OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria plana

9

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO XIX

Áreas de superfícies planas

I. Áreas de superfícies planas

241. Definição

Área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à superfície de forma tal que:

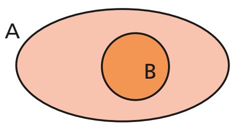
1º) Às superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais (números iguais) e reciprocamente.

$$A \approx B \iff (\text{Área de } A = \text{Área de } B)$$

2º) A uma soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.

$$(C = A + B) \implies (\text{Área de } C = \text{Área de } A + \text{Área de } B)$$

3º) Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor (ou igual) que a área da outra.



$$B \subset A \implies \text{Área de } B \leqslant \text{Área de } A$$

242. Razão entre retângulos

a) **Teorema**

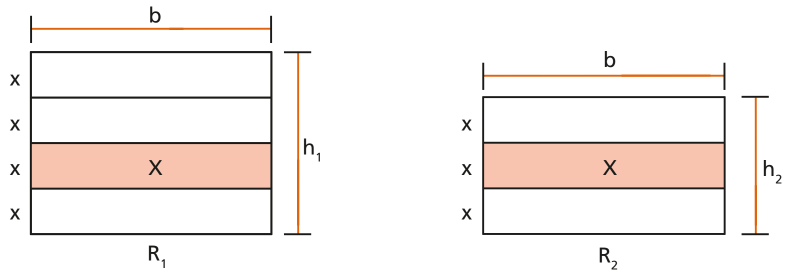
"A razão entre dois retângulos de bases congruentes (ou alturas congruentes) é igual à razão entre suas alturas (ou bases)."

Hipótese $\qquad\qquad$ Tese

$$\begin{cases} R_1\,(b,\, h_1) \\ R_2\,(b,\, h_2) \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2} \right.$$

Demonstração:

1º caso: h_1 e h_2 são comensuráveis



Então, existe um submúltiplo de h_1 e de h_2.

$$\left.\begin{matrix} h_1 = p \cdot x \\ h_2 = q \cdot x \end{matrix}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \left\{ \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \right. \qquad (1)$$

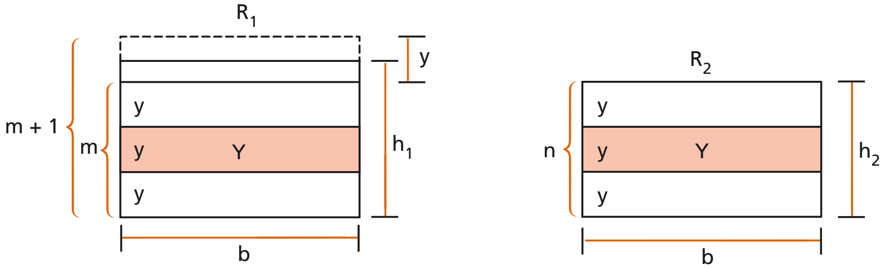
Construindo os retângulos X(b, x), temos:

$$\left.\begin{matrix} R_1 = p \cdot X \\ R_2 = q \cdot X \end{matrix}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \left\{ \frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q} \right. \qquad (2)$$

De (1) e (2) vem:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}}$$

2º caso: h_1 e h_2 são incomensuráveis



Então, não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2.

Tomemos um segmento *y* submúltiplo de h_2 (*y* "cabe" um certo número inteiro *n* de vezes em h_2, isto é, $h_2 = ny$).

Por serem h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente *y* em h_1, temos que, para um certo número inteiro *m* de vezes:

$$my < h_1 < (m + 1)y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left.\begin{matrix} m \cdot y < h_1 < (m+1) \cdot y \\ n \cdot y = h_2 = n \cdot y \end{matrix}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n} \quad (3)$$

Construindo os retângulos Y(b, y), temos:

$$\left.\begin{matrix} m \cdot Y < R_1 < (m+1) \cdot Y \\ n \cdot Y = R_2 = n \cdot Y \end{matrix}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{m+1}{n} \quad (4)$$

Ora, sendo *y* submúltiplo de h_2, pode variar; dividindo *y* aumentamos *n* e, nestas condições,

$$\frac{m}{n} \text{ e } \frac{m+1}{n}$$

formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{h_1}{h_2}$ pela expressão (3) e é $\frac{R_1}{R_2}$ pela expressão (4).

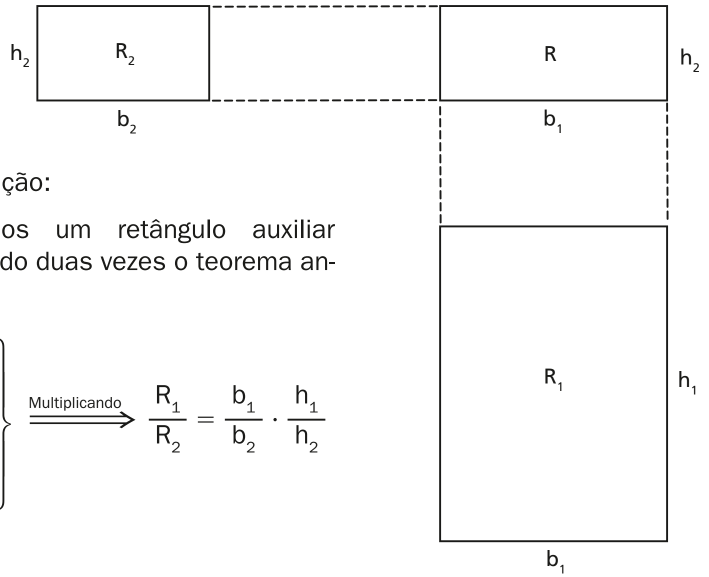
Como esse número é único, então:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}}$$

b) **Teorema**

> "A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas."

$$\begin{array}{cc} \text{Hipótese} & \text{Tese} \\ \left.\begin{array}{l} R_1\ (b_1, h_1) \\ R_2\ (b_2, h_2) \end{array}\right\} \Rightarrow & \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{h_1}{h_2} \end{array}$$



Demonstração:

Construamos um retângulo auxiliar $R(b_1, h_2)$. Aplicando duas vezes o teorema anterior, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{R_1}{R} = \dfrac{h_1}{h_2} \\[2ex] \dfrac{R}{R_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Multiplicando}} \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{h_1}{h_2}$$

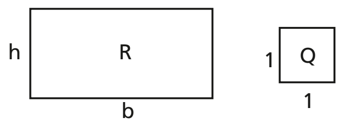
II. Áreas de polígonos

243. Retângulo

Dado o retângulo $R(b, h)$ e fixado o quadrado $Q(1, 1)$ como unitário, temos:

Área do retângulo $R(b, h) =$

$$= A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)}$$



Em vista do item 242, vem

$$A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} \Rightarrow A_R = (\text{medida de } b) \cdot (\text{medida de } h)$$

que será representada simplesmente por:

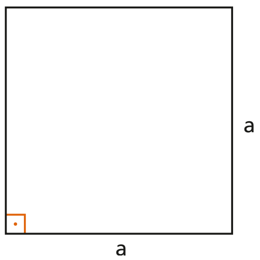
$$\boxed{A_R = b \cdot h}$$

244. Quadrado

Dado um quadrado de lado *a*, Q(a, a), temos:

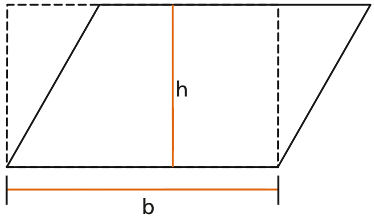
$$A_Q = a \cdot a \Rightarrow \boxed{A_Q = a^2}$$

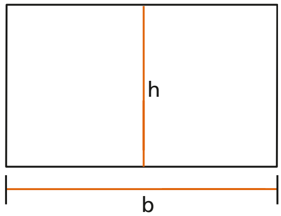
pois o quadrado é um retângulo particular.



245. Paralelogramo

Dado o paralelogramo P(b, h), conforme vimos no item 235, ele é equivalente a um retângulo cuja base mede *b* e altura mede *h*. Logo:

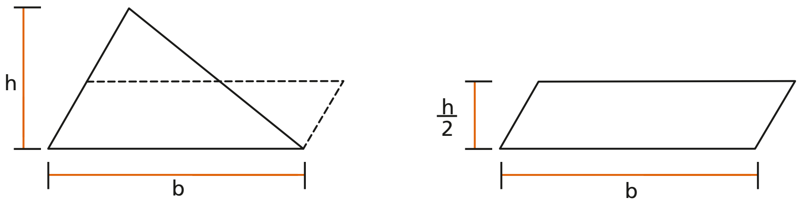




$$A_P = A_R \Rightarrow \boxed{A_P = b \cdot h}$$

246. Triângulo

Dado o triângulo T(b, h), conforme vimos no item 235, ele é equivalente a um paralelogramo cuja base mede *b* e altura mede $\frac{h}{2}$. Logo:



$$A_T = A_P \Rightarrow A_T = b \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow \boxed{A_T = \frac{b \cdot h}{2}}$$

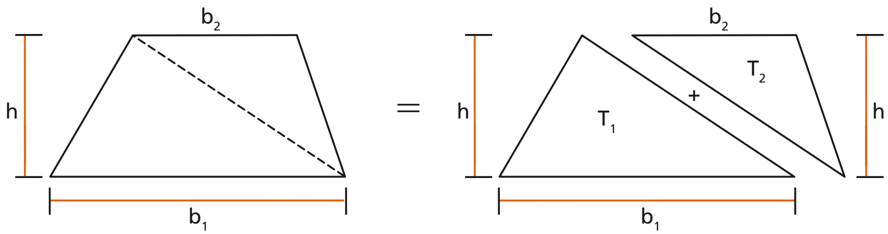
Nota

Área do triângulo equilátero de lado *a*. Um triângulo equilátero de lado *a* tem altura $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e sua área S é então:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

247. Trapézio

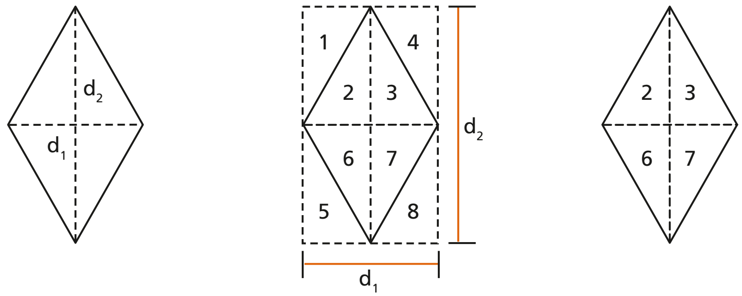
Dado o trapézio $T_{ra}(b_1, b_2, h)$, ele é a soma de dois triângulos $T_1(b_1, h)$ e $T_2(b_2, h)$.



$$A_{Tra} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{A_{Tra} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}}$$

248. Losango

Dado o losango $L(d_1, d_2)$, conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas às diagonais.

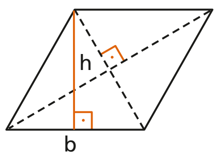


$$A_L = A_{(4\text{ triângulos})} = \frac{A_{(8\text{ triângulos})}}{2} \Rightarrow \boxed{A_L = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$$

Nota

O losango é paralelogramo e portanto sua área também é dada por:

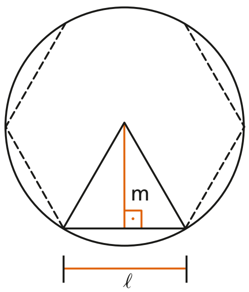
$$\boxed{A_L = b \cdot h}$$



249. Polígono regular

Sendo:

n = número de lados
m = medida do apótema
ℓ = medida do lado
p = semiperímetro



Seja um polígono regular de n lados de medidas iguais a ℓ e de apótema de medida m.

Podemos decompor esse polígono em *n* triângulos de base ℓ e altura *m*. Então:

$$\left.\begin{aligned} A_{pol} &= n \cdot A_T \\ A_T &= \frac{\ell \cdot m}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{pol} = \frac{\overbrace{n \cdot \ell}^{2p} \cdot m}{2}$$

Sendo $n \cdot \ell = 2p$ (perímetro), vem:

$$A_{pol} = \frac{2 \cdot p \cdot m}{2} \Rightarrow \boxed{A_{pol} = p \cdot m}$$

Nota

Área de um hexágono regular de lado *a*.

Um hexágono regular de lado *a* é a reunião de 6 triângulos equiláteros de lado *a*.

Sendo $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ a área do triângulo, temos:

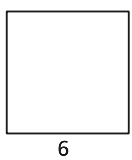
$$A_{hexágono} = 6 \cdot S \Rightarrow A_{hexágono} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{hexágono} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}$$

EXERCÍCIOS

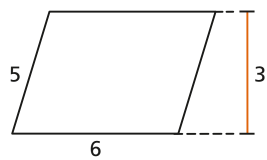
793. Determine a área dos polígonos nos casos abaixo, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

a) quadrado

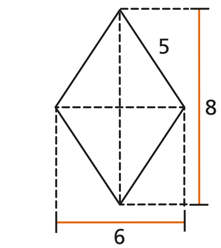


b) retângulo

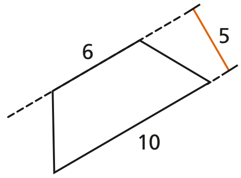
c) paralelogramo



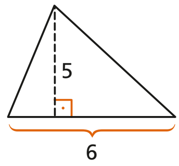
d) losango



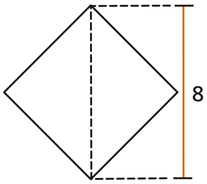
g) trapézio



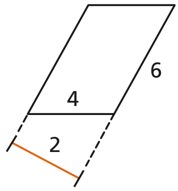
j) triângulo



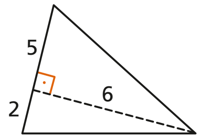
e) quadrado



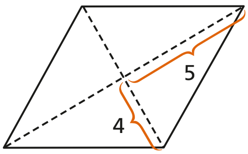
h) paralelogramo



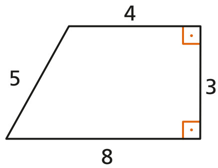
k) triângulo



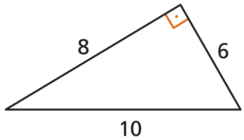
f) losango



i) trapézio

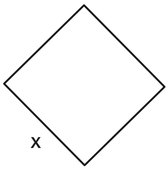


l) triângulo

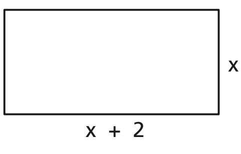


794. A área do polígono é dada entre parênteses, em cada caso. Determine *x*.

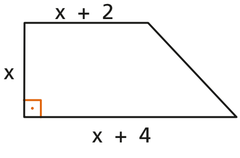
a) quadrado (36 m^2)



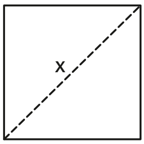
c) retângulo (24 m^2)



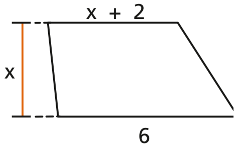
e) trapézio (18 m^2)



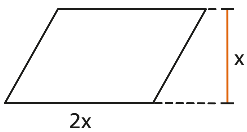
b) quadrado (50 m^2)



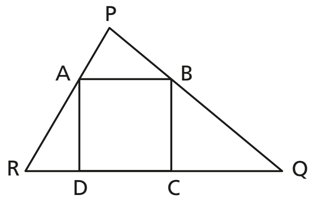
d) trapézio (10 m^2)



f) paralelogramo (32 m^2)

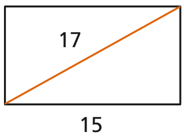


795. Na figura temos um quadrado ABCD inscrito no triângulo PQR. Se QC é igual ao lado do quadrado, RD = 3 m, a altura, relativa a $\overline{AB}$, do triângulo PAB é igual a 4 m e a área do triângulo PQR é de 75 m^2. Determine o lado do quadrado.

