OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria plana

9

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO XII

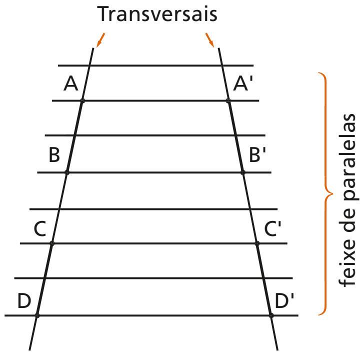
Teorema de Tales

I. Teorema de Tales

174. Definições

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.

Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.



Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.

Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.

A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes.

$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ são segmentos correspondentes.

175. Propriedade

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é divido em *p* partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:

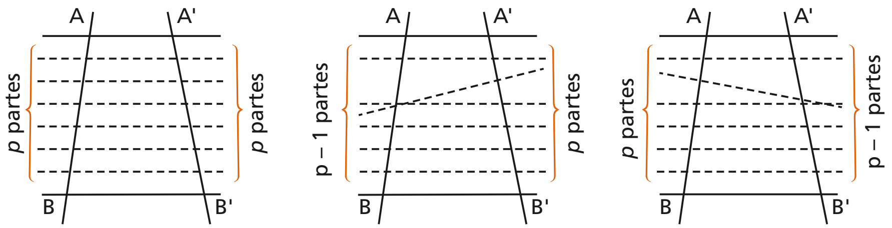
1º) também é dividido em *p* partes;

2º) e essas partes também são congruentes entre si.

Demonstração:

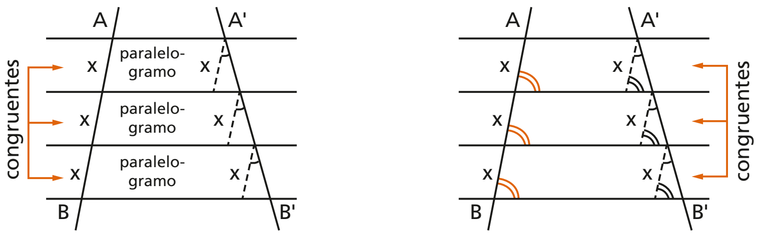
1ª parte: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são segmentos correspondentes e $\overline{AB}$ é dividido em *p* partes por retas do feixe.

Se $\overline{A'B'}$ ficasse dividido em menos partes (ou mais partes), pelo menos duas retas do feixe encontrar-se-iam em pontos de $\overline{AB}$ (ou de $\overline{A'B'}$), o que é absurdo, pois as retas do feixe são paralelas.



2ª parte: $\overline{AB}$ é dividido em partes congruentes a *x*.

Pelos pontos de divisão de $\overline{A'B'}$, conduzindo paralelas a $\overline{AB}$, obtemos um triângulo para cada divisão. Todos os triângulos são congruentes pelo caso ALA (basta notar os paralelogramos e os ângulos de lados respectivamente paralelos que são obtidos).



Com isso, $\overline{A'B'}$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

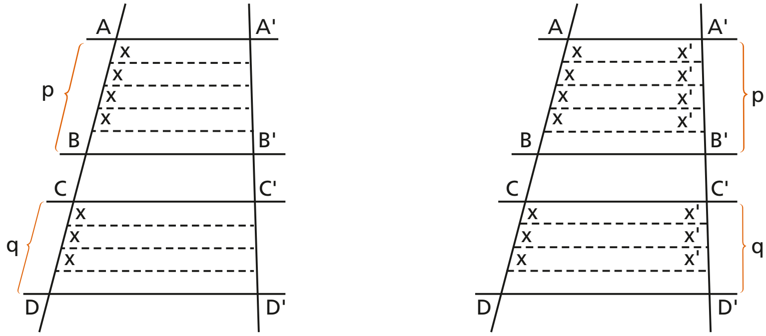
176. Teorema de Tales

> Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos **quaisquer** de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Hipótese		Tese
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos correspondentes da outra.	$\Rightarrow$	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$

Demonstração:

1º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.



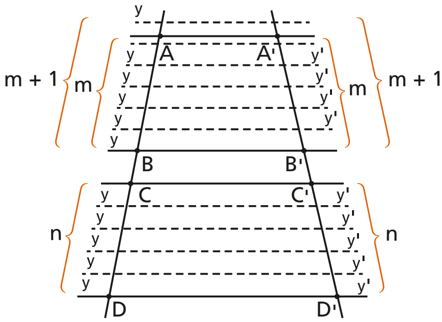
Existe um segmento *x* que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = px \\ \overline{CD} = qx \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (vide figura acima) e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A'B'} = px' \\ \overline{C'D'} = qx' \end{array}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.



2º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis.

Não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Tomamos um segmento *y* submúltiplo de $\overline{CD}$ (*y* cabe um certo número inteiro *n* de vezes em $\overline{CD}$), isto é:

$$\overline{CD} = n \cdot y$$

Por serem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ incomensuráveis, marcando sucessivamente *y* em $\overline{AB}$, para um certo número inteiro *m* de vezes acontece que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m + 1)y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left.\begin{matrix} my < \overline{AB} < (m+1)y \\ ny = \overline{CD} = ny \end{matrix}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \qquad (3)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\overline{C'D'} = ny'$$
$$my' < \overline{A'B'} < (m + 1)y'$$

Operando com as relações acima, temos:

$$\left.\begin{matrix} my' < \overline{A'B'} < (m+1)y' \\ ny' = \overline{C'D'} = ny' \end{matrix}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \qquad (4)$$

Ora, *y* é um submúltiplo de $\overline{CD}$ que se pode variar; dividindo *y*, aumentamos *n* e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ pela expressão (3), e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela expressão (4).

Como esse número é único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Nota

Vale também a igualdade:

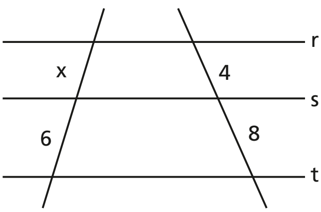
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$, que permite concluir:

A razão entre segmentos correspondentes é constante.

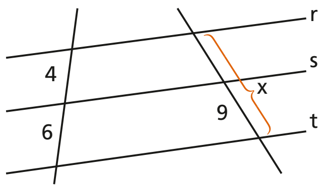
EXERCÍCIOS

413. Determine o valor de *x* em cada caso abaixo, sendo *r*, *s* e *t* retas paralelas.

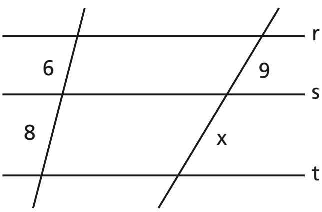
a)



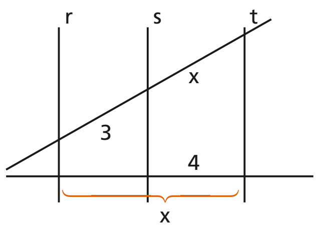
c)



b)

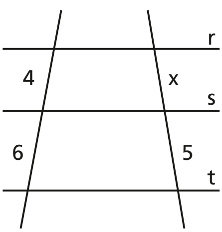


d)

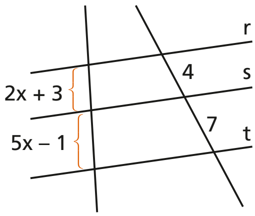


414. Nas figuras, as retas *r*, *s* e *t* são paralelas. Determine os valores de *x* e *y*.

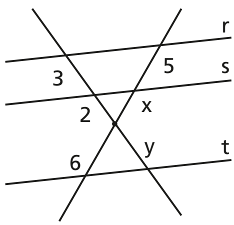
a)



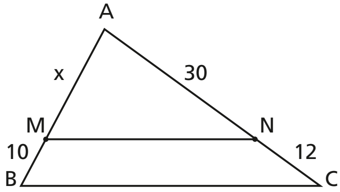
b)



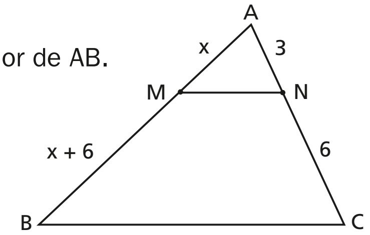
c)



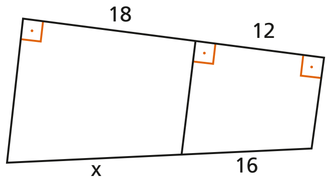
415. Na figura, $\overline{MN}$ é paralela à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC. Calcule o valor de x.



