OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria plana

9

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO IV

Triângulos

I. Conceito — Elementos — Classificação

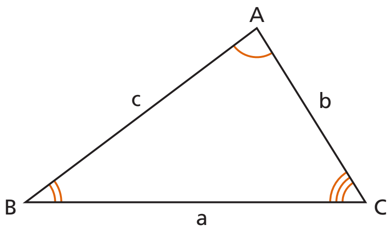
45. Definição

Dados três pontos, A, B e C, não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se **triângulo ABC**.

Indicação:

triângulo ABC $= \triangle ABC$

$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$



46. Elementos

Vértices: os pontos A, B e C são os **vértices** do $\triangle ABC$.

Lados: os segmentos $\overline{AB}$ (de medida *c*), $\overline{AC}$ (de medida *b*) e $\overline{BC}$ (de medida *a*) são os **lados** do triângulo.

Ângulos: os ângulos $B\hat{A}C$ ou $\hat{A}$, $A\hat{B}C$ ou $\hat{B}$ e $A\hat{C}B$ ou $\hat{C}$ são os **ângulos** do $\triangle ABC$ (ou ângulos internos do $\triangle ABC$).

Diz-se que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, **opostos**.

47. Interior e exterior

Dado um triângulo ABC, vamos considerar os semiplanos abertos, a saber:

α_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que contém o ponto A,

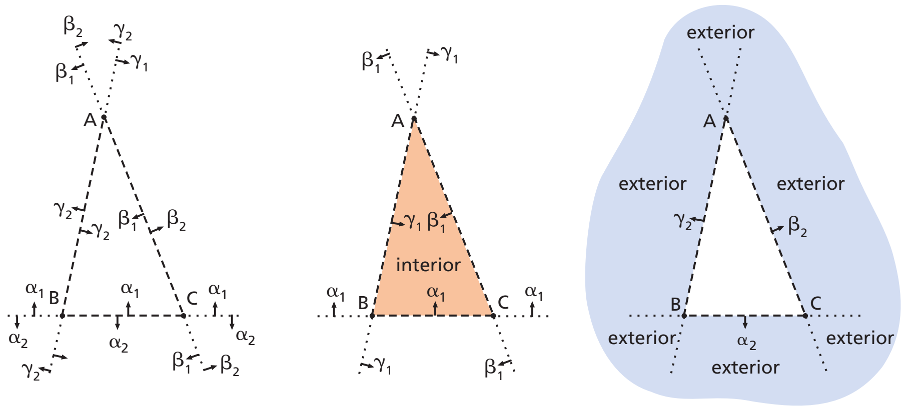
α_2 oposto a α_1,

β_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{AC}$ e que contém o ponto B,

β_2 oposto a β_1,

γ_1 com origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que contém o ponto C,

γ_2 oposto a γ_1.



Interior do $\triangle ABC = \alpha_1 \cap \beta_1 \cap \gamma_1$.

O interior de um triângulo é uma região convexa.

Os pontos do interior do $\triangle ABC$ são pontos **internos** ao $\triangle ABC$.

Exterior do $\triangle ABC = \alpha_2 \cup \beta_2 \cup \gamma_2$.

O exterior de um triângulo é uma região côncava.

Os pontos do exterior do $\triangle ABC$ são pontos **externos** ao $\triangle ABC$.

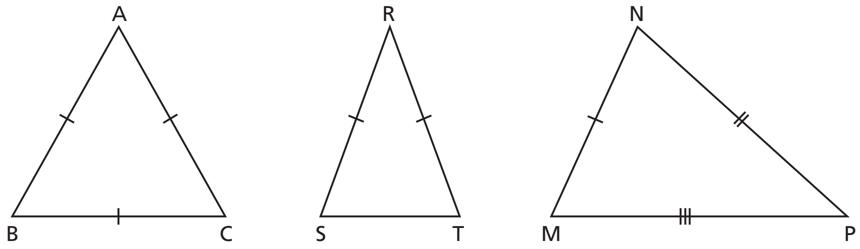
A reunião do triângulo com seu interior é uma **superfície triangular** (ou superfície do triângulo).

48. Classificação

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

- **equiláteros** se, e somente se, têm os três lados congruentes;
- **isósceles** se, e somente se, têm dois lados congruentes;
- **escalenos** se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes.

$\triangle$ABC é equilátero. $\triangle$RST é isósceles. $\triangle$MNP é escaleno.

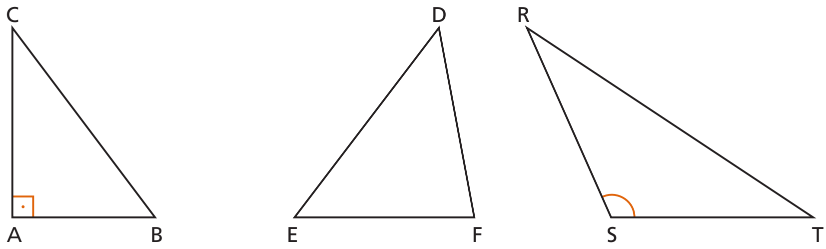


Um triângulo com dois lados congruentes é isósceles; o outro lado é chamado **base** e o ângulo oposto à base é o **ângulo do vértice**.

Notemos que todo triângulo equilátero é também triângulo isósceles.

Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

- **retângulos** se, e somente se, têm um ângulo reto;
- **acutângulos** se, e somente se, têm os três ângulos agudos;
- **obtusângulos** se, e somente se, têm um ângulo obtuso.



$\triangle$ABC é retângulo em A. $\triangle$DEF é acutângulo. $\triangle$RST é obtusângulo em S.

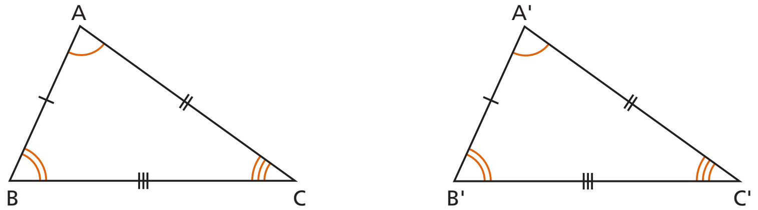
O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é sua **hipotenusa** e os outros dois são os **catetos** do triângulo.

II. Congruência de triângulos

49. Definição

Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.



$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right)$$

A congruência entre triângulos é **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**.

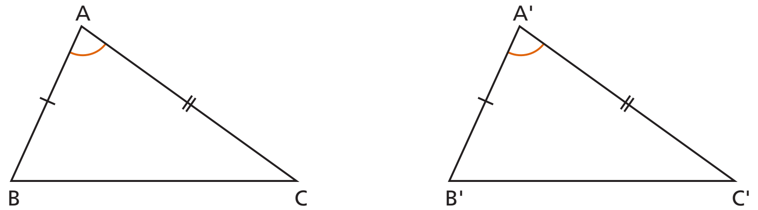
50. Casos de congruência

A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem “condições mínimas” para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados **casos** ou **critérios** de congruência.

51. 1º caso — LAL — postulado

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

Esta proposição é um “postulado” e indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.



Esquema do 1º caso:

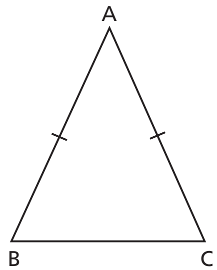
$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}\end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \qquad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}'\end{array}\right.$$

52. Teorema do triângulo isósceles

"Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes."

ou

"Se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes."



ou ainda

"Todo triângulo isósceles é isoângulo."

Hipótese Tese

$$(\triangle ABC, \overline{AB} \equiv \overline{AC}) \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

Demonstração:

Consideremos os triângulos ABC e ACB, isto é, associemos a A, B e C, respectivamente, A, C e B.

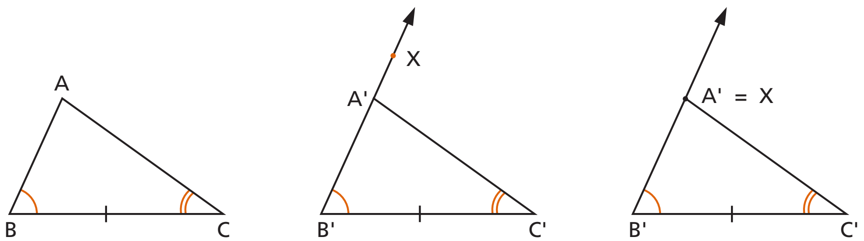
$$\left.\begin{array}{rl}\text{Hipótese} \Rightarrow & \overline{AB} \equiv \overline{AC} \\ & B\hat{A}C \equiv C\hat{A}B \\ \text{Hipótese} \Rightarrow & \overline{AC} \equiv \overline{AB}\end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \qquad \triangle ABC \equiv \triangle ACB \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

(coluna da esquerda: do $\triangle ABC$; coluna da direita: do $\triangle ACB$)

53. 2º caso — ALA

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes."

Os ângulos adjacentes ao lado $\overline{BC}$ são $\hat{B}$ e $\hat{C}$; os adjacentes ao lado $\overline{B'C'}$ são $\hat{B}'$ e $\hat{C}'$.



Hipótese | Tese

$$\left(\hat{B} \equiv \hat{B}' \ (1);\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \ (2);\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \ (3)\right) \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Demonstração:

Vamos provar que $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$, pois com isso recairemos no 1º caso.

Pelo postulado do transporte de segmentos (item 18), obtemos na semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ um ponto X tal que $\overline{B'X} \equiv \overline{BA}$ (4).

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ (1) & \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ (4) & \overline{BA} \equiv \overline{B'X} \end{array}\right\} \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle XB'C' \Rightarrow B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'X \quad (5)$$

Da hipótese (3) $B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'A'$, com (5) $B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'X$ e com o postulado do transporte de ângulos (item 35), decorre que $\overleftrightarrow{B'A'}$ e $\overleftrightarrow{C'X} = \overleftrightarrow{C'A'}$ interceptam-se num único ponto $X = A'$.

De $X \equiv A'$, com (4), decorre que $\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}$.

Então:

$$\left(\overline{BA} \equiv \overline{B'A'},\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}\right) \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

54. Notas

1ª) Esquema do 2º caso

$$\left.\begin{array}{c} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array}\right\} \overset{\text{ALA}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array}\right.$$

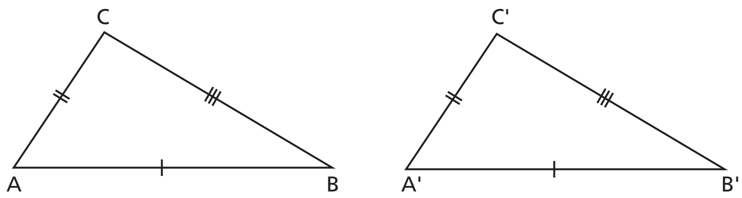
2ª) Com base no 2º caso (ALA), pode-se provar a recíproca do teorema do triângulo isósceles:

"Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles."

Considerando um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, basta observar os triângulos ABC e ACB e proceder de modo análogo ao do teorema direto.

55. 3º caso — LLL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.



Hipótese $\qquad\qquad$ Tese

$$\left(\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}\ (1),\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}\ (2),\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}\ (3)\right) \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Demonstração:

Pelo postulado do transporte de ângulos (item 35) e do transporte de segmentos (item 18), obtemos um ponto X tal que:

$X\hat{A}'B' \equiv C\hat{A}B \quad (4)$

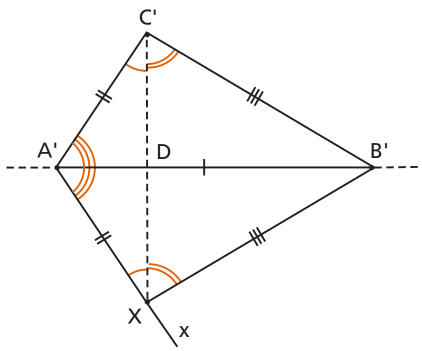
$\overline{A'X} \equiv \overline{AC} \quad (5)$

estando X no semiplano oposto ao de C' em relação à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

De (5) e (2), vem:

$\overline{A'X} \equiv \overline{A'C'} \quad (6)$

Seja D o ponto de interseção de $\overline{C'X}$ com a reta $\overleftrightarrow{A'B'}$.



