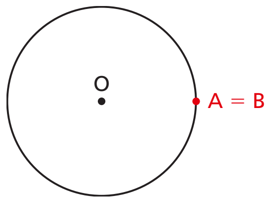
A e B são as extremidades do arco.

31. Se A e B são extremidades de um diâmetro, temos dois arcos, cada um dos quais é chamado **semicircunferência**.

$\overset{\frown}{AXB}$ e $\overset{\frown}{AYB}$ são semicircunferências.



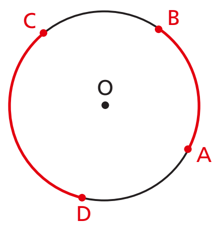
32. Em particular, se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado **arco nulo**) e o outro é a circunferência (denominado **arco de uma volta**).



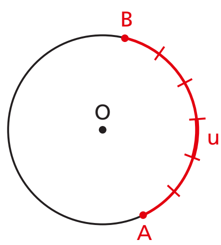
33. Se não houver dúvida quanto ao arco a que nos referimos, podemos escrever apenas $\overset{\frown}{AB}$ ao invés de $\overset{\frown}{AXB}$ ou $\overset{\frown}{AYB}$.

II. Medidas de arcos

34. Se queremos comparar os comprimentos de dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, somos naturalmente levados a estabelecer um método que permita saber qual deles é o maior ou se são iguais. Esse problema é resolvido estabelecendo-se o seguinte método para medir arcos.



35. Medida de um arco $\overset{\frown}{AB}$ em relação a um arco unitário *u* (*u* não nulo e de mesmo raio que $\overset{\frown}{AB}$) é o número real que exprime quantas vezes o arco *u* "cabe" no arco $\overset{\frown}{AB}$. Assim, na figura ao lado, o arco *u* cabe 6 vezes no arco $\overset{\frown}{AB}$, então a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 6, isto é, arco $\overset{\frown}{AB} = 6 \cdot$ arco u.

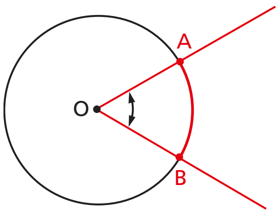


36. Unidades

Para evitar as confusões que ocorreriam se cada um escolhesse uma unidade *u* para medir o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$, limitamos as unidades de arco a apenas duas: o **grau** e o **radiano**.

37. **Grau** (símbolo °) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

38. Considerando a figura abaixo, verificamos que $A\hat{O}B$ é um ângulo central (porque tem o vértice O no centro da circunferência) e $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$.

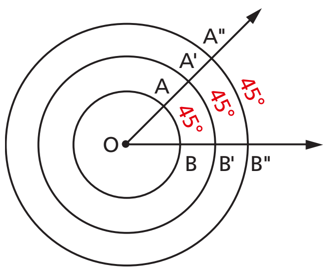


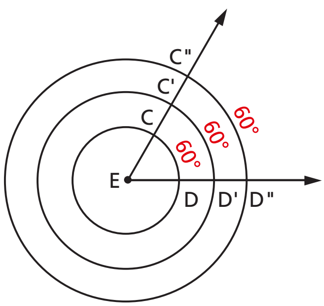
$A\hat{O}B$ ângulo central
$\overset{\frown}{AB}$ arco subtendido por $A\hat{O}B$

39. Tomando-se para unidade de arco (arco unitário) o arco definido por um ângulo central unitário (unidade de ângulo), temos:

"A medida (em graus) de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente".

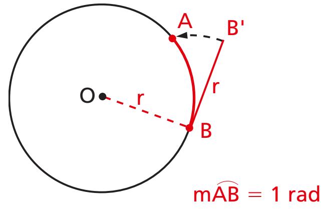
40. A medida (em graus) de um arco não depende do raio da circunferência, como se pode observar nas figuras abaixo:





$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{A'B'} = m\overset{\frown}{A''B''} = 45°$ $\qquad$ $m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{C'D'} = m\overset{\frown}{C''D''} = 60°$

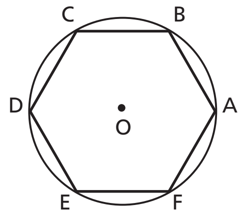
41. **Radiano** (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio *r* da circunferência que contém o arco a ser medido.



42. É evidente que uma circunferência mede 360°, porém já não é tão fácil dizer quantos radianos mede uma circunferência.

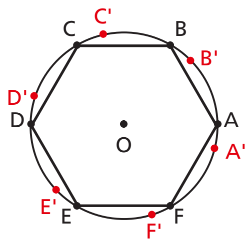
Podemos chegar a uma noção intuitiva do valor dessa medida, considerando a seguinte construção:

1º) Em uma circunferência de centro O e raio *r* inscrevemos um hexágono regular ABCDEF. Cada lado do hexágono tem comprimento *r*:



$$AB = BC = CD = DE = EF = FA = r$$

2º) A circunferência fica dividida em 6 arcos de medidas iguais



$$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$$

e, sendo o comprimento do arco sempre maior que o comprimento da corda correspondente ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ são cordas da circunferência), todos esses arcos são maiores que 1 rad.

3º) Em cada um dos citados arcos "cabe" 1 rad:

$$\widehat{AB'} = \widehat{BC'} = \widehat{CD'} = \widehat{DE'} = \widehat{EF'} = \widehat{FA'} = 1 \text{ rad}$$

e ainda sobra uma fração de radiano.

4º) O radiano "cabe" 6 vezes na circunferência e mais a soma dessas "sobras". Mais precisamente demonstra-se que a circunferência mede 6,283184... rad (número batizado com o nome de 2π).

Tendo em vista essas considerações, podemos estabelecer a seguinte correspondência para conversão de unidades:

$$360° \longrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
$$180° \longrightarrow \pi \text{ rad}$$

EXERCÍCIOS

27. Exprima 225° em radianos.

Solução

Estabelecemos a seguinte regra de três simples:

$$\begin{array}{l} 180° \longrightarrow \pi \text{ rad} \\ 225° \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{225 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

28. Exprima em radianos.

a) 210°
b) 240°
c) 270°
d) 300°
e) 315°
f) 330°

29. Exprima $\frac{11\pi}{6}$ rad em graus.

Solução

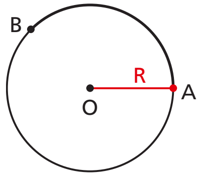
Temos a seguinte regra de três simples:

$$\begin{array}{l} \pi \text{ rad} \longrightarrow 180° \\ \frac{11\pi}{6} \text{ rad} \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{11\pi}{6} \cdot 180}{\pi} = 330°$$

30. Exprima em graus:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad
b) $\frac{\pi}{4}$ rad
c) $\frac{\pi}{3}$ rad
d) $\frac{2\pi}{3}$ rad
e) $\frac{3\pi}{4}$ rad
f) $\frac{5\pi}{6}$ rad

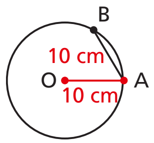
31. Um arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ mede 30 cm e o raio R da circunferência mede 10 cm. Calcule a medida do arco em radianos.



Solução

$$[\text{medida de } \widehat{AB} \text{ em rad}] = \frac{\text{comprimento do arco } \widehat{AB}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{30 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 3 \text{ rad}$$

32. Sobre uma circunferência de raio 10 cm marca-se um arco $\widehat{AB}$ tal que a corda AB mede 10 cm. Calcule a medida do arco em radianos.



Solução

O segmento $\overline{AB}$ é lado do hexágono regular inscrito na circunferência, logo, o menor arco $\widehat{AB}$ é $\frac{1}{6}$ da circunferência, isto é, mede:

$$\frac{1}{6} \times 2\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

33. Um grau se divide em 60′ (60 minutos) e um minuto se divide em 60″ (60 segundos). Por exemplo, um arco de medida 30′ é um arco de 0,5°. Converta em radianos os seguintes arcos:

a) 22°30′

b) 31°15′45″

Solução

a) $22°30' = 22 \times 60' + 30' = 1\,350'$

$\pi \text{ rad} = 180° = 180 \times 60' = 10\,800'$

então:

$$\begin{array}{l} 10\,800' \longrightarrow \pi \text{ rad} \\ 1\,350' \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{1\,350 \cdot \pi}{10\,800} = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

b) $31°15'45'' = 31 \times 3\,600'' + 15 \times 60'' + 45'' = 112\,545''$

$\pi \text{ rad} = 180° = 180 \times 3\,600'' = 648\,000''$

então:

$$\begin{array}{l} 648\,000'' \longrightarrow \pi \text{ rad} \\ 112\,545'' \longrightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{112\,545 \cdot \pi}{648\,000} = \frac{112\,545 \cdot 3{,}1416}{648\,000} = 0{,}54563 \text{ rad}$$