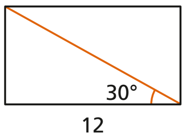


796. Determine a área do retângulo nos casos a seguir, sendo a unidade das medidas o metro.

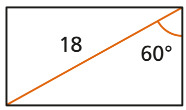
a)



b)

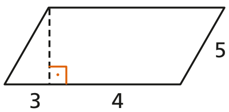


c)

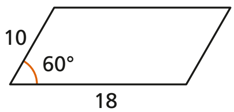


797. Determine a área do paralelogramo nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas.

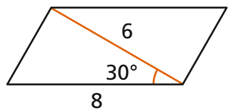
a)



b)

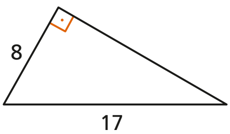


c)

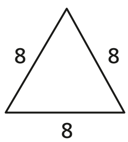


798. Determine a área do triângulo nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas.

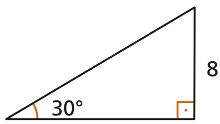
a)



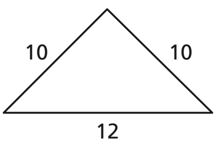
c)



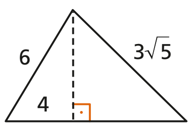
e)



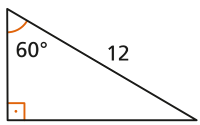
b)



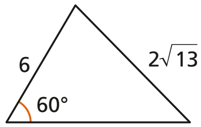
d)



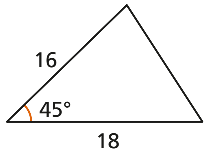
f)



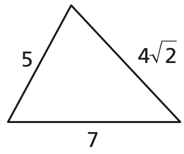
g)



h)

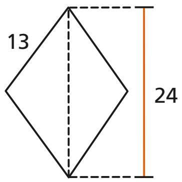


i)

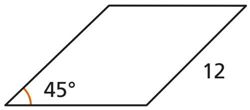


799. Determine a área do losango nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

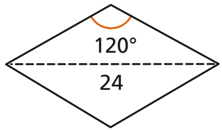
a)



b)

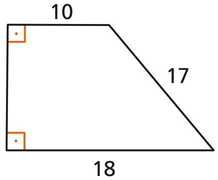


c)

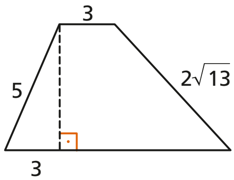


800. Determine a área do trapézio nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

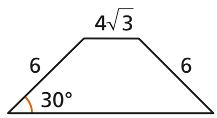
a)



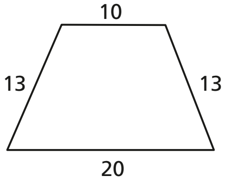
c)



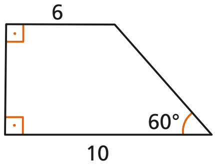
e)



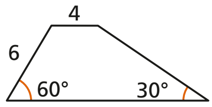
b)



d)



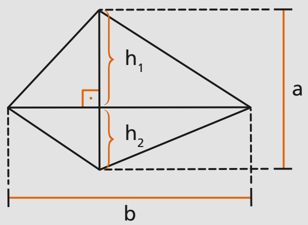
f)



801. Determine a área de um trapézio isósceles com bases de 4 m e 16 m e perímetro de 40 m.

802. Mostre que a área de um quadrilátero de diagonais perpendiculares, que medem *a* e *b*, é dada por $\frac{ab}{2}$.

Solução



Como a área do quadrilátero é igual à soma das áreas dos triângulos e $h_1 + h_2 = a$, temos:

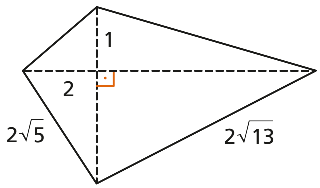
$$A_Q = \frac{b \cdot h_1}{2} + \frac{b \cdot h_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_Q = \frac{b}{2}(h_1 + h_2) \Rightarrow$$

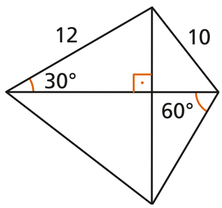
$$\Rightarrow A_Q = \frac{b}{2}(a) \Rightarrow A_Q = \frac{ab}{2}$$

803. Determine a área do quadrilátero nos casos a seguir, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

a)



b)



804. A área de um retângulo é 40 cm^2 e sua base excede em 6 cm sua altura. Determine a altura do retângulo.

805. Um retângulo tem 24 cm^2 de área e 20 cm de perímetro. Determine suas dimensões.

806. A base de um retângulo é o dobro de sua altura. Determine suas dimensões, sendo 72 cm^2 sua área.

807. As bases de um trapézio isósceles medem, respectivamente, 4 cm e 12 cm. Determine a área desse trapézio, sabendo que o semiperímetro do trapézio é igual a 13 cm.

808. Uma das bases de um trapézio excede a outra em 4 cm. Determine as medidas dessas bases, sendo 40 cm^2 a área do trapézio e 5 cm a altura.

809. As diagonais de um losango estão entre si como $\frac{2}{7}$. Determine a área desse losango, sabendo que a soma de suas diagonais é igual ao perímetro de um quadrado de 81 cm^2 de área.

810. O perímetro de um losango é de 60 cm. Calcule a medida de sua área, sabendo que a sua diagonal maior vale o triplo da menor.

811. Determine a área de um losango, sendo 120 cm o seu perímetro e 36 cm a medida da sua diagonal menor.

812. Com uma corda de 40 m de comprimento construímos um quadrado e com a mesma corda construímos depois um trapézio isósceles cuja base maior é o dobro da menor e cujos lados oblíquos têm medidas iguais à base menor. Determine a razão entre a área do quadrado e a área do trapézio.

813. Determine o lado de um quadrado, sabendo que, se aumentamos seu lado em 2 cm, sua área aumenta em 36 cm^2.

814. Determine a área de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um retângulo cuja base excede em 3 cm a altura, sendo 66 cm a soma do dobro da base com o triplo da altura.

815. Um quadrado e um losango têm o mesmo perímetro. Determine a razão entre a área do quadrado e do losango, sabendo que as diagonais do losango estão entre si como $\frac{3}{5}$ e que a diferença entre elas é igual a 40 cm.

816. Determine a área de um retângulo em função de sua diagonal *d*, sabendo que a diagonal é o triplo de sua altura.

817. Mostre que a área de um triângulo equilátero de lado *a* é dada por $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

818. Determine a área de um triângulo equilátero com:

a) perímetro de 30 m.

b) altura de 6 m.

819. Determine a área de um hexágono regular nos casos:

a) Seu lado tem 8 m.

b) Seu apótema tem $2\sqrt{3}$ m.

c) Sua diagonal menor mede 12 m.

820. Determine, em cada caso, o raio do círculo circunscrito a um:

a) quadrado de 16 m^2.

b) hexágono regular de $54\sqrt{3}$ m^2.

c) triângulo equilátero de $36\sqrt{3}$ m^2.

821. Determine a área do:

a) quadrado inscrito em um círculo de 5 m de raio.
b) hexágono regular inscrito em um círculo de raio 4 m.
c) triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio 6 m.
d) quadrado circunscrito a um círculo de raio 4 m.
e) hexágono regular circunscrito a um círculo de raio 6 m.
f) triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio 5 m.

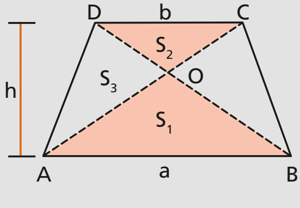
822. Determine, em cada caso, o raio do círculo inscrito em um:

a) quadrado de 24 m^2.
b) hexágono regular de $6\sqrt{3}$ m^2.
c) triângulo equilátero de $9\sqrt{3}$ m^2.

823. Dá-se um trapézio ABCD de bases AB = a, CD = b com a > b e de altura *h*. Demonstre que a diferença entre as áreas dos triângulos que têm por bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ respectivamente e por vértice oposto a interseção das diagonais é $\dfrac{(a-b)\cdot h}{2}$.

Solução

Tese: $S_1 - S_2 = \dfrac{(a-b)\cdot h}{2}$

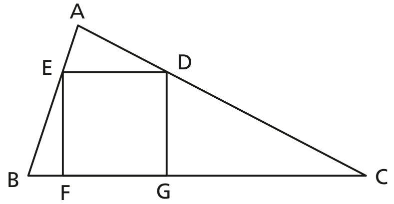


Demonstração:

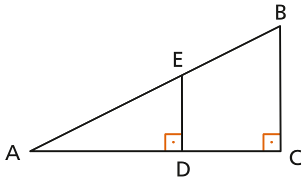
Considerando o $\triangle OAD$ de área S_3, temos:

$$\left.\begin{aligned}\text{Área } \triangle ABD &= S_1 + S_3 = \frac{ah}{2}\\[2ex] \text{Área } \triangle ACD &= S_2 + S_3 = \frac{bh}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 - S_2 = \frac{ah}{2} - \frac{bh}{2} = \frac{(a-b)h}{2}$$

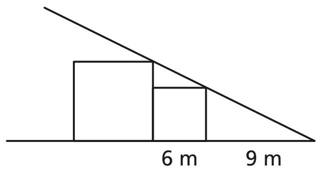
824. Determine a área do quadrado DEFG inscrito no triângulo ABC ao lado, sendo BC = 15 m e altura relativa ao lado $\overline{BC}$ igual a 10 m.



825. Determine a área do triângulo ABC ao lado, sendo AE = 10 m, AD = 8 m e EB = 5 m.



826. Na figura ao lado temos dois quadrados. Determine a área do quadrado maior.



827. Determine a área de um triângulo isósceles de perímetro 36 m se a altura relativa à base mede 12 m.

828. Determine a área de um retângulo de diagonal 15 m e perímetro 42 m.

829. As bases de um trapézio retângulo medem 3 m e 18 m e o perímetro, 46 m. Determine a área.

830. A altura de um trapézio isósceles mede $3\sqrt{3}$ m, a base maior, 14 m e o perímetro, 34 m. Determine a área desse trapézio.

831. As bases de um trapézio medem 4 m e 25 m e os lados oblíquos medem 10 m e 17 m. Determine a área desse trapézio.

832. De um losango sabemos que uma diagonal excede a outra em 4 m e que esta, por sua vez, excede o lado em 2 m. Determine a área desse losango.

833. A diagonal de um trapézio isósceles é bissetriz do ângulo da base maior. Se a altura desse trapézio mede $3\sqrt{5}$ m e o perímetro, 48 m, determine a área dele.

834. Um lado de um quadrado é corda de uma circunferência e o lado oposto é tangente a ela. Determine a área do quadrado, sendo 10 m o raio do círculo.

835. A diagonal maior de um trapézio retângulo é bissetriz do ângulo agudo. Se a altura e a base maior medem 5 m e 25 m, determine a área desse trapézio.

836. A base de um triângulo isósceles excede a altura em 10 m. Se a área do triângulo é 300 m^2, quanto mede a altura relativa a um dos lados congruentes?

837. Uma diagonal de um losango mede 40 m e a sua altura 24 m. Determine a área desse losango.

838. As medianas relativas aos catetos de um triângulo retângulo medem $2\sqrt{73}$ m e $4\sqrt{13}$ m. Determine a área desse triângulo.

839. Determine a menor altura e a área de um triângulo de lados 5 m, $3\sqrt{5}$ m e 10 m.

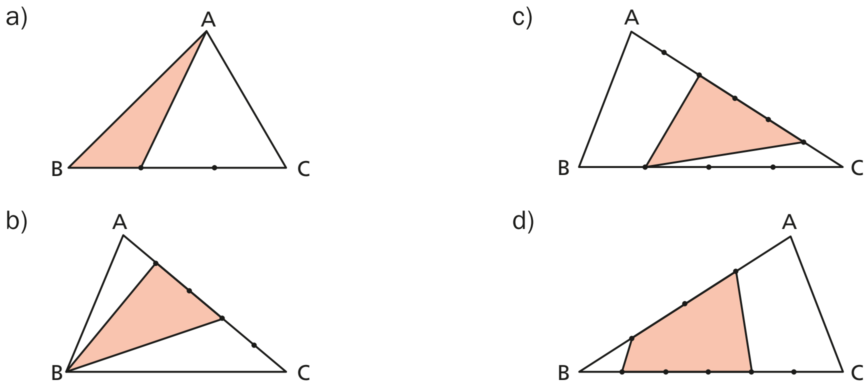
840. Considere um triângulo retângulo e a circunferência inscrita nele. Se o ponto de contato entre a hipotenusa e a circunferência determina na hipotenusa segmentos de 4 m e 6 m, determine a área do triângulo.