(1), (4), (5) $\overset{\text{LAL}}{\Rightarrow}$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'X'$ (7) $\Rightarrow$ $\overline{XB'} \equiv \overline{CB}$ $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\overline{XB'} \equiv \overline{C'B'}$ (8)

(6) $\Rightarrow$ $\triangle A'C'X$ é isósceles de base $\overline{C'X}$ $\Rightarrow$ $A'\hat{C}'X \equiv A'\hat{X}C'$ (9)

(8) $\Rightarrow$ $\triangle B'C'X$ é isósceles de base $\overline{C'X}$ $\Rightarrow$ $B'\hat{C}'X \equiv B'\hat{X}C'$ (10)

Por soma ou diferença de (9) e (10) (conforme D seja interno ou não ao segmento $\overline{A'B'}$), obtemos:

$$A'\hat{C}'B' \equiv A'\hat{X}B' \text{ (11)}$$

(6), (11), (8) $\Rightarrow$ $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A'B'X$ $\overset{(7)}{\Rightarrow}$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

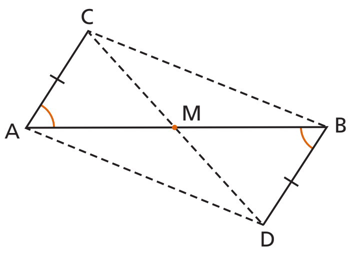
56. Existência do ponto médio

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, usando os postulados de transporte de ângulos (item 35) e de segmentos (item 18) construímos

$$C\hat{A}B \equiv D\hat{B}A$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{DB}$$

com C e D em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$.



O segmento $\overline{CD}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ num ponto M. Vejamos uma sequência de congruências de triângulos:

$\triangle CAB \equiv \triangle DBA$ (LAL, $\overline{AB}$ é comum)

$\triangle CAD \equiv \triangle DBC$ (ALA, com soma de ângulos ou pelo caso LLL)

$\triangle AMD \equiv \triangle BMC$ (ALA)

Desta última congruência decorre que $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, ou seja, M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

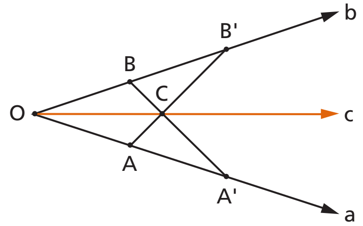
57. Existência da bissetriz

Dado um ângulo $a\hat{O}b$, usando o postulado do transporte de segmentos (item 18) obtemos A e A' em Oa e B e B' em Ob tais que:

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \text{ (1)}$$

$$\overline{OA'} \equiv \overline{OB'} \text{ (2)}$$

com $\overline{OA'} > \overline{OA}$ e $\overline{OB'} > \overline{OB}$



Seja C o ponto de interseção de $\overline{AB'}$ com $\overline{A'B}$ e consideremos a semirreta $\overrightarrow{OC} = Oc$.

Vejamos uma sequência de congruências de triângulos:

$\triangle AOB' \equiv \triangle BOA'$ (LAL, $a\hat{O}b$ (comum))

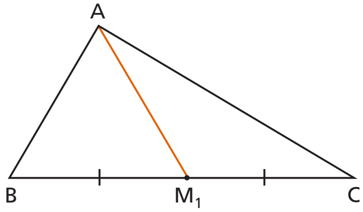
$\triangle ACA' \equiv \triangle BCB'$ (ALA, ângulos adjacentes suplementares, diferença de segmentos)

$\triangle OAC \equiv \triangle OBC$ (LAL)

Desta última congruência decorre que $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$, ou seja, Oc é bissetriz de $a\hat{O}b$.

58. Mediana de um triângulo — definição

Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.



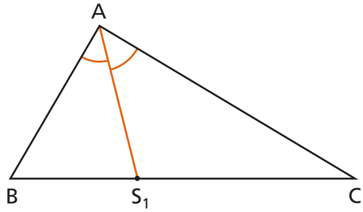
M_1 é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.

$\overline{AM_1}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

$\overline{AM_1}$ é a mediana relativa ao vértice A.

59. Bissetriz interna de um triângulo — definição

Bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.



$S_1 \in \overline{BC}$, $S_1\hat{A}B \equiv S_1\hat{A}C$

$\overline{AS_1}$ é a bissetriz relativa ao lado $\overline{BC}$.

$\overline{AS_1}$ é a bissetriz relativa ao vértice A.

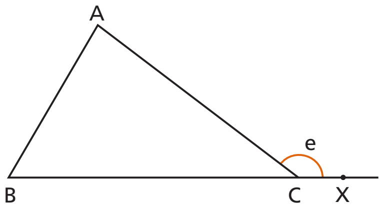
60. Teorema do ângulo externo

Dado um $\triangle ABC$ e sendo $\overrightarrow{CX}$ a semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{CB}$, o ângulo

$$\hat{e} = A\hat{C}X$$

é o ângulo externo do $\triangle ABC$ adjacente a $\hat{C}$ e não adjacente aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

O ângulo $\hat{e}$ é o suplementar adjacente de $\hat{C}$.



Teorema

Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Hipótese		Tese
($\triangle ABC$, $\hat{e}$ externo adjacente a $\hat{C}$)	$\Rightarrow$	($\hat{e} > \hat{A}$ e $\hat{e} > \hat{B}$)

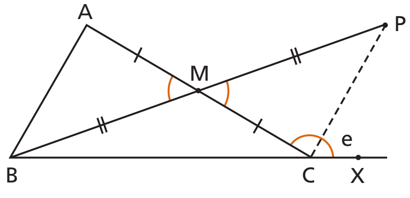
Demonstração:

Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$ e P pertencente à semirreta $\overrightarrow{BM}$ tal que:

$$\overline{BM} \equiv \overline{MP}$$

Pelo caso LAL, $\triangle BAM \equiv \triangle PMC$ e daí:

$$B\hat{A}M \equiv P\hat{C}M \ (1)$$



Como P é interno ao ângulo $\hat{e} = A\hat{C}X$, vem: $\hat{e} > P\hat{C}M$ (2).

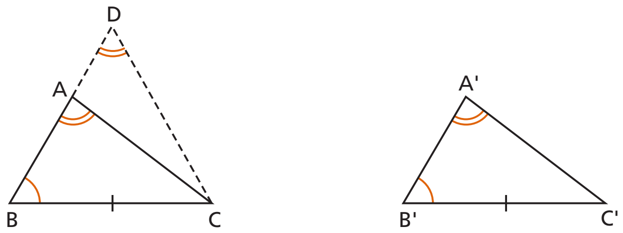
De (1) e (2), decorre que $\hat{e} > \hat{A}$.

Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que:

$$\hat{e} > \hat{B}$$

61. 4º caso de congruência — LAA_0

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.



Hipótese		Tese
$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (1), $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ (2), $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (3)	$\Rightarrow$	$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Demonstração:

Há três possibilidades para $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$:

1ª) $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ 2ª) $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ 3ª) $\overline{AB} > \overline{A'B'}$

Se a 1ª se verifica, temos:

$$\left(\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}\right) \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Se a 2ª se verificasse, tomando um ponto D na semirreta $\overrightarrow{BA}$ tal que $\overline{BD} = \overline{A'B'}$ (postulado do transporte de segmentos — item 18), teríamos:

$$\left(\overline{DB} \equiv \overline{A'B'},\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}\right) \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{D} \equiv \hat{A}' \overset{(3)}{\Rightarrow} \hat{A} \equiv \hat{A}',$$

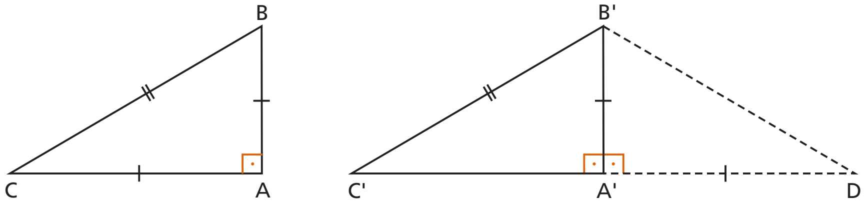
o que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no $\triangle ADC$. Logo, a 2ª possibilidade não se verifica. A 3ª possibilidade também não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença de que D estaria entre A e B.

Como só pode ocorrer a 1ª possibilidade, temos:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

62. Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.



Hipótese Tese

$\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (retos) (1), $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (2), $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (3) $\Rightarrow$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

Demonstração:

Tomemos o ponto D na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{A'D} \equiv \overline{AC}$ (postulado do transporte de segmentos — item 18).

$\left(\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \hat{A} \equiv \hat{A}', \overline{AC} \equiv \overline{A'D}\right) \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'D \Rightarrow \overline{BC} \equiv \overline{B'D}$ (4) e $\hat{C} \equiv \hat{D}$ (5)

(4) e (3) $\Rightarrow \overline{B'C'} \equiv \overline{B'D} \Rightarrow \triangle B'C'D$ é isósceles de base $\overline{C'D} \Rightarrow \hat{C}' \equiv \hat{D}$ (6)

(5) e (6) $\Rightarrow \hat{C} \equiv \hat{C}'$

Considerando agora os triângulos ABC e A'B'C', temos:

$\left(\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}, \hat{C} \equiv \hat{C}', \hat{A} \equiv \hat{A}'\right) \overset{\text{LAA}_o}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

EXERCÍCIOS

80. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todo triângulo isósceles é equilátero.
b) Todo triângulo equilátero é isósceles.
c) Um triângulo escaleno pode ser isósceles.
d) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.
e) Todo triângulo retângulo é triângulo escaleno.
f) Existe triângulo retângulo e isósceles.
g) Existe triângulo isósceles obtusângulo.
h) Todo triângulo acutângulo ou é isósceles ou é equilátero.

81. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todos os triângulos são congruentes.

b) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.

c) Todos os triângulos retângulos são congruentes.

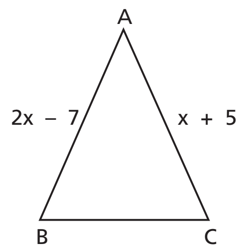
d) Todos os triângulos retângulos isósceles são congruentes.

e) Todos os triângulos acutângulos são congruentes.

82. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, determine *x*.

$AB = 2x - 7$

$AC = x + 5$

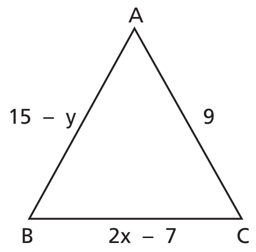


83. O triângulo ABC é equilátero. Determine *x* e *y*.

$AB = 15 - y$

$BC = 2x - 7$

$AC = 9$

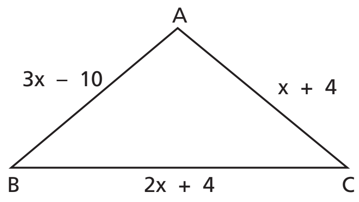


84. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, determine BC.

$AB = 3x - 10$

$BC = 2x + 4$

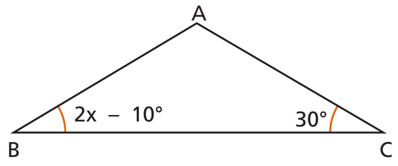
$AC = x + 4$



85. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, determine *x*.

$\hat{B} = 2x - 10°$

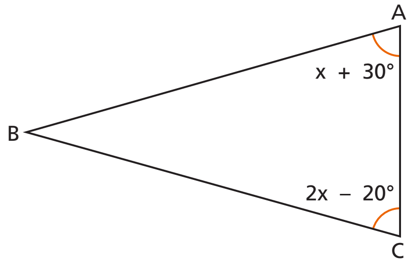
$\hat{C} = 30°$



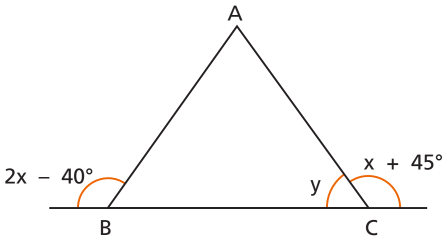
86. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{AC}$, determine *x*.

$\hat{A} = x + 30°$

$\hat{C} = 2x - 20°$

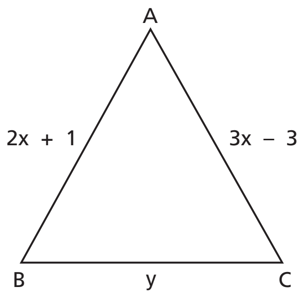


87. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$, determine *x* e *y*.