34. Converta em graus o arco 1 rad.

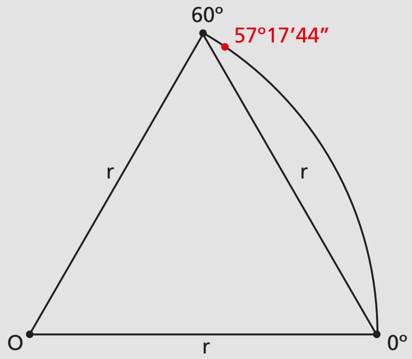
Solução

$3{,}1416 \text{ rad} \longrightarrow 180°$

$1 \text{ rad} \longrightarrow x$

$$x = \frac{180°}{3{,}1416}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,800\,000 & 31\,416 \\ \cline{2-2} 229\,200 & 57°17'44'' \\ 09\,288 & \\ \times\ 60 & \\ \hline 557\,280 & \\ 243\,120 & \\ 23\,208 & \\ \times\ 60 & \\ \hline 1\,392\,480 & \\ 135\,840 & \\ 10\,176 & \end{array}$$

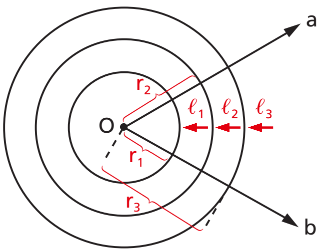


35. Exprima em radianos as medidas dos arcos *a* e *b* tais que $a - b = 15°$ e $a + b = \frac{7\pi}{4}$ rad.

36. Exprima em graus as medidas dos arcos *a*, *b* e *c* tais que $a + b + c = 13°$, $a + b + 2c = \frac{\pi}{12}$ rad e $a + 2b + c = \frac{\pi}{9}$ rad.

III. Medidas de ângulos

43. Consideremos as circunferências concêntricas (de mesmo centro) de raio r_1, r_2 e r_3. Seja α o **ângulo central** $a\hat{O}b$, tal que $\alpha = 60°$, determinando sobre as circunferências arcos ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, respectivamente.



Determinemos esses comprimentos:

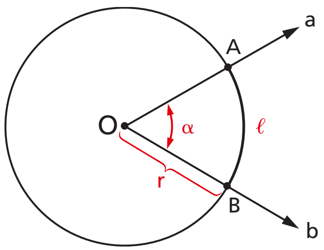
$$\left.\begin{array}{l} 360° \longrightarrow 2\pi r_1 \\ 60° \longrightarrow \ell_1 \end{array}\right\rangle \ \ell_1 = \frac{\pi r_1}{3} \Rightarrow \frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} 360° \longrightarrow 2\pi r_2 \\ 60° \longrightarrow \ell_2 \end{array}\right\rangle \ \ell_2 = \frac{\pi r_2}{3} \Rightarrow \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\pi}{3} \text{ e analogamente } \frac{\ell_3}{r_3} = \frac{\pi}{3}$$

Isto é, $\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell_3}{r_3} = \frac{\pi}{3}$.

Então, $\frac{\pi}{3}$ é a medida em radianos do ângulo $\alpha = 60°$.

44. Portanto, quando queremos medir em radianos um ângulo $a\hat{O}b$, devemos construir uma circunferência de centro O e raio *r* e verificar quantos radianos mede o arco $\widehat{AB}$, isto é, calcular o quociente entre o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ e o raio *r* da circunferência:



$$\boxed{\alpha = \frac{\ell}{r} \quad (\alpha \text{ em radianos})}$$

Por exemplo, se o ângulo central $a\hat{O}b$ é tal que determina numa circunferência de raio $r = 5$ cm um arco $\widehat{AB}$ de medida $\ell = 8$ cm, então a medida de $a\hat{O}b$ é:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \text{ rad}$$

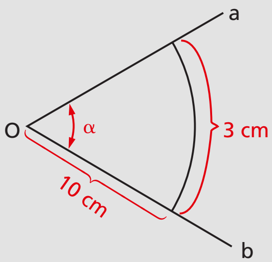
EXERCÍCIOS

37. Calcule, em graus, a medida do ângulo $a\hat{O}b$ da figura.

Solução

$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{3}{10}$ rad.

Convertendo em graus:



$$\left.\begin{array}{l} \pi \text{ rad} \longrightarrow 180° \\ \dfrac{3}{10} \text{ rad} \longrightarrow x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\frac{3}{10} \times 180°}{\pi} = \frac{54°}{3{,}1416} = 17°11'19''$$

38. Calcule o comprimento ℓ do arco $\overset{\frown}{AB}$ definido numa circunferência de raio $r = 10$ cm, por um ângulo central de 60°.

Solução

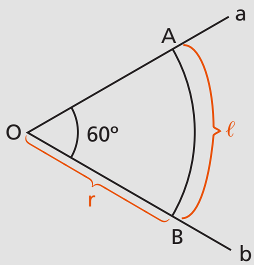
Convertido em radianos, o ângulo central $a\hat{O}b$ tem medida $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

Então:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \ell = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \cdot 10$$

Portanto:

$$\ell = \frac{31{,}416}{3} = 10{,}472 \text{ cm.}$$



39. Calcule a medida do ângulo central $a\hat{O}b$ que determina em uma circunferência de raio *r* um arco de comprimento $\dfrac{2\pi r}{3}$.

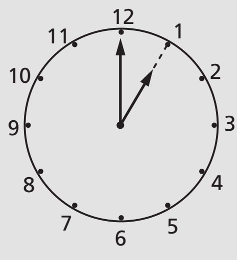
40. Calcule o comprimento ℓ do arco $\overset{\frown}{AB}$ definido em uma circunferência de raio 7 cm por um ângulo central de 4,5 rad.

41. Calcule o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:

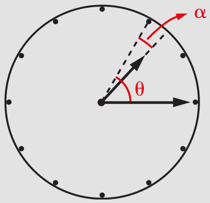
a) 1 h   b) 1h15min   c) 1h40min

Solução

a) Notemos que os números do mostrador de um relógio estão colocados em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, cada uma das quais mede 30°. Assim, à 1 h os ponteiros do relógio formam um ângulo convexo de 30°.



b) Sabemos que em 60 minutos o ponteiro pequeno percorre um ângulo de 30°, então em 15 minutos ele percorre um ângulo α tal que:



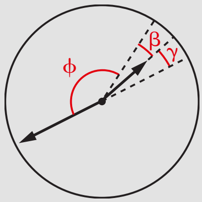
$$\frac{\alpha}{15} = \frac{30°}{60}$$

Portanto $\alpha = 7{,}5° = 7°30'$.

Assim, temos:

$\theta = 60° - \alpha = 60° - 7°30' \Rightarrow \theta = 52°30'$

c) Notemos que em 40 minutos o ponteiro pequeno percorre o ângulo β tal que:



$$\frac{\beta}{40} = \frac{30°}{60}$$

Portanto $\beta = 20°$.

Assim, temos:

$\phi = 150° + \beta = 150° + 20° \Rightarrow \phi = 170°$

ou ainda:

$\phi = 180° - \gamma = 180° - 10° \Rightarrow \phi = 170°$.

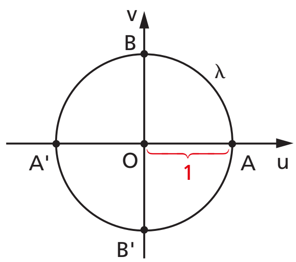
42. Calcule o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que marca:

a) 2h40min; b) 5h55min; c) 6h30min; d) 10h15min.

IV. Ciclo trigonométrico

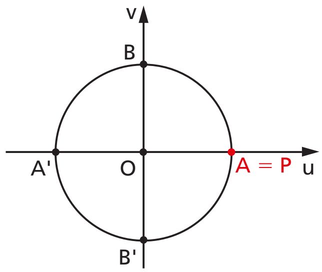
45. Definição

Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal uOv. Consideremos a circunferência λ de centro O e raio $r = 1$. Notemos que o comprimento dessa circunferência é 2π, pois $r = 1$.

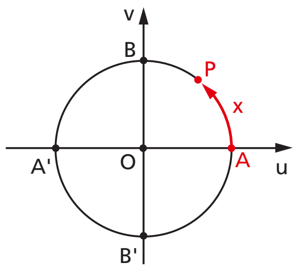


Vamos agora associar a cada número real x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, um único ponto P da circunferência λ do seguinte modo:

1º) se $x = 0$, então P coincide com A;

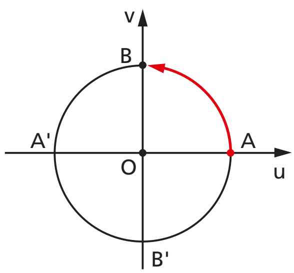


2º) se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento *x*, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.

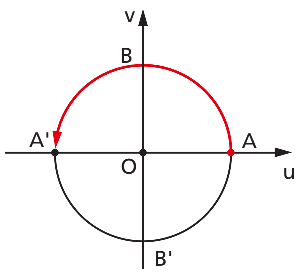


46. A circunferência λ anteriormente definida, com origem em A, é chamada **ciclo** ou **circunferência trigonométrica**.