841. Suponhamos que se percorra um triângulo num sentido determinado e que se prolongue, nesse sentido, cada lado de um comprimento igual ao próprio lado que se prolonga. Demonstre que a área do triângulo que tem por vértices as extremidades dos prolongamentos é igual a sete vezes a área do triângulo dado.

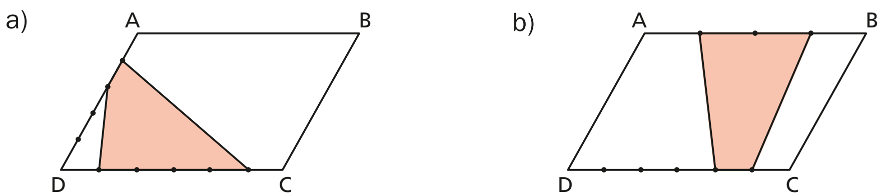
842. Mostre que a razão entre as áreas de dois triângulos de bases congruentes é igual à razão entre as alturas relativas a essas bases.

843. Mostre que as medianas de um triângulo determinam nele seis triângulos de áreas iguais.

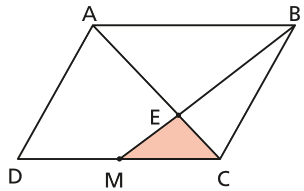
844. Determine a área do triângulo sombreado em função da área k do triângulo ABC nos casos a seguir, sabendo que os pontos assinalados em cada lado o dividem em partes iguais (congruentes).



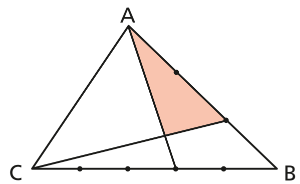
845. Determine a área da região sombreada em função da área k do paralelogramo ABCD nos casos a seguir, sabendo que os pontos assinalados sobre cada lado o dividem em partes de medidas iguais.



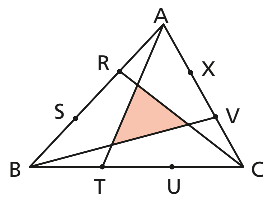
846. Na figura, ABCD é um paralelogramo de área S e M é ponto médio de $\overline{CD}$. Determine a área da região sombreada em função de S.



847. Se a área do triângulo ABC é k e os pontos assinalados em cada lado o dividem em partes iguais, determine a área do triângulo sombreado em função de k.



848. Se os pontos R, S, T, U, V e X dividem $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, em três partes iguais, determine a área do triângulo sombreado em função da área k do triângulo ABC.



849. Determine a área de um octógono regular de lado ℓ.

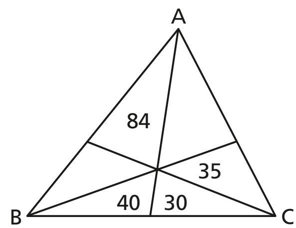
850. Determine a área de um decágono regular de lado ℓ.

851. Determine a área de um pentágono regular de lado ℓ.

852. Determine a área de um retângulo cuja base e altura são respectivamente o lado e o apótema de um pentágono inscrito em uma circunferência de raio r.

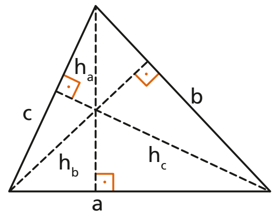
853. Determine a área de um quadrado cujo lado é igual ao lado de um octógono regular inscrito em um círculo de raio r.

854. Como mostra o desenho, o triângulo ABC está dividido em seis triângulos. O número indicado no interior de quatro deles expressa a sua área. Determine a área do triângulo ABC.



III. Expressões da área do triângulo

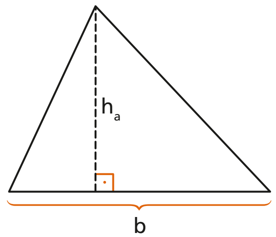
250. Área do triângulo em função dos lados e respectivas alturas.



Em vista do item 246:

$$S = \frac{1}{2}ah_a,\ S = \frac{1}{2}bh_b,\ S = \frac{1}{2}ch_c$$

251. Área do triângulo em função dos lados.

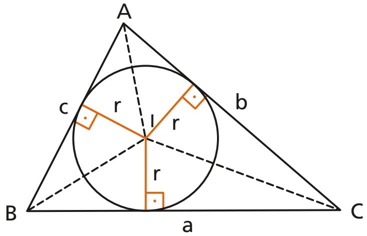


Dados: *a*, *b*, *c* e com $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, em vista do item 207, temos:

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \dfrac{1}{2}ah_a \\ h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

252. Área do triângulo em função dos lados e do raio *r* da circunferência inscrita.

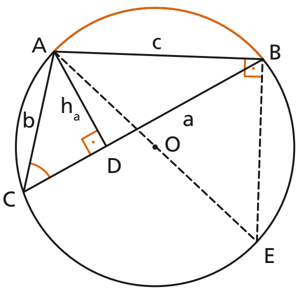


$$S = S_{ABC} = S_{IBC} + S_{IAC} + S_{IAB} =$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}\cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = pr}$$

253. Área do triângulo em função dos lados e do raio R da circunferência circunscrita.



$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2}\,ah_a \quad (1)$$

Para o cálculo de h_a (dados R, *a*, *b* e *c*), construímos o $\triangle ABE$ com $AE = 2R$.

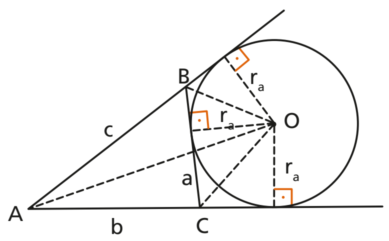
$$\left.\begin{array}{l} \hat{D} = \hat{B} \text{ (reto)} \\ \hat{C} = \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABE \Rightarrow \frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R} \Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R}$$

Substituindo em (1), vem:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

254. Área do triângulo em função do raio de qualquer das circunferências ex-inscritas. (Por exemplo: ex-inscrita tangente ao lado *a*, de raio r_a.)

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABOC} = \overset{S}{S_{ABC}} + \overset{\frac{1}{2}ar_a}{S_{OBC}} \\ S_{ABOC} = \underset{\frac{1}{2}br_a}{S_{OAC}} + \underset{\frac{1}{2}cr_a}{S_{OAB}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



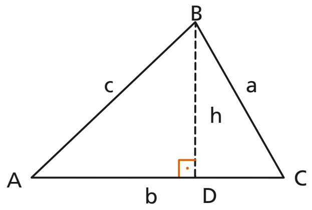
$$\Rightarrow S + \frac{1}{2}\,a \cdot r_a = \frac{1}{2}\,b \cdot r_a + \frac{1}{2}\,c \cdot r_a \Rightarrow S = \frac{1}{2}\,\underbrace{(-a + b + c)}r_a = \frac{1}{2}\,\underbrace{2(p - a)}r_a \Rightarrow$$

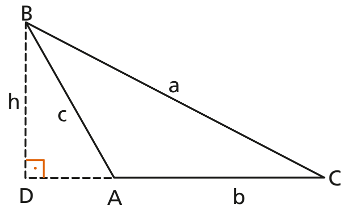
$$\Rightarrow \boxed{S = (p - a) \cdot r_a}$$

Analogamente, temos:

$$\boxed{S = (p - b)r_b} \qquad \boxed{S = (p - c)r_c}$$

255. Área do triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido.





$$\left.\begin{array}{l}\text{No caso da primeira figura: } S = \dfrac{1}{2}bh \\ \text{mas no } \triangle ADB\text{: } h = c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}bc \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{No caso da segunda figura: } S = \dfrac{1}{2}bh \\ \text{mas no } \triangle ADB\text{: } h = c \cdot \operatorname{sen}(180° - \hat{A}) = c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow S = \dfrac{1}{2}bc \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$$

No caso do triângulo ser retângulo em A é imediato.
Assim, temos:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}bc \cdot \operatorname{sen} \hat{A}}$$

Analogamente: $\boxed{S = \frac{1}{2}ac \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}$ $\boxed{S = \frac{1}{2}ab \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}$

256. Notas

1ª) Usando a expressão da área do triângulo

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}$$

e a expressão do teorema dos senos (lei dos senos),

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R, \text{ de onde sai: } \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{2R}, \text{ temos:}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} \Rightarrow S = \frac{abc}{4R}$$

2ª) Resumo das fórmulas sobre área do triângulo

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= pr = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c =$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{1}{2}ac \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{1}{2}bc \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$$

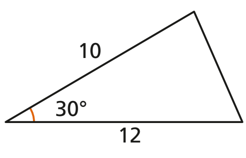
3ª) As fórmulas $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$, $S = (p-a)r_a$, $S = (p-b)r_b$ e $S = (p-c)r_c$ são mais usadas para o cálculo dos raios. Assim,

$$r = \frac{S}{p},\ R = \frac{abc}{4S},\ r_a = \frac{S}{p-a},\ r_b = \frac{S}{p-b},\ r_c = \frac{S}{p-c}.$$

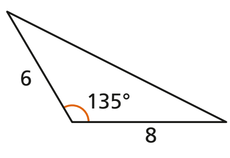
EXERCÍCIOS

855. Determine a área do triângulo nos casos abaixo, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

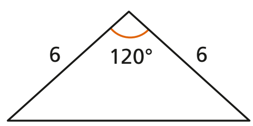
a)



b)

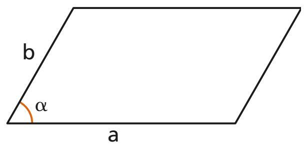


c)



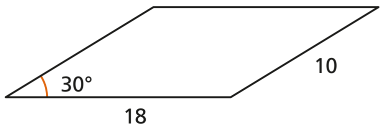
856. Mostre que a área do paralelogramo da figura é dada por

$$S = ab \operatorname{sen} \alpha$$

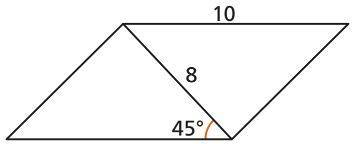


857. Determine a área do paralelogramo nos casos, sendo o metro a unidade das medidas indicadas.

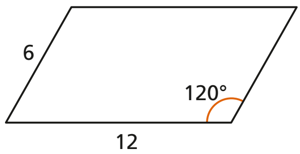
a)



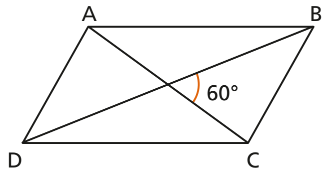
c)



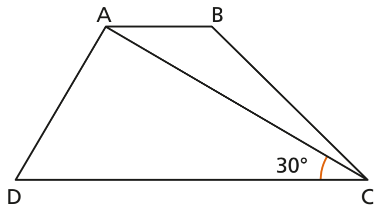
b)



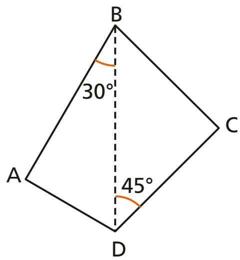
d) AC = 16, BD = 24



858. Determine a área do trapézio da figura, dados: AB = 4 m, AC = 8 m e CD = 12 m.



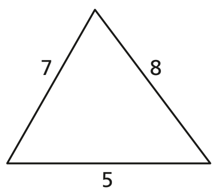
859. Determine a área do quadrilátero da figura, dados: AB = 12 m, BD = 18 m e CD = $12\sqrt{2}$ m.



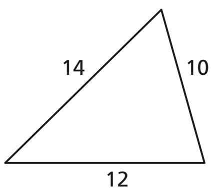
860. Mostre que a área de um quadrilátero com diagonais de medidas *a* e *b*, que formam ângulo α, é dada por $S = \dfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \alpha$.

861. Determine a área do triângulo nos casos abaixo. Use: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. O metro é a unidade das medidas indicadas.

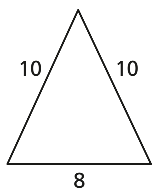
a)



b)

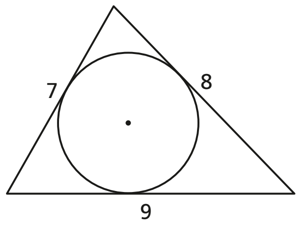


c)

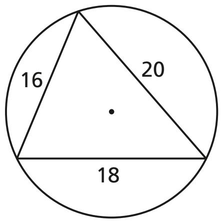


862. Determine o raio do círculo nos casos:

a)



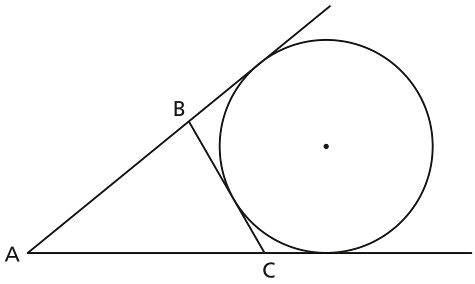
b)



863. Os lados de um triângulo medem 6 m, 10 m e 12 m. Determine:

a) a sua área;
b) a sua menor altura;
c) a sua maior altura;
d) o raio da circunferência inscrita;
e) o raio da circunferência circunscrita.

864. Determine o raio da circunferência, dados: $AB = 14$ m, $BC = 10$ m e $AC = 16$ m.



865. Determine a área de um triângulo retângulo, sabendo que um dos catetos mede 10 cm e o ângulo agudo oposto a esse cateto é igual a 30°.

866. A razão entre a base e a altura de um triângulo é $\frac{8}{5}$. Sendo 52 cm a soma da base com a altura, determine a área do triângulo.

867. Determine a área de um triângulo isósceles, sabendo que sua base mede 6a e a soma dos lados congruentes 10a.

868. Determine a área de um triângulo isósceles de perímetro igual a 32 cm, sabendo que sua base excede em 2 cm cada um dos lados congruentes.

869. Determine a área de um triângulo equilátero em função de sua altura *h*.

870. O apótema de um triângulo equilátero é igual ao lado de um quadrado de 16 cm^2 de área. Determine a área do triângulo.

871. O perímetro de um triângulo retângulo é 90 cm. Determine a área do triângulo, sabendo que seus lados são inversamente proporcionais a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{13}$.