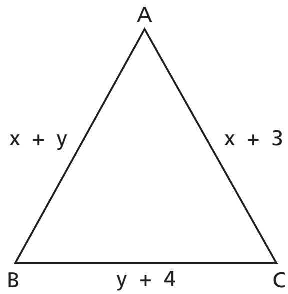


88. Determine *x* e *y*, sabendo que o triângulo ABC é equilátero.

a)



b)



89. Se o perímetro de um triângulo equilátero é de 75 cm, quanto mede cada lado?

90. Se o perímetro de um triângulo isósceles é de 100 m e a base mede 40 m, quanto mede cada um dos outros lados?

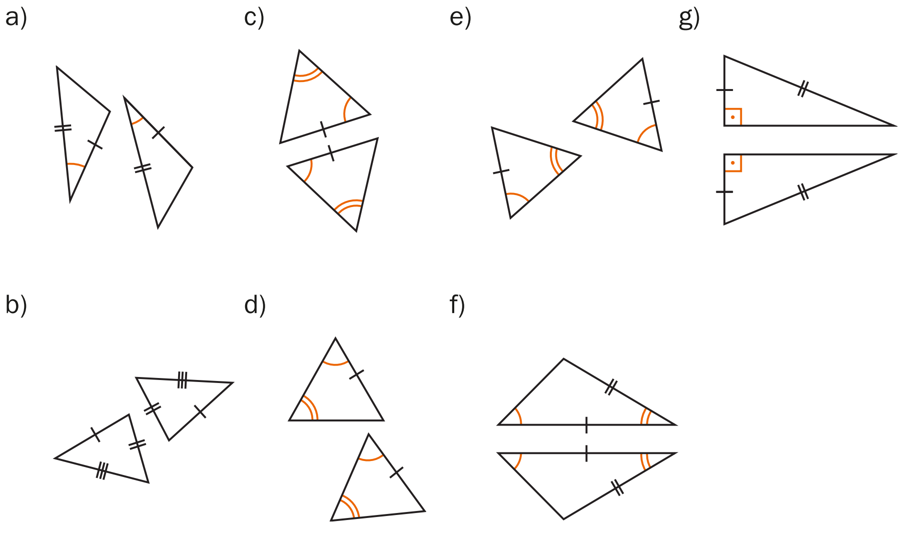
91. Determine o perímetro do triângulo ABC nos casos:

a) Triângulo equilátero com $AB = x + 2y$, $AC = 2x - y$ e $BC = x + y + 3$.

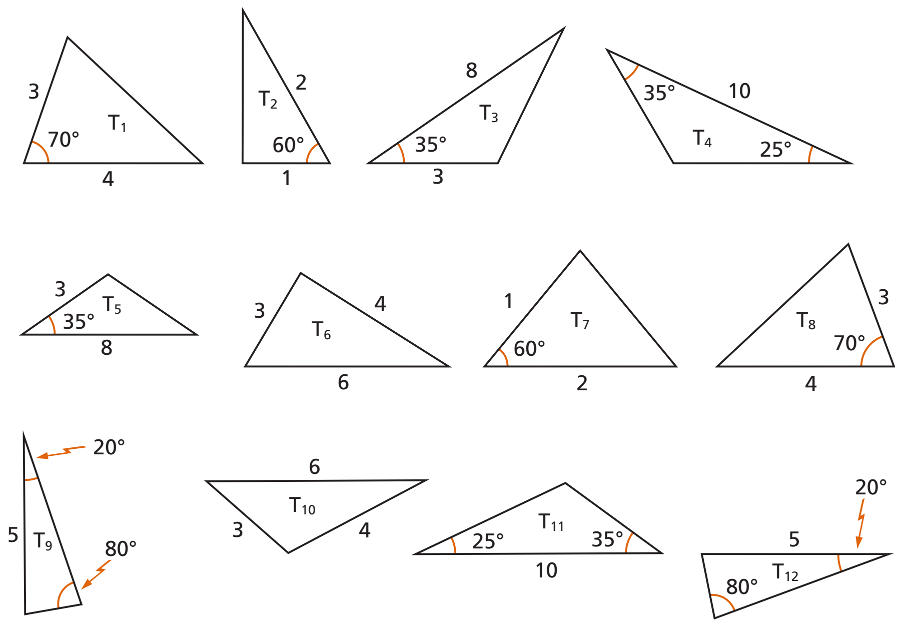
b) Triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ com $AB = 2x + 3$, $AC = 3x - 3$ e $BC = x + 3$.

92. Num triângulo isósceles, o semiperímetro vale 7,5 m. Calcule os lados desse triângulo, sabendo que a soma dos lados congruentes é o quádruplo da base.

93. Os pares de triângulos abaixo são congruentes. Indique o caso de congruência.

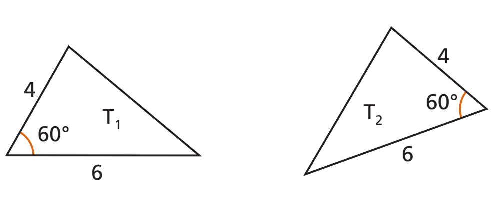


94. Considere os triângulos T_1, T_2, ..., etc. abaixo. Indique os pares de triângulos congruentes e o caso de congruência.

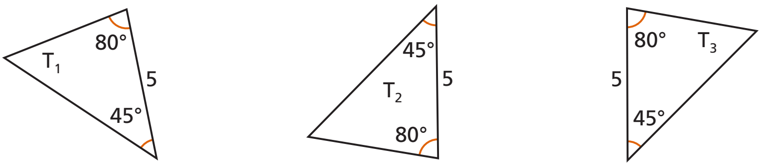


95. Nos casos a), b) e c) abaixo, selecione os triângulos congruentes e indique o caso de congruência.

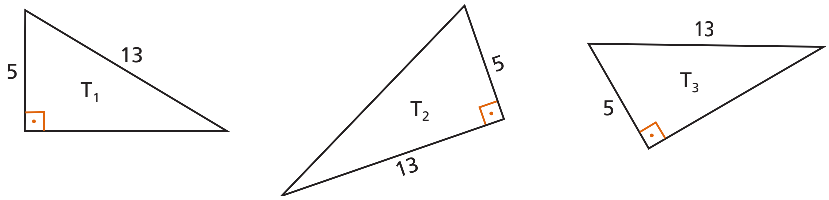
a)



b)

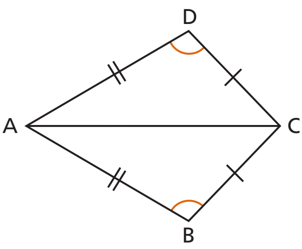


c)



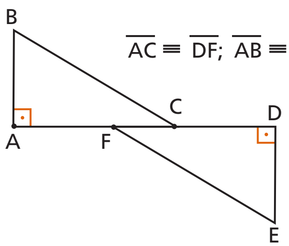
96. Indique nas figuras abaixo os triângulos congruentes, citando o caso de congruência.

a)

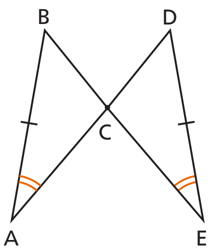


c)

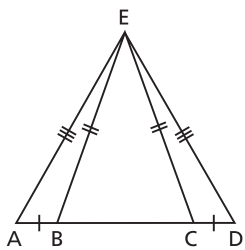
$\overline{AC} \equiv \overline{DF}$; $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$



b)



d)

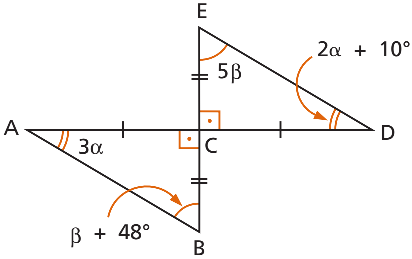


97. Por que ALL ou LLA não é caso de congruência entre triângulos?

98. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β.

$\hat{A} = 3\alpha$ $\qquad$ $\hat{D} = 2\alpha + 10°$

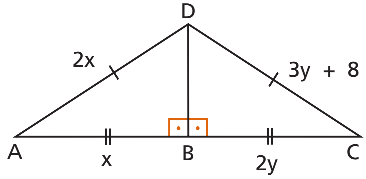
$\hat{B} = \beta + 48°$ $\qquad$ $\hat{E} = 5\beta$



99. Na figura ao lado, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. Calcule *x* e *y* e os lados do triângulo ACD.

AB = x $\qquad$ CD = 3y + 8

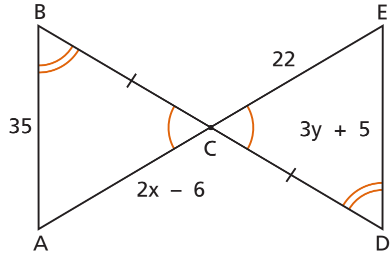
BC = 2y $\qquad$ DA = 2x



100. Na figura, o triângulo CBA é congruente ao triângulo CDE. Determine o valor de *x* e *y* e a razão entre os perímetros desses triângulos.

AB = 35 $\qquad$ CE = 22

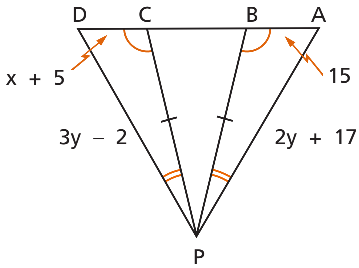
AC = 2x − 6 $\qquad$ DE = 3y + 5



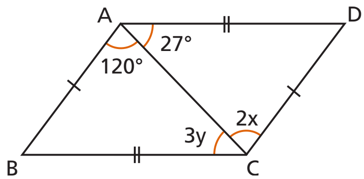
101. Na figura, o triângulo PCD é congruente ao triângulo PBA. Determine o valor de *x* e *y* e a razão entre os perímetros dos triângulos PCA e PBD.

AB = 15 $\qquad$ AP = 2y + 17

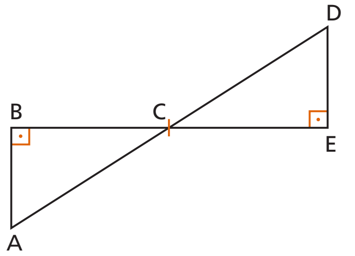
CD = x + 5 $\qquad$ PD = 3y − 2



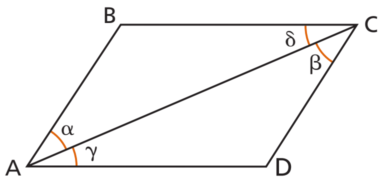
102. Na figura ao lado, os triângulos ABC e CDA são congruentes. Calcule *x* e *y*.



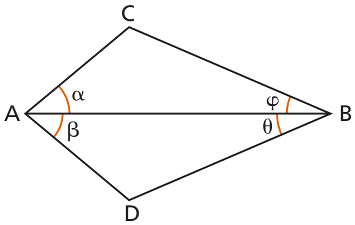
103. Na figura ao lado, sabendo que C é ponto médio de $\overline{BE}$, prove que os triângulos ABC e DEC são congruentes.



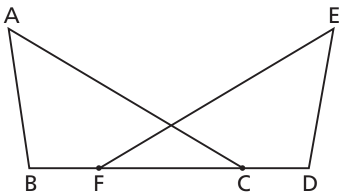
104. Na figura ao lado, sabendo que $\alpha \equiv \beta$ e $\gamma \equiv \delta$, prove que os triângulos ABC e CDA são congruentes.



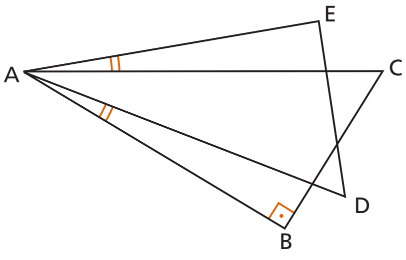
105. Se $\alpha \equiv \beta$ e $\varphi \equiv \theta$, demonstre que o triângulo ABC é congruente ao triângulo ABD.



106. Na figura ao lado, sendo $\overline{BF} \equiv \overline{CD}$, $m(A\hat{B}C) = m(F\hat{D}E)$, $m(B\hat{A}C) = m(D\hat{E}F)$, prove que $\overline{AC} \equiv \overline{EF}$.



107. Na figura ao lado, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{AE}$, $m(B\hat{A}D) = m(C\hat{A}E)$, $m(A\hat{B}C) = 90°$ e $m(A\hat{E}D) = 90°$, prove que $\overline{BC} \equiv \overline{DE}$.



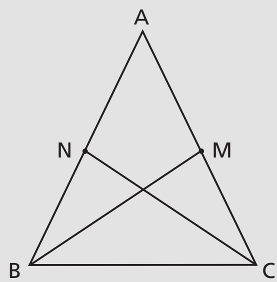
108. Demonstre que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles é também bissetriz.