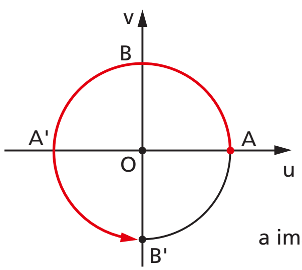
47. Se o ponto P está associado ao número *x*, dizemos que P é a imagem de *x* na circunferência. Assim, por exemplo, temos:



a imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B



a imagem de π é A'



a imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B'

EXERCÍCIOS

43. Divide-se o ciclo em 12 partes iguais, utilizando-se A como um dos pontos divisores. Determine o conjunto dos x ($x \in [0, 2\pi[$) cujas imagens são os pontos divisores.

Solução

Notando que cada parte mede $\frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ e que P é a imagem de x quando $\overset{\frown}{AP} = x$, podemos construir a seguinte tabela:

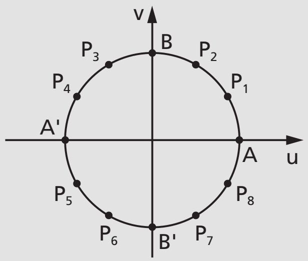


imagem de x	A	P_1	P_2	B	P_3	P_4	A'	P_5	P_6	B'	P_7	P_8
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

44. Divide-se o ciclo em 8 partes iguais, utilizando-se A como um dos pontos divisores. Determine o conjunto dos x ($x \in [0, 2\pi[$) cujas imagens são os pontos divisores.

45. Desenhe e indique no ciclo trigonométrico a imagem de cada um dos seguintes números:

a) $\frac{3\pi}{4}$　　c) $\frac{5\pi}{6}$　　e) $\frac{12\pi}{8}$

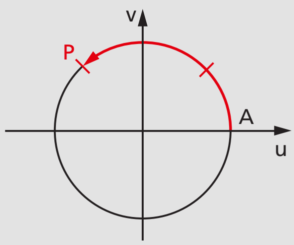
b) $\frac{5\pi}{4}$　　d) $\frac{\pi}{8}$　　f) $\frac{15\pi}{8}$

Solução

a) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{8} \cdot 2\pi$

Marcamos, a partir de A, um percurso $\overset{\frown}{AP}$ igual a $\frac{3}{8}$ do ciclo, no sentido anti-horário.

A imagem de $\frac{3\pi}{4}$ é P.



CAPÍTULO IV

Razões trigonométricas na circunferência

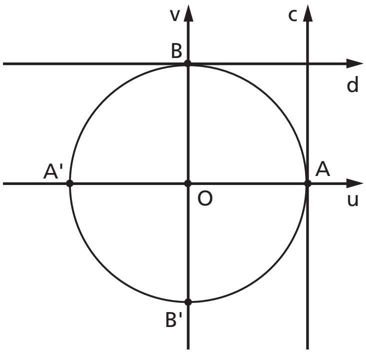
I. Noções gerais

48. Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{OA}$, em que $OA = 1$.

Para o estudo das razões trigonométricas na circunferência, vamos associar ao ciclo quatro eixos:

1º) eixo dos cossenos (u)
direção: $\overline{OA}$
sentido positivo: $O \to A$

2º) eixo dos senos (v)
direção: perpendicular a *u*, por O
sentido positivo: $O \to B$
sendo B tal que $\widehat{AB} = \dfrac{\pi}{2}$



3º) eixo das tangentes (c)
direção: paralelo a *v* por A
sentido positivo: o mesmo de *v*

4º) eixo das cotangentes (d)
direção: paralelo a *u* por B
sentido positivo: o mesmo de *u*

49. Os eixos *u* e *v* dividem a circunferência em quatro arcos: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BA'}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ e $\overset{\frown}{B'A}$. Dado um número real *x*, usamos a seguinte linguagem para efeito de localizar a imagem P de *x* no ciclo:

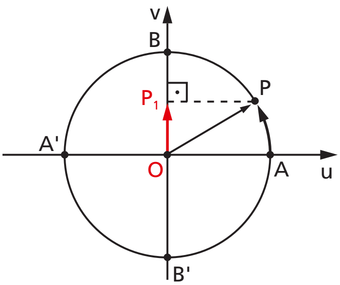
x está no 1º quadrante $\Leftrightarrow P \in \overset{\frown}{AB}$
x está no 2º quadrante $\Leftrightarrow P \in \overset{\frown}{BA'}$
x está no 3º quadrante $\Leftrightarrow P \in \overset{\frown}{A'B'}$
x está no 4º quadrante $\Leftrightarrow P \in \overset{\frown}{B'A}$

II. Seno

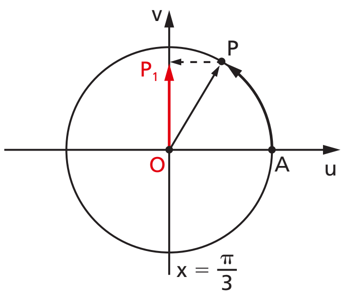
50. Definição

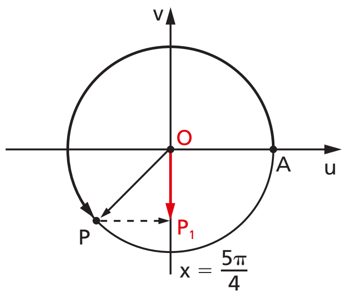
Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo.

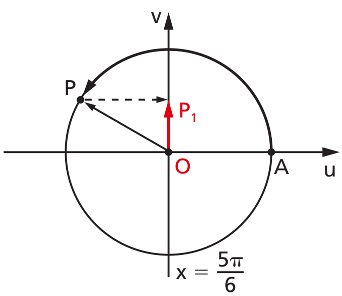
Denominamos **seno** de *x* (e indicamos sen x) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv.

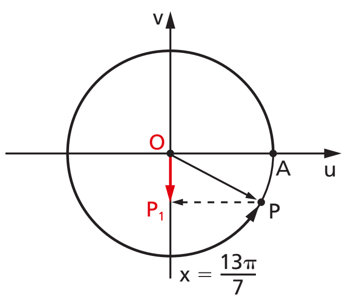


51. Para cada número real $x \in [0, 2\pi]$ existe uma única imagem P e cada imagem P tem um único valor para sen x (OP_1 = sen x).





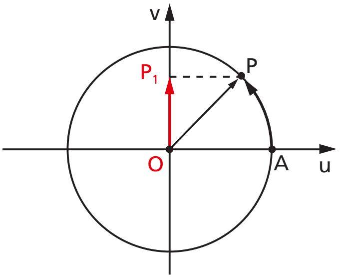


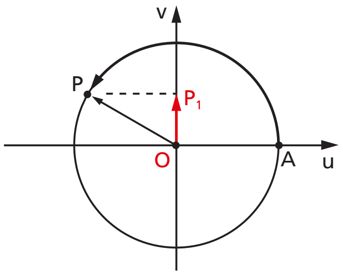


52. Propriedades

1ª) Se *x* é do primeiro ou do segundo quadrante, então sen x é positivo.

De fato, neste caso o ponto P está acima do eixo *u* e sua ordenada é positiva.





$0 \leqslant OP_1 \leqslant 1$

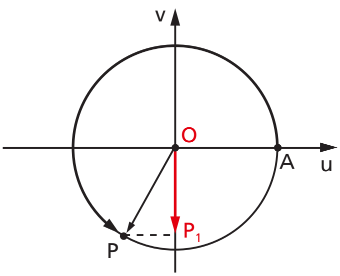
$0 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$

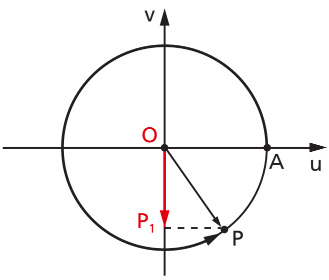
$0 \leqslant OP_1 \leqslant 1$

$0 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$

2ª) Se *x* é do terceiro ou do quarto quadrante, então sen x é negativo.

De fato, neste caso o ponto P está abaixo do eixo *u* e sua ordenada é negativa.





$-1 \leqslant OP_1 \leqslant 0$

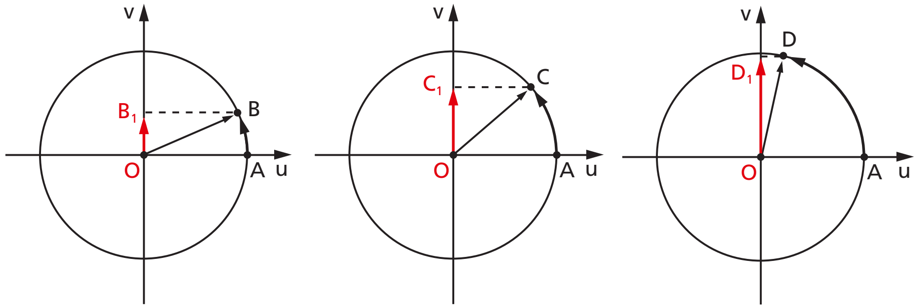
$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 0$

$-1 \leqslant OP_1 \leqslant 0$

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 0$

Portanto, para todo $x \in [0, 2\pi]$, temos $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$. Então -1 é o valor mínimo e 1 é o valor máximo de sen x.

