OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria plana

9

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO XIV

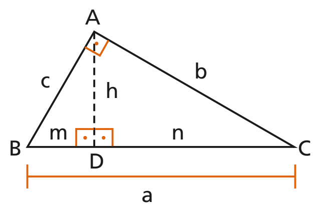
Triângulos retângulos

I. Relações métricas

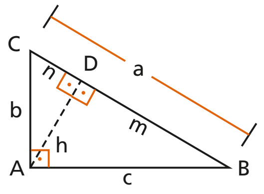
195. Elementos

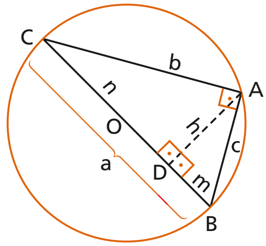
Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$, vamos caracterizar os elementos seguintes:

$\overline{BC} = a$: hipotenusa,
$\overline{AC} = b$: cateto,
$\overline{AB} = c$: cateto,
$\overline{BD} = m$: projeção do cateto *c* sobre a hipotenusa,
$\overline{CD} = n$: projeção do cateto *b* sobre a hipotenusa,
$\overline{AD} = h$: altura relativa à hipotenusa.

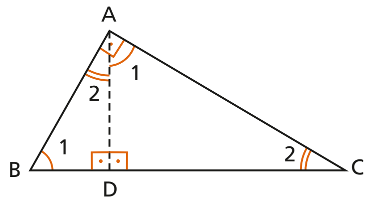


Note que, para simplificar, confundimos um segmento com a sua medida. Assim, dizemos que *a* é a hipotenusa, podendo ser entendido que *a* é a medida da hipotenusa.





196. Semelhanças



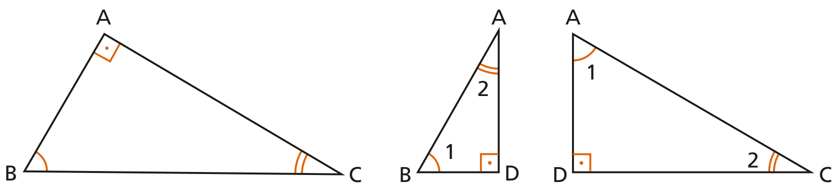
Conduzindo a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois triângulos retângulos DBA e DAC semelhantes ao triângulos ABC.

De fato, devido à congruência dos ângulos indicados na figura acima,

$$\hat{B} \equiv \hat{1} \text{ (complementos de } \hat{C}\text{) e}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{2} \text{ (complementos de } \hat{B}\text{)}$$

temos:

$\triangle ABC \sim \triangle DBA$ $\qquad$ $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ $\qquad$ $\triangle DBA \sim \triangle DAC$



pois eles têm dois ângulos congruentes.

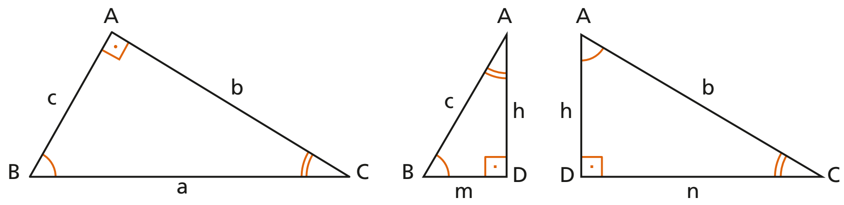
Logo:

$$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC}$$

197. Relações métricas

a) **Dedução**

Com base nas semelhanças dos triângulos citados no item anterior e com os elementos já caracterizados, temos:



$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \Rightarrow bc = ah & (4) \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am & (2) \\ \dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow ch = bm & (6) \end{cases}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an & (1) \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h} \Rightarrow bc = ah & (4) \\ \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{h} \Rightarrow bh = cn & (5) \end{cases}$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{b} = \dfrac{h}{n} \Rightarrow bh = cn & (5) \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow ch = bm & (6) \\ \dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn & (3) \end{cases}$$

Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas, temos:

(1) $b^2 = a \cdot n$	(3) $h^2 = m \cdot n$	(5) $b \cdot h = c \cdot n$
(2) $c^2 = a \cdot m$	(4) $b \cdot c = a \cdot h$	(6) $c \cdot h = b \cdot m$

b) **Enunciados**

Média proporcional dos segmentos *r* e *s* dados é o segmento *x* que, com os segmentos dados, forma as seguintes proporções:

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{s} \text{ ou } \frac{x}{r} = \frac{s}{x}$$

Dessas proporções segue que:

$$x^2 = r \cdot s \text{ ou ainda } x = \sqrt{r \cdot s}$$

A média proporcional de *r* e *s* coincide com a **média geométrica** de *r* e *s*.

Em qualquer triângulo retângulo:

1º) cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

$$b^2 = a \cdot n \qquad\qquad c^2 = a \cdot m$$

2º) a altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.

$$h^2 = m \cdot n$$

3º) o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

$$b \cdot c = a \cdot h$$

4º) o produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

$$b \cdot h = c \cdot n \qquad\qquad c \cdot h = b \cdot m$$

c) **Teorema de Pitágoras**

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Demonstração:

Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

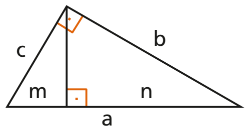
$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \quad b^2 + c^2 = am + an \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a\underbrace{(m + n)}_{a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a^2$$

d) **Observações**

1ª) As três primeiras relações métricas

$b^2 = a \cdot n$ (1)
$c^2 = a \cdot m$ (2)
$h^2 = m \cdot n$ (3)



são as mais importantes.

Delas decorrem todas as outras. Por exemplo, fazendo (1) $\times$ (2) membro a membro e usando a (3), temos:

$$b^2 \cdot c^2 = an \cdot am \quad \Rightarrow \quad b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{mn}_{(3)} \quad \Rightarrow \quad b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b \cdot c = a \cdot h$$

2ª) Num triângulo retângulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa.

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

De fato:

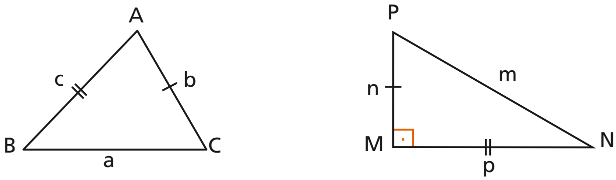
$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{\underbrace{b^2 \cdot c^2}_{(4)}} = \frac{a^2}{a^2 \cdot h^2} = \frac{1}{h^2}$$

3ª) **Recíproco do teorema de Pitágoras**

Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

Hipótese		Tese
$\triangle ABC$ em que $a^2 = b^2 + c^2$	$\Rightarrow$	$\triangle ABC$ é retângulo

Demonstração:



Construindo o triângulo MNP, retângulo em M e cujos catetos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ sejam respectivamente congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, temos:

$\triangle MNP$ retângulo em M $\Rightarrow$ $m^2 = n^2 + p^2$

Como $n = b$ e $p = c$, vem $m^2 = b^2 + c^2$.

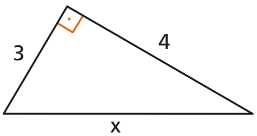
Logo, $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$.

Então, pelo caso LLL, $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ e, como $\triangle MNP$ é retângulo em M, o $\triangle ABC$ é retângulo em A.

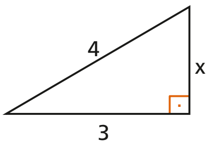
EXERCÍCIOS

506. Determine o valor de *x* nos casos:

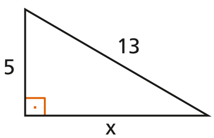
a)



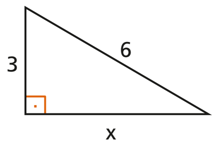
c)



b)

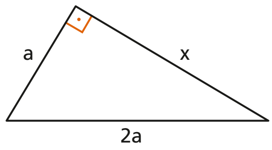


d)

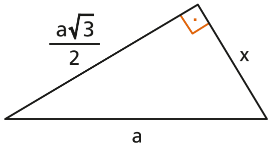


507. Determine *x* em função de *a* nos casos:

a)

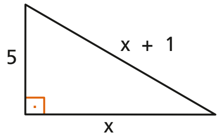


b)

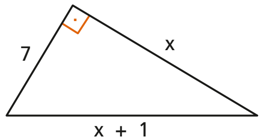


508. Determine *x* nos casos:

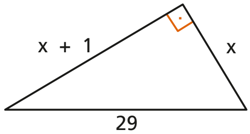
a)



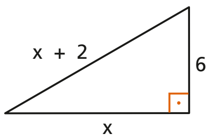
b)



c)

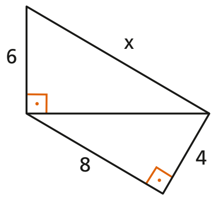


d)

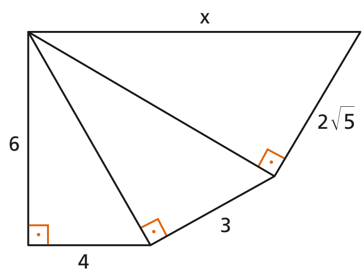


509. Determine *x* nos casos:

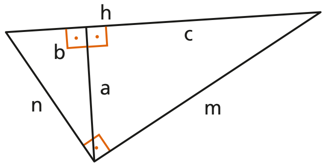
a)



b)

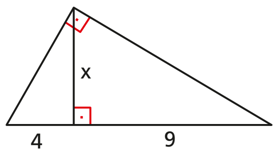


510. Escreva 10 relações métricas com os elementos indicados na figura.

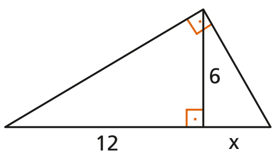


511. Determine *x* nos casos:

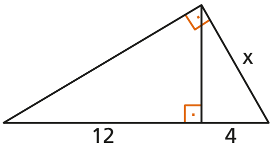
a)



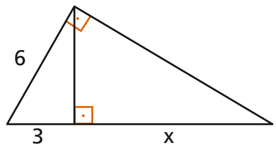
b)



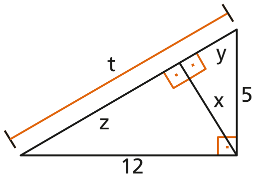
c)



d)

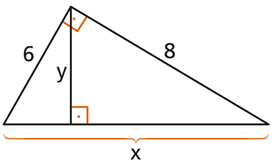


512. Na figura, determine os elementos *x*, *y*, *z* e *t*.

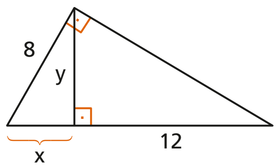


513. Determine *x* e *y* nos casos:

a)

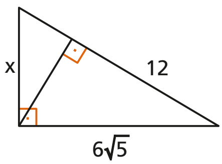


b)

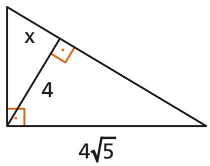


514. Determine o valor de *x*.

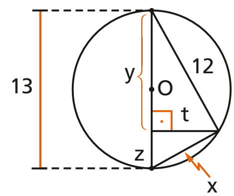
a)



b)

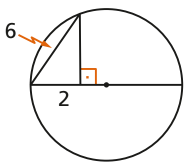


515. Calcule os elementos *y*, *z*, *t* e *x* na figura ao lado.

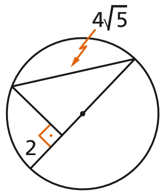


516. Determine o raio do círculo nos casos:

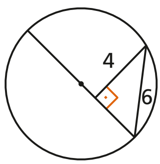
a)



b)

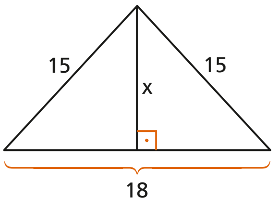


c)

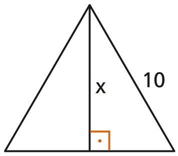


517. Determine *x* nos casos:

a) triângulo isósceles

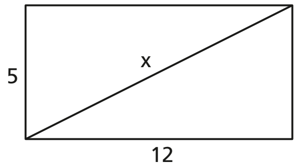


b) triângulo equilátero

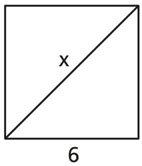


518. Determine o valor de *x* nos casos:

a) retângulo

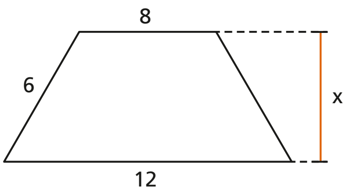


b) quadrado

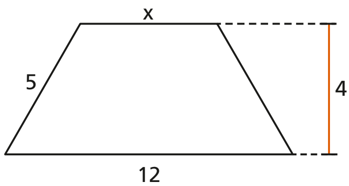


519. Determine o valor de *x* nos trapézios isósceles.

a)

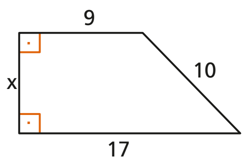


b)

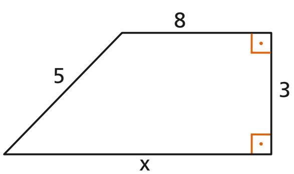


520. Determine o valor de *x* nos trapézios retângulos.

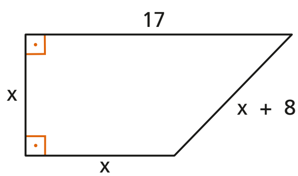
a)



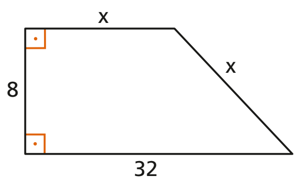
b)



c)

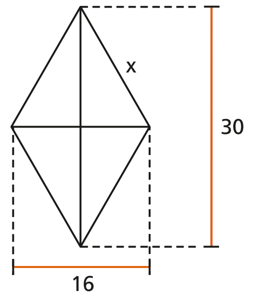


d)

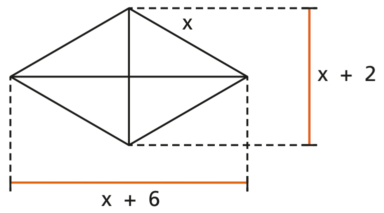


521. Determine o valor de x nos losangos.

a)

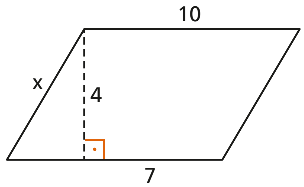


b)

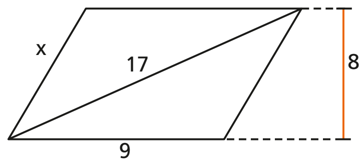


522. Determine o valor de x nos paralelogramos.

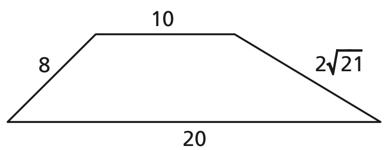
a)



b)

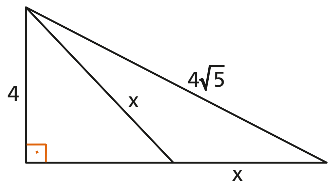


523. Determine a altura do trapézio da figura.

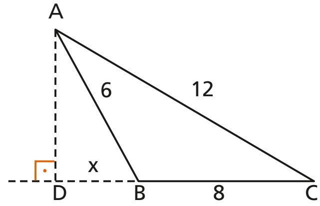


524. Determine o valor de x nos casos.

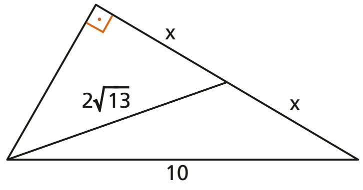
a)



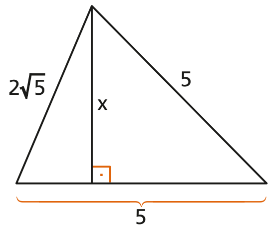
c)



b)

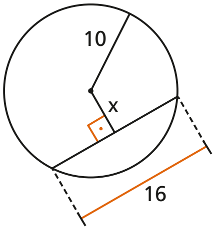


d)

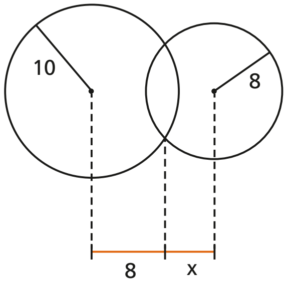


525. Determine o valor de x nos casos:

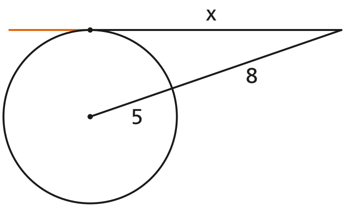
a)



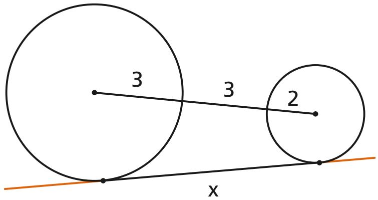
c)



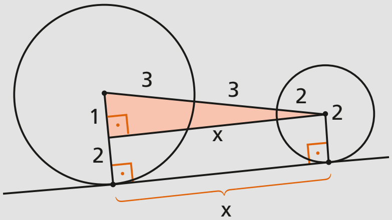
b)



d)



Solução do item *d*



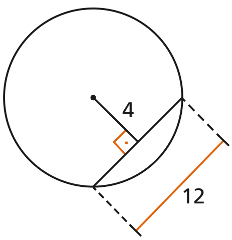
Traçando os raios que vão até os pontos de contato, obtemos um trapézio retângulo cuja altura é x.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo sombreado, obtemos:

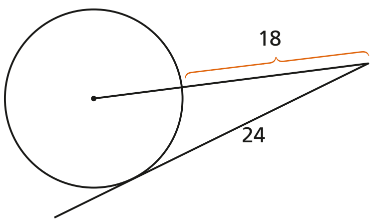
$$x^2 + 1^2 = 8^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 63 \quad \Rightarrow \quad x = 3\sqrt{7}$$

526. Determine o raio do círculo nos casos:

a)

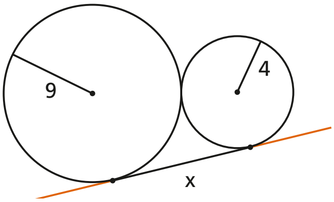


b)

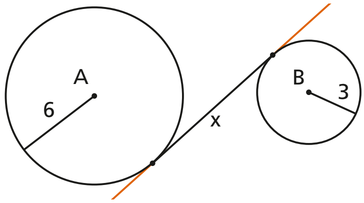


527. Determine o valor de x nos casos:

a)

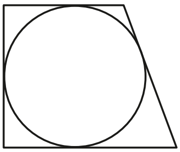


b) AB = 15

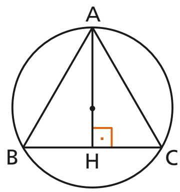


528. Determine o raio do círculo nas figuras:

a) Trapézio retângulo de bases 10 m e 15 m

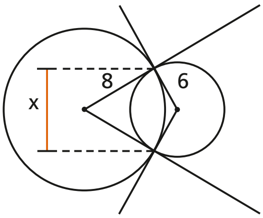


b) AH = 25 m, BC = 30 m e AB = AC

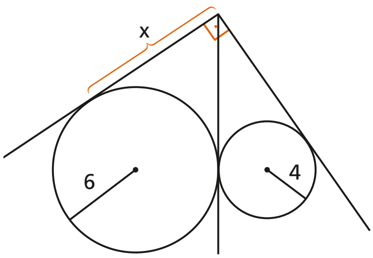


529. Determine o valor de x nos casos:

a)

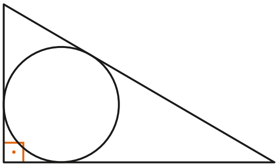


b)

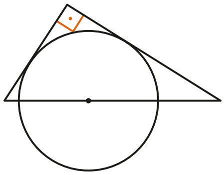


530. Determine o raio do círculo, nos casos, se o triângulo retângulo possui:

a) catetos de 6 m e 8 m

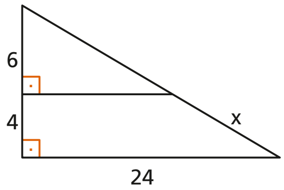


b) um cateto de 8 m e hipotenusa de $4\sqrt{13}$ m

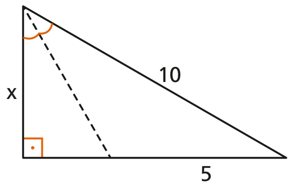


531. Determine o valor de *x* nas figuras:

a)



b)



532. Determine a diagonal de um quadrado de perímetro 20 m.

533. Determine a diagonal de um retângulo de perímetro 20 m e base 6 m.

534. O perímetro de um losango é 52 m e uma diagonal mede 10 m. Calcule a outra diagonal.

535. Determine a altura de um triângulo equilátero de perímetro 24 m.

536. Determine o perímetro de um triângulo equilátero de altura 6 m.

537. O perímetro de um triângulo isósceles é de 18 m e a altura relativa à base mede 3 m. Determine a base.

538. Determine a menor altura de um triângulo cujos lados medem 4 m, 5 m e 6 m.

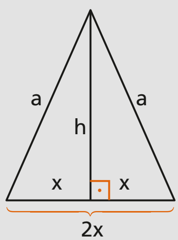
539. Determine a altura não relativa à base de um triângulo isósceles de lados 10 m, 10 m e 12 m.

540. A altura de um retângulo mede 8 m, a diagonal excede a base em 2 m. Calcule a diagonal.

541. O perímetro de um retângulo é de 30 m e a diagonal mede $5\sqrt{5}$ m. Determine os lados desse retângulo.

542. A altura relativa à base de um triângulo isósceles excede a base em 2 m. Determine a base, se o perímetro é de 36 m.

Solução



Sendo 2x a medida da base (para simplificar os cálculos) e considerando as medidas indicadas na figura, temos:

$$\begin{cases} h = 2x + 2 \\ 2x = 2a = 36 \\ x^2 + h^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 2x + 2 \\ a = 18 - x \\ x^2 + h^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow$$

►

$\Rightarrow\ x^2 + (2x + 2)^2 = (18 - x)^2 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ x^2 + 4x^2 + 8x + 4 = 324 - 36x + x^2 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 4x^2 + 44x - 320 = 0 \ \Rightarrow\ x^2 + 11x - 80 = 0 \ \Rightarrow x = 5$
$\Rightarrow$ A base mede 10 m.

543. Cada um dos lados congruentes de um triângulo isósceles excede a base em 3 m. Determine a base, se a altura relativa a ela é de 12 m.

544. A diferença entre as medidas das diagonais de um losango de 68 m de perímetro é 14 m. Determine as diagonais desse losango.

545. As bases de um trapézio retângulo medem 3 m e 9 m e o seu perímetro é de 30 m. Calcule a altura.

546. Calcule a altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, no triângulo retângulo de catetos 12 cm e 16 cm.

547. Calcule a hipotenusa, a altura relativa à hipotenusa, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 3 e 4.

548. Dado um triângulo equilátero de lado *a*, calcule sua altura.

549. Uma escada de 2,5 m de altura está apoiada em uma parede e seu pé dista 1,5 m da parede. Determine a altura que a escada atinge na parede, nessas condições.

550. A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12 m. Se a hipotenusa mede 25 m, calcule os catetos.

551. Num triângulo ABC, retângulo em A, a altura relativa à hipotenusa mede 1,2 cm e a hipotenusa mede 2,5 cm. Sendo *m* e *n*, respectivamente, as projeções do maior e do menor cateto sobre a hipotenusa, calcule $\frac{m}{n}$.

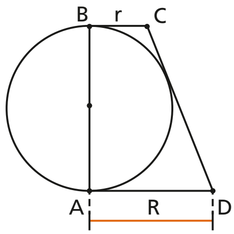
552. Dois ciclistas partem de uma mesma cidade em direção reta; um em direção leste e o outro em direção norte. Determine a distância que os separa depois de duas horas, sabendo que a velocidade dos ciclistas é de 30 km/h e 45 km/h, respectivamente.

553. As bases de um trapézio isósceles medem 12 m e 20 m, respectivamente. A soma dos lados não paralelos é igual a 10 m. Quanto mede a altura?

554. As bases de um trapézio isósceles medem 7 cm e 19 cm e os lados não paralelos 10 cm. Calcule a altura desse trapézio.

555. Em um trapézio retângulo, a soma das bases é de 16 cm, sendo uma delas os $\frac{3}{5}$ da outra. Determine a altura, sabendo que o lado oblíquo mede 5 cm.

556. Na figura ao lado, calcule a altura do trapézio retângulo ABCD.



557. Sabendo que a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a 200, determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

558. Calcule o perímetro do triângulo isósceles de 16 cm de base e 6 cm de altura.

559. Determine a altura de um trapézio de bases 24 cm e 10 cm, sabendo que os lados não paralelos medem respectivamente 15 cm e 13 cm.

560. A base maior e um dos lados oblíquos às bases de um trapézio isósceles circunscritível a um círculo são respectivamente iguais a 18 cm e 13 cm. Determine a medida da altura do trapézio.

561. Uma corda comum a dois círculos secantes mede 16 cm. Sendo 10 cm e 17 cm as medidas dos raios dos círculos, determine a distância entre seus centros.

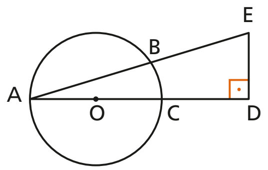
562. Seja um ponto P, externo a circunferência. A menor distância desse ponto à circunferência vale 6 cm e a maior distância desse ponto à circunferência vale 24 cm. Determine o comprimento do segmento tangente à circunferência, por esse ponto.

563. Dois círculos de raios 12 cm e 20 cm são tangentes externamente. Determine o comprimento do segmento $\overline{PQ}$, tangente comum aos dois círculos, sendo P e Q pontos de tangência.

564. Um trapézio isósceles circunscritível tem bases medindo 8 cm e 16 cm. Calcule a altura do trapézio.

565. Prove que o diâmetro de um círculo inscrito em um trapézio isósceles é média geométrica entre as bases do trapézio.

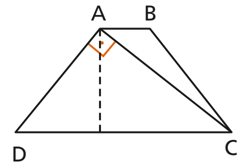
566. Calcule a medida do raio do círculo, na figura ao lado, sabendo que AD = 12 cm, AE = 15 cm e AB = 8 cm.



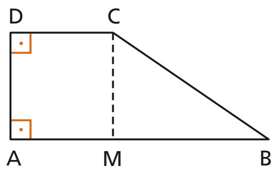
567. Num triângulo isósceles de altura 8, inscreve-se uma circunferência de raio 3. Calcule a medida da base do triângulo.

568. Sobre a hipotenusa $\overline{AB}$ de um triângulo retângulo ABC é construído um segundo triângulo retângulo ABD, com hipotenusa $\overline{AB}$. Se BC = 1, AC = b e AD = 2, calcule $\overline{BD}$.

569. No trapézio ABCD ao lado, a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado oblíquo $\overline{AD}$. Sendo CD = 25 cm e AD = 15 cm, determine a medida da altura do trapézio.



570. Determine a medida da diagonal $\overline{AC}$ do trapézio retângulo da figura ao lado, sabendo que as bases medem respectivamente 4 cm e 9 cm e que o lado $\overline{BC}$ mede $\sqrt{34}$ cm.



571. O segmento $\overline{AB}$ tem suas extremidade A e B como pontos de tangência às circunferências de centros 0_1 e 0_2. Sendo 15 cm e 3 cm os raios dessas circunferências, respectivamente, e 24 cm a distância entre seus centros, determine o segmento $\overline{AB}$.

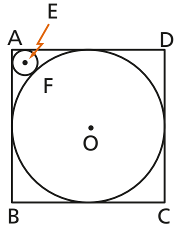
572. Determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo sendo 24 m o seu perímetro e $\frac{24}{5}$ m a medida da altura relativa à hipotenusa.

573. Considere-se uma semicircunferência de diâmetro AOB = 2r. Construímos internamente duas novas semicircunferências com diâmetros $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e uma circunferência tangente a essas três semicircunferências. Calcule a medida do raio dessa circunferência.

574. Do mesmo lado de uma reta são traçados três círculos tangentes à reta e tangentes entre si dois a dois. Sabendo que dois deles têm raio igual a 16, calcule o raio do terceiro.

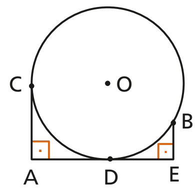
575. Um octógono regular é formado cortando-se triângulos retângulos isósceles nos vértices de um quadrado. Se o lado do quadrado mede 1, quanto medem os catetos dos triângulos retirados?

576. Consideremos dois círculos tangentes como na figura ao lado. Sendo E o centro do círculo menor, F o ponto de tangência entre os dois círculos e *a* o lado do quadrado, determine o raio do círculo menor em função de *a*.



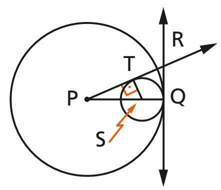
577. Considere um quadrado Q de lado *a* e cinco círculos de mesmo raio *r* interiores a Q, dos quais um é concêntrico com Q e tangente exteriormente aos quatro outros, e cada um destes tangencia dois lados consecutivos de Q. Determine a medida de *r* em função da medida *a* do lado quadrado.

578. Na figura, determine o raio da circunferência, sabendo que $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ tangenciam a circunferência nos pontos C e D, respectivamente, e que BE = 12 cm e AE = 54 cm.



579. Dois teleféricos, T_1 e T_2, partem de uma estação E situada num plano horizontal, em direção aos picos P_1 e P_2 de duas montanhas. Determine a distância entre P_1 e P_2, sabendo que os teleféricos percorreram 1 500 m e 2 900 m, respectivamente, e que a primeira montanha tem 900 m de altura e a segunda 2 000 m e que os pés das montanhas e E estão em linha reta.

580. Sejam dois círculos tangentes entre si, internamente, como na figura ao lado. Sendo PQ = 8 cm e ST = 3 cm, calcule a medida de $\overline{RQ}$.



581. Num círculo de centro O e raio R, considera-se uma corda $AB = \frac{R}{2}$. Calcule a medida do raio do círculo inscrito no setor circular OAB.

582. Sobre os lados de um quadrado, desenhamos externamente quatro triângulos isósceles com alturas relativas às bases iguais a 3 cm. Determine o perímetro do quadrado, sabendo que os vértices dos quatro triângulos pertencem a uma mesma circunferência de raio igual a $3\left(\sqrt{2} + 2\right)$ cm.

583. Dois quadrados ABCD e CDEF têm em comum o lado $\overline{CD}$. Traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{EC}$.

Sendo $AM = \frac{1}{3}\overline{AC}$ e $\overline{EP} = \frac{1}{2}\overline{CE}$, com M em $\overline{AC}$ e P em $\overline{CE}$, determine o segmento $\overline{PM}$, em função do lado a dos quadrados.

584. Determine a distância entre os pés da altura e da mediana relativas à hipotenusa de um triângulo retângulo de $\left(18 + 6\sqrt{3}\right)$m de perímetro, sabendo que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa são diretamente proporcionais aos números 1 e 3.

585. Determine o perímetro de um triângulo, sabendo que a mediana e a altura, relativas à hipotenusa, medem respectivamente 4 cm e $2\sqrt{3}$ cm.

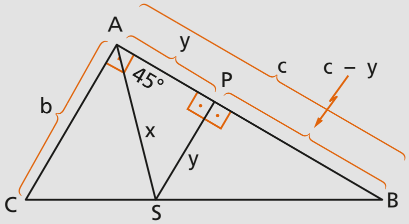
586. Dado o triângulo retângulo ABC de catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente iguais a 80 cm e 60 cm, considere a altura $\overline{AH}$ e a mediana $\overline{AM}$ relativas à hipotenusa do triângulo. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{AH}$, $\overline{AM}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{MH}$, bem como a hipotenusa do triângulo.

587. Determine a altura relativa à base de um triângulo isósceles em função da base *a* e do raio do círculo inscrito *r*.

588. Determine a bissetriz interna, relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos *b* e *c*.

Solução

Seja *x* a medida da bissetriz $\overline{AS}$ relativa à hipotenusa. Por S tracemos um segmento paralelo a um dos catetos, *b*, por exemplo.
Note que os triângulos BAC e BPS são semelhantes. Então:



$$\begin{cases} y^2 + y^2 = x^2 \\ \dfrac{b}{y} = \dfrac{x}{c - y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ cy = bc - by \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = bc - b \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow xb + xc = \sqrt{2}bc \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}bc}{b + c}$$

589. Num triângulo isósceles ABC, M é um ponto qualquer da base $\overline{BC}$. Demonstre que:

$$(AB)^2 - (AM)^2 = (MB) \cdot (MC)$$

590. Determine o perímetro de um triângulo isósceles em função da projeção *a* da altura relativa à base do triângulo sobre um dos lados congruentes, e em função dessa altura *h*.

591. Em um quadrado ABCD tomamos um ponto E, sobre o lado $\overline{AD}$, tal que $AE = \frac{1}{4}\,\overline{AD}$, e o ponto O, médio de $\overline{AB}$. Sendo $\overline{OP}$ perpendicular a $\overline{CE}$, em que P é o pé da perpendicular tomado sobre $\overline{CE}$, prove que:

$$(OP)^2 = (EP) \cdot (CP)$$

592. Consideremos um triângulo ABC e as bissetrizes $\overline{AD}$ interna e $\overline{AE}$ externa ao triângulo. Prove que:

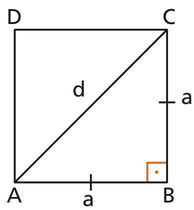
$$\frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{BD} = 2$$

593. Seja um semicírculo de diâmetro AB = 2r, e as tangentes $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ ao semicírculo. A tangente em um ponto C, qualquer, da semicircunferência encontra $\overline{AX}$ em D e $\overline{BY}$ em E. Demonstre que:

$$(CD) \cdot (CE) = r^2$$

II. Aplicações do teorema de Pitágoras

198. Diagonal do quadrado

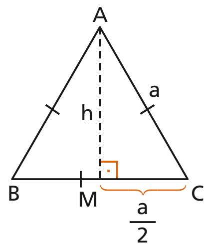


Dado um quadrado de lado *a*, calcular sua diagonal *d*.

Sendo ABCD o quadrado de lado *a*, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle$ABC, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{2}}$$

199. Altura do triângulo equilátero



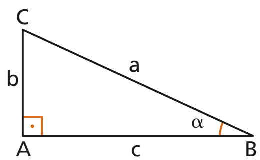
Dado um triângulo equilátero de lado *a*, calcular sua altura *h*.

Sendo ABC um triângulo equilátero de lado a, M o ponto médio de $\overline{BC}$, calculamos AM = h aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle$AMC.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

200. Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°

Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, pondo-se:



$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}, \ \text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{cosseno de } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}, \ \cos \alpha = \frac{c}{a}$$

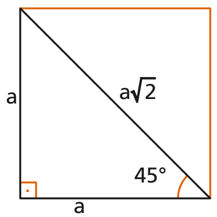
$$\text{tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}, \ \text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$$

e usando os resultados anteriores, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

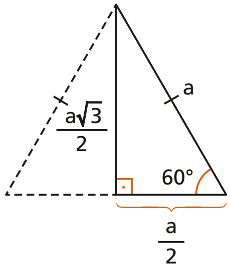
$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$



$$\text{sen } 60° = \frac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60\ ° = \frac{\dfrac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

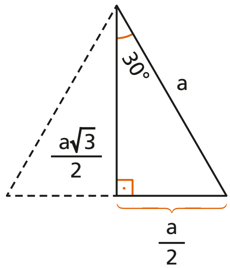
$$\text{tg } 60° = \frac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{3}$$



$$\text{sen } 30° = \frac{\dfrac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

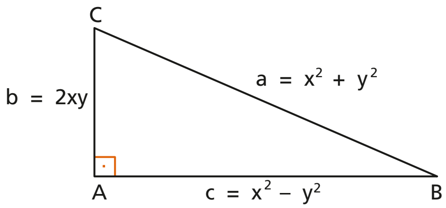
$$\text{tg } 30° = \frac{\dfrac{a}{2}}{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



201. Triângulos pitagóricos

Veremos como obter triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros, triângulos estes chamados pitagóricos.

Calculemos a hipotenusa *a* de um triângulo retângulo com um cateto $b = 2xy$ e outro $c = x^2 - y^2$.



$$a^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \Rightarrow a^2 = (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow a = x^2 + y^2$$

Então, temos:

Tomando *x* e *y* inteiros, primos entre si, um deles sendo par e *x* maior que *y*, vem a tabela:

		Cateto	**Cateto**	**Hipotenusa**
x	**y**	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Notemos que os triângulos retângulos cujos lados são dados pelos ternos:

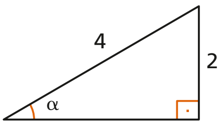
a) (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20)... são semelhantes entre si;

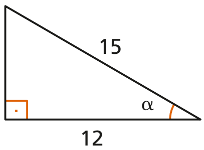
b) (5, 12, 13), (10, 24, 26), (15, 36, 39), (20, 48, 52)... são semelhantes entre si;

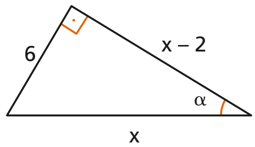
c) (8, 15, 17), (16, 30, 34), (24, 45, 51), (32, 60, 68)... são semelhantes entre si, etc.

EXERCÍCIOS

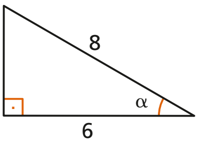
594. Determine sen α nos casos:

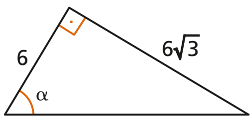
a) 

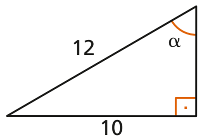
b) 

c) 

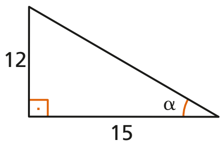
595. Determine cos α nos casos:

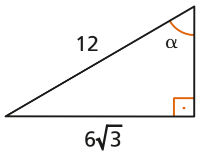
a) 

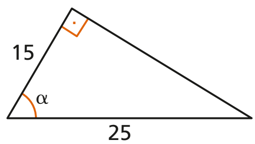
b) 

c) 

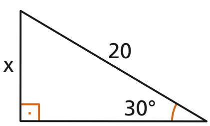
596. Obtenha tg α nos casos:

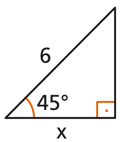
a) 

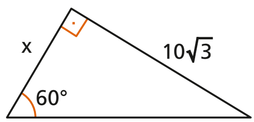
b) 

c) 

597. Determine o valor de x nos casos:

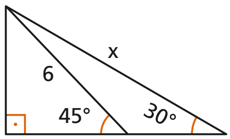
a) 

b) 

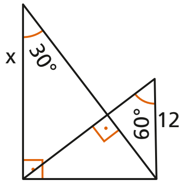
c) 

598. Determine o valor de *x* nos casos:

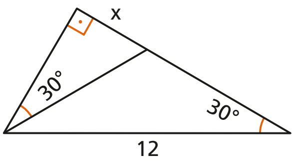
a)



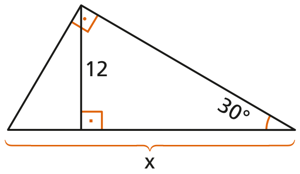
c)



b)

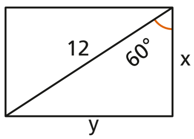


d)

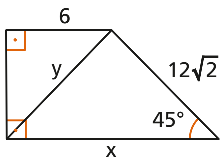


599. Determine os valores de *x* e *y* nos casos:

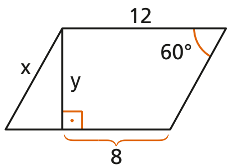
a) retângulo



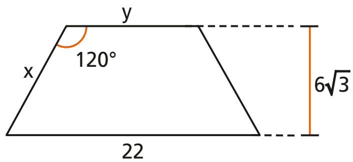
d) trapézio retângulo



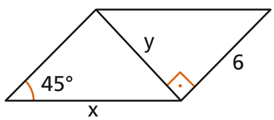
b) paralelogramo



e) trapézio isósceles

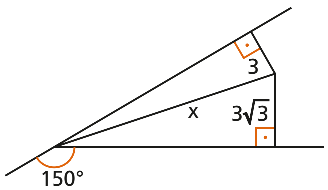


c) paralelogramo

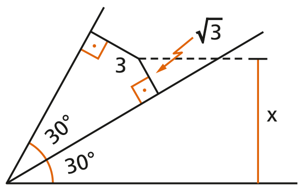


600. Determine o valor de *x* nos casos:

a)



b)



601. Um ponto de um lado de um ângulo de 60° dista 16 m do vértice do ângulo. Quanto ele dista do outro lado do ângulo?

602. Um ponto de um lado de um ângulo de 30° dista 6 m do outro lado. Determine a distância da projeção ortogonal desse ponto sobre este outro lado até o vértice do ângulo.

603. Um ponto P interno de um ângulo reto dista 4 m e 8 m dos lados do ângulo. Qual a distância entre P e o vértice desse ângulo?

604. Um ponto interno de um ângulo reto dista 4 m e 10 m dos lados do ângulo. Qual a distância desse ponto à bissetriz desse ângulo?

605. Um ponto P, interno de um ângulo reto, dista, respectivamente, $\sqrt{2}$ m e 2 m de um lado e da bissetriz do ângulo. Determine a distância entre P e o vértice desse ângulo.

606. Um ponto P, interno de um ângulo de 60°, dista 6 m e 9 m dos lados desse ângulo. Qual a distância entre P e a bissetriz do ângulo?

607. Um ponto P, interno de um ângulo de 60°, dista 3 m e 6 m dos lados do ângulo. Determine a distância entre P e o vértice desse ângulo.

608. Um ponto P, interno de um ângulo de 30°, dista 3 m de um lado e $3\sqrt{13}$ m do vértice do ângulo. Quanto esse ponto dista do outro lado do ângulo?

609. Um ponto P, externo de um ângulo de 60°, dista $9\sqrt{3}$ m e $3\sqrt{3}$ m dos lados do ângulo, sendo que nenhuma destas distâncias é até o vértice do ângulo. Qual é a distância entre P e a bissetriz do ângulo?

610. Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é o dobro do produto dos catetos. Calcule um dos ângulos agudos do triângulo.

611. Pelo vértice de um quadrado ABCD de lado *a*, toma-se no interior do quadrado um segmento $\overline{BS}$ que forma um ângulo igual a 30° com $\overline{BA}$, com S em $\overline{AD}$. Determine AS e BS.

612. Um observador vê um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Se ele se afastar do edifício mais 30 m, passará a vê-lo sob ângulo de 45°. Calcule a altura do edifício.

613. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC medem respectivamente *a* e 2*a*, sendo 45° o ângulo formado por eles. Calcule a medida da altura $\overline{BD}$ e o lado $\overline{BC}$ do triângulo, em função de *a*.

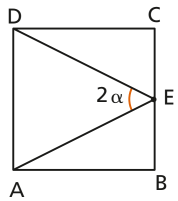
614. As bases de um trapézio retângulo são *b* e 2b e um dos ângulos mede 60°. Calcule a altura.

615. Um dos ângulos agudos de um trapézio isósceles mede 60°. Sendo os lados não paralelos congruentes à base menor do trapézio e *m* a medida da base maior, determine o perímetro do trapézio em função de *m*.

616. Determine o ângulo que a diagonal de um trapézio isósceles forma com a altura do trapézio, sabendo que a altura do trapézio é igual a sua base média multiplicada por $\sqrt{3}$.

617. A base maior de um trapézio isósceles mede 100 cm e a base menor 60 cm. Sendo 60° a medida de cada um de seus ângulos agudos, determine a altura e o perímetro do trapézio.

618. Determine tg α, sabendo que E é ponto médio do lado $\overline{BC}$ do quadrado ABCD.



619. Determine o raio de um círculo inscrito num setor circular de 60° e 6 dm de raio.

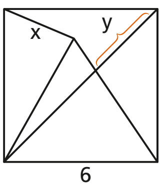
620. Seja AB = 3r, tangente em A a uma circunferência de centro O e raio *r*. Traça-se por B a tangente $\overline{BC}$, que tem C por ponto de contato. Calcule a distância de C à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

621. Consideremos um triângulo retângulo ABC, onde a medida de um ângulo agudo é α. Determine a medida do raio da circunferência inscrita em função de α e da hipotenusa *a*.

622. Um paralelogramo tem lados respectivamente iguais a 10 cm e 8 cm. Sabendo que um de seus ângulos internos vale 120°, calcule o perímetro do quadrilátero convexo formado pelas bissetrizes de seus ângulos internos.

623. Nas figuras temos um quadrado e um triângulo equilátero. Determine as incógnitas.

a)



b)