109. Prove que a bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles é também mediana.

110. Prove que as medianas relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

Solução

Hipótese: $\begin{cases} AB = AC \\ \overline{BM} \text{ e } \overline{CN} \\ \text{são medianas} \end{cases}$ Tese: $BM = CN$



Demonstração:

Consideremos os triângulos BAM e CAN.

$$\left.\begin{array}{r} BA = CA \\ \hat{A} \equiv \hat{A} \\ AM = AN \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} \triangle BAM \equiv \triangle CAN \Rightarrow BM = CN$$

111. Prove que as bissetrizes relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

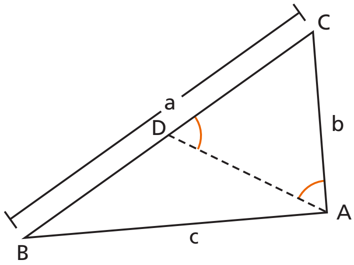
112. Prove que, se a bissetriz relativa a um lado de um triângulo é também mediana relativa a esse lado, então esse triângulo é isósceles.

III. Desigualdades nos triângulos

63. Ao maior lado opõe-se o maior ângulo

Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Hipótese		Tese
$\overline{BC} > \overline{AC}$	$\Rightarrow$	$B\hat{A}C > A\hat{B}C$
	ou	
$a > b$	$\Rightarrow$	$\hat{A} > \hat{B}$



Demonstração:

Consideremos D em $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} \equiv \overline{CA}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BC} > \overline{AC} \Rightarrow \text{D é interno a } C\hat{A}B \Rightarrow C\hat{A}B > C\hat{A}D \\ \triangle CAD \text{ isósceles de base } \overline{AD} \Rightarrow C\hat{A}D \equiv C\hat{D}A \end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{A}B > C\hat{D}A \quad (1)$$

$C\hat{D}A$ é ângulo externo no $\triangle ABD \Rightarrow C\hat{D}A > A\hat{B}D \equiv A\hat{B}C \quad (2)$

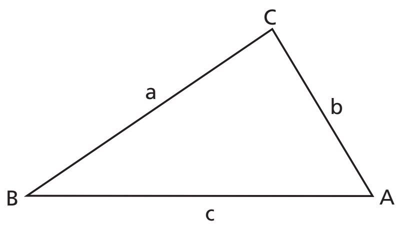
De (1) e (2), vem:

$$C\hat{A}B > A\hat{B}C \text{ ou seja } \hat{A} > \hat{B}$$

64. Ao maior ângulo opõe-se o maior lado

> Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Hipótese		Tese
$B\hat{A}C > A\hat{B}C$	$\Rightarrow$	$\overline{BC} > \overline{AC}$
	ou	
$\hat{A} > \hat{B}$	$\Rightarrow$	$a > b$



Demonstração:

Há três possibilidades para $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$:

1ª) $\overline{BC} < \overline{AC}$ ou 2ª) $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ ou 3ª) $\overline{BC} > \overline{AC}$

1ª) Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, então, pelo teorema anterior, $\hat{A} < \hat{B}$, o que contraria a hipótese.

2ª) Se $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$, então, pelo teorema do triângulo isósceles, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, o que contraria a hipótese.
Logo, por exclusão, temos:

$$\overline{BC} > \overline{AC}$$

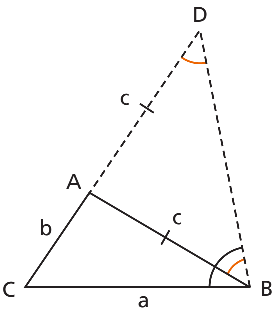
65. A desigualdade triangular

> Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Hipótese		Tese
A, B e C não colineares	$\Rightarrow$	$\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$

ou

a, *b* e *c* lados de um triângulo $\Rightarrow$ $a < b + c$



Demonstração:

Consideremos um ponto D na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$, tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. (1)

$$\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AD} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AB} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \triangle ABD \text{ isósceles de base } \overline{BD} \Rightarrow A\hat{D}B \equiv A\hat{B}D \\ \text{A é interno ao ângulo } C\hat{B}D \Rightarrow C\hat{B}D > A\hat{B}D \end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{B}D > A\hat{D}B \equiv C\hat{D}B \; (3)$$

No triângulo BCD com (3) e o teorema anterior, vem:
$\overline{BC} < \overline{DC}$ e com (2) $\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$, ou ainda:

$$a < b + c$$

66. Notas

1ª) A desigualdade triangular também pode ser enunciada como segue:

> Em todo triângulo, cada lado é maior que a diferença dos outros dois.

2ª) Se *a*, *b* e *c* são as medidas dos lados de um triângulo, devemos ter as três condições abaixo:

$$a < b + c \qquad b < a + c \qquad c < a + b$$

Estas relações podem ser resumidas como segue:

$$\left.\begin{array}{l} a < b + c \\ \left.\begin{array}{l} b < a + c \Leftrightarrow b - c < a \\ c < a + b \Leftrightarrow c - b < a \end{array}\right\} \Leftrightarrow |b - c| < a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{|b - c| < a < b + c}$$

EXERCÍCIOS

113. Com segmentos de 8 cm, 5 cm e 18 cm pode-se construir um triângulo? Por quê?

114. Dois lados, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, de um triângulo ABC medem, respectivamente, 8 cm e 21 cm. Quanto poderá medir o terceiro lado, sabendo que é múltiplo de 6?

115. Determine o intervalo de variação *x*, sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 10$, $2x + 4$ e $20 - 2x$.

116. Se dois lados de um triângulo isósceles medem 38 cm e 14 cm, qual poderá ser a medida do terceiro lado?

117. O lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC é expresso por um número inteiro. Determine o seu valor máximo, sabendo que os lados AC e BC medem, respectivamente, 27 cm e 16 cm e que $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$.

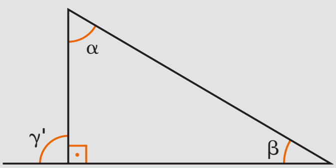
118. Mostre que o triângulo retângulo tem dois ângulos agudos.

Solução

Considere o ângulo externo adjacente ao ângulo reto do triângulo retângulo. Note que $\gamma' = 90°$.

Sendo α e β os ângulos internos não retos do triângulo, de acordo com o teorema do ângulo externo, temos:

$$\gamma' > \alpha \text{ e } \gamma' > \beta$$



E como $\gamma' = 90°$, obtemos:

$\alpha < 90°$ e $\beta < 90°$. Então o triângulo tem dois ângulos agudos.

119. Mostre que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que cada um dos catetos.

120. Mostre que o triângulo obtusângulo tem dois ângulos agudos.

121. Mostre que o lado oposto ao ângulo obtuso de um triângulo obtusângulo é maior que cada um dos outros lados.

122. Mostre que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que a semissoma dos catetos.

123. Prove que qualquer lado de um triângulo é menor que o semiperímetro.

124. Se P é um ponto interno de um triângulo ABC, mostre que $B\hat{P}C$ é maior que $B\hat{A}C$.

125. Se P é um ponto interno de um triângulo ABC, mostre que: $PB + PC < AB + AC$.

Solução

Tese $\{PB + PC < AB + AC$ ou $x + y < b + c\}$

Demonstração:

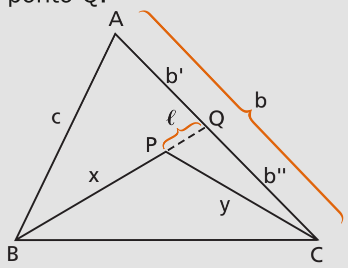
1) Prolonguemos $\overline{BP}$ até que encontre $\overline{AC}$ num ponto Q.

2) De acordo com a desigualdade triangular, temos:

$$\begin{cases} c + b' > x + \ell \\ \ell + b'' > y \end{cases} \Rightarrow$$

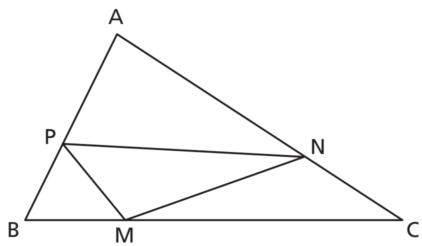
$$\Rightarrow c + \ell + b' + b'' > x + y + \ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c + b > x + y \Rightarrow PB + PC < AB + AC$$



126. Se P é um ponto interno de um triângulo ABC e $x = PA$, $y = PB$ e $z = PC$, mostre que $x + y + z$ está entre o semiperímetro e o perímetro do triângulo.

127. Demonstre que o perímetro do triângulo MNP é menor que o perímetro do triângulo ABC da figura ao lado.



128. Se m_a é a mediana relativa ao lado *a* de um triângulo de lados *a*, *b* e *c*, então:

$$\left|\frac{b - c}{2}\right| < m_a < \frac{b + c}{2}$$

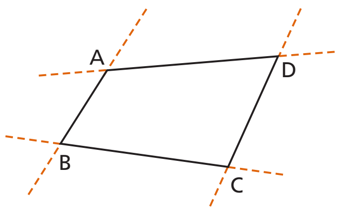
129. Prove que a soma das medianas de um triângulo é menor que o perímetro e maior que o semiperímetro.

CAPÍTULO VII

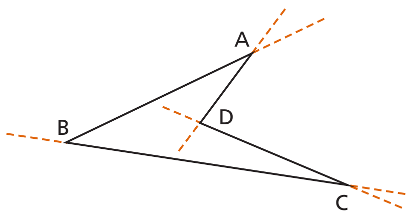
Quadriláteros notáveis

I. Quadrilátero — Definição e elementos

95. Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um **quadrilátero**.



ABCD convexo



ABCD côncavo

Quadrilátero ABCD = ABCD = $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$

O quadrilátero é um polígono simples de quatro lados.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ são os **lados**,

$\hat{A} = D\hat{A}B$, $\hat{B} = A\hat{B}C$, $\hat{C} = B\hat{C}D$ e $\hat{D} = C\hat{D}A$ são os **ângulos** e

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as **diagonais** do quadrilátero ABCD.

96. Um quadrilátero tem 2 diagonais (d = 2), soma dos ângulos internos igual a 360° e soma dos ângulos externos também igual a 360°.

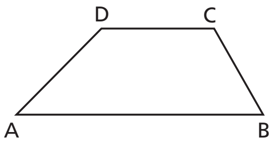
II. Quadriláteros notáveis — Definições

Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados.

97. Trapézio

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui **dois lados paralelos**.

ABCD é trapézio $\Leftrightarrow$ $(\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ou $\overline{AD} \parallel \overline{BC})$.

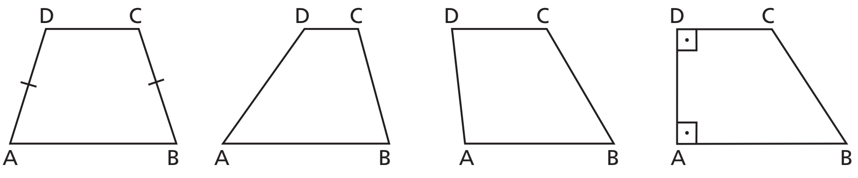


Os lados paralelos são as bases do trapézio.

De acordo com os outros dois lados não bases, temos:

- trapézio isósceles, se estes lados são congruentes;
- trapézio escaleno, se estes lados não são congruentes.

Trapézio retângulo (ou birretângulo) é um trapézio que tem dois ângulos retos.

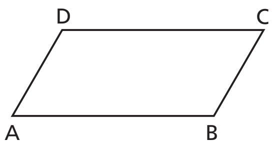


trapézio isósceles   trapézio escaleno   trapézio escaleno   trapézio retângulo

98. Paralelogramo

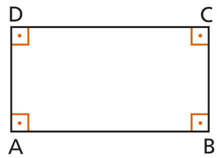
Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os **lados opostos paralelos**.

ABCD é paralelogramo $\Leftrightarrow$ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



99. Retângulo

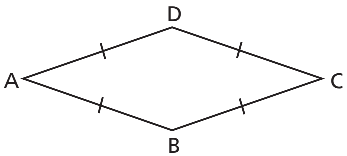
Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.



$$ABCD \text{ é retângulo} \iff \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$$

100. Losango

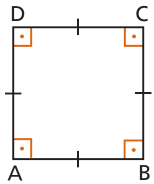
Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.



$$ABCD \text{ é losango} \iff \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$$

101. Quadrado

Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.