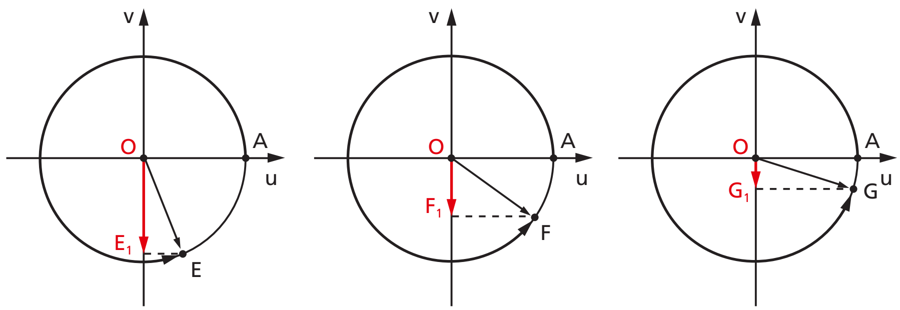
3ª) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então sen x é crescente.



Os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{AD}$ são todos do 1º quadrante.

$$m\widehat{AB} < m\widehat{AC} < m\widehat{AD}$$

Em correspondência, verificamos que: $OB_1 < OC_1 < OD_1$, ou seja, sen x cresce quando x percorre o 1º quadrante.

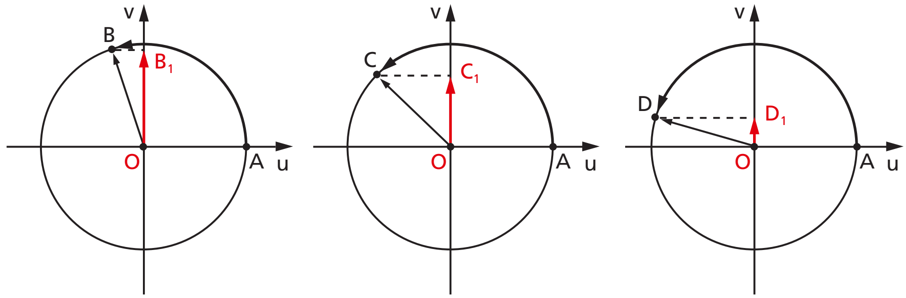


Os arcos $\widehat{AE}$, $\widehat{AF}$ e $\widehat{AG}$ são todos do 4º quadrante.

$$m\widehat{AE} < m\widehat{AF} < m\widehat{AG}$$

Em correspondência, verificamos que $OE_1 < OF_1 < OG_1$, ou seja, sen x cresce quando x percorre o 4º quadrante.

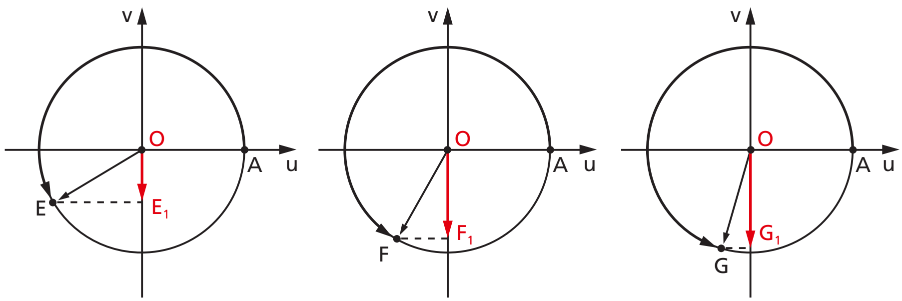
4ª) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então sen x é decrescente.



Os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{AD}$ são todos do 2º quadrante.

$$m\overset{\frown}{AB} < m\overset{\frown}{AC} < m\overset{\frown}{AD}$$

$OB_1 > OC_1 > OD_1$, ou seja, sen x decresce quando x percorre o 2º quadrante.



Os arcos $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{AF}$ e $\overset{\frown}{AG}$ são todos do 3º quadrante.

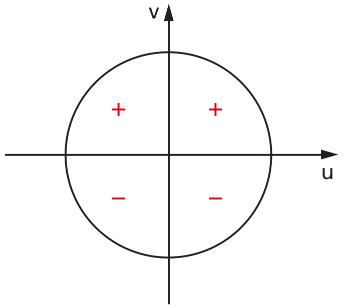
$$m\overset{\frown}{AE} < m\overset{\frown}{AF} < m\overset{\frown}{AG}$$

$OE_1 > OF_1 > OG_1$, ou seja, sen x decresce quando x percorre o 3º quadrante.

53. Em síntese, verificamos que, fazendo x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$, a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, e a ordenada de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

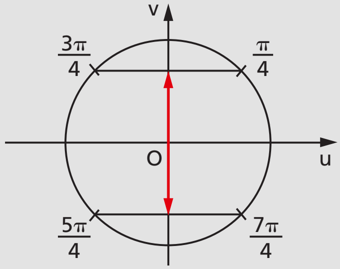
54. O sinal de sen x também pode ser assim sintetizado:



EXERCÍCIOS

46. Localize os arcos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Em seguida, dê o sinal do seno de cada um deles.

Solução



$\text{sen}\ \frac{\pi}{4} > 0$; $\text{sen}\ \frac{5\pi}{4} < 0$

$\text{sen}\ \frac{3\pi}{4} > 0$; $\text{sen}\ \frac{7\pi}{4} < 0$

47. Localize os arcos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$. Em seguida, dê o sinal do seno de cada um deles.

48. Localize os arcos $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$. Qual é o sinal do seno de cada um desses arcos?

49. Você pôde observar no exercício 46 que $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ são simétricos em relação ao eixo *v*, assim como $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Sabendo que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, dê o valor de $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$.

50. Utilizando simetria e sabendo que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, dê o valor do seno de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

51. Sabendo que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dê o valor do seno de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

52. Calcule as expressões:

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}2\pi$

b) $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

c) $3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi$

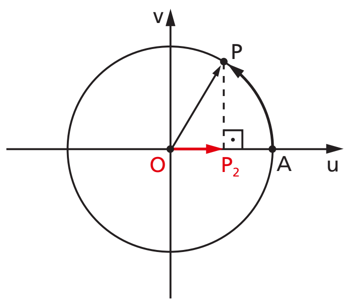
d) $-\frac{2}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$

53. Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números sen 60°, sen 150°, sen 240° e sen 330°.

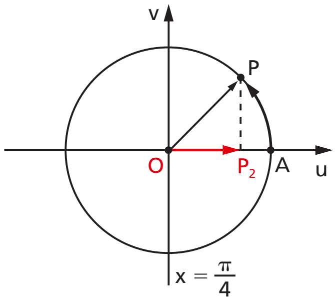
III. Cosseno

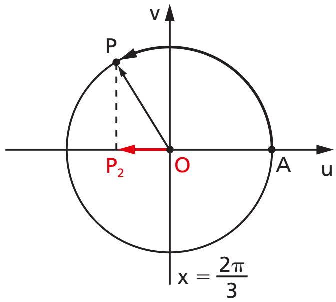
55. Definição

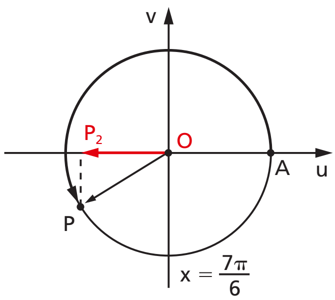
Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos **cosseno** de *x* (indicamos cos x) a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv.

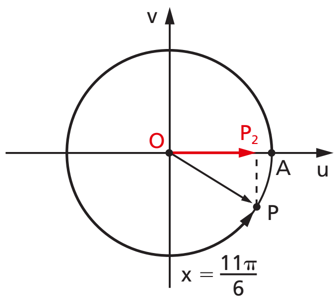


56. Para cada número real $x \in [0, 2\pi]$ existe uma única imagem P e cada imagem P tem um único valor para cos x ($OP_2 = \cos x$).





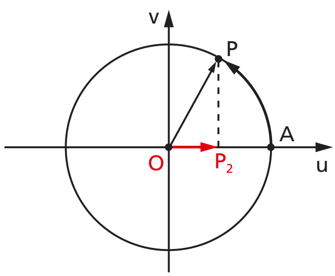


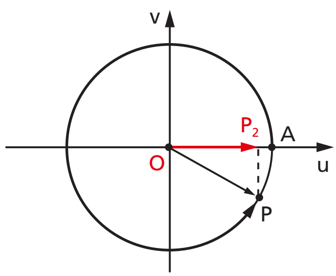


57. Propriedades

1ª) Se *x* é do primeiro ou do quarto quadrante, então cos x é positivo.