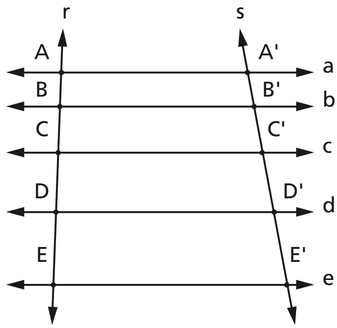
416. Na figura, $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$. Calcule o valor de AB.



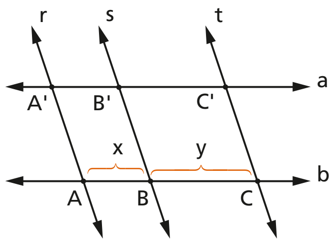
417. Na figura, calcule o valor de x.



418. Na figura ao lado, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ medem, respectivamente, 8 cm, 10 cm, 12 cm e 15 cm. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{D'E'}$, sabendo que $\overline{A'E'}$ mede 54 cm, e que as retas a, b, c, d, e são paralelas.

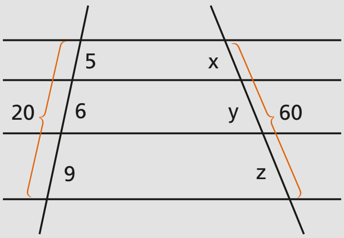


419. Na figura ao lado, r // s // t. Determine as medidas x e y, sabendo que são proporcionais a 2 e a 3, que o segmento $\overline{A'C'}$ mede 30 cm e que as retas a e b são paralelas.



420. Um feixe de 4 paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem 5 cm, 6 cm e 9 cm, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos que esse mesmo feixe determine sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e a quarta paralela mede 60 cm.

Solução



$$\frac{x}{5} = \frac{60}{20} \Rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{6} = \frac{60}{20} \Rightarrow y = 18 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{z}{9} = \dfrac{60}{20} \text{ ou} \\ z = 60 - 15 - 18 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 27 \text{ cm}$$

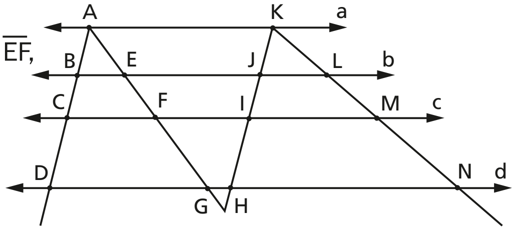
421. Um feixe de cinco paralelas determina sobre uma transversal quatro segmentos que medem, respectivamente, 5 cm, 8 cm, 11 cm e 16 cm. Calcule o comprimento dos segmentos que esse mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre as paralelas extremas mede 60 cm.

422. Um triângulo ABC tem os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medindo 24 cm e 20 cm, respectivamente. Sobre o lado $\overline{AC}$, a 6 cm do vértice C, tomamos um ponto M. Determine a distância de um ponto N situado sobre o lado $\overline{BC}$, até o vértice C, de maneira que $\overline{MN}$ seja paralelo a $\overline{AB}$.

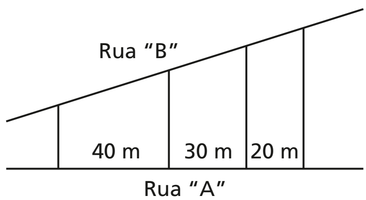
423. No triângulo ABC, o lado $\overline{AC}$ mede 32 cm e o lado $\overline{BC}$, 36 cm. Por um ponto M situado sobre $\overline{AC}$, a 10 cm do vértice C, traçamos a paralela ao lado $\overline{AB}$, a qual divide $\overline{BC}$ em dois segmentos, $\overline{BN}$ e $\overline{CN}$. Determine a medida de $\overline{CN}$.

424. Na figura abaixo, onde a // b // c // d, temos que: AD + AG + HK + KN = 180 cm; $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{2}$, $\frac{JK}{AB} = \frac{9}{5}$, $\frac{KL}{AB} = \frac{27}{10}$; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais a 2, 3 e 4, respectivamente.

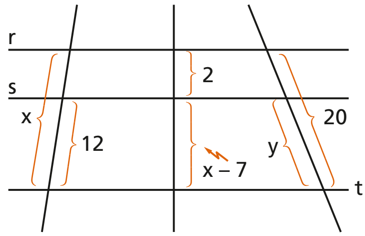
Calcule as medidas dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{LM}$ e $\overline{CD}$.



425. Três terrenos têm frente para a rua "A" e para a rua "B", como na figura ao lado. As divisas laterais são perpendiculares à rua "A". Qual a medida de frente para a rua "B" de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é 180 m?



426. Determine x e y, sendo r, s e t retas paralelas.



427. Dados um triângulo ABC e um segmento $\overline{DE}$ com D em $\overline{AB}$ e E em $\overline{AC}$, prove que, se AD : DB = AE : EC, então $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

II. Teorema das bissetrizes

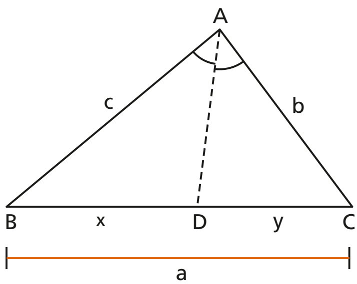
177. Teorema da bissetriz interna

> Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.

O enunciado acima deve ser entendido como segue.

Sendo ABC o triângulo de lados a, b e c, $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (conforme a figura ao lado), DB = x e DC = y, teremos:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

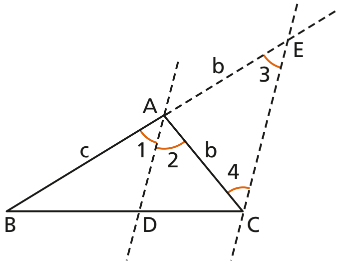


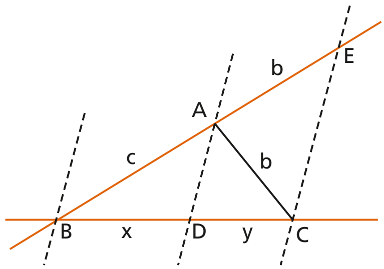
O lado BC = a é dividido em dois segmentos aditivos, pois $\overline{DB} + \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, x + y = a.

E com esta nomenclatura temos, então:

Hipótese		Tese
$\overline{AD}$ bissetriz interna do $\triangle$ABC	$\Rightarrow$	$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$

Demonstração:





Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $B\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}C = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$, e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{1} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{2} \equiv \hat{4}$ (alternos internos)

Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \Rightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Rightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Rightarrow AE = b$.

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, vem:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}, \text{ ou seja, } \frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

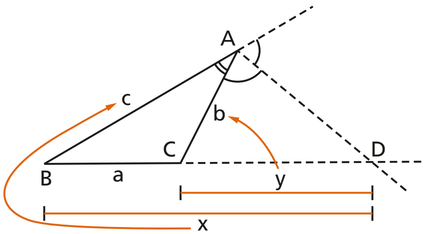
178. Teorema da bissetriz externa

> Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes.

O enunciado anterior deve ser entendido como segue:

Sendo ABC o triângulo de lados a, b, c, $\overline{AD}$ a bissetriz externa com D na reta $\overleftrightarrow{BC}$ (conforme figura), $\overline{DB} = x$ e $\overline{DC} = y$, teremos:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

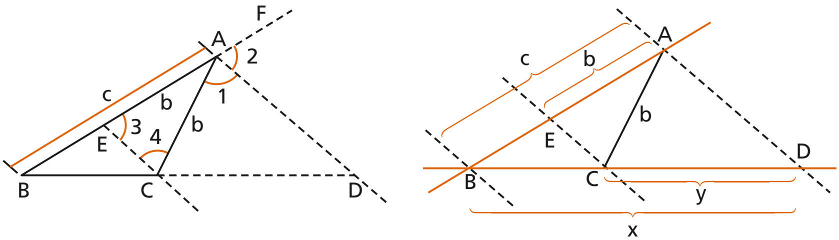


O lado $\overline{BC} = a$ é dividido externamente em segmentos subtrativos, pois $\overline{DB} - \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, $x - y = a$.

Com esta nomenclatura, temos:

Hipótese		Tese
$\overline{AD}$ bissetriz externa do $\triangle ABC$	$\Rightarrow$	$\dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$

Demonstração:



Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ $(\overleftrightarrow{CE} \,//\, \overleftrightarrow{AD})$.

Fazendo $C\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}F = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$ e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE} \,//\, \overleftrightarrow{AD} \quad \Rightarrow \quad \hat{2} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{CE} \,//\, \overleftrightarrow{AD} \quad \Rightarrow \quad \hat{1} \equiv \hat{4}$ (alternos internos)

Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

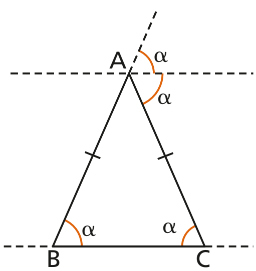
$\hat{3} \equiv \hat{4} \Rightarrow \triangle ACE$ é isóceles de base $\overline{CE} \Rightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Rightarrow AE = b$

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, vem:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}$, ou seja, $\dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$

Nota

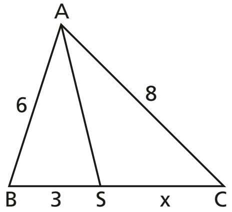
Se o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, então a bissetriz do ângulo externo em A é paralela à base $\overline{BC}$ e reciprocamente.



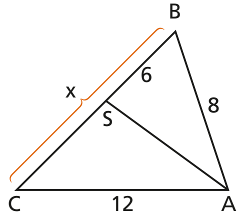
EXERCÍCIOS

428. Se $\overline{AS}$ é bissetriz de $\hat{A}$, calcule x nos casos:

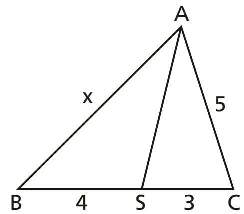
a)



b)

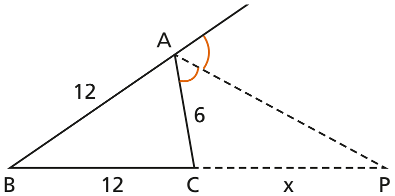


c)

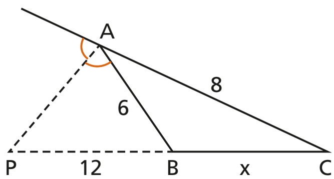


429. Se $\overline{AP}$ é bissetriz do ângulo externo em A, determine x.

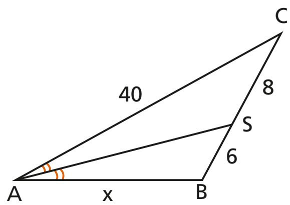
a)



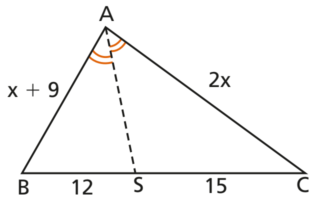
b)



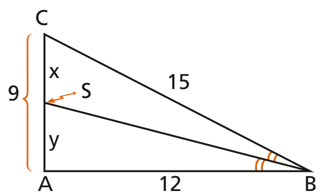
430. Na figura, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$. Calcule o valor de x.



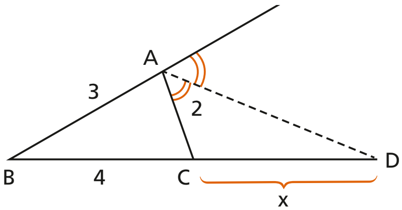
431. Na figura, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$. Calcule x.



432. Na figura, calcule os valores de x e y, respectivamente, sendo $\overline{BS}$ a bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$.

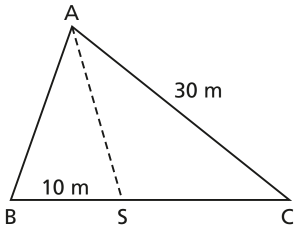


433. Na figura, $\overline{AD}$ é bissetriz externa do ângulo Â. Calcule *x*.

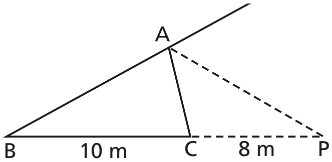


434. Determine a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC:

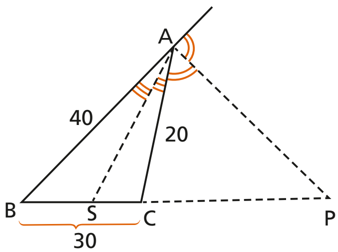
a) $\overline{AS}$ é bissetriz e o perímetro do △ABC é 75 m



b) AP é bissetriz do ângulo externo em A e o perímetro do △ABC é 23 m



435. No triângulo ABC da figura ao lado, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo Â e $\overline{AP}$ é bissetriz externa. Calcule a medida do segmento $\overline{SP}$.

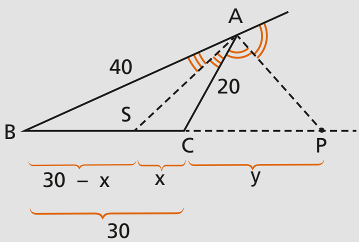


Solução

T. biss. int $\Rightarrow \dfrac{x}{20} = \dfrac{30 - x}{40} \Rightarrow x = 10$

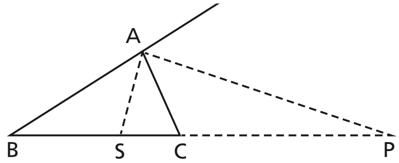
T. biss. ext $\Rightarrow \dfrac{y}{20} = \dfrac{30 + y}{40} \Rightarrow y = 30$

$SP = x + y \Rightarrow SP = 10 + 30 \Rightarrow SP = 40$



436. Os lados de um triângulo medem 5 cm, 6 cm e 7 cm. Em quanto é preciso prolongar o lado menor para que ele encontre a bissetriz do ângulo externo oposto?

437. Sendo $\overline{AS}$ e $\overline{AP}$ bissetrizes dos ângulos interno e externo em A, determine o valor de $\overline{CP}$, dados BS = 8 m e SC = 6 m.



438. A bissetriz interna do ângulo Â de um triângulo ABC divide o lado oposto em dois segmentos que medem 9 cm e 16 cm. Sabendo que $\overline{AB}$ mede 18 cm, determine a medida de $\overline{AC}$.

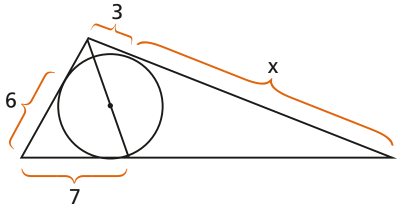
439. O perímetro de um triângulo ABC é 100 m. A bissetriz interna do ângulo Â divide o lado oposto $\overline{BC}$ em dois segmentos de 16 m e 24 m. Determine os lados desse triângulo.

440. A bissetriz interna $\overline{AD}$ de um triângulo ABC divide o lado oposto em dois segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ de medidas 24 cm e 30 cm, respectivamente. Sendo $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente iguais a 2x + 6 e 3x, determine o valor de *x* e as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

441. A bissetriz externa $\overline{AS}$ de um triângulo ABC determina sobre o prolongamento do lado $\overline{BC}$ um segmento $\overline{CS}$ de medida *y*. Sendo os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, o triplo e o dobro do menor segmento determinado pela bissetriz interna $\overline{AP}$ sobre o lado $\overline{BC}$ que mede 20 cm, determine o valor de *y*.

442. Os lados de um triângulo medem 8 cm, 10 cm e 12 cm. Em quanto precisamos prolongar o menor lado para que ele encontre a bissetriz do ângulo externo oposto a esse lado?

443. Considerando as medidas indicadas na figura e sabendo que o círculo está inscrito no triângulo, determine *x*.



444. Consideremos um triângulo ABC de 15 cm de perímetro. A bissetriz externa do ângulo Â desse triângulo encontra o prolongamento do lado $\overline{BC}$ em um ponto S. Sabendo que a bissetriz interna do ângulo Â determina sobre $\overline{BC}$ dois segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{PC}$ de medidas 3 cm e 2 cm, respectivamente, determine as medidas dos lados do triângulo e a medida do segmento $\overline{CS}$.

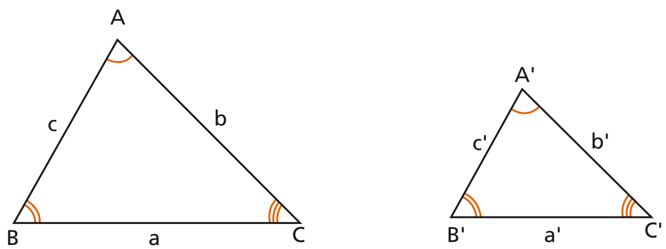
CAPÍTULO XIII

Semelhança de triângulos e potência de ponto

I. Semelhança de triângulos

179. Definição

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos **ordenadamente congruentes** e os lados **homólogos** proporcionais.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \left(\begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \quad \text{e} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \right)$$

$\sim$: semelhante

Dois lados homólogos (*homo* = mesmo, *logos* = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

180. Razão de semelhança

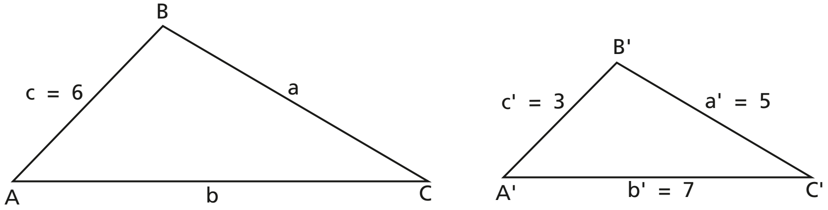
Sendo *k* a razão entre os lados homólogos,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

k é chamado razão de semelhança dos triângulos.
Se $k = 1$, os triângulos são congruentes.

181. Exemplo:

Sendo dado que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, que os lados do segundo têm medidas $A'B' = 3$ cm, $A'C' = 7$ cm e $B'C' = 5$ cm e que a medida do lado $\overline{AB}$ do primeiro é 6 cm, vamos obter a razão de semelhança dos triângulos e os outros dois lados do primeiro triângulo.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{6}{3} = 2$$

A razão de semelhança é 2.

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{5} = 2 \Rightarrow a = 10 \\ \dfrac{b}{7} = 2 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$$

Os outros dois lados do primeiro triângulo medem $BC = 10$ cm e $AC = 14$ cm.

182. Propriedades

Da definição de triângulos semelhantes decorrem as propriedades:

a) Reflexiva: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

b) Simétrica: $\triangle ABC \sim \triangle RST \iff \triangle RST \sim \triangle ABC$

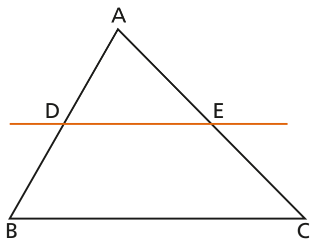
c) Transitiva: $\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \sim \triangle RST \\ \triangle RST \sim \triangle XYZ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle XYZ$

183. Teorema fundamental

> Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Hipótese		Tese
$\overleftrightarrow{DE} \mathbin{//} \overleftrightarrow{BC}$	$\Rightarrow$	$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Demonstração:



Para provarmos a semelhança entre $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$, precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais:

1º) Ângulos congruentes

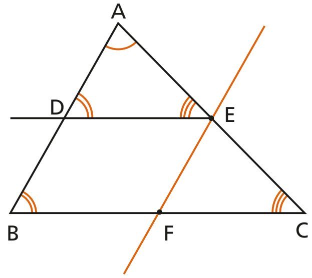
$\overleftrightarrow{DE} \mathbin{//} \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow (\hat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C})$ (ângulos correspondentes)

então, temos: $\hat{D} \equiv \hat{B}$, $\hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ comum (1)

2º) Lados proporcionais

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



Por E construímos $\overleftrightarrow{EF}$ paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, com F em $\overline{BC}$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Paralelogramo BDEF} & \Rightarrow & \overline{DE} \equiv \overline{BF} \\ \text{Teorema de Tales} & \Rightarrow & \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

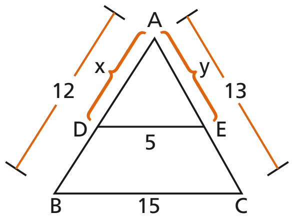
Logo, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (2)

3º) Conclusão

(1) e (2) $\Rightarrow$ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

184. Exemplo:

Um triângulo ABC tem os lados AB = 12 cm, AC = 13 cm e BC = 15 cm. A reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo determina um triângulo ADE, em que DE = 5 cm. Vamos calcular AD = x e AE = y.



Basta aplicar o teorema fundamental:

$$\overleftrightarrow{DE} \;/\!/\; \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{13} = \frac{5}{15} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = \frac{13}{3}$$

Logo, AD = 4 cm e AE = $\dfrac{13}{3}$ cm.

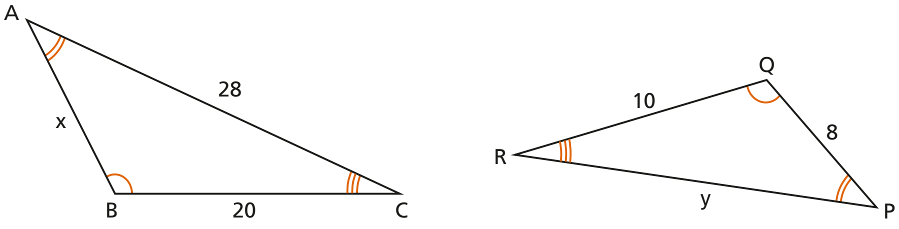
EXERCÍCIOS

445. Os triângulos ABC e A'B'C' da figura são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$). Se a razão de semelhança do 1º para o 2º é $\dfrac{3}{2}$, determine:

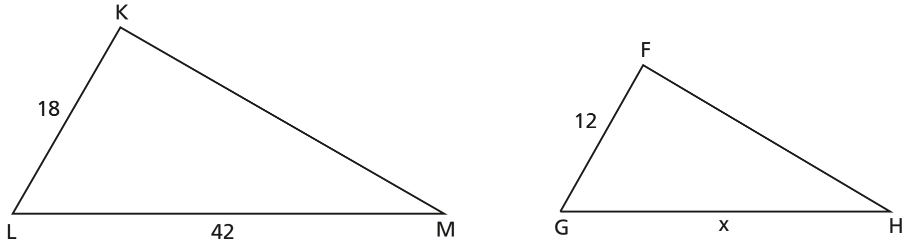
a) *a*, *b* e *c*

b) a razão entre os seus perímetros

446. Os triângulos ABC e PQR são semelhantes. Determine *x* e *y*.



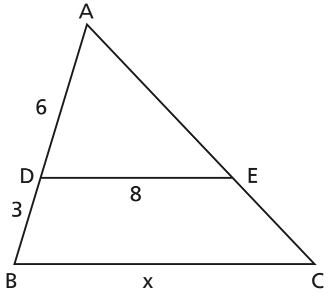
447. Se o △KLM é semelhante ao △FGH, determine *x*.



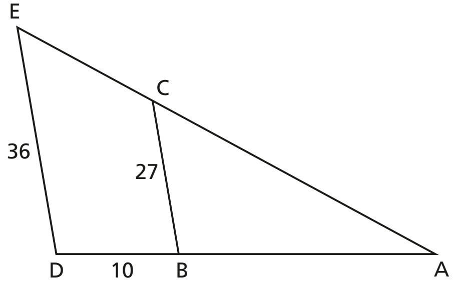
448. Os três lados de um triângulo ABC medem 8 cm, 18 cm e 16 cm. Determine os lados de um triângulo A'B'C' semelhante a ABC, sabendo que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é igual a 3.

449. Se $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, determine *x* nos casos:

a)



b) x = AD

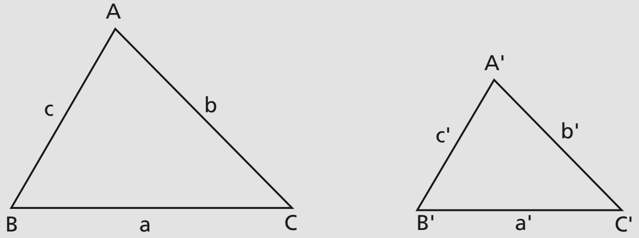


450. De um △ABC sabemos que AB = 20 m, BC = 30 m e AC = 25 m. Se D está em $\overline{AB}$, E em $\overline{AC}$, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e DE = 18 m, determine x = DB e y = EC.

451. Mostre que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é *k*, então a razão entre seus perímetros é também *k*.

Solução

Dados os triângulos semelhantes ABC e A'B'C' e sendo *k* a razão de semelhança, temos:



$2p = a + b + c$ $\qquad$ $2p' = a' + b' + c'$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = ka' \\ b = kb' \\ c = kc' \end{cases}$$

$$\frac{2p}{2p'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = \frac{ka' + kb' + kc'}{a' + b' + c'} = \frac{k(a' + b' + c')}{a' + b' + c'} = k$$

452. Dois triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes. Sabendo que o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC mede 20 cm e que seu homólogo $\overline{A'B'}$ do triângulo A'B'C' mede 40 cm, determine o perímetro do triângulo ABC, sabendo que o perímetro do triângulo A'B'C' é 200 cm.

453. O perímetro de um triângulo é 60 m e um dos lados tem 25 m. Qual o perímetro do triângulo semelhante cujo lado homólogo ao lado dado mede 15 m?

454. Os lados de um triângulo medem 8,4 cm, 15,6 cm e 18 cm. Esse triângulo é semelhante a um triângulo cujo perímetro mede 35 cm. Calcule o maior lado do segundo triângulo.

455. Num triângulo ABC os lados medem AB = 4 cm, BC = 5 cm e AC = 6 cm. Calcule os lados de um triângulo semelhante a ABC, cujo perímetro mede 20 cm.

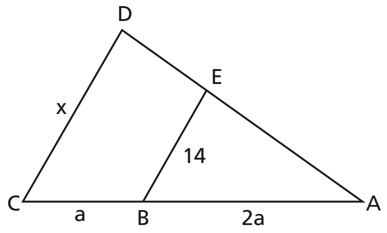
456. Um triângulo cujos lados medem 12 m, 18 m e 20 m é semelhante a outro cujo perímetro mede 30 m. Calcule a medida do menor dos lados do triângulo menor.

457. Na figura, $AB = 2(BC)$ e $BE = 14$.

Calcule CD, sabendo que $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

$AB = 2a$, $BC = a$

$BE = 14$ e $CD = x$



458. As bases de um trapézio medem 12 m e 18 m e os lados oblíquos às bases medem 5 m e 7 m. Determine os lados do menor triângulo que obtemos ao prolongar os lados oblíquos às bases.

II. Casos ou critérios de semelhança

185. 1º caso

> "Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

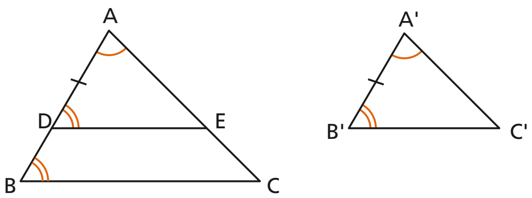
Hipótese Tese

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC,\ \triangle A'B'C' \\ \hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Demonstração:

Vamos supor que os triângulos não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

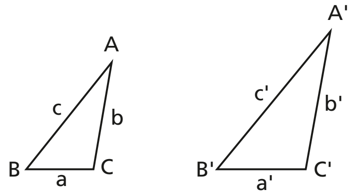
Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e o triângulo ADE com $\hat{D} \equiv \hat{B}'$ e E no lado $\overline{AC}$.



$$\left.\begin{array}{l} (\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \overline{AD} \equiv \overline{A'B'},\ \hat{D} \equiv \hat{B}') \overset{\text{ALA}}{\Rightarrow} \triangle ADE \equiv \triangle A'B'C' \\ \left.\begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{B}' \equiv \hat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow \overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

186. Esquema e exemplo de aplicação do 1º caso

Esquema:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow$$

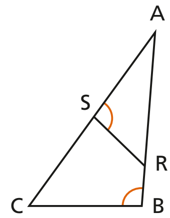
$$\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Isto é:

Se dois triângulos têm dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes e daí decorre que têm lados homólogos proporcionais.

("2 ângulos congruentes ⇒ triângulos semelhantes ⇒ lados proporcionais")

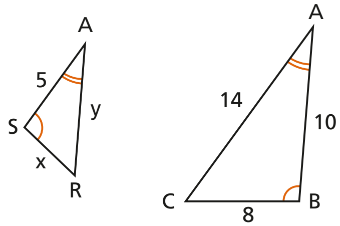
Exemplo:



Na figura ao lado, dado que $\hat{S} \equiv \hat{B}$, $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 14$ cm e $AS = 5$ cm, vamos calcular $RS = x$ e $AR = y$.

(Note que $\overleftrightarrow{RS}$ não é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.)

Iniciamos por notar que o ângulo $\hat{A}$ é comum a dois triângulos. A seguir separamos estes triângulos colocando nas figuras os "dados" e os "pedidos".



$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} \text{ é comum} \\ \hat{S} \equiv \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ARS \sim \triangle ACB \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{x}{8} = \frac{y}{14} = \frac{5}{15} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 4 \\[2mm] \dfrac{y}{14} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 7 \end{cases}$$

Logo, $RS = 4$ cm e $AR = 7$ cm.

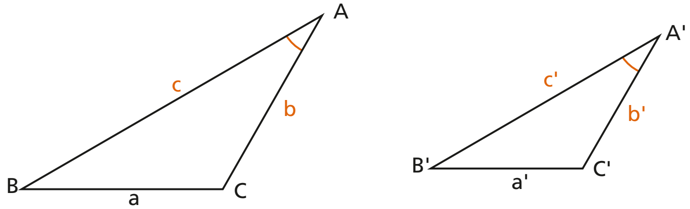
(*) Nos numeradores colocamos os lados de um dos triângulos e nos denominadores os homólogos do outro.

187. 2º caso

"Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

A demonstração é análoga à do 1º caso, usando-se o caso de congruência LAL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue:



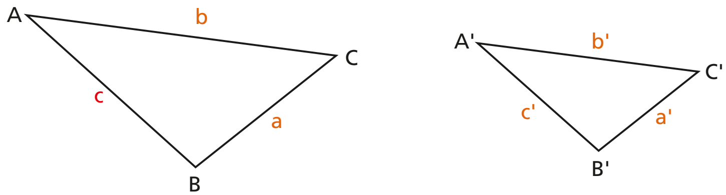
$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} = k \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \Rightarrow \left(\dfrac{a}{a'} = k,\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}'\right)$$

188. 3º caso

"Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."

A demonstração deste caso é análoga à do 1º caso, usando-se o caso de congruência LLL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue:



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \Rightarrow \quad (\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}')$$

189. Observações:

Com base nos casos de semelhança, podemos ter os resultados seguintes.

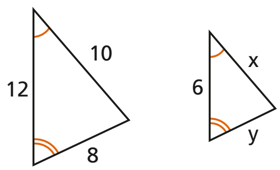
Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então:

a razão entre lados homólogos é k;
a razão entre os perímetros é k;
a razão entre as alturas homólogas é k;
a razão entre as medianas homólogas é k;
a razão entre as bissetrizes internas homólogas é k;
a razão entre os raios dos círculos inscritos é k;
a razão entre os raios dos círculos circunscritos é k;
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
a razão entre dois elementos lineares homólogos é *k*;
e os ângulos homólogos são congruentes.

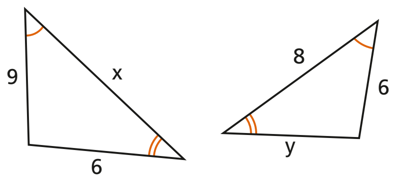
EXERCÍCIOS

459. Se ângulos com "marcas iguais" são congruentes, determine as incógnitas nos casos:

a)

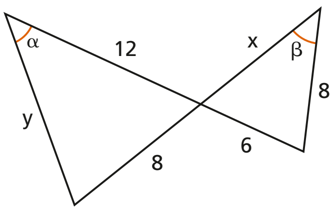


b)

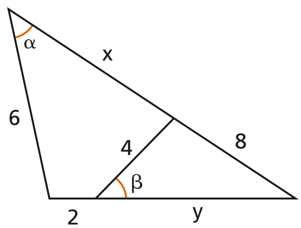


460. Se $\alpha = \beta$, determine x e y nos casos:

a)

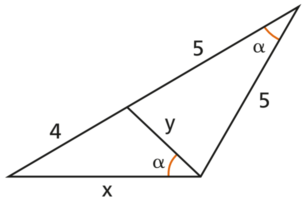


b)

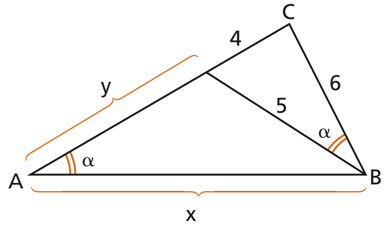


461. Determine x e y nos casos:

a)

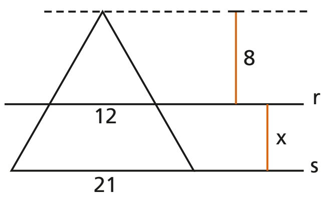


b)

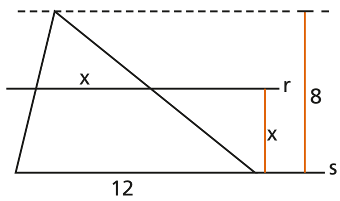


462. Sendo r e s retas paralelas, determine x nos casos:

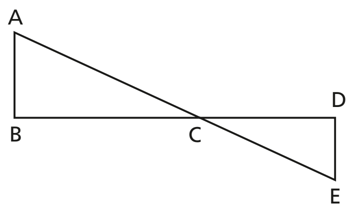
a)



b)



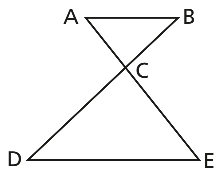
463. Se $\overline{AB}$ // $\overline{ED}$, DE = 4 cm, CD = 2 cm e BC = 6 cm, calcule a medida de $\overline{AB}$.



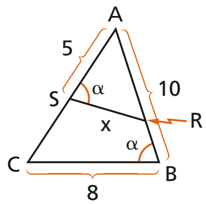
464. Na figura abaixo, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$.

a) Prove que os triângulos ABC e EDC são semelhantes.

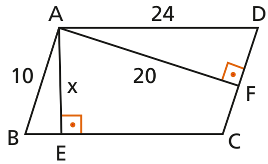
b) Sendo AB = 5, AC = 6, BC = 7 e DE = 10, calcule CD.



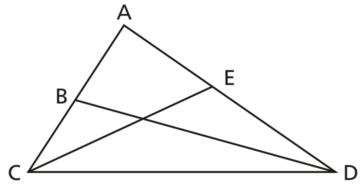
465. Na figura ao lado, determine o valor de x.



466. Calcule o valor de *x*, sabendo que a figura ao lado é um paralelogramo.

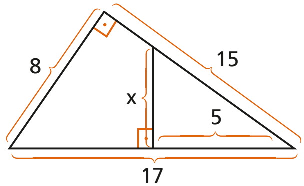


467. Na figura, as medidas são AB = 8 cm, BC = 3 cm e AE = 5 cm. Calcule x = DE, sabendo que $A\hat{C}E \equiv A\hat{D}B$.

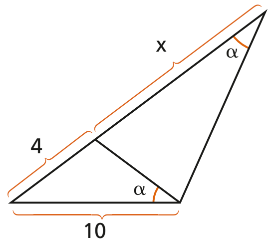


468. Nas figuras, determine *x*.

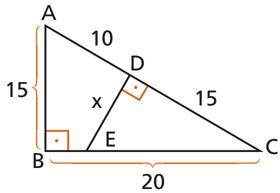
a)



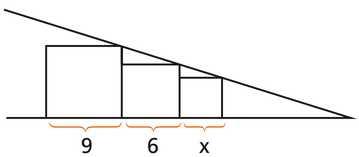
b)



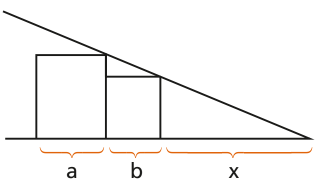
469. Dada a figura, determine o valor de *x*.



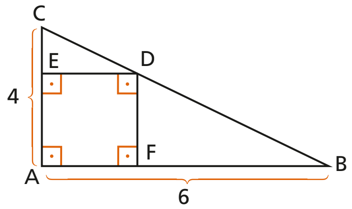
470. Na figura ao lado, consideremos os quadrados de lados *a* e *b* (a > b). Calcule o valor de *x*.



471. Na figura ao lado, consideremos os quadrados de lados *x*, 6 e 9. Determine o perímetro do quadrado de lado *x*.

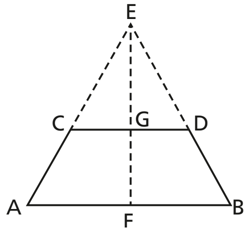


472. Determine a medida do lado do quadrado da figura.



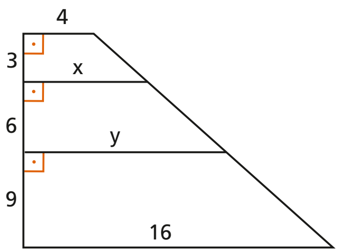
473. Prolongando-se os lados oblíquos às bases de um trapézio, obtemos um ponto E e os triângulos ECD e EAB. Determine a relação entre as alturas dos dois triângulos, relativas aos lados que são bases do trapézio, sendo 12 cm e 4 cm as medidas das bases do trapézio.

474. As bases de um trapézio ABCD medem 50 cm e 30 cm e a altura 10 cm. Prolongando-se os lados não paralelos, eles se interceptam num ponto E. Determine a altura $\overline{EF}$ do triângulo ABE e a altura $\overline{EG}$ do triângulo CDE (vide figura).

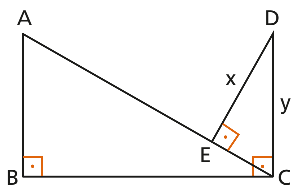


475. Num triângulo isósceles de 20 cm de altura e $\dfrac{50}{3}$ cm de base está inscrito um retângulo de 8 cm de altura com base na base do triângulo. Calcule a medida da base do retângulo.

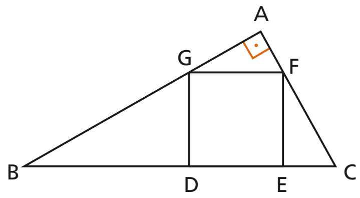
476. Determine *x* e *y*.



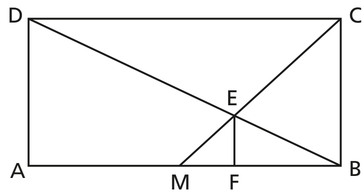
477. Na figura, temos: AB = 8, BC = 15, AC = 17 e EC = 4. Determine x = DE e y = CD.



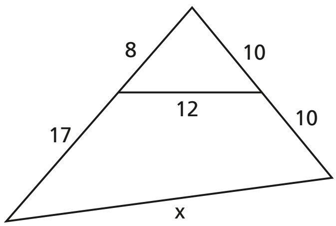
478. Na figura ao lado, o quadrado DEFG está inscrito no triângulo ABC. Sendo BD = 8 cm e CE = 2 cm, calcule o perímetro do quadrado.



479. Num retângulo ABCD, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 20 cm e 12 cm, respectivamente. Sabendo que M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$, calcule $\overline{EF}$, distância do ponto E ao lado $\overline{AB}$, sendo E a interseção da diagonal $\overline{BD}$ com o segmento $\overline{CM}$.



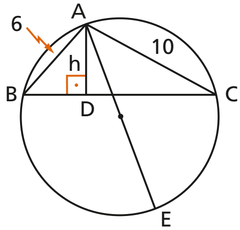
480. Na figura, determine *x*.



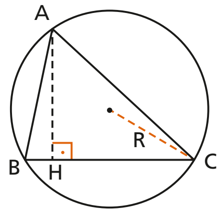
481. Consideremos um triângulo ABC de lado BC = 10 cm. Seja um segmento $\overline{CD}$ interno ao triângulo tal que D seja um ponto do lado $\overline{AB}$. Sabendo que $\overline{BD}$ = 4 cm, e os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ são congruentes, determine a medida de $\overline{AD}$.

482. Pelos pontos A e B de uma reta traçam-se perpendiculares à reta. Sobre elas tomam-se os segmentos AC = 13 cm e BD = 7 cm. No segmento AB = 25 cm toma-se um ponto P tal que os ângulos $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ sejam congruentes. Calcule a medida de $\overline{AP}$.

483. Considere a circunferência circunscrita a um triângulo ABC. Seja $\overline{AE}$ um diâmetro dessa circunferência e $\overline{AD}$ a altura do triângulo. Sendo AB = 6 cm, AC = 10 cm e AE = 30 cm, calcule a altura $\overline{AD}$.



484. Calcule R, raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura, sendo AB = 4, AC = 6 e AH = 3.

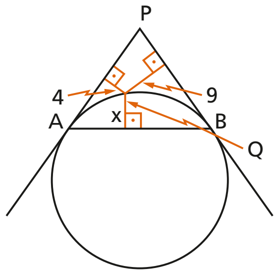


485. Dois círculos de raios R e *r* são tangentes exteriormente no ponto A. Sendo C e D os pontos de tangência de uma reta *t* externa, com os dois círculos, determine a altura do triângulo ACD relativa ao lado $\overline{CD}$.

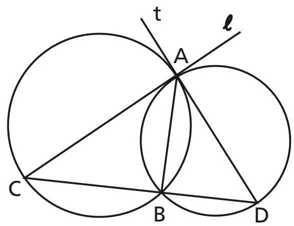
486. O ponto O é a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de um losango ABCD. Prolonga-se o lado $\overline{AD}$ até um ponto F de modo que DF = 4 m. Se $\overline{OF}$ encontra $\overline{CD}$ em E e ED = 2 m, determine o lado do losango.

487. De um triângulo ABC sabemos que o ângulo Â é o dobro do ângulo Ĉ, que AB = 6 m e que AC = 10 m. Determine $\overline{BC}$.

488. Na figura, as semirretas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são tangentes à circunferência. Se as distâncias entre Q e as tangentes são 4 e 9, ache a distância entre Q e a corda $\overline{AB}$.

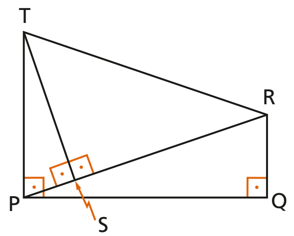


489. As retas *t* e ℓ são tangentes às circunferências em A. Determine AB em função de a = BC e b = BD.



490. Na figura ao lado, $\overline{RQ}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$, $\overline{PQ}$ é perpendicular a $\overline{PT}$ e $\overline{TS}$ é perpendicular a $\overline{PR}$. Prove que:

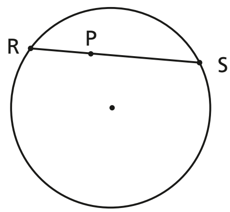
(TS) · (RQ) = (PS) · (PQ)

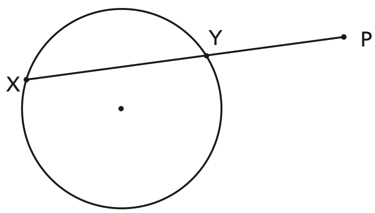


III. Potência de ponto

190. Vamos estudar a potência de um ponto P em relação a uma circunferência λ.

1º caso: P é interior a λ 2º caso: P é exterior a λ

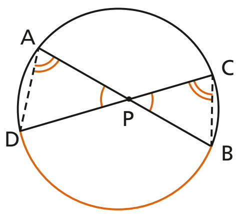


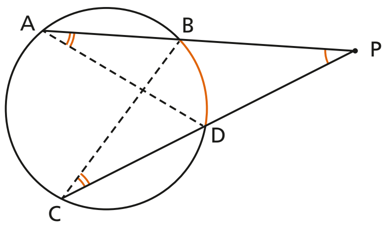


Em casos como os das figuras acima dizemos que $\overline{RS}$ é uma corda e que $\overline{RP}$ e $\overline{PS}$ são suas partes; $\overline{PX}$ é um "segmento secante" e $\overline{PY}$ é sua parte exterior. Com isto, vamos a uma:

191. Dedução (para os dois casos)

Se por P passam duas retas concorrentes que interceptam a circunferência em A, B, C e D, respectivamente, temos:





Considerando os triângulos PAD e PCB:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{P} \text{ comum (ou o.p.v.)} \\ \hat{A} = \hat{C} = \dfrac{\widehat{BD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PAD \sim \triangle PCB \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD)$$

192. Enunciados

No 1º caso: "Se duas cordas de uma mesma circunferência se interceptam, então o produto das medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes da outra".

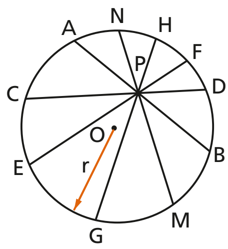
No 2º caso: "Se por um ponto (P) exterior a uma circunferência conduzimos dois 'segmentos secantes' $\left(\overline{PA} \text{ e } \overline{PC}\right)$, então o produto da medida do primeiro $\left(\overline{PA}\right)$ pela de sua parte exterior $\left(\overline{PB}\right)$ é igual ao produto da medida do segundo $\left(\overline{PC}\right)$ pela de sua parte exterior $\left(\overline{PD}\right)$".

193. Generalização do 1º caso

Consideremos as cordas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, ..., $\overline{MN}$ que se interceptam em P.

Com o resultado anterior e tomando $\overline{AB}$ para comparação, temos:

$$
\begin{array}{l}
(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD) \\
(PA) \times (PB) = (PE) \times (PF) \\
(PA) \times (PB) = (PG) \times (PH) \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
(PA) \times (PB) = (PM) \times (PN)
\end{array}
$$



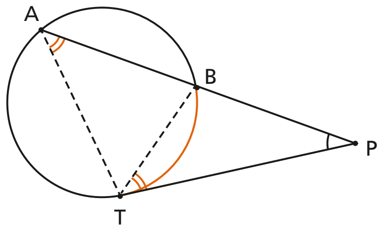
Donde concluímos que, fixados o ponto P e a circunferência, (PA) × (PB) é constante, qualquer que seja a corda $\overline{AB}$ passando por P. Este produto (PA) × (PB) é chamado **potência do ponto P em relação à circunferência**.

Logo,

$$
\begin{array}{c}
(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD) = (PE) \times (PF) = (PG) \times (PH) = \ldots \\
\ldots = (PM) \times (PN) = \text{Potência de P em relação à circunferência } \lambda\,(O, r).
\end{array}
$$

194. Generalização do 2º caso

Consideremos o segmento secante $\overline{PA}$, sua parte exterior $\overline{PB}$ e um segmento $\overline{PT}$ tangente a λ.

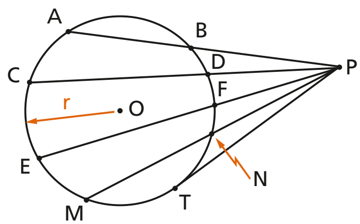


Analisando os triângulos PAT e PTB, vem:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P} \text{ comum} \\ \hat{A} = \hat{T} = \dfrac{\overset{\frown}{TB}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PAT \sim \triangle PTB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow (PA) \times (PB) = (PT)^2$$

Com o resultado anterior, e procedendo de modo análogo ao feito no 1º caso, temos:

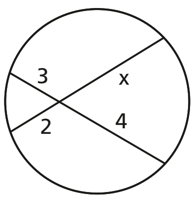


$(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD) = (PE) \times (PF) = \ldots = (PM) \times (PN) = (PT)^2 =$
$=$ Potência do ponto P em relação à circunferência λ (O, r).

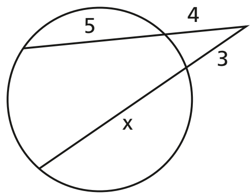
EXERCÍCIOS

491. Em cada caso, determine a incógnita.

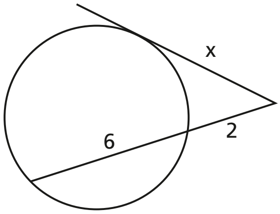
a)



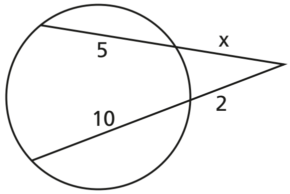
b)



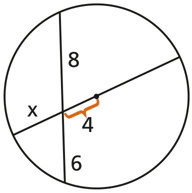
c)



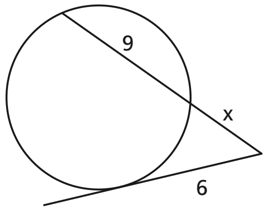
e)



d)

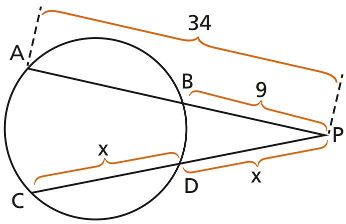


f)

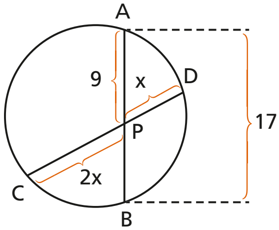


492. Determine o valor de *x* nas figuras abaixo.

a)

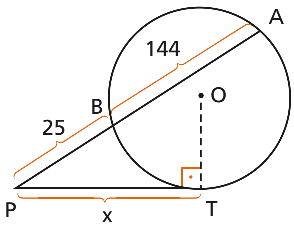


b)

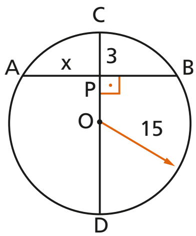


493. Determine *x* nos casos:

a)

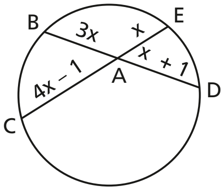


b)



494. Na figura, calcule as medidas das cordas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$.

$AB = 3x$
$AC = 4x - 1$
$AD = x + 1$
$AE = x$



Solução

$(AB) \times (AD) = (AC) \times (AE)$

$3x(x + 1) = (4x - 1)x$

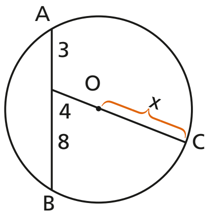
$x = 0$ (não serve) ou $x = 4$

$BD = 3x + x + 1 = 17;$

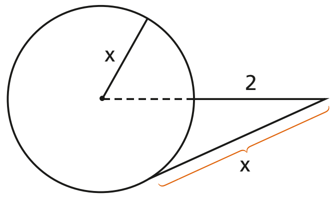
$CE = 4x - 1 + x = 19$

495. Determine o valor de x nas figuras abaixo.

a)

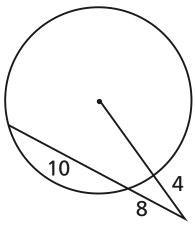


b)

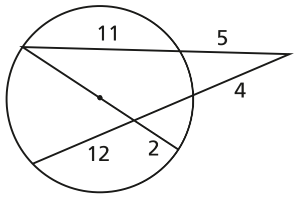


496. Determine o raio do círculo nos casos:

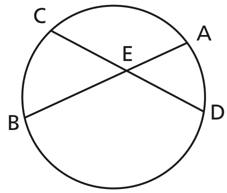
a)



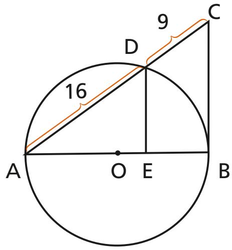
b)



497. Na figura, sendo $ED : EC = 2 : 3$, $AE = 6$ e $EB = 16$, calcule o comprimento de $\overline{CD}$.



498. Determine a medida do segmento $\overline{DE}$ da figura, sabendo que $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência, B o ponto de tangência do segmento $\overline{BC}$ à circunferência e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.



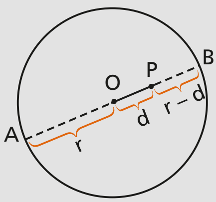
Solução

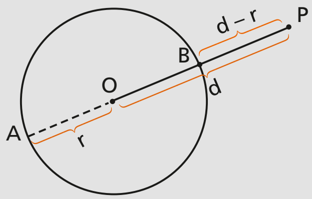
Potência de ponto $\Rightarrow$ $(BC)^2 = 9 \cdot 25$ $\Rightarrow$ $BC = 15$

Semelhança $\Rightarrow$ $\dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AD}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{15}{DE} = \dfrac{25}{10}$ $\Rightarrow$ $DE = 6$

499. Calcule a potência de um ponto P em relação a uma circunferência de centro O e raio *r*, em função da distância *d* entre O e P e do raio *r*.

Solução





Conforme vimos nos itens 193 e 194, qualquer corda (ou segmento secante) serve para nos dar a potência *x* de P em relação à circunferência.

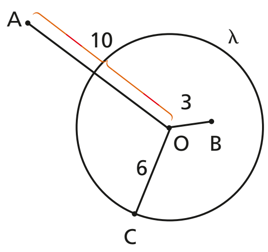
No 1º caso: $x = (\overline{PA}) \times (\overline{PB}) = (d + r) \times (r - d) = r^2 - d^2$

No 2º caso: $x = (\overline{PA}) \times (\overline{PB}) = (d + r) \times (d - r) = d^2 - r^2$

Nos dois casos: $x = |d^2 - r^2|$.

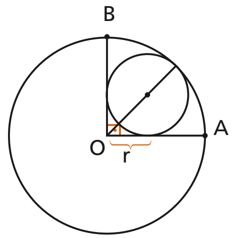
500. Na figura ao lado, calcule pot A + pot B + pot C.

Observação:
pot A = potência de A em relação a λ



501. Por um ponto P distante 18 cm de uma circunferência, traça-se uma secante que determine na circunferência uma corda $\overline{AB}$ de medida 10 cm. Calcule o comprimento da tangente a essa circunferência traçada do ponto P, sabendo que $\overline{AB}$ passa pelo centro da circunferência.

502. Determine o raio do círculo menor inscrito num quadrante do círculo maior, da figura ao lado, sendo 2R o diâmetro do círculo maior.



503. Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se num ponto P interno a uma circunferência. Determine a medida do segmento $\overline{BP}$, sabendo que os segmentos $\overline{CP}$, $\overline{DP}$ e a corda $\overline{AB}$ medem, respectivamente, 1 cm, 6 cm e 5 cm.

504. Num círculo duas cordas se cortam. O produto das medidas dos dois segmentos da primeira corda é 25 cm^2. Sabe-se que na segunda corda o menor segmento vale $\frac{1}{4}$ do maior. Determine a medida do maior segmento dessa segunda corda.

505. $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são duas cordas de medidas iguais, pertencentes a um círculo. Uma corda $\overline{AD}$ intercepta a corda $\overline{BC}$ num ponto P. Prove que os triângulos ABD e APB são semelhantes.