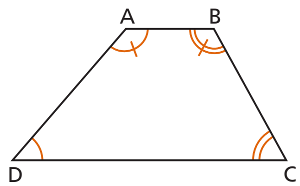
$$ABCD \text{ é quadrado} \iff \left(\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \text{ e } \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}\right)$$

III. Propriedades dos trapézios

102. Trapézio qualquer

Em qualquer trapézio ABCD (notação cíclica) de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ temos:

$$\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$$



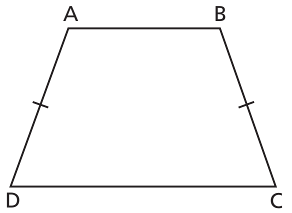
De fato,

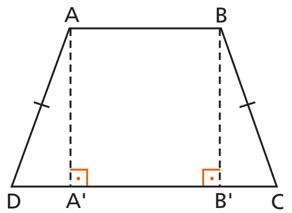
$$\left.\begin{array}{l}\left(\overleftrightarrow{AB} \;/\!/\; \overleftrightarrow{CD},\ \overleftrightarrow{AD} \text{ transversal}\right) \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180° \\ \left(\overleftrightarrow{AB} \;/\!/\; \overleftrightarrow{CD},\ \overleftrightarrow{BC} \text{ transversal}\right) \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180°\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

103. Trapézio isósceles

Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

Hipótese		Tese
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são bases do trapézio isósceles	$\Rightarrow$	$(\hat{C} \equiv \hat{D}$ e $\hat{A} \equiv \hat{B})$





Demonstração:

1º) Tracemos as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, obtendo os pontos A' e B' na base maior $\overline{CD}$. Notemos que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ por serem distâncias entre retas paralelas.

2º) Os triângulos retângulos AA'D e BB'C são congruentes pelo caso especial visto que $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$ (cateto) e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ (hipotenusa). Daí obtemos $\hat{C} \equiv \hat{D}$.

3º) Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares de $\hat{D}$ e $\hat{C}$, respectivamente, temos: $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

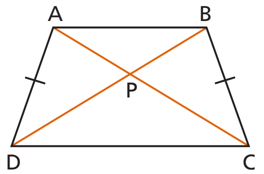
Observação

Da congruência dos triângulos AA'D e BB'C decorre também que $\overline{A'D} \equiv \overline{B'C}$, o que nos permite enunciar:

As projeções ortogonais dos lados não bases de um trapézio isósceles, sobre a base maior, são congruentes.

104. Trapézio isósceles — diagonais congruentes

As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.



Hipótese: ABCD é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ $\Rightarrow$ Tese: $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$

Demonstração:

Observemos os triângulos ADC e BCD:

$$\left(\overline{AD} \equiv \overline{BC},\ \hat{D} \equiv \hat{C},\ DC = CD\right) \overset{LAL}{\Rightarrow} \triangle ADC \equiv \triangle BCD \Rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$$

Nota

Da congruência acima obtemos $A\hat{C}D \equiv B\hat{D}C$. Daí decorre que os triângulos PCD e PAB são isósceles com bases $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$, sendo P o ponto onde as diagonais se cortam.

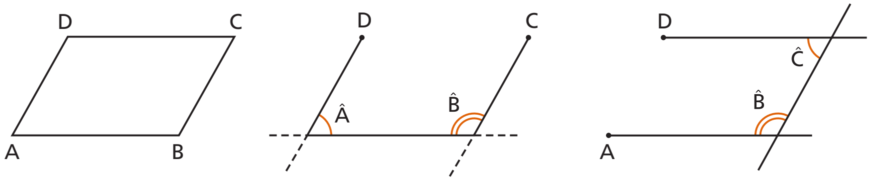
IV. Propriedades dos paralelogramos

105. Ângulos opostos congruentes

a) Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Hipótese		Tese
ABCD é paralelogramo	$\Rightarrow$	$(\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{D})$

Demonstração:



$$\text{ABCD é paralelogramo} \Rightarrow \left.\begin{cases} \overleftrightarrow{AD} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180° \\ \overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180° \end{cases}\right\} \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{C}$$

Analogamente para $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

b) Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

Sendo ABCD um quadrilátero convexo,

Hipótese		Tese
$(\hat{A} \equiv \hat{C}, \hat{B} \equiv \hat{D})$	$\Rightarrow$	ABCD é paralelogramo

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{C}, \hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} \\ \text{ABCD quadrilátero} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{D} = 180° \Rightarrow \overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC} \text{ e } \overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ABCD é paralelogramo.}$$

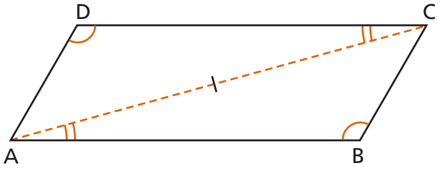
c) Consequência

Todo retângulo é paralelogramo.

106. Lados opostos congruentes

a) Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

Hipótese		Tese
ABCD é paralelogramo	$\Rightarrow$	$(\overline{AB} \equiv \overline{CD} \text{ e } \overline{BC} \equiv \overline{AD})$



Demonstração:

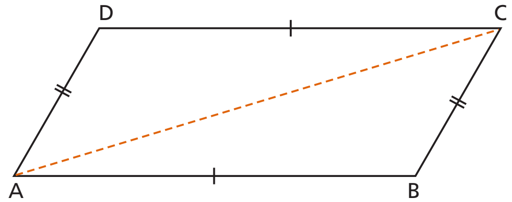
$$\text{ABCD é paralelogramo} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} \equiv \hat{D} \\ \overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD} \Rightarrow B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \end{cases}$$

$\left(\overline{AC} \text{ comum}, B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A, \hat{B} \equiv \hat{D}\right) \overset{LAA_o}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle CDA \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{DA}$.

b) Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo.

Sendo ABCD um quadrilátero convexo,

Hipótese		Tese
$\left(\overline{AB} \equiv \overline{CD}, \overline{BC} \equiv \overline{DA}\right)$	$\Rightarrow$	ABCD é paralelogramo



Demonstração:

$\left(\overline{AB} \equiv \overline{CD}, \overline{BC} \equiv \overline{DA}, \overline{AC} \text{ comum}\right) \overset{LLL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle CDA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \Rightarrow \overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{CD} \\ B\hat{C}A \equiv D\hat{A}C \Rightarrow \overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC} \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{ABCD é paralelogramo}$$

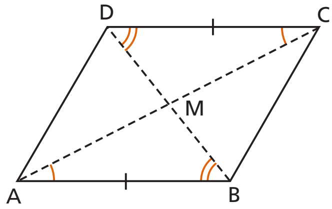
c) Consequência

Todo losango é paralelogramo.

107. Diagonais dividem-se ao meio

a) Em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.

Hipótese		Tese
$\left(\text{ABCD é paralelogramo}, \overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}\right)$	$\Rightarrow$	$\left(\overline{AM} \equiv \overline{CM} \text{ e } \overline{BM} \equiv \overline{DM}\right)$



Demonstração:

ABCD é paralelogramo $\Rightarrow$ $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (1)

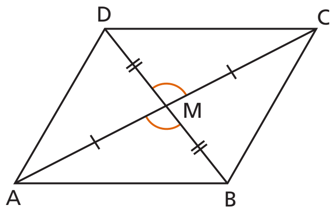
ABCD é paralelogramo $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ $\Rightarrow$ $B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$ (2) e $A\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$ (3)

(2), (1), (3) $\overset{\text{ALA}}{\Rightarrow}$ $\triangle ABM \equiv \triangle CDM$ $\Rightarrow$ $(\overline{AM} \equiv \overline{CM}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{DM})$

b) Todo quadrilátero convexo em que as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios é paralelogramo.

Sendo ABCD um quadrilátero convexo,

Hipótese		Tese
$(\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}, \overline{AM} \equiv \overline{CM}, \overline{BM} \equiv \overline{DM})$	$\Rightarrow$	ABCD é paralelogramo



Demonstração:

$(\overline{AM} \equiv \overline{CM}, A\hat{M}B \equiv C\hat{M}D$ (o.p.v.), $\overline{BM} \equiv \overline{DM})$ $\overset{\text{LAL}}{\Rightarrow}$ $\triangle ABM \equiv \triangle CDM$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $B\hat{A}M \equiv D\hat{C}M$ $\Rightarrow$ $\overline{AC} \,//\, \overline{CD}$

Analogamente, considerando $\triangle ADM$ e $\triangle BCM$, $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$.

$(\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ e $\overline{AD} \,//\, \overline{BC})$ $\Rightarrow$ ABCD é paralelogramo.

c) Consequência

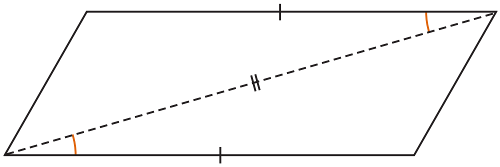
Se dois segmentos de reta interceptam-se nos respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

108. Dois lados paralelos e congruentes

a) Todo quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

Sendo ABCD um quadrilátero convexo,

Hipótese		Tese
$(\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AB} \equiv \overline{CD})$	$\Rightarrow$	ABCD é paralelogramo



Demonstração:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad \Rightarrow \quad B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$

$(\overline{AB} \equiv \overline{CD},\ B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A,\ \overline{AC} \text{ comum}) \quad \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \quad \overline{BC} \equiv \overline{AD}$

Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$, então, pelo item 106b, ABCD é paralelogramo.

b) Consequência

Se dois segmentos de reta são paralelos e congruentes, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

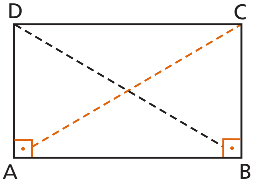
V. Propriedades do retângulo, do losango e do quadrado

109. Retângulo — diagonais congruentes

Além das propriedade do paralelogramo, o retângulo tem a propriedade característica que segue.

a) Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Hipótese		Tese
ABCD é retângulo	$\Rightarrow$	$\overline{AC} \equiv \overline{BD}$



Demonstração:

ABCD é retângulo $\Rightarrow$ ABCD é paralelogramo $\Rightarrow$ $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$

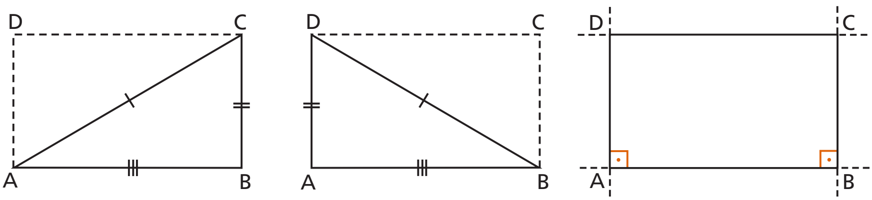
$$\left(\overline{BC} \equiv \overline{AD},\ \hat{B} \equiv \hat{A},\ \overline{AB} \text{ comum.}\right) \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle BAD \Rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$$

b) Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Sendo ABCD um paralelogramo,

Hipótese		Tese
$\overline{AC} \equiv \overline{BD}$	$\Rightarrow$	ABCD é retângulo

Demonstração:



ABCD é paralelogramo $\Rightarrow$ $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$.

$$\left(\overline{AC} \equiv \overline{BD},\ \overline{BC} \equiv \overline{AD},\ \overline{AB} \text{ comum}\right) \overset{\text{LLL}}{\Rightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle BAD \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{B}.$$

Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos colaterais em relação às paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares.

Logo, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sendo congruentes e suplementares, são retos.

No paralelogramo, os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são opostos respectivamente a $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e, portanto, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ também são retos.

Então:

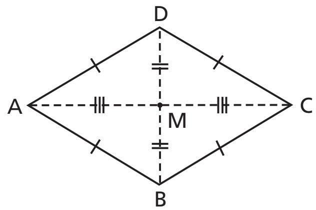
$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$ (são todos retos) $\Rightarrow$ ABCD é retângulo.

109. Losango — diagonais perpendiculares

Além das propriedades do paralelogramo, o losango tem a propriedade característica que segue.

a) Todo losango tem diagonais perpendiculares.