Neste caso, o ponto P está à direita do eixo *v* e sua abscissa é sempre positiva.



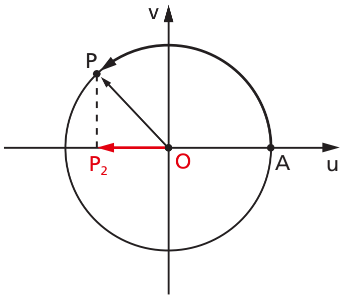


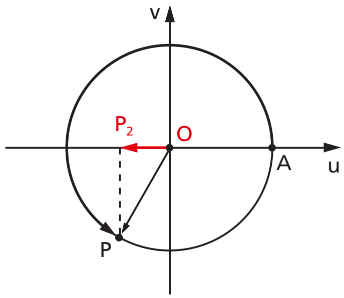
$0 \leqslant OP_2 \leqslant 1$
$0 \leqslant \cos x \leqslant 1$

$0 \leqslant OP_2 \leqslant 1$
$0 \leqslant \cos x \leqslant 1$

2ª) Se *x* é do segundo ou do terceiro quadrante, então cos x é negativo.

Neste caso, o ponto P está à esquerda do eixo *v* e sua abscissa é sempre negativa.



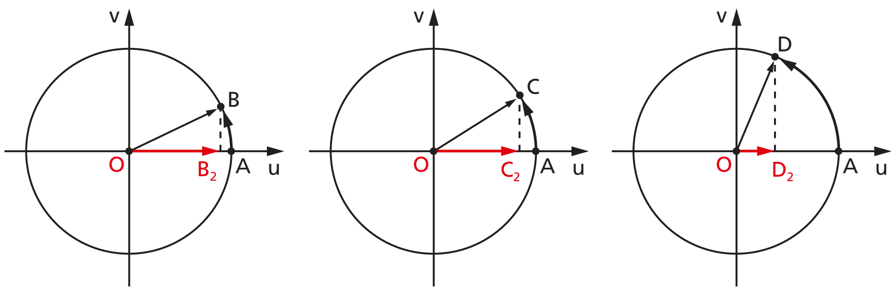


$$-1 \leqslant OP_2 \leqslant 0$$
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 0$$

$$-1 \leqslant OP_2 \leqslant 0$$
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 0$$

Portanto, para todo $x \in [0, 2\pi]$, temos $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, isto é, -1 e $+1$ são os valores, respectivamente, mínimo e máximo da abscissa OP_2, ou seja, do cosseno.

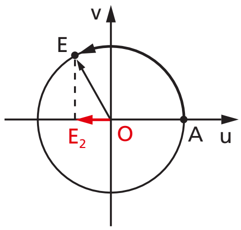
3ª) Se *x* percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então cos x é decrescente.



Os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{AD}$ são todos do 1º quadrante.

$$m\overset{\frown}{AB} < m\overset{\frown}{AC} < m\overset{\frown}{AD}$$

$OB_2 > OC_2 > OD_2$, ou seja, cos x decresce quando *x* percorre o 1º quadrante.

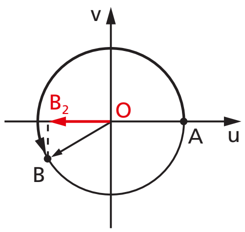


Os arcos $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{AF}$ e $\overset{\frown}{AG}$ são todos do 2º quadrante.

$$m\overset{\frown}{AE} < m\overset{\frown}{AF} < m\overset{\frown}{AG}$$

$OE_2 > OF_2 > OG_2$, ou seja, cos x decresce quando *x* percorre o 2º quadrante.

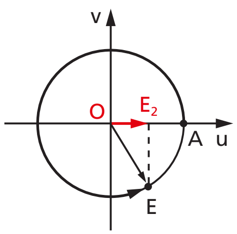
4ª) Se *x* percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então cos x é crescente.



$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{AD}$ são todos do 3º quadrante.

$$m\overset{\frown}{AB} < m\overset{\frown}{AC} < m\overset{\frown}{AD}$$

$OB_2 < OC_2 < OD_2$, ou seja, cos x cresce quando *x* percorre o 3º quadrante.



$\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{AF}$ e $\overset{\frown}{AG}$ são todos do 4º quadrante.

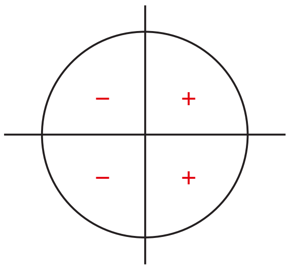
$$m\overset{\frown}{AE} < m\overset{\frown}{AF} < m\overset{\frown}{AG}$$

$OE_2 < OF_2 < OG_2$, ou seja, cos x cresce quando *x* percorre o 4º quadrante.

58. Em síntese, verificamos que, fazendo *x* percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$, a imagem de *x* (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, e a abscissa de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

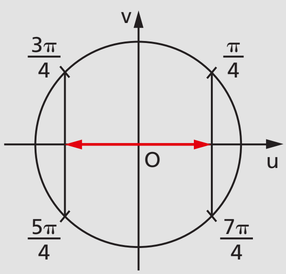
59. O sinal de cos x também pode ser assim sintetizado:



EXERCÍCIOS

54. Localize os arcos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Em seguida, dê o sinal do cosseno de cada um deles.

Solução



$\cos \frac{\pi}{4} > 0$; $\cos \frac{5\pi}{4} < 0$

$\cos \frac{3\pi}{4} < 0$; $\cos \frac{7\pi}{4} > 0$

55. Localize os arcos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$. Em seguida, dê o sinal do cosseno de cada um deles.

56. Qual é o sinal do cosseno de cada arco abaixo?

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{4\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{12}$

d) $\frac{4\pi}{5}$

e) $\frac{5\pi}{6}$

f) $\frac{7\pi}{8}$

g) $\frac{16\pi}{9}$

h) $\frac{2\pi}{3}$

57. Você pôde observar no exercício 54 que $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ são simétricos em relação ao eixo *u*, assim como $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. Sabendo que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, dê o valor de $\cos\frac{7\pi}{4}$ e $\cos\frac{5\pi}{4}$.

58. Utilizando simetria e sabendo que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dê o valor do cosseno de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

59. Sabendo que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, qual é o valor de $\cos\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3}$ e $\cos\frac{5\pi}{3}$?

60. Calcule as expressões:

a) $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} - \cos 2\pi$

b) $2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{4}$

c) $3\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\pi$

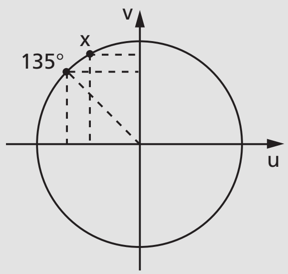
d) $-\frac{2}{3}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{5}\cos\frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7}\cos\frac{7\pi}{6}$

61. Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números $\cos 60°$, $\cos 150°$, $\cos 240°$ e $\cos 330°$.

62. Determine o sinal da expressão $y = \text{sen } 107° + \cos 107°$.

Solução

Examinando o ciclo, notamos que:
$|\text{sen } 135°| = |\cos 135°|$
e
$90° < x < 135° \Rightarrow |\text{sen } x| > |\cos x|$
Como $\text{sen } 107° > 0$, $\cos 107° < 0$
e $|\text{sen } 107°| > |\cos 107°|$, decorre:
$\text{sen } 107° + \cos 107° > 0$



63. Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

a) $y_1 = \text{sen } 45° + \cos 45°$

b) $y_2 = \text{sen } 225° + \cos 225°$

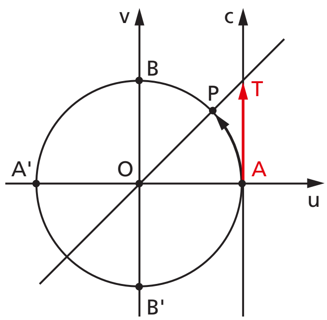
c) $y_3 = \text{sen } \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$

d) $y_4 = \text{sen } 300° + \cos 300°$

IV. Tangente

60. Definição

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos **tangente** de *x* (e indicamos tg x) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

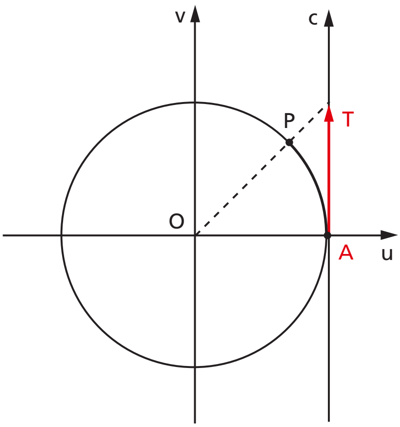


Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2}$, P está em B e, para $x = \frac{3\pi}{2}$, P está em B', então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a tg x não está definida.