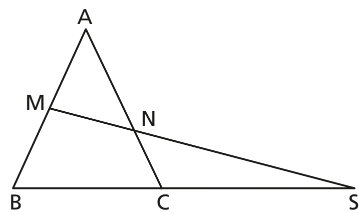
872. Em um triângulo retângulo a hipotenusa é $\frac{5}{3}$ do cateto menor, e o cateto maior $\frac{4}{3}$ do menor. Sendo 60 cm o perímetro do triângulo, determine a sua área.

873. Calcule a área de um triângulo ABC do qual se conhecem os seguintes dados: AC = b, AB = c e o ângulo compreendido é igual a 150°.

874. Consideremos um triângulo retângulo isósceles ABC de catetos AB = AC = a e um ponto E tomado sobre o prolongamento do cateto $\overline{CA}$. Unindo B a E, temos o segmento $\overline{BE}$, que é paralelo à bissetriz $\overline{AD}$ do ângulo reto Â. Determine a área do triângulo CBE em função de *a*.

875. Calcule a área do triângulo ABC, sendo AB = 4 cm, Â = 30° e Ĉ = 45°.

876. Um triângulo equilátero ABC tem 60 m de perímetro. Prolonga-se a base $\overline{BC}$ e sobre o prolongamento toma-se CS = 12 m. Une-se o ponto S ao meio M do lado $\overline{AB}$. Calcule a área do quadrilátero BCNM.



877. Determine a área de um triângulo equilátero em função do raio R do círculo circunscrito a esse triângulo.

878. Determine a área de um triângulo equilátero em função do raio *r* do círculo inscrito nesse triângulo.

879. A área de um triângulo retângulo é igual ao produto dos segmentos determinados sobre a hipotenusa pelo ponto de contato do círculo inscrito ao triângulo.

880. A base de um triângulo mede 12 cm e sua altura 6 cm. Determine a razão entre a área do triângulo e a área de um quadrado inscrito nesse triângulo, sabendo que a base do quadrado está apoiada sobre a base do triângulo.

881. Determine a medida do raio de um círculo inscrito em um triângulo isósceles de lados 10 cm, 10 cm e 12 cm.

882. Calcule o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base 6 cm, tendo outro lado medindo 5 cm.

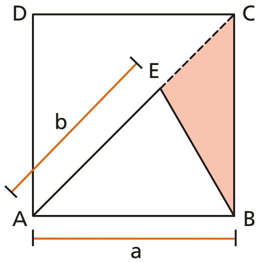
883. Seja ABC um triângulo isósceles cujos lados congruentes medem 5 cm, sendo 6 cm a medida do lado $\overline{BC}$ (base do triângulo). Calcule a razão entre o raio do círculo circunscrito e o raio do círculo inscrito nesse triângulo.

884. Determine o perímetro de um triângulo retângulo, sabendo que sua área é igual a 36 cm^2 e que a hipotenusa é igual ao dobro da altura relativa a ela.

885. As diagonais de um paralelogramo medem 10 m e 20 m e formam um ângulo de 60°. Ache a área do paralelogramo.

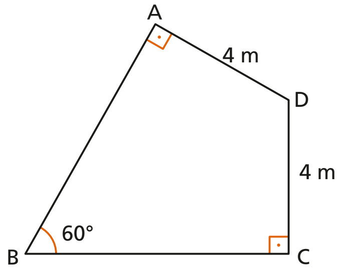
886. Mostre que a soma das distâncias de um ponto interno de um triângulo equilátero aos lados é igual à altura *h* do triângulo.

887. Na figura, ABCD é um quadrado de lado *a* e AE = b. Determine a área do triângulo AEB.

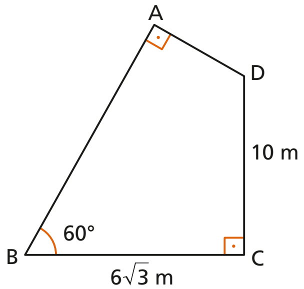


888. Determine a área dos quadriláteros nos casos:

a)



b)



889. Os ângulos de um hexágono convexo medem 120°. Determine a área desse hexágono, sendo os lados opostos congruentes e medindo 4 m, 6 m e 8 m.

890. As medianas de um triângulo medem 9 m, 12 m e 15 m. Determine a área do triângulo.

891. O ponto de interseção das diagonais de um paralelogramo dista *a* e *b* dos lados e o ângulo agudo mede α. Determine a área.

IV. Área do círculo e de suas partes

257. Área do círculo

Vimos no item 249 que a área de um polígono regular é o produto da medida do semiperímetro pela do apótema.

$$A_{pol} = p \cdot m$$

Tendo em vista os itens 221, 222, 223, 224 e 225 do capítulo XVII, consideremos as afirmações abaixo:

1ª) Fixado um círculo, de raio R (diâmetro D), considerando os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo, com o crescimento do número de lados, as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro do círculo (vide comprimento da circunferência) e os apótemas se aproximam do raio do círculo. Podemos então colocar, por extensão:

2ª) A área do círculo é o produto de seu semiperímetro pelo raio.

$$A_C = \pi R \cdot R = \pi R^2$$

Então:

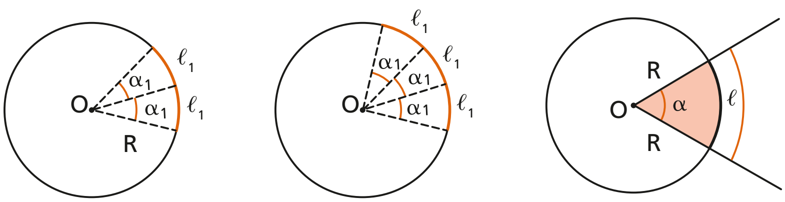
$$\boxed{A_C = \pi \cdot R^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{A_C = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}}$$

258. Área do setor circular

Notemos que, quando dobramos o arco (ou ângulo central), dobra a área do setor; triplicando-se o arco (ou ângulo central), a área do setor também é triplicada, e assim por diante.

De modo geral, a área do setor é proporcional ao comprimento do arco (ou à medida do ângulo central).

Portanto, a área do setor pode ser calculada por uma regra de três simples:



a) Área de um setor circular de raio R e α radianos

$$\left.\begin{array}{r} 2\pi \text{ rad} \text{ ——— } \pi R^2 \\ \alpha \text{ rad} \text{ ——— } A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}}$$

b) Área de um setor circular de raio R e α graus

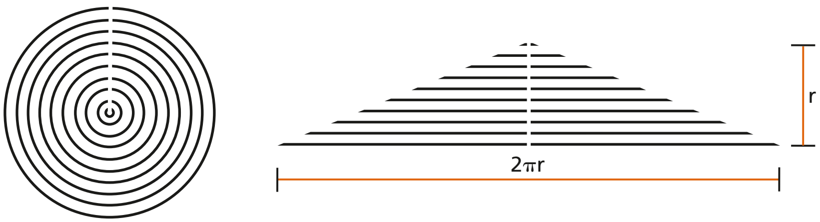
$$\left.\begin{array}{r} 360° \text{ ——— } \pi R^2 \\ \alpha° \text{ ——— } A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}}$$

c) Área de um setor circular em função de R e do comprimento ℓ do arco

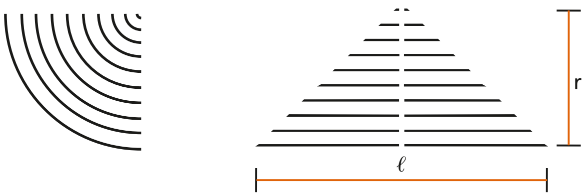
$$\left.\begin{array}{r} 2\pi R \text{ ——— } \pi R^2 \\ \ell \text{ ——— } A_{setor} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\ell R}{2}}$$

259. Observação

Note que tanto a área do setor como a do círculo são análogas à área do triângulo e as figuras abaixo dão ideia disso.



$$A_{círculo} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r \Rightarrow A_{círculo} = \pi r^2$$



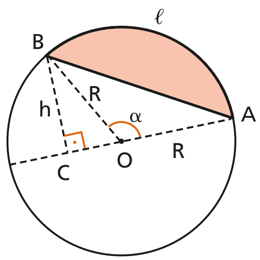
$$A_{setor} = \frac{1}{2} \cdot \ell r$$

260. Área do segmento circular

Cálculo da área do segmento circular indicado na figura: R é o raio, α é a medida do ângulo central e ℓ é o comprimento do arco.

$$A_{\text{segm}} = A_{\text{set OAB}} - A_{\triangle OAB}$$

a) Usando *h* (que pode ser obtido no $\triangle$OBC)



$$A_{\text{segm}} = \frac{\ell R}{2} - \frac{Rh}{2} \Rightarrow$$

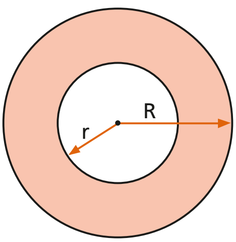
$$\Rightarrow \boxed{A_{\text{segm}} = (\ell - h)\frac{R}{2}}$$

b) Usando α em radianos

$$A_{\text{segm}} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2} R \cdot R \operatorname{sen} \alpha \qquad \boxed{A_{\text{segm}} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}$$

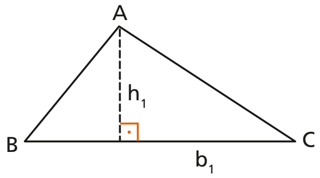
261. Área da coroa circular

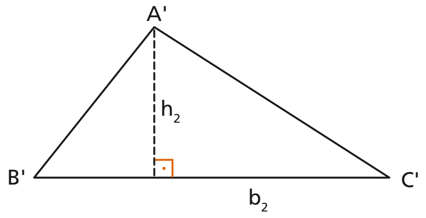
$$A_{\text{coroa}} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2)}$$



V. Razão entre áreas

262. Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes





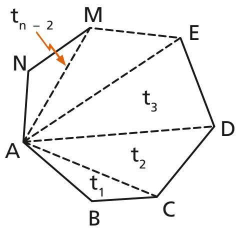
Área do triângulo ABC $= S_1$ Área do triângulo A'B'C' $= S_2$

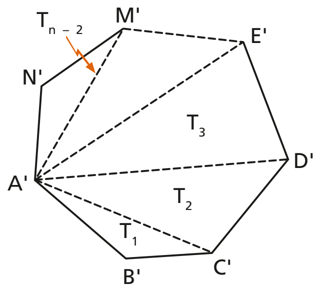
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}b_1h_1}{\frac{1}{2}b_2h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Conclusão: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

263. Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes





Área de ABCDE...MN $= S_1$ Área de A'B'C'D'...M'N' $= S_2$

$$ABCDE\ldots MN \sim A'B'C'D'\ldots M'N' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ e}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D' \text{ e } \ldots \text{ e } \triangle AMN \sim \triangle A'M'N' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} =$$

$$= \ldots = \frac{MN}{M'N'} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

Áreas dos triângulos que compõem esses polígonos:

Área $\triangle ABC = t_1$, Área $\triangle ACD = t_2$, ..., Área $\triangle AMN = t_{n-2}$

Área $\triangle A'B'C' = T_1$, Área $\triangle A'C'D' = T_2$, ..., Área $\triangle A'M'N' = T_{n-2}$

Foi provado no item anterior que:

$$\frac{t_i}{T_i} = k^2 \Rightarrow t_i = k^2T_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots, n - 2$$

Então:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-2}} =$$

$$= \frac{k^2T_1 + k^2T_2 + k^2T_3 + \ldots + k^2T_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-2}} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Conclusão: A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

264. Observação

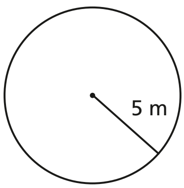
A propriedade acima é extensiva a quaisquer superfícies semelhantes e, por isso, vale:

A razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

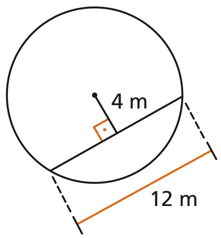
EXERCÍCIOS

892. Determine a área do círculo e o comprimento da circunferência nos casos:

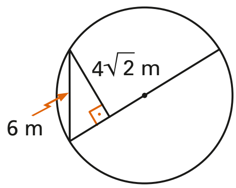
a)



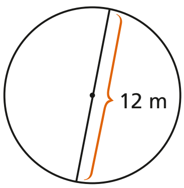
d)



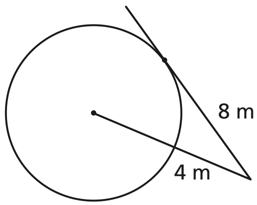
g)



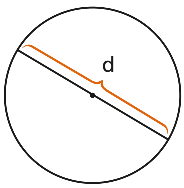
b)



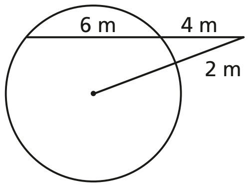
e)



c)

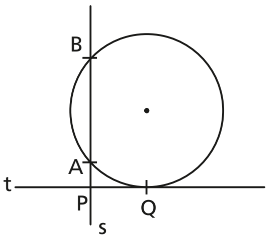


f)

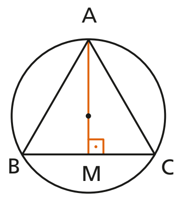


893. Determine a área do círculo nos casos:

a) $PA = 4$ m, $PQ = 8$ m, $s \perp t$

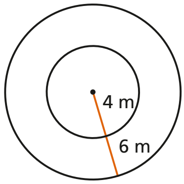


b) $BC = 30$ m, $AM = 25$ m

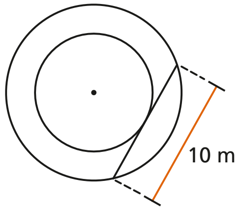


894. Determine a área da coroa circular nos casos:

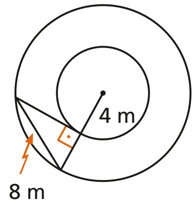
a)



b)

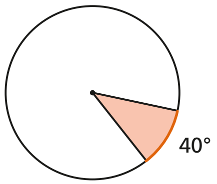


c)

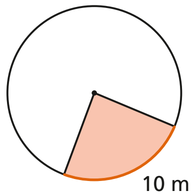


895. Determine a área de cada setor circular sombreado nos casos abaixo, sendo 6 m o raio.

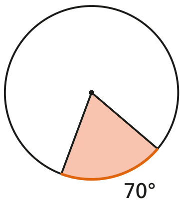
a)



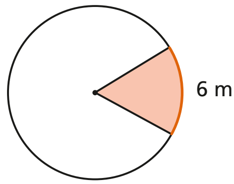
c)



b)



d)

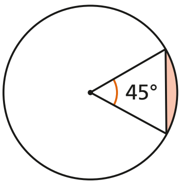


896. Determine as áreas dos setores de medidas indicadas abaixo, sendo 60 cm o raio do círculo.

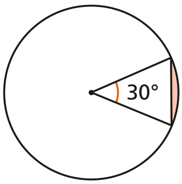
a) 90° b) 60° c) 45° d) 120° e) 17° f) 5°15'

897. Determine a área do segmento circular sombreado, nos casos a seguir, sendo 6 m o raio do círculo.

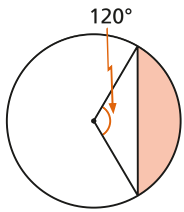
a)



b)



c)



898. Determine as áreas dos segmentos circulares cujas medidas dos arcos são dadas abaixo, sendo 12 m o raio do círculo.
a) 60° b) 90° c) 135° d) 150°

899. Determine a área de um círculo, sabendo que o comprimento de sua circunferência é igual a 8π cm.

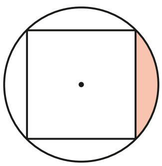
900. Calcule a área de um setor circular de raio *r* e ângulo central medindo:
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 135° g) 150°

901. Calcule a área de um segmento circular de um círculo de raio R e ângulo central medindo:
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 135° g) 150°

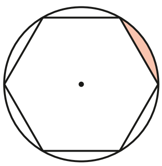
902. Determine a área de uma coroa determinada por duas circunferências concêntricas de raios 15 cm e 12 cm.

903. Determine a área da região sombreada nos casos:

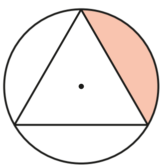
a) quadrado de lado 8 m



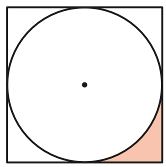
b) hexágono regular de lado 6 m



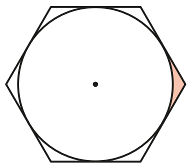
c) triângulo equilátero de lado 12 m



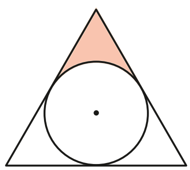
d) quadrado de lado 8 m



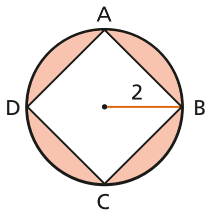
e) hexágono regular de lado 12 m



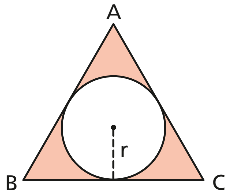
f) triângulo equilátero de 6 m de lado



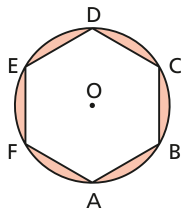
904. Calcule a área da figura sombreada, sendo ABCD um quadrado.



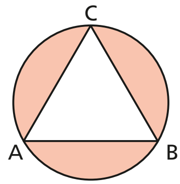
905. Determine a área da figura sombreada ao lado, em função do raio *r* do círculo inscrito no triângulo equilátero ABC.



906. Na figura ao lado, o apótema do hexágono regular mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine a área sombreada.

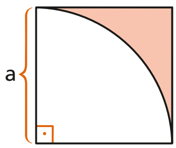


907. O apótema do triângulo equilátero ABC inscrito no círculo mede $\sqrt{3}$ cm. Calcule a área sombreada.

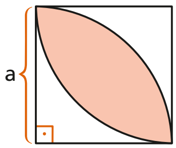


908. Calcule a área da parte sombreada, sabendo que o quadrilátero dado é um quadrado.

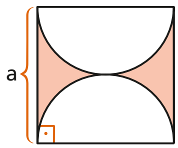
a)



b)

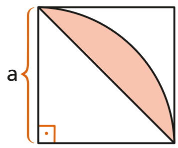


c)

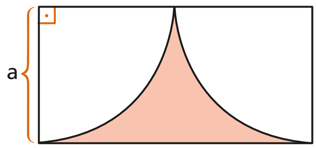


909. Calcule a área da superfície sombreada.

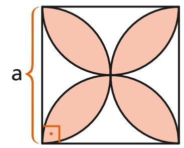
a) quadrado



b) retângulo

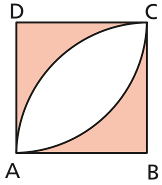


c) quadrado

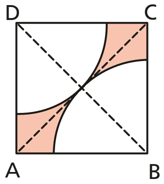


910. ABCD, nas figuras abaixo, é um quadrado de perímetro 16 cm. Determine as áreas sombreadas.

a)

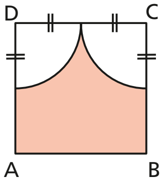


b)

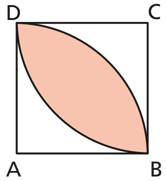


911. Determine a área sombreada, nas figuras abaixo, sabendo que os três quadrados ABCD têm lado medindo 2 cm.

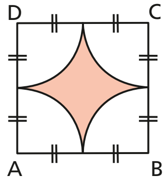
a)



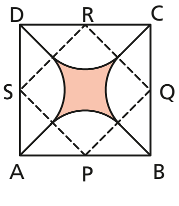
b)



c)

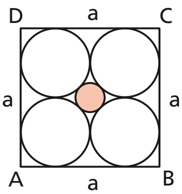


912. Calcule a área sombreada, em função do lado *a* do quadrado ABCD.

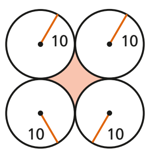


913. Determine a área da região sombreada.

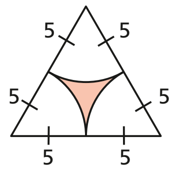
a) ABCD é quadrado



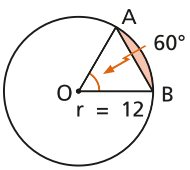
b)



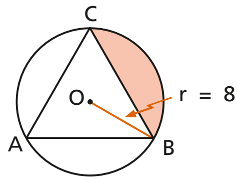
c)



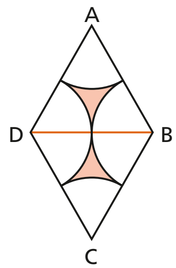
d)



e) $\triangle ABC$ é equilátero

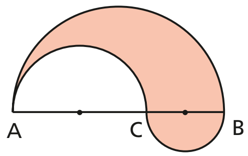


914. Determine a área sombreada, na figura, sabendo que o lado do losango tem medida igual à sua diagonal menor e que ambos medem 10 cm. Os arcos descritos têm centros nos vértices do losango e raio igual à metade do lado do losango.

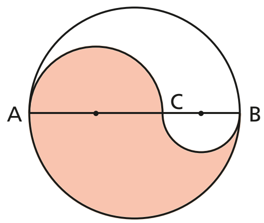


915. Determine a área sombreada, nas figuras abaixo, sendo AC o triplo de CB e AB igual a 32 cm.

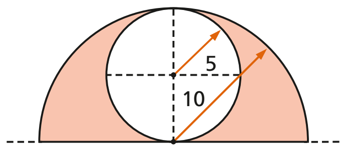
a)



b)

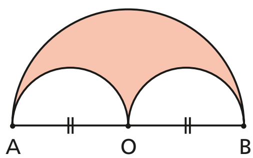


916. Calcule a área da parte sombreada.



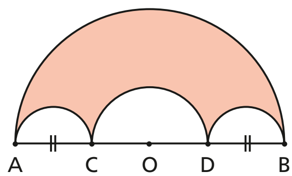
917. Nas figuras abaixo, determine a área sombreada, sabendo que AB igual a 20 cm.

a)



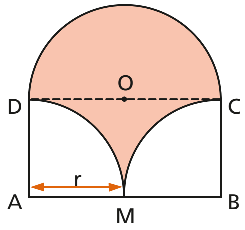
$\overline{AO} \equiv \overline{OB}$

b)



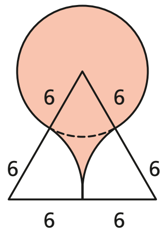
$\overline{AC} \equiv \overline{CO} \equiv \overline{OD} \equiv \overline{DB}$

918. Na figura ao lado, $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ têm mesma medida. Determine a área sombreada, sabendo que o perímetro do retângulo ABCD mede 42 cm.

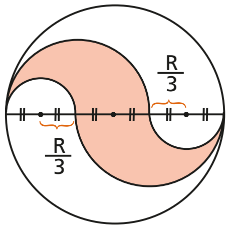


919. Calcule a área da figura sombreada.

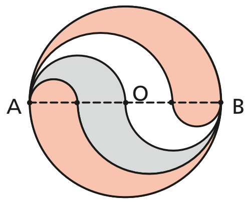
a)



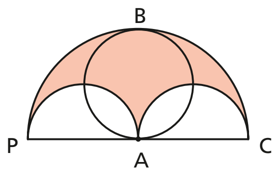
b)



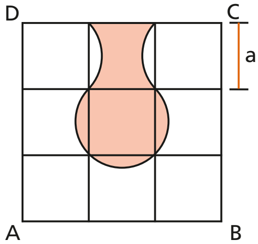
920. Determine a área da figura sombreada, ao lado, sabendo que $\overline{AB}$ foi dividido em quatro segmentos congruentes, de medidas iguais a *r*.



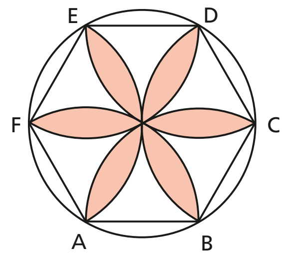
921. Na figura, o segmento $\overline{AP}$ é congruente ao segmento $\overline{AC}$ e a distância AB mede *r*. Calcule a área sombreada em função de *r*.



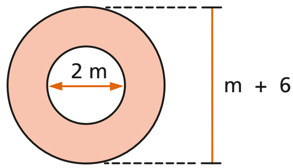
922. Na figura, ABCD é um quadrado. Determine a área sombreada em função de *a*, sendo *a* a medida de um segmento tomado sobre o lado do quadrado, a $\frac{1}{3}$ do vértice C.



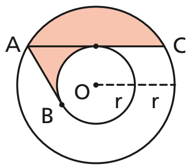
923. Seja ABCDEF um hexágono regular inscrito num círculo cujo raio mede 1 cm. Calcule a área sombreada.



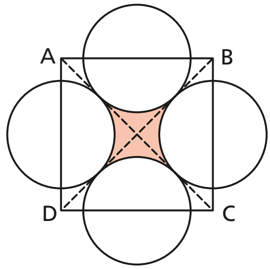
924. Determine a área da figura sombreada, em função de *m*.



925. Na figura ao lado, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são tangentes à circunferência menor. Calcule a área sombreada em função de *r*.

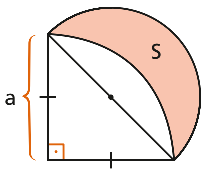


926. Determine a área sombreada ao lado, sabendo que os raios dos círculos são iguais e ABCD é um quadrado de perímetro 16 cm.

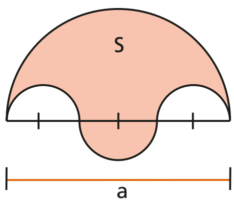


927. Calcule a área da superfície sombreada.

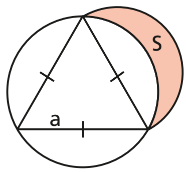
a)



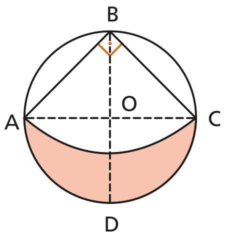
b)



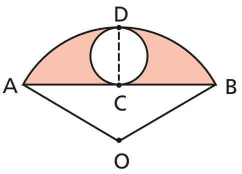
c)



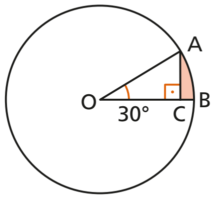
928. Na figura ao lado, determine a área da parte sombreada em função do raio r do círculo, sendo $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ os lados de um quadrado inscrito nesse círculo.



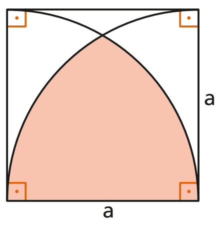
929. Na figura ao lado, C é o ponto médio de $\overline{AB}$, que mede 8 cm. Determine a área sombreada, sabendo que o ângulo $B\hat{O}A$ mede 120°.



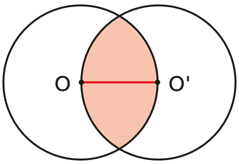
930. Em um círculo de 20 m de diâmetro, traça-se um ângulo central $A\hat{O}B$ de 30°. Sendo $\overline{AC}$ a perpendicular baixada do ponto A sobre o raio $\overline{OB}$, calcule a área da parte sombreada.



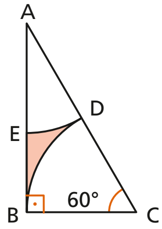
931. Calcule a área da parte sombreada.



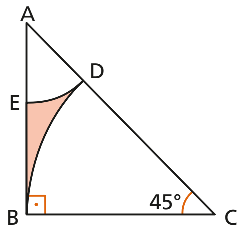
932. Determine a área sombreada, sabendo que o raio comum OO' dos círculos mede 26 cm.



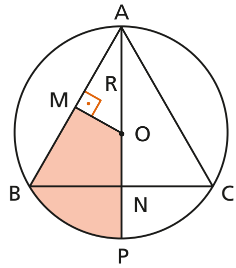
933. Determine a área sombreada na figura ao lado, sabendo que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede 10 cm.



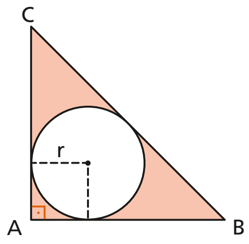
934. Determine a área e o perímetro da figura BED, inscrita no triângulo retângulo ABC, sabendo que AC mede 10 cm, o ângulo $\hat{C}$ mede 45° e que os arcos $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{ED}$ têm seus centros, respectivamente, nos pontos C e A.



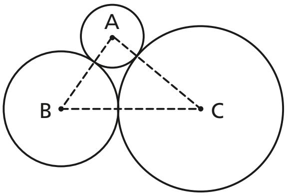
935. Determine a área sombreada ao lado, sendo ABC um triângulo equilátero e R o raio do círculo circunscrito a esse triângulo.



936. Determine a área sombreada, na figura ao lado, em função do raio *r* do círculo inscrito no triângulo retângulo isósceles ABC.



937. Os pontos A, B e C são centros dos três círculos tangentes exteriormente, como na figura ao lado. Sendo as distâncias $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ respectivamente iguais a 10 cm, 14 cm e 18 cm, determine as áreas desses três círculos.



938. Determine a razão entre as áreas dos círculos circunscrito e inscrito em um quadrado ABCD de lado *a*.

939. Unindo-se um ponto P de uma semicircunferência às extremidades do diâmetro, obtemos um triângulo retângulo de catetos iguais a 9 cm e 12 cm, respectivamente. Determine a razão entre a área do círculo e a área do triângulo retângulo.

940. Determine a razão entre as áreas dos círculos inscrito e circunscrito a um hexágono regular.

941. Determine a área de um segmento circular de 60° de um círculo que contém um setor circular de 6π cm^2 de área, sendo 2π cm o comprimento do arco desse setor.

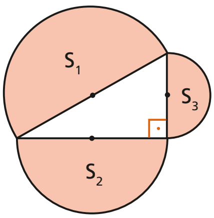
942. Determine a razão entre as áreas dos segmentos circulares em que fica dividido um círculo no qual se traça uma corda igual ao raio do círculo.

943. Duas circunferências iguais de raio *r*, tangentes entre si, tangenciam internamente uma outra circunferência de raio 3r. Calcule a menor das duas áreas limitadas por arcos das três circunferências.

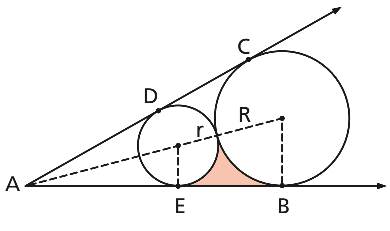
944. Calcule a área da superfície limitada por seis círculos de raio unitário com centros nos vértices de um hexágono regular de lado 2.

945. Num triângulo retângulo, *a* é a medida da hipotenusa, *b* e *c* as dos catetos. Constroem-se os semicírculos de diâmetros *b* e *c* externos ao triângulo, e o semicírculo de diâmetro *a* circunscrito ao triângulo. As regiões dos dois primeiros semicírculos externos à terceira são chamadas "lúnulas de Hipócrates". Mostre que a soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo.

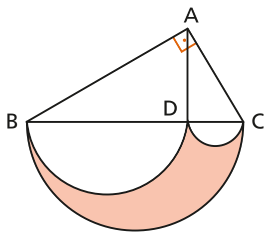
946. Sobre os lados de um triângulo retângulo, tomados como diâmetros, constroem-se semicircunferências externas ao triângulo. Qual a relação entre as áreas dos semicírculos determinados?



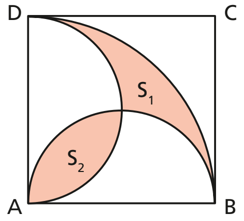
947. Na figura ao lado, calcule a área sombreada, sendo os dois círculos tangentes entre si e tangentes às duas semirretas nos pontos B, C, D, E, dado o ângulo $D\hat{A}E = 60°$, e R o raio do círculo maior.



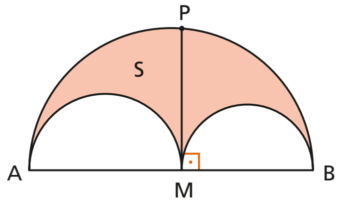
948. Sejam $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ as projeções dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo retângulo BAC. Determine a área sombreada, sabendo que esses catetos medem, respectivamente, 1,5 cm e 2 cm.



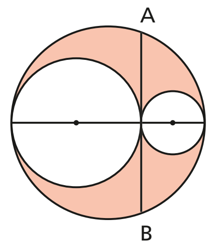
949. Na figura ao lado, prove que a área S_1 é igual a S_2, sendo ABCD um quadrado.



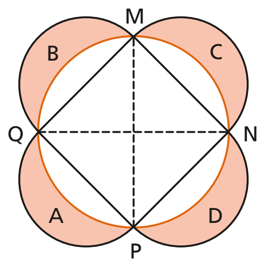
950. Sejam um semicírculo C de diâmetro $\overline{AB} = 2r$, um ponto M pertencente a $\overline{AB}$ e $\overline{MP} \perp \overline{AB}$. Construamos os semicírculos de diâmetros $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$. Os três semicírculos limitam uma superfície S (região sombreada). Mostre que a área de S é igual à área do círculo de diâmetro $\overline{MP}$.



951. Calcule a área da parte sombreada, sendo AB = t e *r* o raio do círculo maior.



952. Sejam A, B, C e D as áreas sombreadas da figura. Prove que S = A + B + C + D, onde *S* é a área do quadrado MNPQ.



953. Qual a razão entre o raio de um círculo circunscrito e o raio de um círculo inscrito em um triângulo ABC de lados *a*, *b*, *c* e perímetro 2p?

954. Determine o raio do círculo circunscrito e os lados congruentes de um triângulo isósceles ABC, cuja base $\overline{BC}$ mede 18 cm, sendo 6 cm a medida do raio do círculo inscrito nesse triângulo.

955. Dado um triângulo equilátero e sabendo que existe outro triângulo inscrito com os lados respectivamente perpendiculares aos do primeiro, calcule a relação entre as áreas dos dois triângulos.

956. O produto da medida de cada lado do triângulo pela medida da altura do vértice oposto é constante. Demonstre.

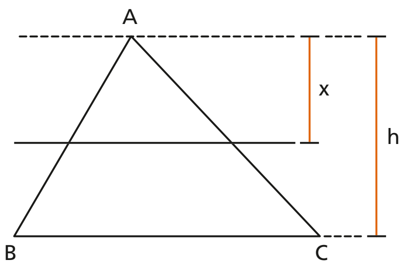
957. Calcule a área de um retângulo, sabendo que cada diagonal mede 10 cm e forma um ângulo de 60°.

958. Determine a área de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $\frac{r}{2}$.

959. Um losango e um quadrado têm o mesmo perímetro. Determine a razão da área do losango para a área do quadrado, sabendo que o ângulo agudo formado por dois lados do losango mede 60°.

960. Paulo e Carlos possuem tabletes de chocolate de forma, respectivamente, quadrada e retangular. O tablete de Paulo tem 12 cm de perímetro e o tablete de Carlos tem a base igual ao triplo da altura e perímetro igual a 12 cm. Sabendo que os tabletes possuem mesma espessura e que Paulo propôs a troca com Carlos, verifique se é vantagem para Carlos aceitar a troca.

961. A que distância do vértice A de um triângulo ABC, de altura, relativa a $\overline{BC}$, igual a *h*, devemos conduzir uma reta paralela a $\overline{BC}$ para que a área do trapézio obtido seja igual a 3 vezes a área do triângulo obtido?



962. A que distância da base de um triângulo de altura, relativa a essa base, igual a *h* devemos conduzir uma reta paralela a essa base para que o triângulo fique dividido em partes de áreas iguais?

963. As bases de um trapézio medem 8 m e 18 m e a sua altura 15 m. A que distância da base maior devemos conduzir uma reta paralela às bases para que os dois trapézios obtidos sejam semelhantes?

964. Os lados de dois heptágonos regulares medem 8 m e 15 m. Quanto deve medir o lado de um terceiro heptágono, também regular, para que sua área seja igual à soma das áreas dos dois primeiros?

965. Os perímetros de dois polígonos semelhantes P_1 e P_2 são 60 m e 90 m, respectivamente. Se a área de P_1 é de 144 m², determine a área de P_2.

966. Dois lados homólogos de dois pentágonos semelhantes medem 6 cm e 8 cm, respectivamente. Determine o lado do terceiro pentágono semelhante aos dois primeiros, sabendo que sua área é igual à soma das áreas dos dois primeiros pentágonos.

967. Determine a área de um quadrado, sabendo que seu lado é segmento áureo do lado do quadrado inscrito, num círculo de raio 10 cm.

968. Determine a área de um triângulo retângulo isósceles, sabendo que sua hipotenusa é igual à oitava parte do perímetro de um quadrado inscrito em um círculo de raio 2r.

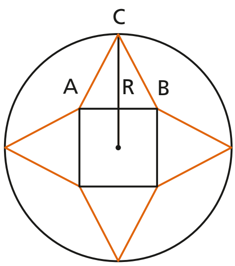
969. Determine a área de um quadrado inscrito e de um quadrado circunscrito a um círculo de raio *r*.

970. Determine a razão entre a área de um decágono regular inscrito em um círculo de raio R e a área do pentágono regular inscrito nesse mesmo círculo.

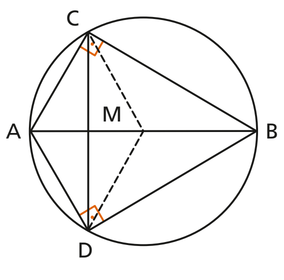
971. Determine a área de um octógono regular, sendo 80 cm o seu perímetro.

972. Determine a área de um octógono inscrito em um círculo cujo raio mede 6 cm.

973. Determine a área da figura obtida quando sobre os lados de um quadrado construímos quatro triângulos equiláteros, sabendo que essa figura está inscrita em um círculo de raio R.



974. Seja um círculo de diâmetro $\overline{AB}$ igual a 34 cm e uma corda $\overline{CD}$ de comprimento $17\sqrt{3}$ cm perpendicular a esse diâmetro por um ponto M desse diâmetro, não coincidente com o centro do círculo. Determine a área do quadrilátero ACBD.



975. Determine a área de um quadrado inscrito num círculo em função da diagonal menor *d* de um dodecágono regular inscrito no mesmo círculo.

976. Determine a razão entre a soma das áreas de dois triângulos equiláteros construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo e a área de um quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo, sabendo que um dos catetos mede 21 cm e o ângulo agudo oposto a ele mede 30°.

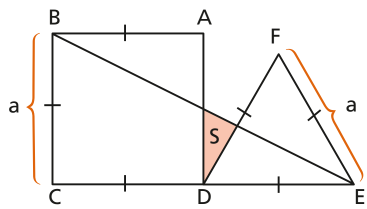
977. Em um círculo de raio igual a 5 cm está inscrito um retângulo de área igual a 25 cm^2. Calcule o ângulo formado pelas diagonais desse retângulo.

978. Sobre cada lado de um hexágono regular e externamente a este constrói-se um quadrado. Unindo-se os vértices dos quadrados de modo a obter um dodecágono regular, determine a área desse dodecágono em função do lado do hexágono que está inscrito em um círculo de raio R.

979. Sendo *r* o raio do círculo inscrito e r_a, r_b, r_c os raios dos círculos ex-inscritos num triângulo de área S, prove que:

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

980. Calcule a área S, sabendo que ABCD é um quadrado e DEF é um triângulo, ambos de lados de medida *a*.



981. Determine a área de um quadrado inscrito em um triângulo equilátero em função do raio R do círculo circunscrito a esse triângulo.

982. Determine a razão entre a área de um quadrado e a área de um triângulo equilátero inscritos num círculo de raio *r*.

983. Os lados de um triângulo retângulo são proporcionais aos números 3, 4 e 5. A mediana relativa à hipotenusa tem medida igual ao raio de um círculo circunscrito ao triângulo. Determine a área do triângulo em função do raio *r* do círculo.

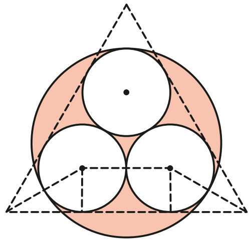
984. As projeções que os catetos de um triângulo retângulo determinam na hipotenusa medem 16 cm e 9 cm. Determine a razão entre a área do círculo inscrito e a área do círculo circunscrito a esse triângulo.

985. Determine a razão entre o raio do círculo circunscrito e o raio do círculo inscrito em um triângulo ABC isósceles de base BC = a, sendo 120° o ângulo do vértice do triângulo.

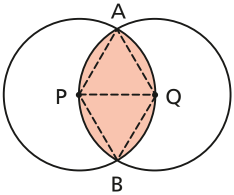
986. Determine o lado de um losango em função do raio *r* do círculo nele inscrito, de modo que a área do losango seja igual ao dobro da área desse círculo.

987. Dois eneágonos regulares convexos têm lados respectivamente iguais a 2 cm e 3 cm. Determine o lado do eneágono regular convexo cuja área é igual à soma das áreas dos dois primeiros.

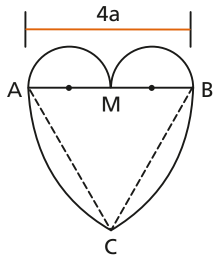
988. Determine a área sombreada da figura em função do raio *r* dos três círculos interiores ao círculo maior.



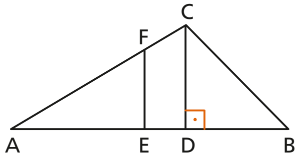
989. P e Q são os centros dos círculos, na figura. Sendo PQ = 6 cm, calcule a área sombreada.



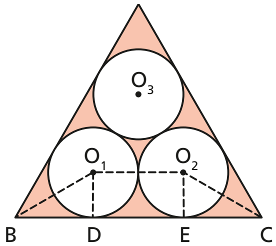
990. Seja um segmento de reta $\overline{AB}$ de medida 4a e ponto médio M. Constroem-se dois semicírculos com centros nos pontos médios de $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ e raios iguais a *a*. Com centros, respectivamente, em A e B, raios iguais a 4a, descrevem-se os arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AC}$. Calcule a área da figura assim construída (vide figura).



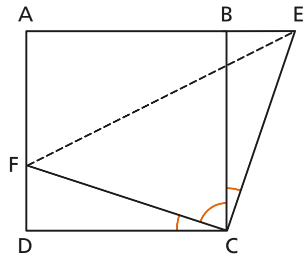
991. Consideremos o triângulo ABC, da figura ao lado, cujos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, 13 cm, 15 cm e 14 cm. A altura $\overline{CD}$ mede 12 cm, e o triângulo AEF tem área igual à metade da área do triângulo ABC. Determine a medida do segmento $\overline{AE}$, sendo $\overline{EF}$ paralelo a $\overline{CD}$.



992. Determine a área sombreada em função do lado *a* do triângulo equilátero, sabendo que os três círculos têm mesmo raio.



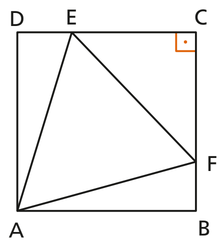
993. Na figura ao lado, calcule a distância BE, sabendo que a área do quadrado ABCD é igual a 256 cm^2, a área do triângulo ECF é igual a 200 cm^2 e $\overline{EC}$ é perpendicular a $\overline{CF}$.



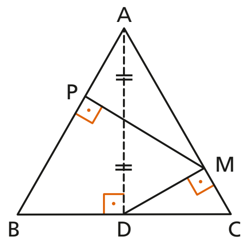
994. Determine a área de um círculo inscrito em um setor circular de 60°, sendo 12π cm o comprimento do arco do setor.

995. Determine a área do quadrilátero formado pelas bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo ABCD, sabendo que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 8 cm e 10 cm e que um de seus ângulos mede 120°.

996. Consideremos o triângulo equilátero AEF, inscrito no quadrado ABCD de lado *a*. Calcule a área desse triângulo, sabendo que $\overline{CE}$ é congruente a $\overline{CF}$.



997. ABC é um triângulo equilátero cujo lado mede $8\sqrt{3}$ cm. Determine a área do triângulo retângulo APM, sabendo que $\overline{MP} \perp \overline{AB}$, $\overline{DM} \perp \overline{AC}$ e $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

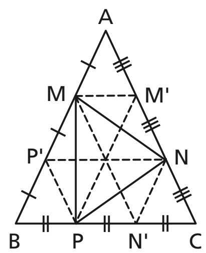


998. Determine a razão entre a área do triângulo ABC e a área do triângulo MNP da figura ao lado, sendo que:

$\overline{AM} \equiv \overline{MP'} \equiv \overline{P'B}$

$\overline{BP} \equiv \overline{PN'} \equiv \overline{N'C}$

$\overline{CN} \equiv \overline{NM'} \equiv \overline{M'A}$



999. Calcule a área de um trapézio que se obtém ligando os pontos de tangência de duas retas tangentes externas a dois círculos tangentes exteriormente, sabendo que os raios dos círculos medem 9 cm e 4 cm, e a soma das bases do trapézio 24 cm.

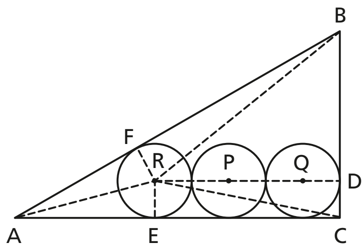
1000. Entre os triângulos de mesma base e mesmo ângulo do vértice oposto a essa base, qual o de maior área?

1001. Num terreno em forma de triângulo retângulo, de catetos 32 e 27, quer-se construir um edifício de base retangular, de lados paralelos aos catetos. Quais devem ser as dimensões da base do edifício de modo a haver maior aproveitamento do terreno?

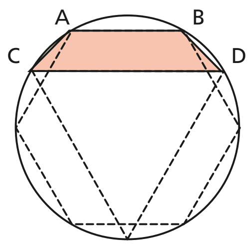
1002. Dá-se um trapézio ABCD de bases AB = a, CD = b (a > b) e de altura *h*. Demonstre que a diferença das áreas dos triângulos que têm por bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, e por vértice oposto o ponto de concurso das diagonais é $\dfrac{(a - b) \cdot h}{2}$.

1003. Calcule a área de um decágono convexo regular inscrito em um círculo de raio 2 cm.

1004. No interior de um triângulo tomamos três circunferências de mesmo raio e tangentes entre si e aos lados do triângulo, como mostra a figura. Sendo o triângulo retângulo de catetos BC = 3 cm e AC = 4 cm, determine o raio dessas circunferências.



1005. Determine a área de um trapézio, sabendo que seus lados paralelos são formados por duas cordas situadas num mesmo semicírculo de 8 cm de diâmetro e que uma das cordas é o lado de um hexágono regular inscrito e a outra o lado de um triângulo equilátero inscrito no círculo.



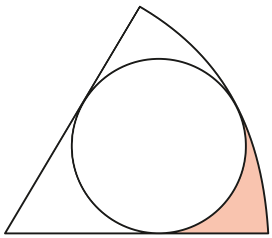
1006. Os lados de um triângulo ABC são três números inteiros consecutivos. Determine as alturas relativas a esses lados, sabendo que o número que mede a área é o dobro do que mede o perímetro do triângulo.

1007. Inscreva num círculo um retângulo de área a^2. Mostre que esse retângulo é um quadrado.

1008. A superfície de um triângulo retângulo é 120 cm^2 e sua hipotenusa vale *a* cm. Determine os catetos e o menor valor que *a* pode tomar.

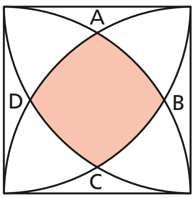
1009. Mostre que a soma das distâncias de um ponto da base de um triângulo isósceles aos lados de medidas iguais é constante.

1010. Na figura temos um setor circular de 60° e raio 18 m e uma circunferência inscrita nele. Determine a área da região sombreada.



1011. Por um ponto P, interno de um triângulo, conduzimos retas paralelas aos lados. Se as áreas dos triângulos com um vértice em P, determinados por essas retas e pelos lados do triângulo original, são A, B, C, determine a área do triângulo original.

1012. Na figura temos um quadrado de lado *a*. Os arcos têm centros nos vértices do quadrado. Determine a área da região sombreada.



CAPÍTULO XVII

Comprimento da circunferência

Conceitos e propriedades

Neste capítulo daremos uma noção sobre o cálculo do **perímetro do círculo** e do **comprimento da circunferência**.

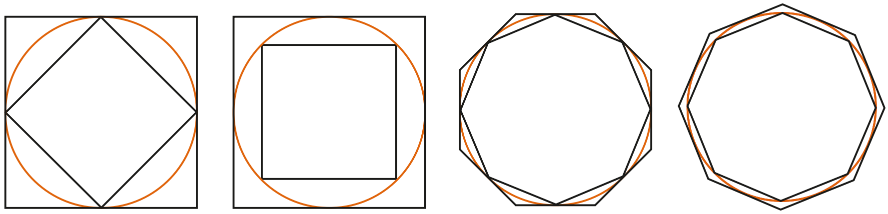
Serão citadas três propriedades que nos conduzirão ao resultado visado. Não serão feitas demonstrações rigorosas de tais propriedades, porém ficará clara a percepção das conclusões, além da sequência lógica que se deve seguir.

221. Propriedade 1

Dada uma circunferência qualquer, o perímetro de qualquer polígono convexo nela inscrito é menor que o perímetro de qualquer polígono a ela circunscrito.

Esta propriedade é geral, mas é suficiente trabalhar com polígonos regulares para percebê-la.

Seja uma circunferência de raio R. Consideremos um quadrado inscrito e o quadrado circunscrito correspondente.



Note que $R\sqrt{2}$ e $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ são lado e apótema do quadrado inscrito, enquanto 2R e R são, respectivamente, lado e apótema do quadrado circunscrito.

Sendo p_4 e P_4 os respectivos perímetros, temos $p_4 < P_4$.

Dobrando-se o número de lados (e isso é possível, vide fórmula do ℓ_{2n}), temos:

$$p_4 < p_8 \text{ e } P_8 < P_4 \text{ e ainda } p_4 < p_8 < P_8 < P_4$$

Repetindo-se a operação acima, e ela pode ser repetida indefinidamente, temos:

$$p_4 < p_8 < p_{16} < p_{32} < \ldots < P_{32} < P_{16} < P_8 < P_4$$

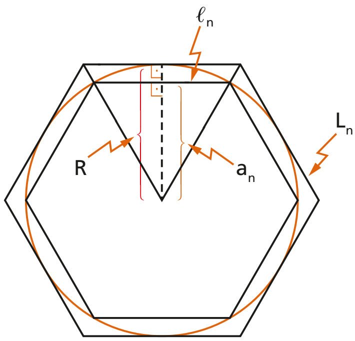
O resultado acima foi obtido iniciando-se com o quadrado. Trabalhando com polígono regular de *n* lados, temos resultado análogo, sendo bom notar que:

- P_n e R, perímetro e apótema do polígono circunscrito, e;
- p_n e a_n, perímetro e apótema do polígono inscrito;

são relacionados por semelhança entre triângulos, como segue:

$$\frac{L_n}{\ell_n} = \frac{R}{a_n} \Rightarrow \frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{a_n}$$

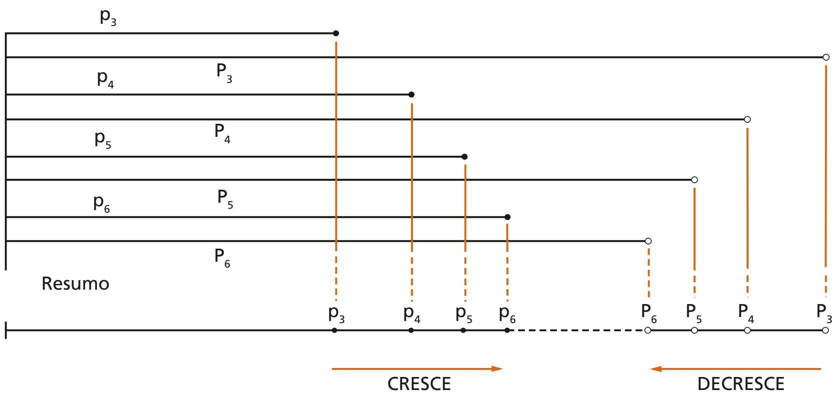
(Notemos que, conhecendo p_n, a_n e R, calculamos P_n.)



Assim, temos também:

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < \ldots < P_{48} < P_{24} < P_{12} < P_6$$

De um modo geral, mantendo constante a circunferência, aumentando-se o número de lados, o perímetro dos polígonos regulares inscritos (p_n) cresce enquanto o perímetro dos polígonos regulares circunscritos (P_n) decresce, permanecendo sempre $p_n < P_n$. A figura a seguir ilustra esse fato.



222. Propriedade 2

> Dada uma circunferência qualquer e fixado um segmento *k*, arbitrário, podem-se construir dois polígonos, um inscrito e outro circunscrito à circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros seja menor que o segmento *k* fixado.

Essa propriedade é geral, mas pode ser "percebida" através de polígonos regulares, com mais de quatro lados, como segue:

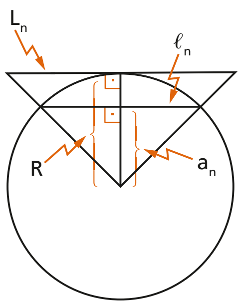
Sejam:

p_n e a_n, perímetro e apótema do inscrito

P_n e R, perímetro e apótema do circunscrito

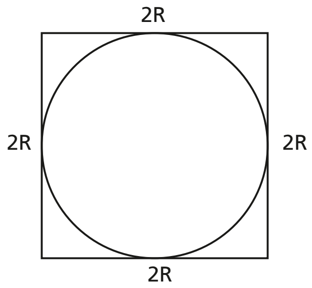
Conforme já vimos, pela semelhança sai:

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{a_n}$$



Com propriedades de proporções, vem:

$$\frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{R - a_n}{R} \Rightarrow P_n - p_n = \frac{P_n}{R}(R - a_n)$$



Mas, para todo *n* maior que 4, temos:

$P_n < P_4$, portanto, $P_n < 8R$

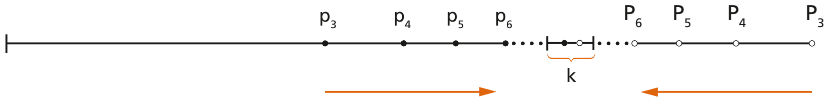
e, daí, vem:

$$P_n - p_n < \frac{8R}{R}(R - a_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n - p_n < 8(R - a_n)$$

Aumentando-se indefinidamente o número de lados (dobrando-se, por exemplo), a diferença $R - a_n$ tende para o segmento nulo. Então,

$$P_n - p_n < k, \text{ sendo } k \text{ fixado.}$$



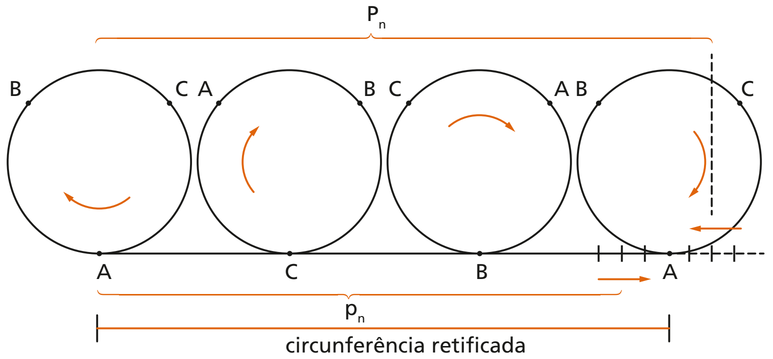
223. Nota

As duas propriedades vistas, aliadas ao postulado da continuidade, traduzem o enunciado:

> Dada uma circunferência qualquer, existe um único segmento que é maior que o perímetro de qualquer dos polígonos convexos inscritos e menor que o perímetro de qualquer dos polígonos circunscritos a essa circunferência.

224. Definições

a) Dada uma circunferência, o segmento maior que os perímetros de todos os polígonos convexos inscritos e menor que os perímetros de todos os polígonos circunscritos é chamado **segmento retificante** da circunferência, ou **circunferência retificada** ou ainda **perímetro do círculo** definido pela circunferência.



b) O comprimento do segmento retificante da circunferência, ou circunferência retificada ou perímetro do círculo, é chamado **comprimento da circunferência**.

225. Propriedade 3

> A razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro é um número constante representado por π.

Sejam duas circunferências de comprimento C e C' e raios R e R', respectivamente, e consideremos polígonos regulares de mesmo número de lados inscritos e circunscritos nessas circunferências.

Com a nomenclatura usada até aqui graças à semelhança entre os polígonos, vem:

$$\frac{p_n}{p'_n} = \frac{R}{R'} \quad \text{e} \quad \frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}$$

Devido às propriedades anteriores, vem:

$$p_n < C < P_n \quad \text{e} \quad p'_n < C' < P'_n$$

Donde:

$$\frac{p_n}{2R} < \frac{C}{2R} < \frac{P_n}{2R} \quad \text{e} \quad \frac{p'_n}{2R'} < \frac{C'}{2R'} < \frac{P'_n}{2R'}$$

Logo:

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$$

Chamando essa razão de π, vem:

$$\frac{C}{2R} = \pi \Rightarrow \boxed{C = 2\pi R}$$

226. Observação

Para se ter uma noção do número π é só analisar a tabela abaixo.

n	$\frac{p_i}{2R}$	$\frac{P_c}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188

n — número de lados de um polígono regular
P_c — perímetro dos circunscritos
p_i — perímetro dos inscritos
R — raio da circunferência

Observe, pela tabela, como vai "nascendo" o número π.

Pela tabela chegamos até $\boxed{3{,}141}\,45 < \pi < \boxed{3{,}141}\,88$.

Pode-se pensar que a tabela acima foi obtida usando o fato de que, sabendo o ℓ_6 pela fórmula do ℓ_{2n}, sabe-se o ℓ_{12}; sabendo-se o ℓ_{12}, sabe-se o ℓ_{24}, e assim sucessivamente.

Note que conforme se aumenta o número de lados obtêm-se valores aproximados de π com maior precisão (vão surgindo os algarismos do número π). Com um polígono de 192 lados, chegamos a 4 algarismos do número π.

Por ser útil, temos:

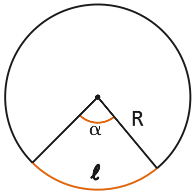
$$\pi = 3{,}1415926535\ldots \qquad \frac{1}{\pi} = 0{,}3183098861\ldots$$

227. Comprimento de um arco de circunferência

O comprimento de um arco de circunferência (ℓ) é proporcional à sua medida (α).

Para α em graus:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ ——— } 2\pi R \\ \alpha° \text{ ——— } \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{\pi R \alpha}{180}}$$



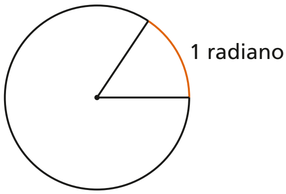
Para α em radianos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad ——— } 2\pi R \\ \alpha \text{ rad ——— } \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\ell = R\alpha}$$

Em particular, numa circunferência de raio unitário, o comprimento de um arco é numericamente igual à sua medida em radianos.

228. Observação

Chama-se radiano (rad) todo arco de circunferência cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.



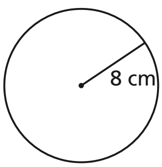
Numa circunferência (comprimento $= 2\pi R$) há 2π radianos e por conseguinte:

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 180° \times \frac{1}{\pi} = 180° \times 0{,}31831 = 57°17'38{,}4...$$

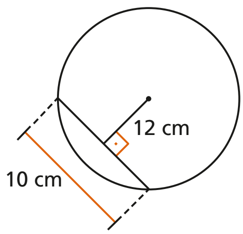
EXERCÍCIOS

733. Determine o comprimento da circunferência nos casos:

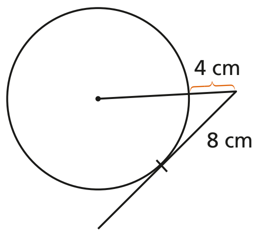
a)



b)

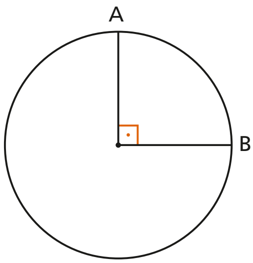


c)

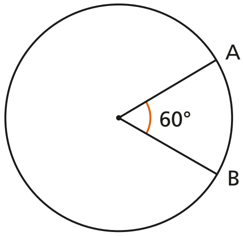


734. Determine o comprimento do arco menor $\overset{\frown}{AB}$, dado o raio de 90 cm e o ângulo central correspondente, nos casos:

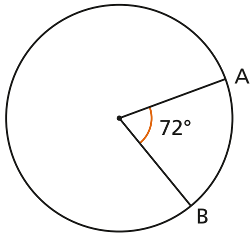
a)



b)

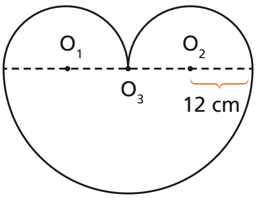


c)

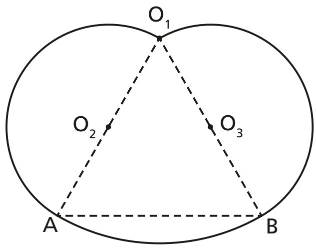


735. Determine o comprimento da linha cheia nos casos (os arcos são centrados em O_1, O_2 e O_3):

a)

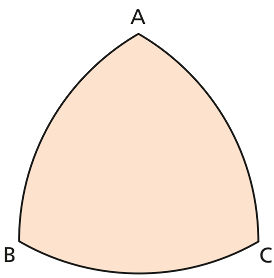


b) AO_1B é triângulo equilátero de 12 cm de lado.

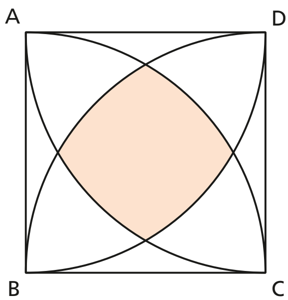


736. Determine o perímetro da figura sombreada nos casos:

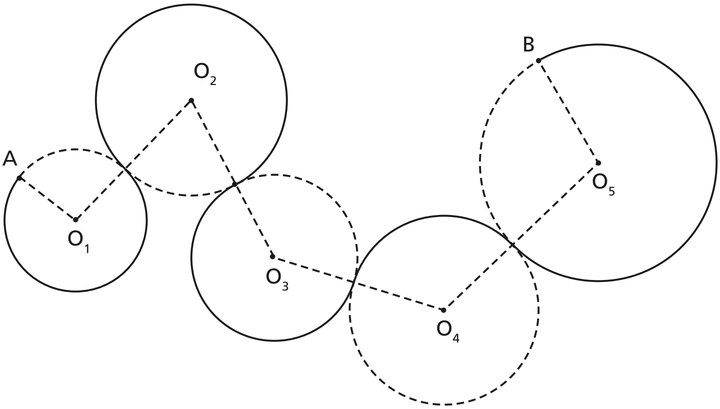
a) Os arcos têm raios de 12 m e são centrados em A, B e C.



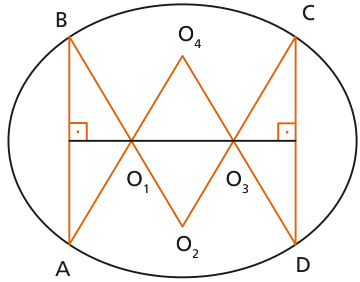
b) ABCD é um quadrado de 48 m de lado e os arcos são centrados em A, B, C e D.



737. Se os ângulos de vértices O_1, O_2, O_3, O_4 e O_5 medem, respectivamente, 90°, 72°, 135°, 120° e 105° e os raios das circunferências de centros nesses vértices medem, respectivamente, 18 cm, 35 cm, 24 cm, 36 cm e 48 cm, determine o comprimento da linha cheia AB.



738. O traçado de uma pista representada na figura ao lado é composto dos arcos de circunferências $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ e $\widehat{DA}$, centrados respectivamente em O_1, O_2, O_3 e O_4. Se os triângulos $O_1O_2O_3$ e $O_1O_3O_4$ são equiláteros de $60\ m$ de lado e $AB = 120\sqrt{3}\ m$, determine o comprimento da pista.



739. Um círculo tem 4 cm de raio. Calcule o comprimento de sua circunferência.

740. Dê o raio de uma circunferência cujo comprimento é igual ao de uma semicircunferência de 5 cm de raio.

741. O comprimento de uma circunferência é de 12,56 cm aproximadamente. Calcule o raio. Adote π com duas casas decimais.

742. O comprimento de uma circunferência é de 12π cm. Determine o raio de outra circunferência cujo comprimento é a quarta parte da primeira.

743. Dada uma circunferência de diâmetro *d*, calcule o comprimento de um arco cujo ângulo central correspondente é:

a) 30°   c) 60°   e) 120°   g) 150°
b) 45°   d) 90°   f) 135°

744. Se o raio de uma circunferência aumenta 1 m, quanto aumenta o comprimento?

745. Aumentando em 2 m o raio de uma circunferência, em quanto aumentará o seu comprimento? O que ocorre com o comprimento se o raio for aumentado em 3 m? E se o raio for aumentado *a* metros?

746. A circunferência C_1, de raio R_1 e perímetro $p_1 = 10^3$, é concêntrica à circunferência C_2, de raio R_2 e perímetro $p_2 = 1 + 10^3$. Calcule $R_2 - R_1$.

747. Duplicando o raio de uma circunferência, o que ocorre com seu comprimento?

748. Um arco de comprimento $2\pi R$ de uma circunferência de raio 2R subentende um arco de quantos graus?

749. Quanto aumenta o raio de uma circunferência quando seu comprimento aumenta 5 metros?

750. Em quanto aumenta o comprimento de uma circunferência cujo raio sofreu um aumento de 50%?

751. Determine o ângulo que subentende um arco de 2 cm de comprimento numa circunferência de 1 cm de raio.

752. Se o raio de um círculo aumenta em *k* unidades, o que ocorre com o comprimento da circunferência?

753. Um arco de circunferência de comprimento $2\pi R$, de uma circunferência de raio G, que ângulo central subentende?

754. As rodas de um automóvel têm 32 cm de raio. Que distância percorreu o automóvel depois que cada roda deu 8 000 voltas?

Solução

$C = 2\pi R \Rightarrow C = 2\pi \cdot 32 = 64\pi$

$d = 8000\ C \Rightarrow d = 8000 \times 64\pi \Rightarrow d = 512000\pi$

Resposta: $512000\ \pi$ cm $\cong 16085$ m.

755. Uma pista circular foi construída por duas circunferências concêntricas, cujos comprimentos são de 1 500 m e 1 200 m aproximadamente. Quanto mede sua largura?

756. Um ciclista percorreu 26 km em 1 h e 50 minutos. Se as rodas da bicicleta têm 40 cm de raio, quantas voltas aproximadamente deu cada roda e quantas por minuto?

757. As rodas dianteiras de um carro têm 1 m de raio e dão 25 voltas ao mesmo tempo em que as traseiras dão 20 voltas. Calcule o raio das rodas traseiras e quanto percorreu o carro depois que as rodas dianteiras deram 100 voltas cada uma.

758. Os ponteiros de um relógio medem 1 cm e 1,5 cm, respectivamente. A circunferência descrita pelo ponteiro maior tem comprimento maior que a circunferência descrita pelo ponteiro menor. Determine essa diferença.

759. Um menino brinca com um aro de 1 m de diâmetro. Que distância percorreu o menino ao dar 100 voltas com o aro?

760. Um carpinteiro vai construir uma mesa redonda para acomodar 6 pessoas sentadas ao seu redor. Determine o diâmetro dessa mesa para que cada pessoa possa dispor de um arco de 50 cm de mesa.

761. As rodas dianteiras de um caminhão têm 50 cm de raio e dão 25 voltas no mesmo tempo em que as rodas traseiras dão 20 voltas. Determine o diâmetro das rodas traseiras.

762. Uma pista circular está limitada por duas circunferências concêntricas cujos comprimentos valem, respectivamente, 3 000 m e 2 400 m. Determine a largura da pista.

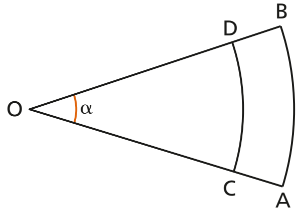
763. Para ir de um ponto A a um ponto B posso percorrer a semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e centro O. Se percorrer as duas semicircunferências de diâmetros $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$, terei percorrido um caminho maior ou menor?

764. Quantas voltas dá uma das rodas de um carro num percurso de 60 km, sabendo que o diâmetro dessa roda é igual a 1,20 m?

765. Uma corda determina em um círculo um arco que mede 80°. Sendo 20 cm o comprimento desse arco, determine a medida do raio desse círculo.

766. O comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ é 1 cm, o ângulo central do setor circular delimitado por esse arco mede 60°. Determine o raio do círculo ao qual pertence esse setor.

767. Na figura ao lado, calcule a medida do ângulo central α, sabendo que os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ medem respectivamente 100 cm e 80 cm, e que CA = DB = 25 cm. Os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ são centrados em O.



768. Num círculo uma corda de 3 cm dista 2 cm do centro. Calcule o comprimento da circunferência.

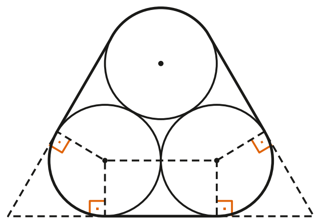
769. Determine o comprimento de uma circunferência circunscrita a um quadrado de 4 cm de lado.

770. Uma corda $\overline{AB}$, distando 3 cm do centro de um círculo de diâmetro 12 cm, determina nesse círculo dois arcos. Determine a razão entre a medida do maior e a do menor arco desse círculo.

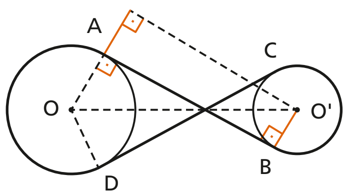
771. Calcule o comprimento de uma circunferência inscrita em um quadrado de 10 cm de diagonal.

772. O comprimento de um circunferência é de 8π cm. Determine o raio da circunferência e o perímetro do quadrado inscrito.

773. Na figura ao lado, os três círculos têm mesmo raio *r* igual a 10 cm. Determine o comprimento da correia que envolve os três círculos.



774. Na figura ao lado, determine o comprimento da corrente que envolve as duas rodas, sabendo que o raio da roda menor mede 2 cm e o raio da roda maior 4 cm e a distância entre os centros das duas rodas mede 12 cm.



775. Sejam um círculo *c* de centro O, de raio R = 1, diâmetro $\overline{AA'}$ e a tangente *t* em A ao círculo *c*. Sendo $\overline{AB}$ um lado do hexágono regular inscrito em *c*, a mediatriz de $\overline{AB}$ corta a reta *t* em C. Construamos sobre *t* o segmento $\overline{CD}$ = 3R. Mostre que o comprimento $\overline{A'D}$ é um valor aproximado de π.