Hipótese		Tese
ABCD é losango	$\Rightarrow$	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$



Demonstração:

ABCD é losango $\Rightarrow$ ABCD é paralelogramo $\Rightarrow$ $\left(\overline{AM} \equiv \overline{CM},\ \overline{BM} \equiv \overline{DM}\right)$.
Pelo caso LLL, temos as congruências:

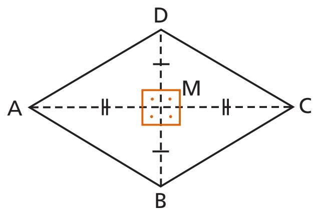
$\triangle AMB \equiv \triangle AMD \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$

e, então, os ângulos de vértice M são congruentes e suplementares.
Logo, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

b) Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Sendo ABCD um paralelogramo,

Hipótese		Tese
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$	$\Rightarrow$	ABCD é um losango



Demonstração:

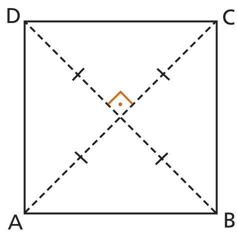
ABCD é paralelogramo $\Rightarrow$ $\left(\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\},\ \overline{AM} \equiv \overline{CM},\ \overline{BM} \equiv \overline{DM}\right)$
Pelo caso LAL, temos as congruências:
$\triangle AMB \equiv \triangle AMD \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$
Daí, $\overline{AB} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD}$ e então ABCD é losango.

111. Quadrado — diagonais congruentes e perpendiculares

Pelas definições, podemos concluir que:

Todo quadrado é retângulo e também é losango.

Portanto, além das propriedades do paralelogramo, o quadrado tem as propriedades características dos retângulos e do losango.



ABCD é quadrado $\Leftrightarrow$ (ABCD é paralelogramo, $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$).

112. Nota

Notemos, em resumo, que se um quadrilátero convexo:

- tem as diagonais que se cortam ao meio, então é um paralelogramo;
- tem diagonais que se cortam ao meio e são congruentes, então é um retângulo;
- tem diagonais que se cortam ao meio e são perpendiculares, então é um losango;
- tem diagonais que se cortam ao meio, são congruentes e são perpendiculares, então é um quadrado.

VI. Consequências — Bases médias

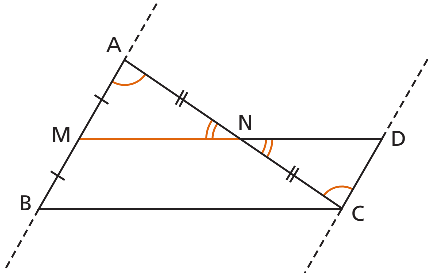
113. Base média do triângulo

a) Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:
1º) ele é paralelo ao terceiro lado;
2º) ele é metade do terceiro lado.

Seja ABC o triângulo.

Hipótese | Tese

$$\left(\overline{AM} \equiv \overline{MB},\ \overline{AN} \equiv \overline{NC}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1^{\underline{o}})\ \overline{MN}\ /\!/\ \overline{BC} \\ 2^{\underline{o}})\ \overline{MN} = \dfrac{1}{2}\,\overline{BC} \end{cases}$$



Demonstração:

Conduzimos por C uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e seja D o ponto de interseção com a reta $\overleftrightarrow{MN}$: $\overleftrightarrow{CD}\ /\!/\ \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD}\ /\!/\ \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \hat{C} \equiv \hat{A}$

$\left(\hat{C} \equiv \hat{A},\ \overline{AN} \equiv \overline{CN},\ \hat{N} \text{ o.p.v.}\right) \overset{\text{ALA}}{\Rightarrow} \triangle AMN \equiv \triangle CDN \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{CD} \equiv \overline{AM} \Rightarrow \overline{CD} \equiv \overline{MB}$

$\left(\overline{CD}\ /\!/\ \overline{MB} \text{ e } \overline{CD} \equiv \overline{MB}\right) \Rightarrow$ MBCD é paralelogramo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{MD}\ /\!/\ \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN}\ /\!/\ \overline{BC}$

E ainda:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle AMN \equiv \triangle CDN \Rightarrow \overline{MN} \equiv \overline{DN} \\ \text{MBCD é paralelogramo} \Rightarrow \overline{MD}\ /\!/\ \overline{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

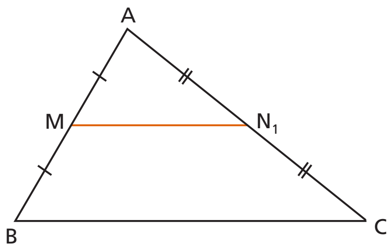
$$\Rightarrow 2 \cdot \overline{MN} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$$

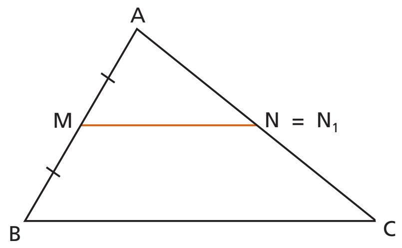
b) Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Seja ABC o triângulo.

Hipótese Tese

$(\overline{MN} \parallel \overline{BC}, \overline{AM} \equiv \overline{MB}, N \in \overline{AC}) \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{NC}$





Demonstração:

Seja N_1 o ponto médio de $\overline{AC}$. Pelo teorema anterior $\overleftrightarrow{MN_1} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Como a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ por M é única (postulado das paralelas, item 72), resulta que $\overleftrightarrow{MN_1} = \overleftrightarrow{MN}$. E como $\overleftrightarrow{MN_1}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ interceptam $\overline{AC}$ em N_1 e N, respectivamente, decorre que $N_1 = N$.

Logo, $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$.

114. Base média do trapézio

a) Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:
   1º) ele é paralelo às bases;
   2º) ele é igual à semissoma das bases.

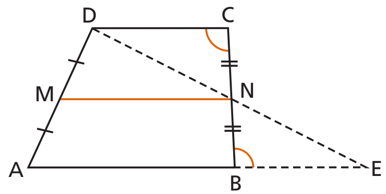
Seja ABCD um trapézio não paralelogramo de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Hipótese Tese

$$(\overline{AM} \equiv \overline{DM}, \overline{BN} \equiv \overline{CN}) \Rightarrow \begin{cases} 1º)\ \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ 2º)\ \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \end{cases}$$

Demonstração:

Seja E o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{DN}$ e $\overleftrightarrow{AB}$.



$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD} \;\Rightarrow\; \hat{B} \equiv \hat{C}$

$\left(\hat{B} \equiv \hat{C},\ \overline{BN} \equiv \overline{CN},\ \hat{N} \text{ o.p.v.}\right) \overset{ALA}{\Rightarrow}$

$\overset{ALA}{\Rightarrow} \;\; \triangle BEN \equiv \triangle CDN \;\Rightarrow\; \overline{EN} \equiv \overline{DN}$ (1)

e $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ (2)

No $\triangle ADE$, em vista de (1), M e N são pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$, respectivamente.

Logo,

1º) $\overline{MN} \,//\, \overline{AE} \;\Rightarrow\; \overline{MN} \,//\, \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

2º) $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AE}}{2} \;\Rightarrow\; \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BE}}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$

Se ABCD for paralelogramo, a propriedade é imediata.

b) Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado, então esta extremidade é ponto médio deste lado.

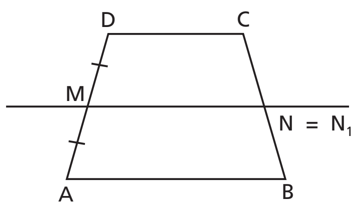
Se ABCD é um trapézio não paralelogramo,

Hipótese		Tese
$\left(\overline{MN} \,//\, \overline{AB} \,//\, \overline{CD},\ \overline{AM} \equiv \overline{DM},\ N \in \overline{BC}\right)$	$\Rightarrow$	$\overline{BN} \equiv \overline{CN}$

Demonstração:

Seja N_1 o ponto médio de $\overline{BC}$.

Pelo teorema anterior $\overleftrightarrow{MN_1} \,//\, \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$. Como a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto M é única (postulado das paralelas, item 72), temos $\overleftrightarrow{MN_1} = \overleftrightarrow{MN}$. E como $\overleftrightarrow{MN_1}$ e $\overleftrightarrow{MN}$ interceptam $\overline{BC}$ em N_1 e N, respectivamente, decorre que $N_1 = N$.

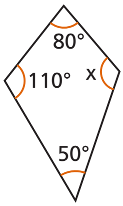


Logo, $\overline{BN} \equiv \overline{CN}$.

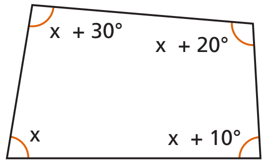
EXERCÍCIOS

224. Determine o valor de x nos casos:

a)

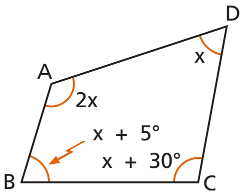


b)

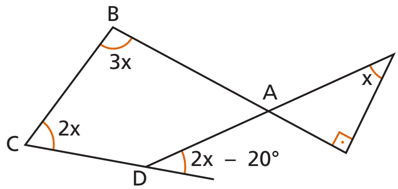


225. Determine os ângulos do quadrilátero ABCD nos casos:

a)

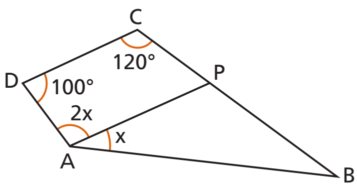


b)

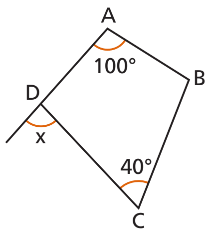


226. Determine o valor de x nos casos:

a) $PA = PB$

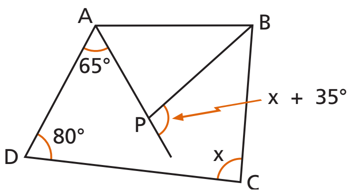


b) $AB = AD$ e $CB = CD$

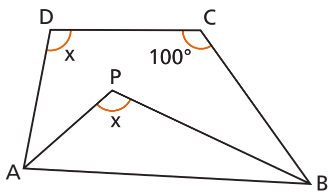


227. Se $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são bissetrizes, determine x nos casos:

a)

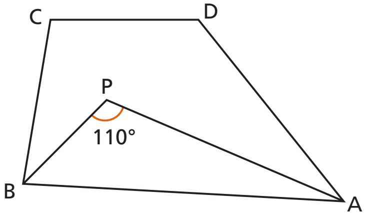


b)

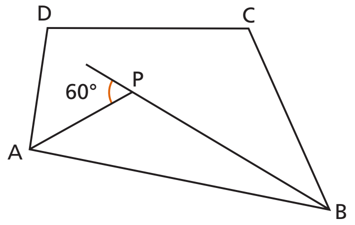


228. Se $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são bissetrizes, determine:

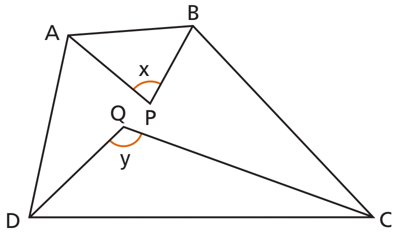
a) $\hat{C} + \hat{D}$



b) $\hat{C}$, que excede $\hat{D}$ em 10°

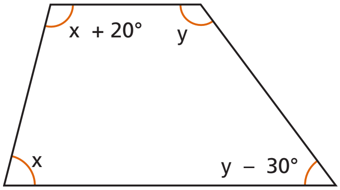


229. Se $\overline{BP}$, $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$ e $\overline{DQ}$ são bissetrizes, determine x + y.

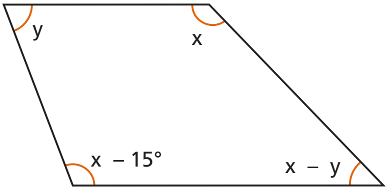


230. Se ABCD é trapézio de bases, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine *x* e *y*.

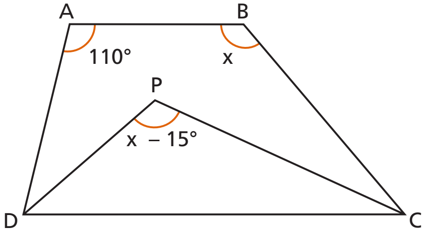
a)



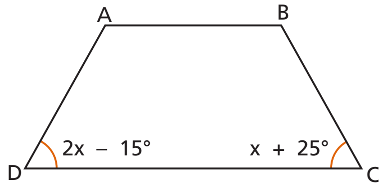
b)



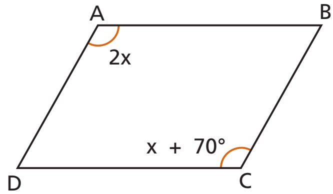
231. ABCD é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Se $\overline{DP}$ e $\overline{CP}$ são bissetrizes, determine *x* e $B\hat{C}D$.