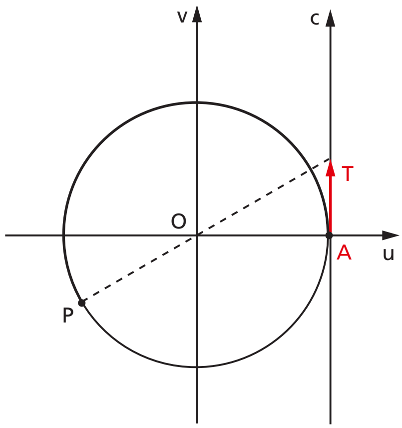
61. Propriedades

1ª) Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então tg x é positiva.

De fato, neste caso o ponto T está acima de A e AT é positiva.



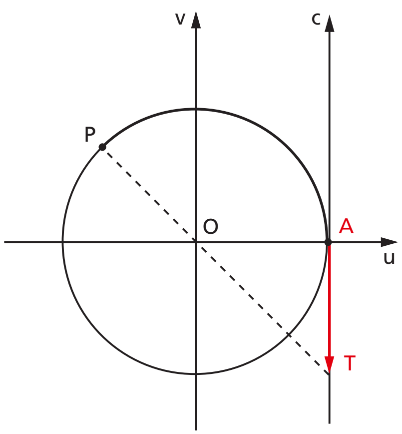
AT $>$ 0



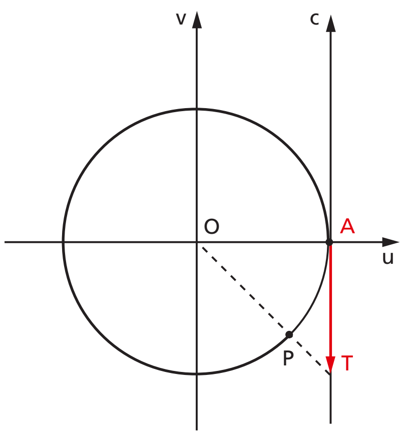
AT $>$ 0

2ª) Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então tg x é negativa.

De fato, neste caso o ponto T está abaixo de A e AT é negativa.



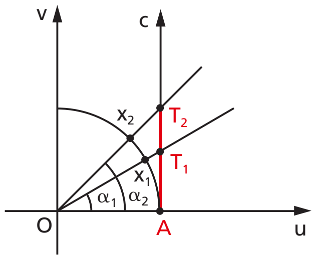
AT $<$ 0



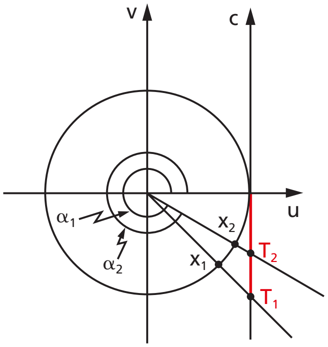
AT $<$ 0

3ª) Se *x* percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tg x é crescente.

Consideremos estas figuras:



1º quadrante



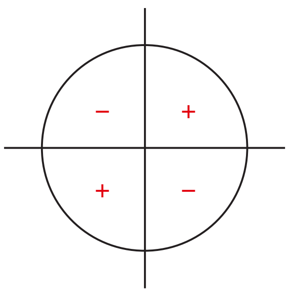
4º quadrante

Dados x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, temos $\alpha_1 < \alpha_2$ e, por propriedade da Geometria Plana, vem $AT_1 < AT_2$, isto é, tg $x_1 <$ tg x_2.

62. Em síntese, verificamos que, fazendo *x* percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$, a imagem de *x* (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, e a medida algébrica de $\overline{AT}$ varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
tg x	0	cresce	$\nexists$	cresce	0	cresce	$\nexists$	cresce	0

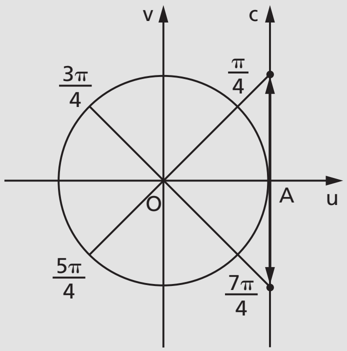
63. O sinal de tg x também pode ser assim esquematizado:



EXERCÍCIOS

64. Localize os arcos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Em seguida, dê o sinal da tangente de cada um deles.

Solução



$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} > 0$; $\text{tg}\,\frac{5\pi}{4} > 0$

$\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} < 0$; $\text{tg}\,\frac{7\pi}{4} < 0$

65. Dê o sinal de cada um dos seguintes números:

a) $\text{tg}\,\frac{\pi}{6}$

b) $\text{tg}\,\frac{2\pi}{3}$

c) $\text{tg}\,\frac{7\pi}{6}$

d) $\text{tg}\,\frac{11\pi}{6}$

e) $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$

f) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{3}$

66. Sabendo que $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$ e $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -1$ e verificando que $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ são simétricos em relação ao eixo u, assim como $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, dê o valor de $\text{tg}\,\frac{7\pi}{4}$ e $\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$.

67. Usando simetria e sabendo que $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, dê o valor da tangente de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

68. Sabendo que $\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, qual é o valor da tangente de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$?

69. Calcule as expressões:

a) $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} + \text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} - \text{tg}\,2\pi$

b) $2\,\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2}\,\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{4}$

c) $-2\,\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\,\text{tg}\,\pi - \dfrac{1}{3}\,\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{6}$

d) $\dfrac{3}{5}\,\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{6}{7}\,\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{6} - \dfrac{2}{3}\cos\dfrac{3\pi}{2}$

70. Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números tg 60°, tg 120°, tg 210° e tg 330°.

71. Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

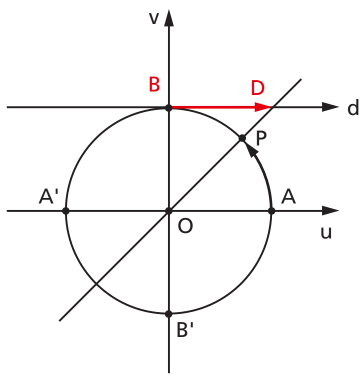
a) $y_1 = \text{tg}\,269° + \text{sen}\,178°$

b) $y_2 = \text{tg}\,\dfrac{12\pi}{7} \cdot \left(\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{23\pi}{12}\right)$

V. Cotangente

64. Definição

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos **cotangente** de *x* (e indicamos cotg x) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.



Notemos que, para $x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D, a cotg x não está definida.

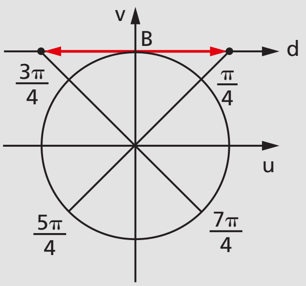
65. Propriedades

1ª) Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então cotg x é positiva.
2ª) Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então cotg x é negativa.
3ª) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então cotg x é decrescente.
(A verificação dessas propriedades fica como exercício para o leitor.)

EXERCÍCIOS

72. Localize os arcos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Em seguida, dê o sinal da cotangente de cada um deles.

Solução



$$\text{cotg}\,\frac{\pi}{4} > 0;\ \text{cotg}\,\frac{5\pi}{4} > 0$$

$$\text{cotg}\,\frac{3\pi}{4} < 0;\ \text{cotg}\,\frac{7\pi}{4} < 0$$

73. Dê o sinal dos seguintes números:

a) cotg $\frac{\pi}{6}$

b) cotg $\frac{2\pi}{3}$

c) cotg $\frac{7\pi}{6}$

d) cotg $\frac{11\pi}{6}$

e) cotg $\frac{4\pi}{3}$

f) cotg $\frac{5\pi}{3}$

74. Sabendo que $\text{cotg}\,\frac{\pi}{4} = 1$ e $\text{cotg}\,\frac{3\pi}{4} = -1$ e verificando que $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ são simétricos em relação ao eixo u, assim como $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, dê o valor de cotg $\frac{7\pi}{4}$ e cotg $\frac{5\pi}{4}$.

75. Usando simetria e sabendo que cotg $\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, dê o valor da cotangente de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

76. Sabendo que cotg $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, qual é o valor da cotangente de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$?

77. Calcule as expressões:

a) $\text{cotg}\,\frac{\pi}{3} + \text{cotg}\,\frac{\pi}{4} + \text{cotg}\,\frac{\pi}{6}$

b) $2\,\text{cotg}\,\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\,\text{cotg}\,\frac{5\pi}{6}$

c) $\text{sen}\,\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} - \text{tg}\,\frac{2\pi}{3} + \text{cotg}\,\frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{3}{5}\,\text{cotg}\,\frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7}\,\text{cotg}\,\frac{7\pi}{6} - \frac{2}{3}\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + \frac{4}{5}\cos\frac{5\pi}{4}$

78. Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números cotg 60°, cotg 120°, cotg 210° e cotg 330°.

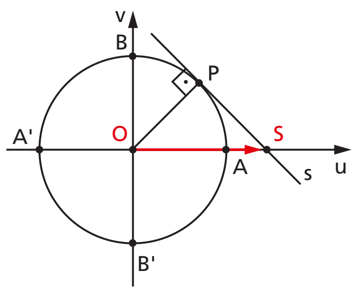
79. Qual é o sinal das seguintes expressões?

a) $y_1 = \text{cotg}\,269° + \text{sen}\,178°$

b) $y_2 = \text{cotg}\,\frac{12\pi}{7} \cdot \left(\text{sen}\,\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{23\pi}{12}\right)$

VI. Secante

66. Definição



Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos **secante** de *x* (e indicamos sec x) a abscissa OS do ponto S.

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$, P está em B ou B', então a reta *s* fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S, a sec x não está definida.

67. Propriedades

1ª) Se *x* é do 1º ou do 4º quadrante, então sec x é positiva.
2ª) Se *x* é do 2º ou do 3º quadrante, então sec x é negativa.
3ª) Se *x* percorre o 1º ou o 2º quadrante, então sec x é crescente.
4ª) Se *x* percorre o 3º ou o 4º quadrante, então sec x é decrescente.
(A verificação dessas propriedades fica como exercício para o leitor.)

EXERCÍCIOS

80. Localize os arcos relacionados abaixo e, em seguida, dê o sinal da secante de cada um deles.

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{5\pi}{4}$

d) $\frac{5\pi}{6}$

e) $\frac{5\pi}{3}$

f) $\frac{7\pi}{4}$

g) $\frac{11\pi}{6}$

h) $\frac{7\pi}{6}$

81. Sabendo que $\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, localizando os arcos e utilizando simetria, dê o valor da secante de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

82. Quais são os valores da secante de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$, sabendo que $\sec \frac{\pi}{3} = 2$?

83. Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números sec 60°, sec 120°, sec 210° e sec 330°.

84. Qual é o sinal das seguintes expressões?

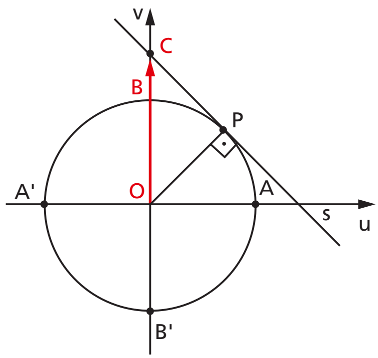
a) $y_1 = \sec 269° + \sec 178°$

b) $y_2 = \sec \frac{12\pi}{7} \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{23\pi}{12}\right)$

VII. Cossecante

68. Definição

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta *s* tangente ao ciclo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos **cossecante** de *x* (e indicamos cossec x) a ordenada OC do ponto C.



Notemos que, para $x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$, P está em A ou A' e, então a reta *s* fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a cossec x não está definida.

69. Propriedades

1ª) Se *x* é do 1º ou do 2º quadrante, então cossec x é positiva.

2ª) Se *x* é do 3º ou do 4º quadrante, então cossec x é negativa.

3ª) Se *x* percorre o 2º ou o 3º quadrante, então cossec x é crescente.

4ª) Se *x* percorre o 1º ou o 4º quadrante, então cossec x é decrescente.

(A verificação dessas propriedades fica como exercício para o leitor.)

EXERCÍCIOS

85. Localize os arcos relacionados abaixo e, em seguida, dê o sinal da cossecante de cada um deles.

a) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ e) $\frac{5\pi}{3}$ g) $\frac{11\pi}{6}$

b) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ f) $\frac{7\pi}{4}$ h) $\frac{7\pi}{6}$

86. Sabendo que cossec $\frac{\pi}{6} = 2$, localizando os arcos e utilizando simetria, dê o valor da cossecante de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

87. Quais são os valores da cossecante de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$, sabendo que a cossecante de $\frac{\pi}{3}$ é igual a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$?

88. Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números cossec 60°, cossec 150°, cossec 240° e cossec 300°.

89. Qual é o sinal das seguintes expressões?

a) $y_1 = \cos 91° + \text{cossec } 91°$

b) $y_2 = \text{sen } 107° + \sec 107°$

c) $y_3 = \sec \frac{9\pi}{8} \cdot \left(\text{tg } \frac{7\pi}{6} + \text{cotg } \frac{\pi}{7}\right)$

90. Qual é o valor de $\left(\text{cossec } \frac{\pi}{6} + \text{sen } \frac{\pi}{6}\right)\left(\text{sen } \frac{\pi}{4} - \sec \frac{\pi}{3}\right)$?

CAPÍTULO V

Relações fundamentais

I. Introdução

Definimos sen x, cos x, tg x, cotg x, sec x e cossec x no ciclo trigonométrico, ou seja, para x pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Vamos mostrar agora que esses seis números guardam entre si relações denominadas **relações fundamentais**. Mais ainda, mostraremos que a partir de um deles sempre é possível calcular os outros cinco.

II. Relações fundamentais

70. Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$, vale a relação:

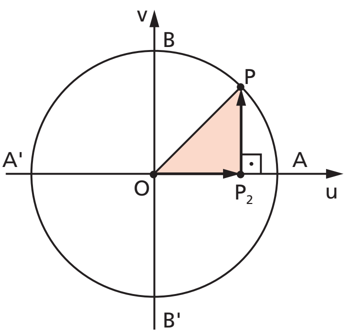
$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Demonstração:

a) No caso especial em que $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, podemos verificar diretamente:

x	sen x	cos x	$\text{sen}^2 x + \cos^2 x$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1
2π	0	1	1

b) Se $x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, a imagem de *x* é distinta de A, B, A' e B' e, então, existe o triângulo OP_2P retângulo.



Portanto:

$$|OP_2|^2 + |P_2P|^2 = |OP|^2$$

ou seja:

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$$

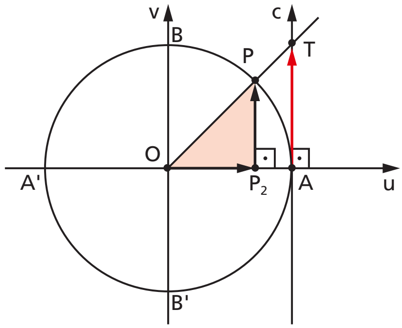
71. Teorema

Para todo *x* real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vale a relação:

$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}}$$

Demonstração:

a) Se $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:



$$\triangle OAT \sim \triangle OP_2P$$

$$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|P_2P|}{|OP_2|}$$

$$|\text{tg } x| = \frac{|\text{sen } x|}{|\cos x|} \quad (1)$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observemos que o sinal de tg x é igual ao do quociente $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$. (2)

Q	sinal de tg x	sinal de $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$
1º	$+$	$+$
2º	$-$	$-$
3º	$+$	$+$
4º	$-$	$-$

De (1) e (2) decorre a tese.

b) Se $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos:

$$\text{tg } x = 0 = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

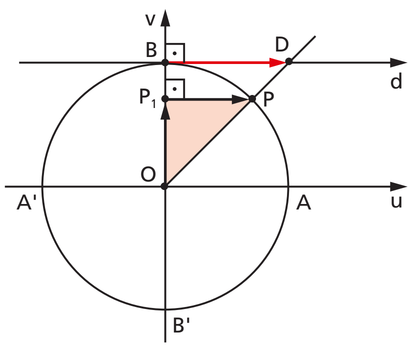
72. Teorema

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, vale a relação:

$$\boxed{\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}}$$

Demonstração:

a) Se $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:



$$\triangle OBD \sim \triangle OP_1P$$

$$\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{|P_1P|}{|OP_1|}$$

$$|\text{cotg } x| = \frac{|\cos x|}{|\text{sen } x|} \quad (1)$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observemos que o sinal de cotg x é igual ao do quociente $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. (2)

De (1) e (2) decorre a tese.

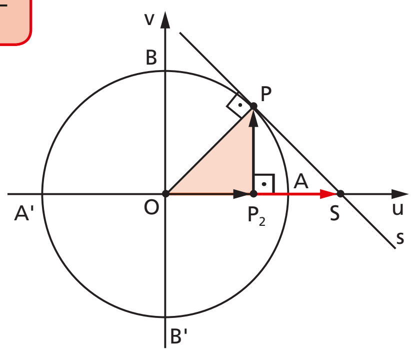
Q	sinal de cotg x	sinal de $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
1º	+	+
2º	−	−
3º	+	+
4º	−	−

b) Se $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$, temos $\operatorname{cotg} x = 0 = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

73. Teorema

Para todo *x* real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vale a relação:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$



Demonstração:

a) Se $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, a imagem de *x* é distinta de A, B, A' e B', então temos:

$$\triangle OPS \sim \triangle OP_2P$$

$$\frac{|OS|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_2|}$$

$$|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|} \quad (1)$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observemos que o sinal de sec x é igual ao sinal de cos x. (2)

De (1) e (2) decorre a tese.

Q	sinal de sec x	sinal de sen x
1º	+	+
2º	−	−
3º	−	−
4º	+	+

b) Se $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos:

$$\sec x = 1 = \frac{1}{\cos x}, \ (x = 0 \text{ ou } x = 2\pi)$$

$$\sec x = -1 = \frac{1}{\cos x}, \ (x = \pi)$$

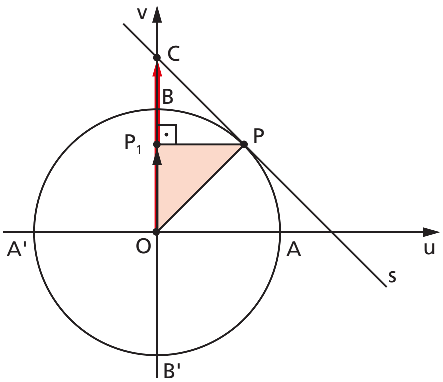
74. Teorema

Para todo *x* real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, vale a relação:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$$

Demonstração:

a) Se $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, a imagem de *x* é distinta de A, B, A' e B', então temos:



$$\triangle OPC \sim \triangle OP_1P$$

$$\frac{|OC|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|OP_1|}$$

$$|\text{cossec } x| = \frac{1}{|\text{sen } x|} \quad (1)$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observemos que o sinal de cossec x é igual ao sinal de sen x. (2)

Q	sinal de cossec x	sinal de sen x
1º	+	+
2º	+	+
3º	–	–
4º	–	–

De (1) e (2) decorre a tese.

b) Se $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, temos:

$$\text{cossec } x = 1 = \frac{1}{\text{sen } x}, \left(x = \frac{\pi}{2}\right) \text{ ou cossec } x = -1 = \frac{1}{\text{sen } x}, \left(x = \frac{3\pi}{2}\right)$$

75. Corolário

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, valem as relações:

1ª) $\text{cotg } x = \dfrac{1}{\text{tg } x}$

2ª) $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

3ª) $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$

4ª) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$

5ª) $\text{sen}^2 x = \dfrac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$

Demonstração:

1ª) $\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}} = \dfrac{1}{\text{tg } x}$

2ª) $\text{tg}^2 x + 1 = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

3ª) $1 + \text{cotg}^2 x = 1 + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = \text{cossec}^2 x$

4ª) $\cos^2 x = \dfrac{1}{\sec^2 x} = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$

5ª) $\text{sen}^2 x = \cos^2 x \cdot \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x \cdot \text{tg}^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \cdot \text{tg}^2 x = \dfrac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$

EXERCÍCIOS

91. Sabendo que $\text{sen } x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha as demais razões trigonométricas de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

92. Sabendo que $\text{cossec } x = -\frac{25}{24}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, obtenha as demais razões trigonométricas de *x*.

93. Sabendo que $\text{tg } x = \frac{12}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, obtenha as demais razões trigonométricas de *x*.

Solução

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

Notando que $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sec x < 0$, temos:

$$\sec x = -\sqrt{1 + \text{tg}^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{144}{25}} = -\sqrt{\frac{169}{25}} = -\frac{13}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{-\frac{13}{5}} = -\frac{5}{13}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \left(\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

94. Calcule cos x, sabendo que cotg $x = \frac{2\sqrt{m}}{m-1}$, com $m > 1$.

95. Calcule sec x, sabendo que sen $x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, com $a > b > 0$.

96. Sabendo que sec $x = 3$, calcule o valor da expressão $y = \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x$.

Solução

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = 9 - 1 = 8$$

então

$$y = \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x = \frac{8}{9} + 16 = \frac{152}{9}$$

97. Sendo sen $x = \frac{1}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de

$$y = \frac{1}{\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x} + \frac{1}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x}.$$

98. Sabendo que cotg $x = \frac{24}{7}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor da expressão

$$y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}.$$

Solução 1

Calculamos tg x, cos x e finalmente *y*:

$$\text{tg } x = \frac{1}{\text{cotg } x} = \frac{7}{24}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + \dfrac{49}{576}} = \frac{576}{625} \Rightarrow \cos x = -\frac{24}{25} \text{ (pois, } \cos x < 0)$$

$$y = \frac{\text{tg } x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{\left(\dfrac{7}{24}\right)\left(-\dfrac{24}{25}\right)}{\left(1 - \dfrac{24}{25}\right)\left(1 + \dfrac{24}{25}\right)} = \frac{-\dfrac{7}{25}}{\dfrac{49}{625}} = -\frac{25}{7}$$

Solução 2

Simplificamos *y* e depois calculamos o valor da expressão:

$$y = \frac{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\text{sen } x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen } x} = \text{cossec } x =$$

$$= -\sqrt{1 + \text{cotg}^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{576}{49}} = -\frac{25}{7}$$

99. Dado que $\cos x = \dfrac{2}{5}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obtenha o valor de $y = (1 + \text{tg}^2 x)^2 + (1 - \text{tg}^2 x)^2$.

100. Calcule sen x e cos x, sabendo que $3 \cdot \cos x + \text{sen } x = -1$.

Solução

Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3 \cdot \cos x + \text{sen } x = -1 \quad (1) \\ \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) vem: $\text{sen } x = -1 - 3 \cdot \cos x \quad (3)$

Substituindo (3) em (2), resulta:

$\cos^2 x + (-1 - 3 \cdot \cos x)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x + 1 + 6 \cdot \cos x + 9 \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \cdot \cos^2 x + 6 \cdot \cos x = 0$

então: $\cos x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{3}{5}$.

Substituindo cada uma dessas alternativas em (3), encontramos:

$\text{sen } x = -1 - 3 \cdot 0 = -1$ ou $\text{sen } x = -1 - 3\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$.

Assim, temos duas soluções:

1ª) $\cos x = 0$ e $\text{sen } x = -1$

ou

2ª) $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ e $\text{sen } x = \dfrac{4}{5}$

101. Calcule sen x e cos x, sabendo que $5 \cdot \sec x - 3 \cdot \text{tg}^2 x = 1$.

102. Obtenha tg x, sabendo que $\text{sen}^2 x - 5 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = 3$.

103. Calcule *m* de modo a obter $\text{sen } x = 2m + 1$ e $\cos x = 4m + 1$.

Solução

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, resulta:

$(2m + 1)^2 + (4m + 1)^2 = 1 \Rightarrow (4m^2 + 4m + 1) + (16m^2 + 8m + 1) = 1$

$\Rightarrow 20m^2 + 12m + 1 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{40} =$

$= \dfrac{-12 \pm 8}{40} \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ ou $m = -\dfrac{1}{10}$

104. Calcule *m* de modo a obter $\text{tg } x = m - 2$ e $\text{cotg } x = \dfrac{m}{3}$.

105. Determine *a* de modo a obter $\cos x = \dfrac{1}{a + 1}$ e $\text{cossec } x = \dfrac{a + 1}{\sqrt{a + 2}}$.

106. Determine uma relação entre *x* e *y*, independente de *t*, sabendo que: $x = 3 \cdot \text{sen } t$ e $y = 4 \cdot \cos t$

Solução

Como $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, resulta:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow 16x^2 + 9y^2 = 144$$

107. Determine uma relação entre *x* e *y*, independente de *t*, sabendo que: $x = 5 \cdot \text{tg } t$ e $y = 3 \cdot \text{cossec } t$

Solução

Como $\text{cossec}^2 t = \text{cotg}^2 t + 1$ e $\text{cotg } t = \dfrac{1}{\text{tg } t}$, resulta:

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{x}\right)^2 + 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} = \frac{25}{x^2} + 1 \Rightarrow x^2y^2 = 225 + 9x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2y^2 - 9x^2 = 225$$

108. Se $\text{sen } x + \cos x = a$ e $\text{sen } x \cdot \cos x = b$, obtenha uma relação entre *a* e *b*, independente de *x*.

109. Dado que $\text{sen } x \cdot \cos x = m$, calcule o valor de $y = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$ e $z = \text{sen}^6 x + \cos^6 x$.

Solução

Como $a^2 + b^2 \equiv (a + b)^2 - 2ab$, temos:

$$y = (\text{sen}^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x =$$
$$= 1^2 - 2 \cdot (\text{sen } x \cdot \cos x)^2 = 1 - 2m^2$$

Como $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, temos:

$$z = (\text{sen}^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= \text{sen}^4 x + \cos^4 x - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = y - (\text{sen } x \cdot \cos x)^2 =$$
$$= 1 - 2m^2 - m^2 = 1 - 3m^2$$

110. Sabendo que $\text{sen } x + \cos x = a$ (*a* dado), calcule $y = \text{sen}^3 x + \cos^3 x$.