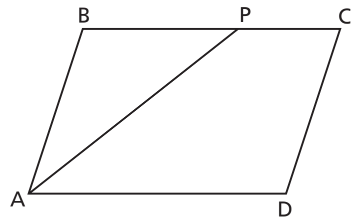
232. Se o trapézio ABCD é isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine $\hat{A}$.



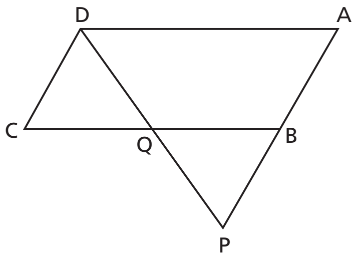
233. Se ABCD é um paralelogramo e $\hat{A} = 2x$ e $\hat{C} = x + 70°$, determine $\hat{B}$.



234. Sendo ABCD um paralelogramo, $\overline{AP}$ é bissetriz, AB = 7 cm e PC = 3 cm, determine o perímetro do paralelogramo.



235. Se ABCD é um paralelogramo, AD = 20 cm, BQ = 12 cm e BP = BQ, determine o perímetro desse paralelogramo.



236. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todo retângulo é um paralelogramo.
b) Todo paralelogramo é retângulo.
c) Todo quadrado é retângulo.
d) Todo retângulo é quadrado.
e) Todo paralelogramo é losango.
f) Todo quadrado é losango.

237. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todo retângulo que tem dois lados congruentes é quadrado.
b) Todo paralelogramo que tem dois lados adjacentes congruentes é losango.
c) Se um paralelogramo tem dois ângulos de vértices consecutivos congruentes, então ele é um retângulo.
d) Se dois ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.

238. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois lados de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
b) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então ele é um paralelogramo.
c) Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então ele é um paralelogramo.

239. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) As diagonais de um losango são congruentes.
b) As diagonais de um retângulo são perpendiculares.
c) As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos seus ângulos.
d) As diagonais de um paralelogramo são bissetrizes dos seus ângulos.
e) As diagonais de um quadrado são bissetrizes de seus ângulos e são perpendiculares.
f) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes de seus ângulos, então ele é um losango.
g) Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, então elas são bissetrizes dos ângulos dele.
h) Se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e perpendiculares, então ele é um quadrado.
i) Se as diagonais de um quadrilátero são bissetrizes e congruentes, então ele é um quadrado.
j) Se uma diagonal de um quadrilátero é bissetriz dos dois ângulos, então ela é perpendicular a outra diagonal.

240. Calcule os lados de um retângulo cujo perímetro mede 40 cm, sabendo que a base excede a altura em 4 cm.

241. Determine a base e a altura de um retângulo, sabendo que o perímetro vale 288 m e que a base excede em 4 m o triplo da altura.

242. Calcule os lados de um paralelogramo, sabendo que o seu perímetro mede 84 m e que a soma dos lados menores representa $\frac{2}{5}$ da soma dos lados maiores.

243. A soma de dois ângulos opostos de um paralelogramo é igual a $\frac{5}{13}$ da soma dos outros dois ângulos opostos. Determine-os.

244. Determine as medidas dos ângulos de um paralelogramo, sabendo que a diferença entre dois consecutivos é igual a $\frac{1}{9}$ da soma dos seus ângulos.

245. Prove que as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo cortam-se em ângulo reto.

246. Em um trapézio retângulo, a bissetriz de um ângulo reto forma com a bissetriz do ângulo agudo do trapézio um ângulo de 110°. Determine o maior ângulo do trapézio.

247. A diagonal de um losango forma com um dos seus lados um ângulo igual à terça parte de um reto. Determine os quatro ângulos do losango.

248. A bissetriz de um ângulo obtuso do losango faz com um dos lados um ângulo de 55°. Determine o valor dos ângulos agudos.

249. A base maior de um trapézio isósceles mede 12 cm e a base menor 8 cm. Calcule o comprimento dos lados não paralelos, sabendo que o perímetro é 40 cm.

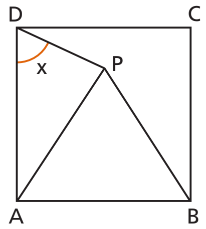
250. Um dos ângulos internos de um trapézio isósceles é os $\frac{2}{7}$ do ângulo externo adjacente. Determine os quatro ângulos do trapézio.

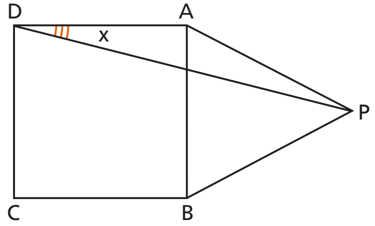
251. A soma dos ângulos consecutivos de um trapézio é igual a 78° e sua diferença é 4°. Determine o maior ângulo do trapézio.

252. Determine as medidas dos ângulos formados pelas bissetrizes internas de um trapézio em que dois ângulos agudos consecutivos medem 80° e 60°.

253. Com um arame de 36 m de comprimento construímos um triângulo equilátero e com o mesmo arame construímos depois um quadrado. Determine a razão entre o lado do triângulo e o lado do quadrado.

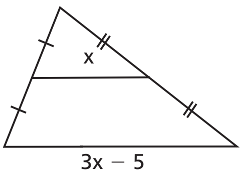
254. Se ABCD é quadrado e ABP é triângulo equilátero, determine *x* nos casos:

a)


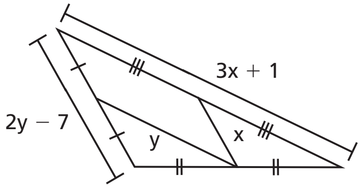
b)


255. Considerando congruentes os segmentos com "marcas iguais", determine os valores das incógnitas nos casos:

a)



b)



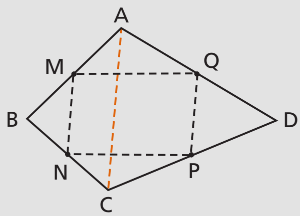
256. No triângulo ABC de lados AB = 9, BC = 14 e AC = 11, os pontos D, E e F são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule o perímetro do triângulo DEF.

257. Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo MN = 7 cm, NR = 4 cm e MR = 8 cm, e M, N e R, pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

258. Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

Solução

Seja ABCD um quadrilátero; M, N, P e Q os respectivos pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.



$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC : \overline{MN} \,/\!/\, AC \text{ e } MN = \dfrac{AC}{2} \\[2ex] \triangle DAC : \overline{PQ} \,/\!/\, \overline{AC} \text{ e } PQ = \dfrac{AC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overline{MN} \,/\!/\, \overline{PQ} \text{ e } \overline{MN} \equiv \overline{PQ} \quad \Rightarrow \quad \text{MNPQ é paralelogramo.}$$

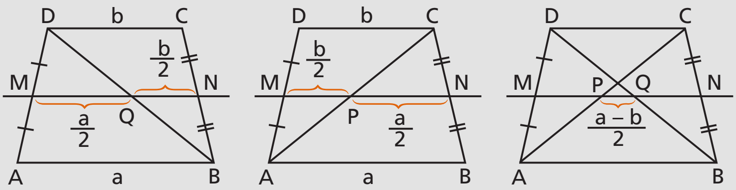
259. A que condições devem obedecer as diagonais de um quadrilátero convexo para que os pontos médios de seus lados sejam vértices de um losango? E de um retângulo?

260. A que condições devem obedecer as diagonais de um quadrilátero convexo para que os pontos médios de seus lados sejam vértices de um quadrado?

261. Seja ABCD um trapézio de base maior $\overline{AB}$ e base menor $\overline{CD}$. Sejam M o ponto médio do lado $\overline{AD}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$. Os pontos P e Q são os pontos de interseção de $\overline{MN}$ com as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Dados AB = a e CD = b, calcule MN, MP, MQ, NP, NQ e PQ.

Solução

É uma aplicação dos itens 113 e 114 da teoria.
Sendo $\overline{MN}$ base média do trapézio, $\overline{MN}$ é paralela às bases e daí os pontos P e Q são os respectivos pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.



Usando a base média de triângulo e de trapézio, temos:

$$MN = \frac{a+b}{2};\ MP = \frac{b}{2};\ MQ = \frac{a}{2};\ NP = \frac{a}{2};\ NQ = \frac{b}{2} \text{ e}$$

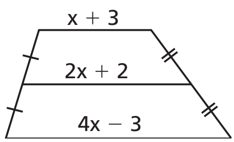
$$PQ = MQ - MP \Rightarrow PQ = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \Rightarrow PQ = \frac{a-b}{2}$$

262. A base média de um trapézio vale 20 cm e a base maior é os $\frac{3}{2}$ da base menor. Determine as bases.

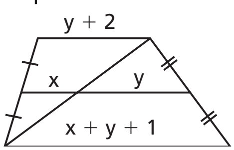
263. Em um trapézio são dadas as bases AB = 20 cm e CD = 12 cm. Considere os pontos P e Q médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e, depois, os pontos R e S médios dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Calcule a medida dos segmentos $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$ e $\overline{RS}$.

264. Considerando que os segmentos com "marcas iguais" são congruentes, determine os valores das incógnitas nos casos:

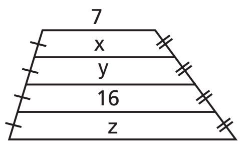
a) trapézio



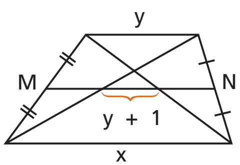
b) trapézio



c) trapézio



d) trapézio (MN = x − 2y + 5)



265. Num trapézio retângulo em que o ângulo mede 45°, a altura é igual à diferença das bases.

266. Prove que a altura de um trapézio retângulo que tem o ângulo agudo medindo 30° é igual à metade do lado não perpendicular às bases.

267. Prove que as bissetrizes dos ângulos obtusos de um paralelogramo são paralelas.

268. Prove que as bissetrizes dos ângulos formados pelas diagonais de um retângulo são paralelas aos lados do retângulo.

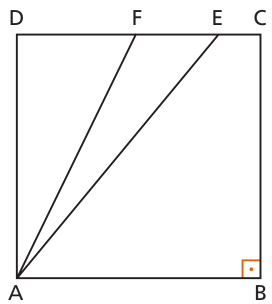
269. Num trapézio isósceles ABCD, a base menor $\overline{AB}$ é congruente aos lados não paralelos. Prove que as diagonais são bissetrizes dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ do trapézio.

270. Num paralelogramo ABCD traçamos sua diagonal $\overline{AC}$. Pelos vértices B e D traçamos dois segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{DQ}$ perpendiculares à diagonal $\overline{AC}$, com P e Q pertencentes a $\overline{AC}$. Prove que $\overline{BP}$ é congruente a $\overline{DQ}$.

271. Pelo ponto médio M da base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles ABC traçamos os segmentos $\overline{MP}$ e $\overline{MQ}$ respectivamente paralelos aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo. Prove que APMQ é um losango.

272. Consideremos um quadrilátero convexo com dois ângulos opostos retos. Prove que as bissetrizes dos outros dois ângulos internos do quadrilátero são semirretas paralelas entre si.

273. Na figura, ABCD é um quadrado, onde $\overline{BC} + \overline{CE} = \overline{AE}$. Sendo F o ponto médio de DC, prove que, $B\hat{A}E = 2F\hat{A}D$.



CAPÍTULO VIII

Pontos notáveis do triângulo

I. Baricentro — Medianas

115. As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

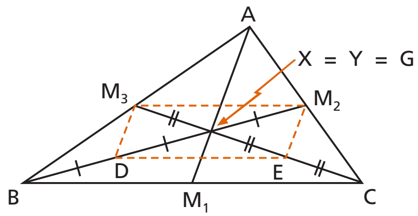
Hipótese | Tese

$$\overline{AM_1}, \overline{BM_2}, \overline{CM_3} \text{ são medianas} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ \overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\} \\ 2)\ \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1},\ \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \\ \quad \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3} \end{cases}$$

Demonstração:

Seja X o ponto tal que:

$$\overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{X\}$$



Considerando os pontos médios D e E de $\overline{BX}$ e $\overline{CX}$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\triangle ABC,\ \overline{AM_3} \equiv \overline{BM_3},\ \overline{AM_2} \equiv \overline{CM_2}\right) \Rightarrow \overline{M_2M_3} \,/\!/\, \overline{BC} \text{ e } \overline{M_2M_3} = \dfrac{\overline{BC}}{2} \\ \left(\triangle XBC,\ \overline{XD} \equiv \overline{BD} \text{ e } \overline{XE} \equiv \overline{CE}\right) \Rightarrow \overline{DE} \,/\!/\, \overline{BC} \text{ e } \overline{DE} = \dfrac{\overline{BC}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{M_2M_3} \,/\!/\, \overline{DE} \text{ e } \overline{M_2M_3} \equiv \overline{DE} \Rightarrow M_2M_3DE \text{ é paralelogramo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\overline{DX} \equiv \overline{XM_2} \Rightarrow \overline{BX} = 2 \cdot \overline{XM_2} & (1) \\ \overline{EX} \equiv \overline{XM_3} \Rightarrow \overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3} & (2)\end{cases}$$

Logo, a mediana $\overline{BM_2}$ intercepta a mediana $\overline{CM_3}$ num ponto X tal que:

$$\overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}$$

Tomando-se as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{CM_3}$ e sendo Y o ponto tal que:

$$\overline{AM_1} \cap \overline{CM_3} = \{Y\}$$

de modo análogo concluímos que:

$$\overline{CY} = 2 \cdot \overline{YM_3} \quad (3) \quad \text{e} \quad \overline{AY} = 2 \cdot \overline{YM_1} \quad (4)$$

De (2) e (3), decorre que X = Y.

Chamando este ponto X = Y de G e considerando (1), (2) e (4), temos:

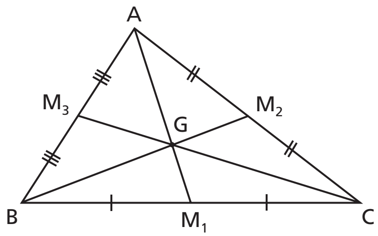
$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\} \quad \text{e}$$

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1},\ \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2},\ \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

116. Baricentro — definição

O ponto de interseção (ou ponto de encontro, ou ponto de concurso) das três medianas de um triângulo é o **baricentro** do triângulo.

G é o baricentro do $\triangle ABC$.



$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\}$

$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$

$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_1}, \overline{BG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BM_2}, \overline{CG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CM_3}$

$\overline{GM_1} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM_1}, \overline{GM_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BM_2}, \overline{GM_3} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CM_3}$

Nota

O baricentro é o centro de gravidade do triângulo.

II. Incentro — Bissetrizes internas

117. As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

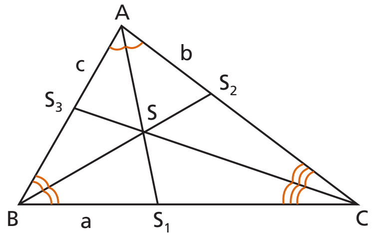
Sendo o $\triangle ABC$ de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$:

Hipótese		Tese
$\overline{AS_1}, \overline{BS_2}, \overline{CS_3}$ são bissetrizes internas	$\Rightarrow$	$\begin{cases} 1)\ \overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\} \\ 2)\ d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c} \end{cases}$

Demonstração:

Seja S o ponto tal que:

$\overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$



Temos:

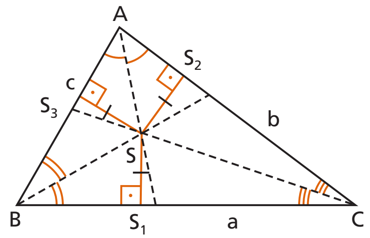
$$\left.\begin{array}{l} S \in \overline{BS_2} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,c} \\ S \in \overline{CS_3} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,b} \end{array}\right\} \Rightarrow d_{S,b} = d_{S,c} \Rightarrow S \in \overline{AS_1}$$

Logo,

$\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$ e $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$

118. Incentro — definição

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das três bissetrizes internas de um triângulo é o **incentro** do triângulo.



S é o incentro do $\triangle ABC$.

$\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$

$d_{S,\,a} = d_{S,\,b} = d_{S,\,c}$

Nota

O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

III. Circuncentro — Mediatrizes

119. As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

Sendo o $\triangle ABC$,

Hipótese		Tese
m_1, m_2, m_3 mediatrizes de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$	$\Rightarrow$	$\begin{cases} 1)\ m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\} \\ 2)\ \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \end{cases}$

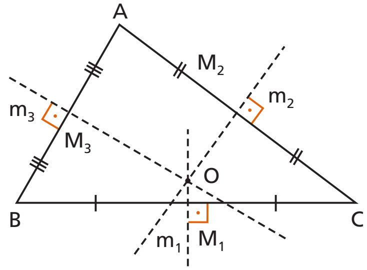
Demonstração:

Seja O o ponto tal que:

$m_2 \cap m_3 = \{O\}$

$$\left.\begin{array}{l} O \in m_2 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \\ O \in m_3 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad OB \equiv OC \quad \Rightarrow \quad O \in m_1$

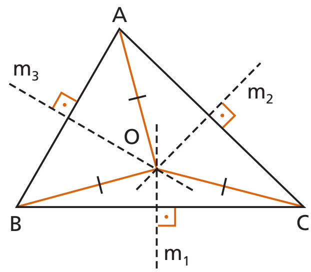


Logo,

$m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\}$ e $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$

120. Circuncentro — definição

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das mediatrizes dos lados de um triângulo é o **circuncentro** do triângulo.

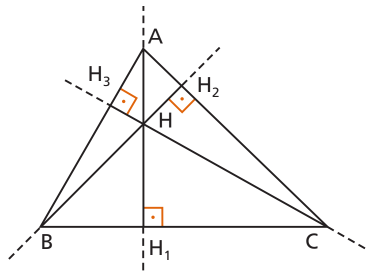


Nota

O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

IV. Ortocentro — Alturas

121. As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

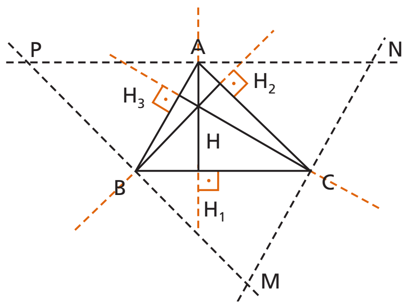


Sendo o $\triangle ABC$ de alturas $\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$, $\overline{CH_3}$:

Hipótese		Tese
$\overleftrightarrow{AH_1}$, $\overleftrightarrow{BH_2}$, $\overleftrightarrow{CH_3}$ retas que contêm as alturas	$\Rightarrow$	$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$

Demonstração:

Pelos vértices A, B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo o triângulo MNP.



$A \in \overline{NP}$ e $\overline{NP} \,//\, \overline{BC}$;
$B \in \overline{MP}$ e $\overline{MP} \,//\, \overline{AC}$;
$C \in \overline{MN}$ e $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} APBC \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{BC} \\ ABCN \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ é ponto médio de } \overline{NP} \quad (1)$$

$$\left(\overleftrightarrow{AH_1} \perp \overline{BC},\ \overline{NP} \,//\, \overline{BC}\right) \Rightarrow \overleftrightarrow{AH_1} \text{ é perpendicular a } \overline{NP} \quad (2)$$

De (1) e (2), decorre que:

$$\text{A reta } \overleftrightarrow{AH_1} \text{ é mediatriz de } \overline{NP}.$$

Analogamente:

A reta $\overleftrightarrow{BH_2}$ é mediatriz de $\overline{MP}$. A reta $\overleftrightarrow{CH_3}$ é mediatriz de $\overline{MN}$.

Logo, considerando o $\triangle MNP$, as mediatrizes $\overleftrightarrow{AH_1}$, $\overleftrightarrow{BH_2}$ e $\overleftrightarrow{CH_3}$ dos lados do triângulo interceptam-se num ponto, H.

$$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$$

122. Ortocentro — definição

O ponto de interseção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das retas suportes das alturas de um triângulo é o **ortocentro** do triângulo.

EXERCÍCIOS

274. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.
b) O circuncentro é o centro da cincunferência circunscrita ao triângulo.
c) O incentro é interno ao triângulo.
d) O baricentro é interno ao triângulo.
e) O ortocentro é interno ao triângulo.
f) O circuncentro é interno ao triângulo.
g) O baricentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

275. Diga que triângulo satisfaz a condição dada nos casos:

a) O ortocentro e o baricentro são coincidentes;
b) O incentro e o circuncentro são coincidentes;
c) O ortocentro é um dos vértices;
d) O ortocentro é externo;
e) O circuncentro é externo;
f) O circuncentro está em um dos lados;
g) O ortocentro é um ponto interno.

276. Considere os segmentos constituídos pelas três alturas, pelas três medianas e pelas três bissetrizes internas de um triângulo. Quantos desses segmentos, dois a dois distintos, teremos:

a) no triângulo equilátero;

b) no triângulo isósceles não equilátero;

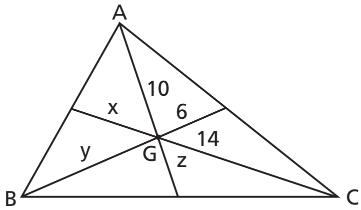
c) no triângulo escaleno.

277. Sendo G o baricentro do triângulo ABC, determine *x*, *y* e *z*.

$AG = 10$

$BG = y$

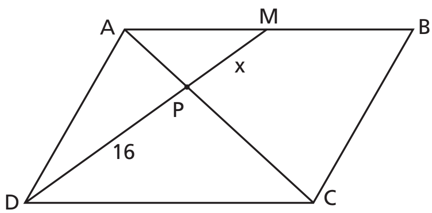
$CG = 14$



278. Se o quadrilátero ABCD é um paralelogramo e M é o ponto médio de $\overline{AB}$, determine *x*.

$DP = 16$

$PM = x$



279. Sendo H o ortocentro de um triângulo ABC e $B\hat{H}C = 150°$, determine $\hat{A}$.

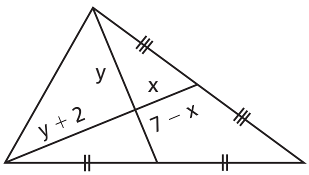
280. Se H é o ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e $B\hat{H}C = 50°$, determine os ângulos do triângulo.

281. Se P é o incentro de um triângulo ABC e $B\hat{P}C = 125°$, determine $\hat{A}$.

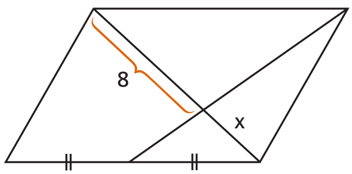
282. O circuncentro de um triângulo isósceles é interno ao triângulo e duas mediatrizes formam um ângulo de 50°. Determine os ângulos desse triângulo.

283. Considerando congruentes os segmentos com "marcas iguais", determine valores das incógnitas nos casos:

a)



b) paralelogramo



284. Considerando os quatro pontos notáveis de um triângulo:

a) Quais os que podem ser externos ao triângulo?

b) Qual o que pode ser ponto médio de um lado?

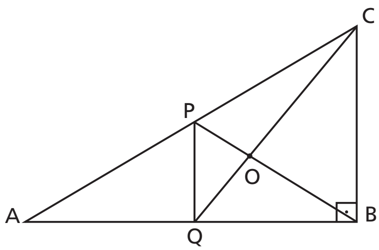
c) Qual o que pode ser vértice do triângulo?

285. Em um triângulo ABC, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem, respectivamente, 86° e 34°. Determine o ângulo agudo formado pela mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$ e pela bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

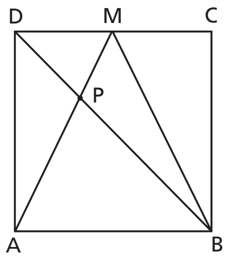
286. Em um triângulo ABC os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem, respectivamente, 70° e 60°. Determine a razão entre os dois maiores ângulos formados pelas interseções das três alturas.

287. Determine as medidas dos três ângulos obtusos formados pelas mediatrizes de um triângulo equilátero.

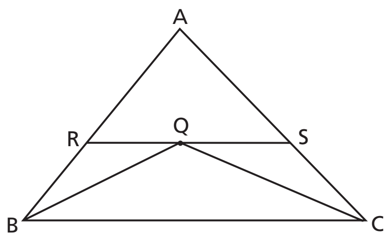
288. Na figura, Q é o ponto médio de $\overline{AB}$. $\overline{QP}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Sendo $\overline{AC} = 30$ cm, determine $\overline{PO}$.



289. Na figura, ABCD é retângulo, M é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo ABM é equilátero. Sendo $\overline{AB} = 15$, calcule $\overline{AP}$.



290. Determine o perímetro do triângulo ARS da figura, onde $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 15 cm e 18 cm, respectivamente, sendo $\overline{BQ}$ e $\overline{CQ}$ as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC e $\overline{RS}$ paralelo a $\overline{BC}$.



291. As três bissetrizes de um triângulo ABC se encontram num ponto O. Determine as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ em função dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo.