OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria plana

9

Atual Editora

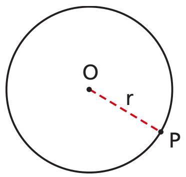
NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO X

Circunferência e círculo

I. Definições — Elementos

139. Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o **centro**, e a distância dada é o **raio** da circunferência.



Dados: um plano α, um ponto O de α e uma distância *r*,

$$\lambda(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} = r\}$$

onde $\lambda(O, r)$ representa a circunferência de centro O e raio *r*.

140. Posição de ponto e circunferência

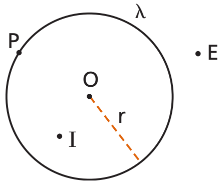
Dado um ponto X e uma circunferência $\lambda(O, r)$,

X é *interno* a $\lambda \iff d_{X,O} < r$

X *pertence* a $\lambda \iff d_{X,O} = r$

X é *externo* a $\lambda \iff d_{X,O} > r$

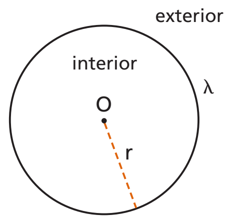
Na figura, I é interno a λ, P pertence a λ e E é externo a λ.



141. Interior e exterior

O conjunto dos pontos internos a uma circunferência é seu **interior**.

O conjunto dos pontos externos a uma circunferência é seu **exterior**.



Sendo $\lambda(O, r)$ uma circunferência de um plano α:

interior de $\lambda = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} < r\}$

exterior de $\lambda = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} > r\}$

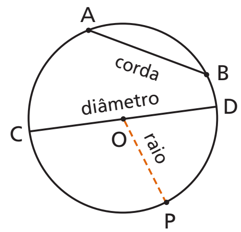
142. Corda, diâmetro e raio

Corda de uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.

$\overline{AB}$ é uma corda.

Diâmetro de uma circunferência é uma corda que passa pelo centro.

$\overline{CD}$ é um diâmetro.



Um **raio** de uma circunferência é um segmento com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência.

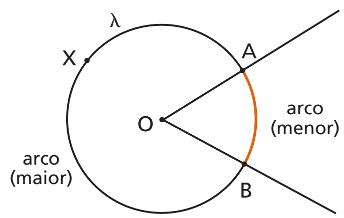
$\overline{OP}$ é um raio.

143. Arco de circunferência e semicircunferência

Consideremos uma circunferência λ de centro O e sejam A e B dois pontos de λ que não sejam extremidades de um diâmetro. Nessas condições, temos:

a) **arco menor $\overset{\frown}{AB}$** é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de λ que estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$;

b) **arco maior $\overset{\frown}{AB}$** é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de λ que estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$.



Se considerarmos $A\hat{O}B$ como sendo o **setor angular** ou o **ângulo completo**, podemos ter:

$$\text{arco menor } \widehat{AB} = \lambda \cap A\hat{O}B$$

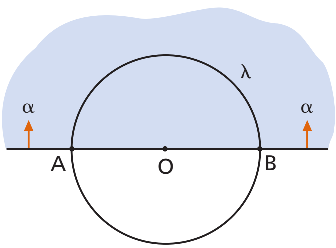
Os pontos A e B são as extremidades do arco.

Seguindo a figura, indicaremos os arcos como segue:

$$\widehat{AB} = \text{arco menor } \widehat{AB} \qquad \widehat{AXB} = \text{arco maior } \widehat{AB}$$

Salvo aviso contrário, ao nos referirmos ao arco $\widehat{AB}$, estamos considerando o arco menor.

Se A e B são extremidades de um diâmetro de λ, **semicircunferência** $\widehat{AB}$ é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de λ que estão num mesmo semiplano dos determinados pela reta $\overleftrightarrow{AB}$.

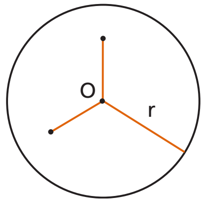


Se α é um desses semiplanos, podemos ter:

$$\text{semicircunferência } \widehat{AB} = \lambda \cap \alpha$$

144. Círculo

Círculo (ou **disco**) é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é menor ou igual a uma distância (não nula) dada.



Dados um plano α, um ponto O de α e uma distância *r*,

$$\text{círculo de centro O e raio r} = c(O, r) = \{P \in \alpha \mid d_{P,O} \leq r\}$$

O círculo é a reunião da circunferência com seu interior.

Centro, raio, corda, diâmetro e arco de um círculo são o centro, o raio, a corda, o diâmetro e o arco da respectiva circunferência.

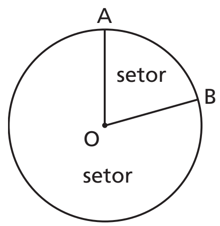
145. Setor circular, segmento circular e semicírculo

Consideremos um círculo *c* de centro O e sejam A e B dois pontos da circunferência de *c* que não sejam extremidades de um diâmetro.

1º) **Setor circular**

a) Setor circular menor AOB é a reunião dos conjuntos dos pontos dos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e de todos os pontos do círculo *c* que estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$.

b) Setor circular maior AOB é a reunião dos conjuntos dos pontos dos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e de todos os pontos do círculo *c* que estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$.



Salvo aviso contrário, quando nos referirmos ao setor circular AOB, estaremos considerando o setor circular menor.

Se considerarmos $A\hat{O}B$ como sendo o setor angular (ângulo completo), poderemos ter:

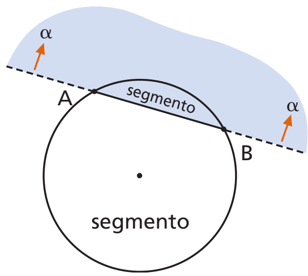
$$\text{setor circular AOB} = A\hat{O}B \cap c$$

2º) **Segmento circular**

a) Segmento circular menor AB é a interseção do círculo *c* com o semiplano de origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que não contém o centro de *c*.

Sendo α esse semiplano (vide figura):
Segmento circular menor AB $= \alpha > c$

b) Segmento circular maior AB é a interseção do círculo *c* com o semiplano de origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que contém o centro de *c*.

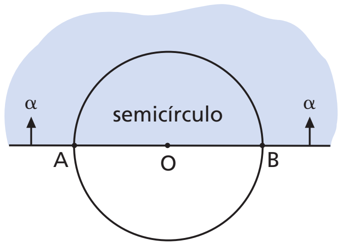


Quando nos referimos ao segmento circular, salvo aviso em contrário, consideramos o menor.

3º) **Semicírculo**

Se A e B são extremidades de um diâmetro de *c*, semicírculo AB é a interseção do círculo *c* com um dos semiplanos de origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Semicírculo AB $= \alpha \cap c$.



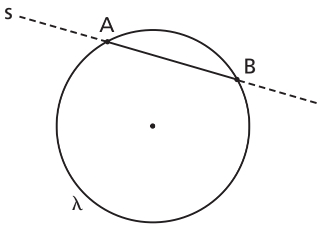
II. Posições relativas de reta e circunferência

146. Secante — definição

Uma reta **secante** a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.

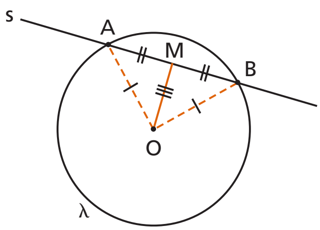
Dizemos que a reta e a circunferência são secantes.

$$s \cap \lambda = \{A, B\}$$



147. Propriedade da secante

a) Se uma reta s, secante a uma circunferência $\lambda(O, r)$, não passa pelo centro O, intercepta λ nos pontos distintos A e B, e se M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{OM}$ é perpendicular à secante s $\left(\text{ou à corda } \overline{AB}\right)$.



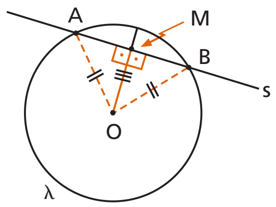
Hipótese		Tese
$\left(\text{M é ponto médio da corda } \overline{AB}, M \neq O\right)$	$\Rightarrow$	$\overleftrightarrow{OM} \perp \overline{AB}$

Demonstração:

Pelo caso LLL, os triângulos OAM e OBM são congruentes.

Daí decorre que $\overleftrightarrow{OM} \perp \overline{AB}$ e $\overleftrightarrow{OM} \perp s$.

b) Se uma reta s, secante a uma circunferência $\lambda(O, r)$, não passa pelo centro O, intercepta λ nos pontos distintos A e B, então a perpendicular a s conduzida pelo centro passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$.



Hipótese		Tese
$\overleftrightarrow{OM}$ perpendicular à corda $\overline{AB}$	$\Rightarrow$	$\overline{AM} \equiv \overline{MB}$

Demonstração:

Pelo caso especial de congruência de triângulos (cateto-hipotenusa), os triângulos OAM e OBM são congruentes. Daí vem $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$, ou seja, M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$.

Observações

1ª) Usando o caso de congruência LLL, pode-se provar a propriedade: A mediatriz de uma corda passa pelo centro da circunferência.

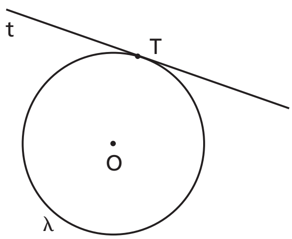
2ª) Sendo s secante a $\lambda(O, r)$, então $d_{O,s} < r$ e reciprocamente.

148. Tangente — definição

Uma reta **tangente** a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência num único ponto.

A reta tangente a uma circunferência tem um ponto comum com a circunferência, e os demais pontos da reta são externos à circunferência.

O ponto comum é o ponto de tangência.



Dizemos que a reta e a circunferência são tangentes.

Na figura:

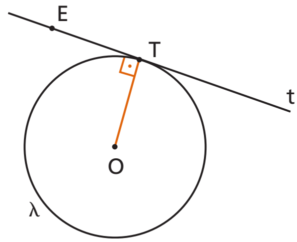
$$t \cap \lambda = \{T\}$$

149. Propriedade da tangente

a) Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade da circunferência é tangente à circunferência.

Seja a circunferência $\lambda(O, r)$ e T um de seus pontos.

Hipótese		Tese
$t \perp \overline{OT}$ em T	$\Rightarrow$	t é tangente a λ



Demonstração:

Seja E outro ponto de t, distinto do ponto T.

$$\left(\overline{OT} \perp t \text{ e } \overline{OE} \text{ oblíquo a } t\right) \Rightarrow \overline{OE} > \overline{OT} \Rightarrow \overline{OE} > r \Rightarrow \text{E é externo a } \lambda.$$

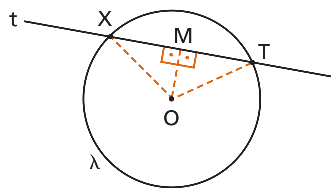
Logo, a reta t tem um único ponto T comum com λ, pois os demais são externos.

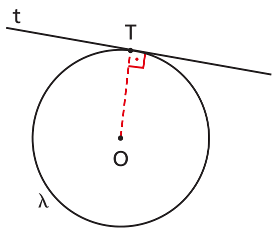
Portanto, t é tangente a λ.

b) Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Hipótese		Tese
t tangente a λ em T	$\Rightarrow$	$t \perp \overline{OT}$ em T

Demonstração:





Se t não fosse perpendicular a $\overline{OT}$, teríamos o que segue.

Seja M pé da perpendicular à reta t por O. O ponto M seria distinto de T.

Tomando na semirreta oposta a $\overrightarrow{MT}$ um ponto X tal que $\overline{MX} \equiv \overline{MT}$, teríamos:

$\overline{OM}$ comum, $\overline{OM} \perp \overline{TX}$, $\overline{MX} \equiv \overline{MT} \overset{\text{LAL}}{\Rightarrow} \triangle OMX \equiv \triangle OMT \Rightarrow \overline{OX} \equiv \overline{OT} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{OX} = r \Rightarrow X \in \lambda$.

Portanto, *t* interceptaria λ em dois pontos distintos, T e X, o que é absurdo, de acordo com a hipótese.

Logo, *t* é perpendicular a $\overline{OT}$ em T.

Observação

Se *t* é tangente à circunferência λ(O, r), então $d_{O,t} = r$ e reciprocamente.

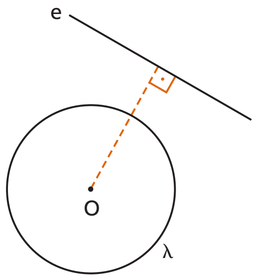
150. Exterior — definição

Uma reta **exterior** a uma circunferência é uma reta que não intercepta a circunferência.

Dizemos que a reta e a circunferência são exteriores.

Na figura:

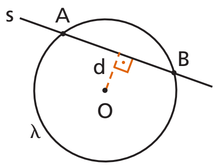
$$e \cap \lambda = \varnothing$$



151. Posições

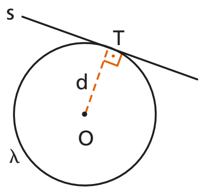
Considerando uma reta *s*, uma circunferência λ(O, r) e sendo *d* a distância do centro O à reta *s* ($d = d_{O,s}$), há três possibilidades para s e λ:

$\boxed{d < r}$



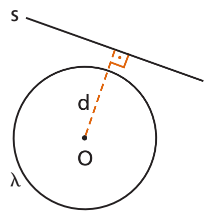
$s \cap \lambda = \{A, B\}$
s e λ secantes

$\boxed{d = r}$



$s \cap \lambda = \{T\}$
s e λ tangentes

$\boxed{d > r}$



$s \cap \lambda = \varnothing$
s e λ externas

III. Posições relativas de duas circunferências

152. Definições

Uma circunferência é **interna** a outra se todos os seus pontos são pontos internos da outra.

Uma circunferência é **tangente interna** a outra se têm um único ponto comum, e os demais pontos da primeira são pontos internos da segunda.

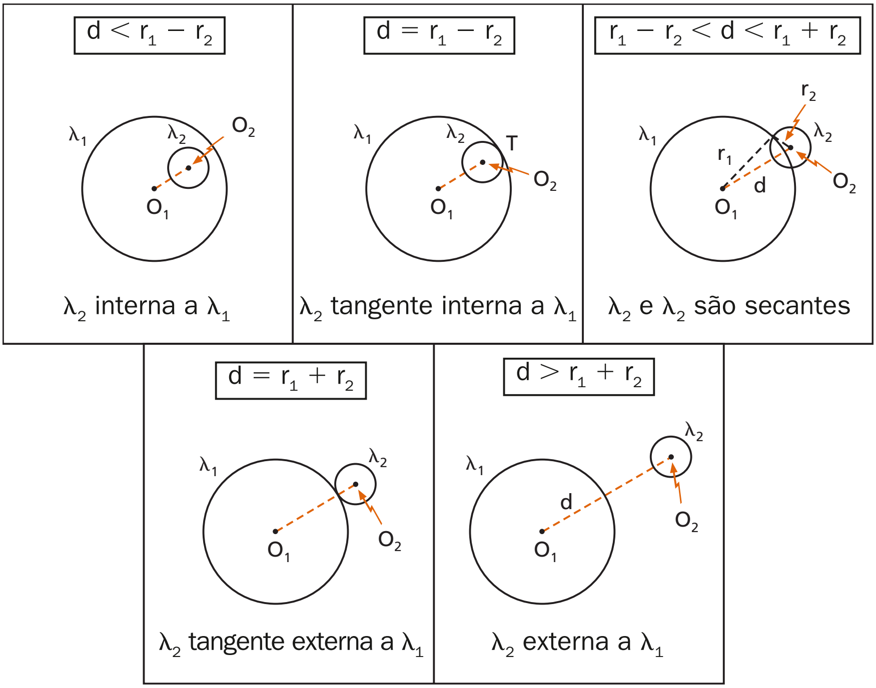
Duas circunferências são **secantes** se têm em comum somente dois pontos distintos.

Duas circunferências são **tangentes externas** se têm um único ponto comum, e os demais pontos de uma são externos à outra.

Duas circunferências são **externas** se os pontos de uma delas são externos à outra.

153. Posições

Considerando duas circunferências $\lambda_1(O_1, r_1)$ e $\lambda_2(O_2, r_2)$ com $r_1 > r_2$ e sendo *d* a distância entre os centros, prova-se que há cinco possibilidades para λ_1 e λ_2:



IV. Segmentos tangentes — Quadriláteros circunscritíveis

154. Se de um ponto P conduzirmos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a uma circunferência, com A e B na circunferência, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

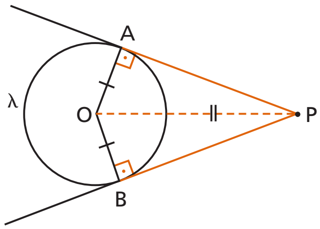
Hipótese		Tese
$\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a λ; A, B $\in \lambda$	$\Rightarrow$	$\overline{PA} \equiv \overline{PB}$

Demonstração:

Seja O o centro de λ.

Aplicando o caso especial de congruência de triângulos retângulos:

$\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ (cateto), $\overline{OP}$ comum (hipotenusa) $\Rightarrow \triangle PAO \equiv \triangle PBO \Rightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$

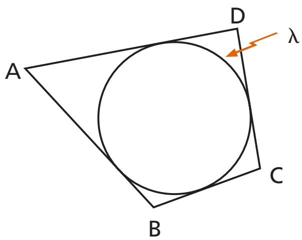


Nota

O centro O de λ pertence à bissetriz de $A\hat{P}B$.

155. Quadrilátero circunscrito — definição

Um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.



Na figura:

ABCD é circunscrito a λ ou λ é inscrita em ABCD.

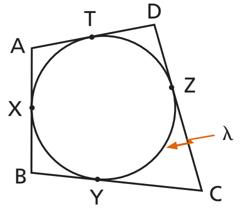
156. Propriedade

a) Se um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

Hipótese		Tese
ABCD circunscrito a λ	$\Rightarrow$	$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

Demonstração:

Sejam X, Y, Z e T os pontos de tangência de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.



Aplicando a propriedade dos segmentos tangentes:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AX} \equiv \overline{AT}\\ \overline{BX} \equiv \overline{BY}\\ \overline{CZ} \equiv \overline{CY}\\ \overline{DZ} \equiv \overline{DT}\end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \underbrace{\overline{AX} + \overline{BX}}_{\overline{AB}} + \underbrace{\overline{CZ} + \overline{DZ}}_{\overline{CD}} = \overline{AT} + \underbrace{\overline{BY} + \overline{CY}}_{\overline{BC}} + \overline{DT}$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

b) Se num quadrilátero convexo a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois, então o quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.

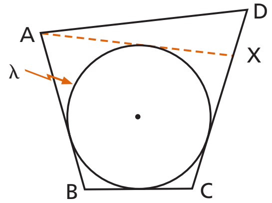
Sendo ABCD um quadrilátero convexo,

Hipótese		Tese
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$	$\Rightarrow$	ABCD é circunscritível a uma circunferência.

Demonstração:

Seja λ a circunferência tangente aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ do quadrilátero.

Se ABCD não é circunscritível a λ, existe ABCX, com X na reta $\overleftrightarrow{CD}$ que é circunscrito a λ.



ABCX circunscrito a $\lambda \Rightarrow \overline{AB} + \overline{CX} = \overline{BC} + \overline{AX}$ (1)

Hipótese $\Rightarrow \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB} + \underbrace{\overline{CX} \pm \overline{XD}}_{\overline{CD}} = \overline{AD} + \overline{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AB} + \overline{CX} = \overline{AD} + \overline{BC} \pm \overline{XD}$ (2)

De (1) e (2) decorre que $\overline{AX} = \overline{AD} \pm \overline{XD}$, o que é absurdo no $\triangle ADX$.

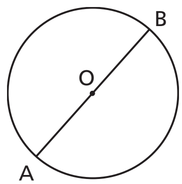
Logo, ABCD é circunscritível a uma circunferência.

157. Condição necessária e suficiente

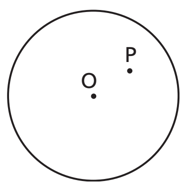
Uma condição necessária e suficiente para um quadrilátero convexo ser circunscritível a uma circunferência é a soma de dois lados opostos ser igual à soma dos outros dois.

EXERCÍCIOS

336. Determine o raio do círculo de centro O, dados: AB = 3x − 3 e OA = x + 3.

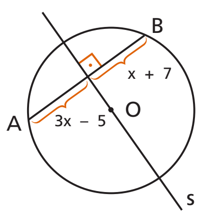


337. A circunferência ao lado tem raio de 16 cm e o ponto P dista 7 cm do centro. Determine a distância entre P e a circunferência.

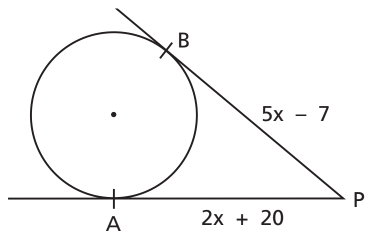


338. Determine o valor de *x* nos casos:

a) *s* é perpendicular a $\overline{AB}$

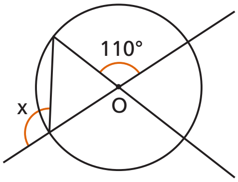


b) $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência

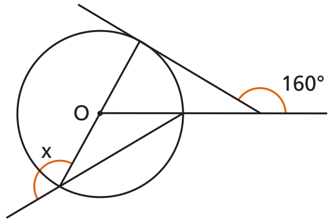


339. Determine o valor de x, sendo O o centro da circunferência nos casos:

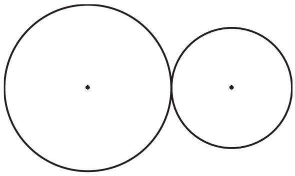
a)



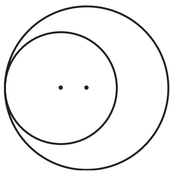
b)



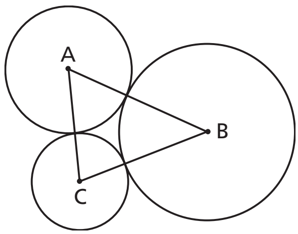
340. As circunferências da figura ao lado são tangentes externamente. Se a distância entre os centros é 28 cm e a diferença entre os raios é 8 cm, determine os raios.



341. As duas circunferências ao lado são tangentes internamente e a soma dos raios é 30 cm. Se a distância entre os centros é 6 cm, determine os raios.



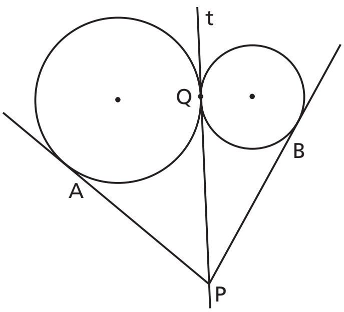
342. Na figura ao lado, as circunferências são tangentes duas a duas, e os centros são os vértices do triângulo ABC. Sendo AB = 7 cm, AC = 5 cm e BC = 6 cm, determine os raios das circunferências.

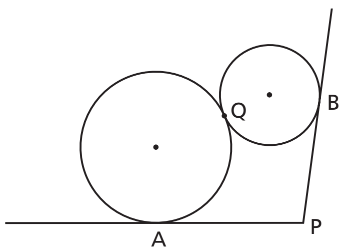


343. As circunferências são tangentes externamente em Q e $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são tangentes às circunferências. Determine a medida do ângulo $A\hat{Q}B$ nos casos:

a) onde t é tangente comum e $A\hat{P}B = 80°$

b) com $A\hat{P}B = 100°$





344. Diga o número de retas que passam pelo ponto P e tangenciam a circunferência λ nos casos:

a) P pertence a λ b) P é interior a λ c) P é externo a λ

345. Determine o número de retas tangentes comuns que podemos traçar a duas circunferências nos casos abaixo.

a) As circunferências são concêntricas distintas.

b) As circunferências são exteriores.

c) As circunferências são secantes.

d) As circunferências são tangentes exteriormente.

e) As circunferências são tangentes interiormente.

346. Pode um setor circular coincidir com um segmento circular? Cite o caso.

347. Em que caso um setor circular é um semicírculo?

348. O que podemos dizer da reta que passa pelo ponto de tangência de duas circunferências tangentes entre si, sabendo que essa reta é perpendicular à reta que passa pelos centros dessas circunferências?

349. É possível obtermos uma corda que passa pelo ponto médio do diâmetro de uma circunferência?

350. Dê a posição de duas circunferências de raios *r* e R, sendo *d* a distância entre seus centros, nos casos abaixo:

a) $r = 2$ cm; $R = 5$ cm; $d = 10$ cm

b) $r = 5$ cm; $R = 10$ cm; $d = 15$ cm

c) $r = 3$ cm; $R = 7$ cm; $d = 4$ cm

d) $r = 6$ cm; $R = 10$ cm; $d = 0$ cm

e) $r = 6$ cm; $R = 8$ cm; $d = 10$ cm

351. A distância entre os centros de duas circunferências tangentes exteriormente é de 33 cm. Determine seus diâmetros, sabendo que a razão entre seus raios é $\frac{4}{7}$.

352. A distância entre os centros de duas circunferências tangentes internamente é 5 cm. Se a soma dos raios é 11 cm, determine os raios.

353. Duas circunferências são secantes, sendo 20 cm a distância entre seus centros. Sabendo que o raio da menor circunferência mede 11 cm, determine o raio da maior, que é múltiplo de 6.

354. Duas circunferências de centros A e B são tangentes externamente e tangenciam internamente uma circunferência de centro C. Sendo $AB = 12$ m, $AC = 17$ m e $BC = 13$ m, determine os raios dessas circunferências.

355. Seja P o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo ABC, com o lado $\overline{AB}$. Se AB = 7, BC = 6 e AC = 8, quanto vale AP?

356. Considere um triângulo ABC de lados AB = c, AC = b e BC = a, e sejam P, Q e R os pontos em que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ tangenciam a circunferência inscrita. Calcule os segmentos AR = x, BP = y e CQ = z.

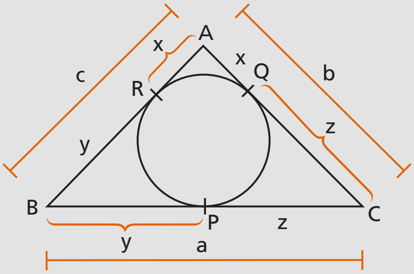
Solução

Temos:

$AR = x \Rightarrow AQ = x$

$BP = y \Rightarrow BR = y$

$CQ = z \Rightarrow CP = z$



Daí vem:

$$\begin{array}{ll} x + y = c & (1) \\ x + z = b & (2) \\ y + z = a & (3) \\ \hline 2x + 2y + 2z = a + b + c & \end{array}$$

Fazendo a + b + c = 2p

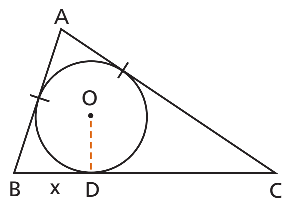
(em que *p* é semiperímetro)

$2(x + y + z) = 2p \Rightarrow x + y + z = p \quad (4)$

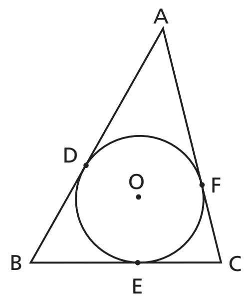
$(4) - (1) \Rightarrow z = p - c; \quad (4) - (2) \Rightarrow y = p - b;$

$(4) - (3) \Rightarrow x = p - a$

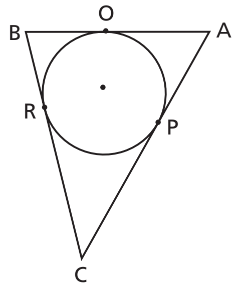
357. Na figura ao lado, determine a medida do segmento $\overline{BD}$, sabendo que a circunferência de centro O está inscrita no triângulo ABC, e que os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente 6 cm, 8 cm e 10 cm.



358. Na figura ao lado, o círculo de centro O é inscrito no triângulo ABC. BD = 4, AF = 3 e EC = 5. Qual é o perímetro do triângulo ABC?

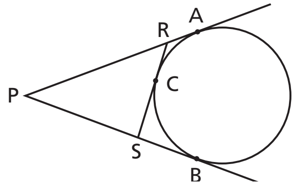


359. Na figura ao lado, sabendo que AB = c, BC = a, AC = b e *p* o semiperímetro do triângulo, prove que AP é igual a p − a.

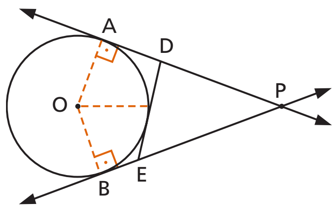


360. Um círculo é inscrito num triângulo ABC e tangencia os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente em P, Q e R. Se AB = c, AC = b e BC = a e o semiperímetro é *p*, calcule AR, BP e CQ.

361. Na figura ao lado PA = 10 cm. Calcule o perímetro do triângulo PRS.



362. Na figura ao lado, $\overline{PA}$ é igual ao triplo do diâmetro da circunferência. Determine a medida do perímetro do triângulo PDE em função do raio *r* dessa circunferência.

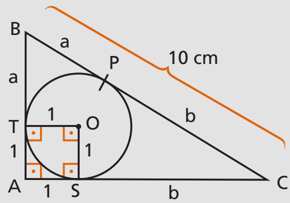


363. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 cm, e o raio do círculo inscrito mede 1 cm. Calcule o perímetro do triângulo.

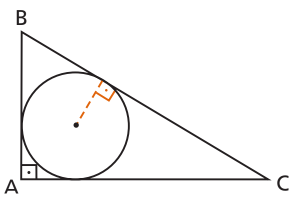
Solução

Note que SATO é quadrado de lado 1 cm.
Indicando: BP = BT = a e CP = CS = b, obtemos:

2p = (a + 1) + (b + 1) + a + b
2p = a + b + 2 + a + b
2p = 10 + 2 + 10
2p = 22 cm



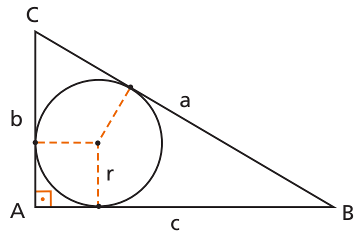
364. Na figura ao lado, calcule a medida do raio *r* da circunferência inscrita no triângulo retângulo ABC, sendo AB = 10 cm, AC = 24 cm e BC = 26 cm.



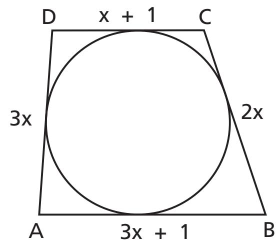
365. Determine a medida do diâmetro de um círculo inscrito em um triângulo retângulo cujos lados medem 9 cm, 12 cm e 15 cm.

366. Determine o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos *b* e *c* e hipotenusa *a*.

367. Na figura, sendo $2p = a + b + c$ e *r* o raio do círculo inscrito, calcule a medida da hipotenusa *a* em função de *p* e *r*.
$AB = c$, $AC = b$, $AB = a$



368. Determine o perímetro do quadrilátero ABCD, circunscritível, da figura.
$AB = 3x + 1$, $BC = 2x$
$CD = x + 1$ e $DA = 3x$



Solução

ABCD é circunscrito $\Rightarrow$ $AB + CD = BC + AD$

Então:

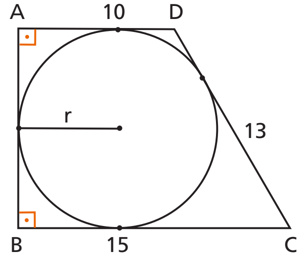
$(3x + 1) + (x + 1) = 2x + 3x \Rightarrow x = 2$

perímetro $= 2p = (3x + 1) + 2x + (x + 1) + 3x \Rightarrow 2p = 9x + 2$

Logo: $2p = 20$.

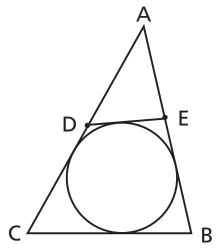
369. ABCD é um quadrilátero circunscritível cujos lados medem $AD = 12$ cm, $DC = 9$ cm, $BC = x + 7$ e $AB = 2x + 1$. Determine o perímetro desse quadrilátero.

370. Calcule o valor do raio *r* do círculo inscrito no trapézio retângulo ao lado.



371. A diferença de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível é igual a 8 cm e a diferença dos outros dois lados é 4 cm. Determine os lados do quadrilátero, sendo 56 cm a sua soma.

372. Na figura ao lado, determine o perímetro do triângulo ADE, sabendo que o perímetro do triângulo ABC vale 10 cm, a base $\overline{BC}$ mede 4 cm e que o círculo está inscrito no quadrilátero BCDE.



373. Determine a medida de um dos lados não paralelos de um trapézio isósceles, circunscrito a um círculo, sabendo que suas bases medem 30 cm e 10 cm, respectivamente.

374. Prove que qualquer paralelogramo circunscrito a uma circunferência é losango.

375. Prove que o diâmetro é a maior corda de uma circunferência.

376. Prove que, se duas cordas de uma circunferência estão a uma mesma distância do centro, então elas são congruentes.

CAPÍTULO XI

Ângulos na circunferência

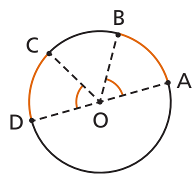
I. Congruência, adição e desigualdade de arcos

158. Circunferências congruentes

Duas circunferências são congruentes quando têm raios iguais.

159. Arcos congruentes

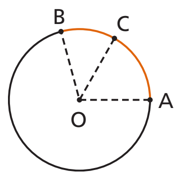
Dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ de uma circunferência de centro O são congruentes se, e somente se, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes.



$$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD} \iff A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$$

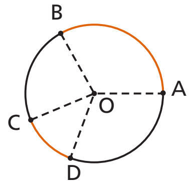
160. Adição de arcos

Numa circunferência de centro O, o arco $\overset{\frown}{AB}$ é a soma dos arcos $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{CB}$ se, e somente se, o ângulo $A\hat{O}B$ é soma dos ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$.



$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} \iff A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$$

161. Desigualdade de arcos



Numa circunferência de centro O, o arco $\overset{\frown}{AB}$ é maior que o arco $\overset{\frown}{CD}$ se, e somente se, o ângulo $A\hat{O}B$ é maior que o ângulo $C\hat{O}D$.

$$\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD} \iff A\hat{O}B > C\hat{O}D$$

162. Notas

1ª) Para círculos congruentes, setores circulares congruentes ou desiguais e segmentos circulares congruentes, adaptam-se os conceitos vistos para circunferência e arcos.

2ª) Os conceitos sobre arcos que emitimos são de arcos de uma mesma circunferência, porém eles podem ser estendidos para arcos de circunferências congruentes.

II. Ângulo central

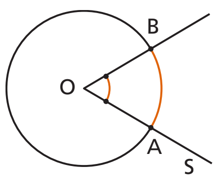
163. Definição

Ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.

Se numa circunferência de centro O um ângulo central determina um arco $\overset{\frown}{AB}$, dizemos que:

$\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$, ou

$\overset{\frown}{AB}$ é o arco subentendido por $A\hat{O}B$.



$A\hat{O}B$ ângulo central
$\overset{\frown}{AB}$ arco correspondente

164. Medida do ângulo central e do arco correspondente

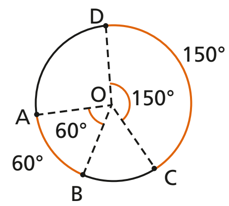
A congruência, a adição e a desigualdade de arcos foram estabelecidas em correspondência com a congruência, a adição e a desigualdade dos ângulos centrais correspondentes. Portanto, para medir um arco tomando outro arco da mesma circunferência como unidade (arco unitário) basta utilizar os respectivos ângulos centrais.

Tomando-se para unidade de arco (arco unitário) o arco definido na circunferência por um ângulo central unitário (unidade de ângulo), temos: a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.

Assim, na circunferência de centro O ao lado:

1) se $m(A\hat{O}B) = 60°$, então
$m(\widehat{AB}) = 60°$ e reciprocamente.
$A\hat{O}B = 60° \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{AB} = 60°$

2) se $m(C\hat{O}D) = 150°$, então
$m(\widehat{CD}) = 150°$ e reciprocamente.
$C\hat{O}D = 150° \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{CD} = 150°$

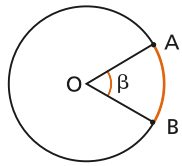


165. Observação

Para simplificar a simbologia, na maioria dos casos, vamos confundir um arco AB com sua medida $m(\widehat{AB})$, indicando ambos por $\widehat{AB}$.

Na figura ao lado:

$$\boxed{\beta = \widehat{AB}}$$

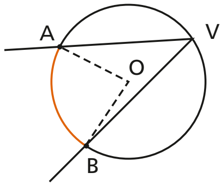


III. Ângulo inscrito

166. Definição

Ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.

Na figura,
$A\hat{V}B$ é ângulo inscrito,
$\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ao arco subentendido
$A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $A\hat{V}B$.

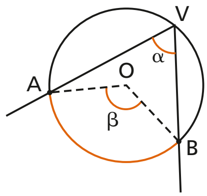


167. Medida do ângulo inscrito

> Um ângulo inscrito é metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo inscrito é metade da medida do arco correspondente.

Seja $A\hat{V}B$ o ângulo inscrito de medida α e $A\hat{O}B$ o ângulo central correspondente de medida β. Vamos provar que:

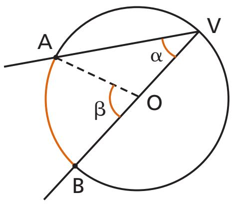
$$\boxed{\alpha = \frac{\beta}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

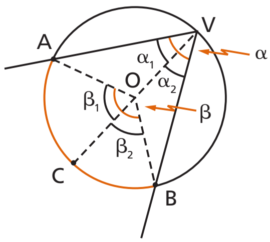


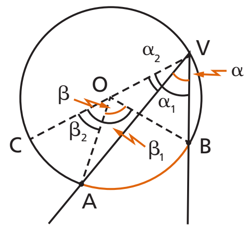
Demonstração:

Temos três casos a considerar:

1º caso	2º caso	3º caso
O está num lado do ângulo	O é interno ao ângulo	O é externo ao ângulo







No 1º caso:

$\overline{OV} \equiv \overline{OA}$ (raio) $\Rightarrow$ ΔOVA isósceles $\Rightarrow$ $\hat{V} = \alpha$ e $\hat{A} = \alpha$

β é ângulo externo no ΔOVA $\Rightarrow$ $\beta = \hat{A} + \hat{V}$ $\Rightarrow$ $\beta = \alpha + \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\beta = 2\alpha$

Logo, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e, como $\beta = \widehat{AB}$, vem $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

No 2º caso:

Sendo C ponto de interseção de $\overrightarrow{VO}$ com a circunferência e, sendo $A\hat{V}C = \alpha_1$, $A\hat{O}C = \beta_1$, $C\hat{V}B = \alpha_2$, $C\hat{O}B = \beta_2$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l} 1º\text{ caso: } \beta_1 = 2\alpha_1 \\ 1º\text{ caso: } \beta_2 = 2\alpha_2 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \underbrace{\beta_1 + \beta_2}_{\beta} = \underbrace{2(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\alpha} \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

Logo, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e, como $\beta = \widehat{AB}$, vem $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

No 3º caso:

Sendo C ponto de interseção de $\overrightarrow{VO}$ com a circunferência e, sendo $B\hat{V}C = \alpha_1$, $B\hat{O}C = \beta_1$, $A\hat{V}C = \alpha_2$ e $A\hat{O}C = \beta_2$, temos o que segue:

$$\left.\begin{array}{l} 1º\text{ caso: } \beta_1 = 2\alpha_1 \\ 1º\text{ caso: } \beta_2 = 2\alpha_2 \end{array}\right\} \overset{-}{\Rightarrow} \underbrace{\beta_1 - \beta_2}_{\beta} = \underbrace{2(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\alpha} \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

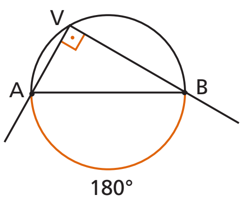
Logo, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e, como $\beta = \widehat{AB}$, vem $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

168. Ângulo inscrito numa semicircunferência

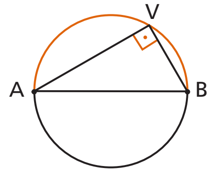
a) Todo ângulo reto inscrito subentende uma semicircunferência.

De fato,

$(A\hat{V}B = 90°, A\hat{V}B \text{ inscrito}) \Rightarrow \widehat{AB} = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\widehat{AB}$ é uma semicircunferência.



b) Um triângulo que tem os vértices numa semicircunferência é inscrito nela.



Se um triângulo inscrito numa semicircunferência tem um lado igual ao diâmetro, então ele é triângulo retângulo.

De fato, sendo AVB o triângulo, A e B os extremos da semicircunferência, $\overset{\frown}{AB} = 180° \Rightarrow A\hat{V}B = 90° \Rightarrow \Delta AVB$ é retângulo em V.

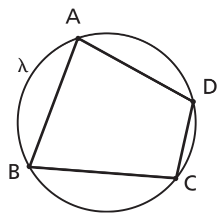
c) Em resumo:

Todo ângulo reto é inscritível numa semicircunferência e, reciprocamente, todo ângulo inscrito numa semicircunferência, com os lados passando pelas extremidades, é ângulo reto.

169. Quadrilátero inscritível — propriedade

Um quadrilátero que tem os vértices numa circunferência é quadrilátero inscrito na circunferência.

a) Se um quadrilátero convexo é inscrito numa circunferência, então os ângulos opostos são suplementares.



Seja λ uma circunferência.

Hipótese		Tese
ABCD inscrito em λ	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180° \\ \hat{B} + \hat{D} = 180° \end{cases}$

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{lll} \hat{A} \text{ é inscrito} & \Rightarrow & \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2} \\ \hat{C} \text{ é inscrito} & \Rightarrow & \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{DAB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{DAB}}{2} = \dfrac{360°}{2} = 180°$$

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$, decorre que $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

b) Se um quadrilátero convexo possui os ângulos opostos suplementares, então ele é inscritível.

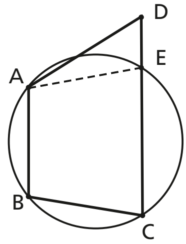
Seja ABCD o quadrilátero convexo.

Hipótese		Tese
$\hat{A} + \hat{C} = 180°$ e $\hat{B} + \hat{D} = 180°$	$\Rightarrow$	ABCD é inscritível

Demonstração:

Se ABCD não fosse inscritível, considerando λ a circunferência pelos pontos A, B e C, ela não passaria por D e teríamos o que segue.

Sendo E o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com λ, o quadrilátero ABCE é inscrito.



ABCE inscrito $\Rightarrow$ $\hat{B} + \hat{E} = 180°$

$(\hat{B} + \hat{E} = 180°, \hat{B} + \hat{D} = 180°) \Rightarrow \hat{D} \equiv \hat{E}$, o que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no $\triangle ADE$.

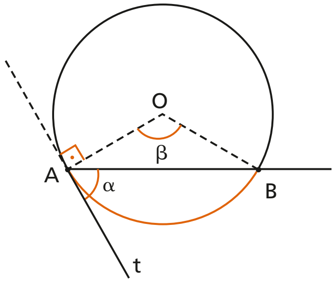
c) Em resumo:

> Uma condição necessária e suficiente para um quadrilátero convexo ser inscritível é possuir ângulos opostos suplementares.

IV. Ângulo de segmento ou ângulo semi-inscrito

170. Definição

Ângulo de segmento ou **ângulo semi-inscrito** relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência.



Na figura,
$t\hat{A}B$ é ângulo de segmento
$\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ou subentendido
$A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao ângulo semi-inscrito $t\hat{A}B$.
O nome ângulo de segmento vem do segmento circular AB.

171. Medida do ângulo de segmento

Um ângulo de segmento é metade do ângulo central correspondente.
ou
A medida de um ângulo de segmento é metade da medida do arco correspondente.

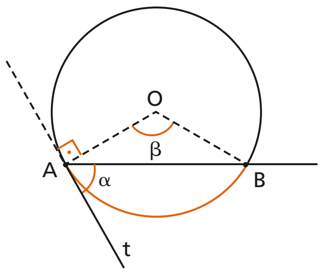
$$\boxed{\alpha = \frac{\beta}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

Demonstração:

1º caso: $t\hat{A}B$ é agudo

No triângulo isósceles OAB calculemos a medida do ângulo $\hat{A}$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \beta = 180° \Rightarrow \hat{A} + \hat{A} + \beta = 180° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\hat{A} = 180° - \beta \Rightarrow \hat{A} = 90° - \frac{\beta}{2} \quad (1)$$



Sendo *t* tangente à circunferência:

$\alpha + \hat{A} = 90° \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = 90° - \alpha \quad (2)$

De (1) e (2) decorre que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.

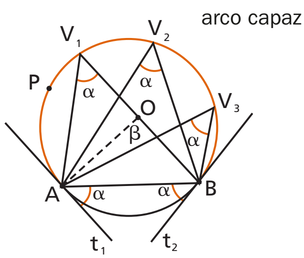
Logo, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e como $\beta = \overset{\frown}{AB}$ decorre que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

2º caso: $t\hat{A}B$ é reto
AB é um diâmetro e $\overset{\frown}{AB} = 180°$.

3º caso: $t\hat{A}B$ é obtuso
Usando o adjacente suplementar de $t\hat{A}B$, recai-se no 1º caso.

172. Arco capaz — segmento (circular) capaz

Consideremos uma circunferência λ de centro O e um ângulo de medida α. Seja $A\hat{O}B$ um ângulo central de medida $\beta = 2\alpha$. Os vértices dos ângulos inscritos (ou semi-inscritos) relativos a λ que têm os lados passando por A e B e têm medida α estão num arco $\overset{\frown}{APB}$. Este arco é chamado **arco capaz** de α.

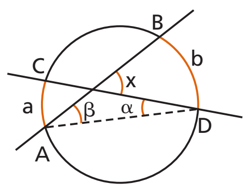


Na figura os ângulos $A\hat{V}_1B$, $A\hat{V}_2B$, $A\hat{V}_3B$, $t_1\hat{A}B$ e $t_2\hat{B}A$ têm medida $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.
O arco $\overset{\frown}{APB}$ é o arco capaz de α.

173. Ângulos excêntricos

a) Ângulo excêntrico interior

Se duas cordas se cortam em um ponto interior a uma circunferência, distinto do centro, então qualquer um dos ângulos que elas formam é chamado **ângulo excêntrico interior**.



A medida do ângulo excêntrico interior, considerando as indicações da figura, é dada por

$$\boxed{x = \frac{a + b}{2}}$$

em que *a* e *b* são as medidas dos arcos.

De fato:

como *x* é ângulo externo do triângulo e como α e β são ângulos inscritos, obtemos:

$$\left(x = \alpha + \beta, \alpha = \frac{a}{2}, \beta = \frac{b}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Rightarrow x = \frac{a + b}{2}$$

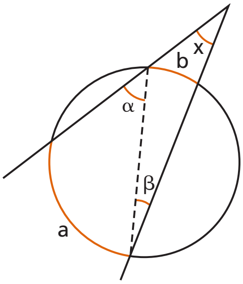
b) ângulo excêntrico exterior

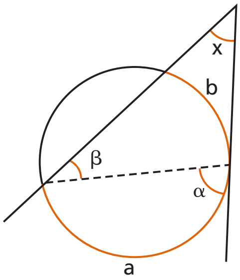
Se com origem num ponto exterior a uma circunferência traçarmos duas semirretas, ambas secantes à circunferência, ou ambas tangentes ou uma secante e a outra tangente, estas semirretas formam um ângulo que é chamado **ângulo excêntrico exterior**.

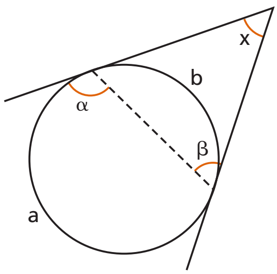
A medida do ângulo exterior, considerando as indicações das figuras, é dada por

$$\boxed{x = \frac{a - b}{2}}$$

em que *a* e *b* são as medidas dos arcos.





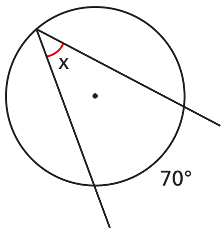


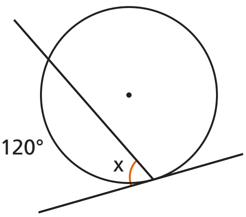
De fato: como α e β são ângulos inscritos ou ângulos de segmentos e α é ângulo externo do triângulo, obtemos:

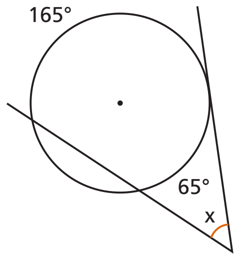
$$\left(\alpha = x + \beta, \alpha = \frac{a}{2}, \beta = \frac{b}{2}\right) \Rightarrow \frac{a}{2} = x + \frac{b}{2} \Rightarrow x = \frac{a - b}{2}$$

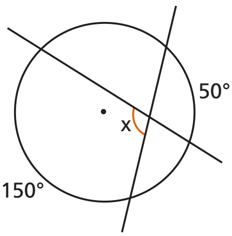
EXERCÍCIOS

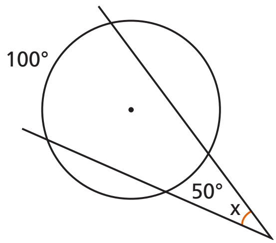
377. Determine o valor do ângulo *x* nos casos.

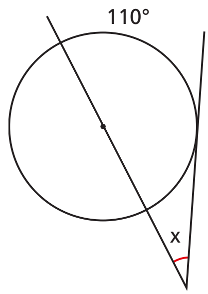
a)


c)


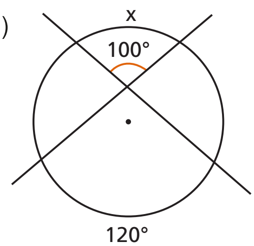
e)


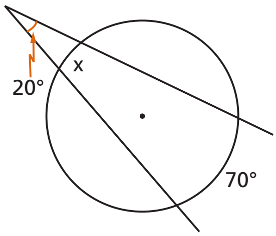
b)


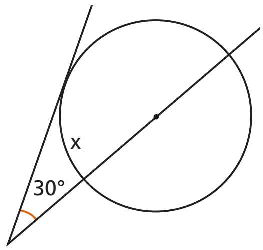
d)


f)


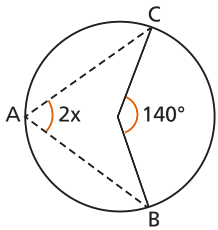
378. Determine o valor do arco *x* nos casos:

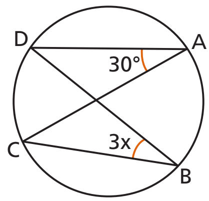
a)


b)


c)


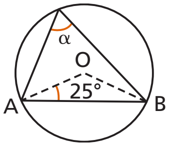
379. Nas figuras, calcule o valor de *x*.

a)


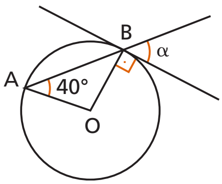
b)


380. Nas figuras, calcule o valor de α.

a)

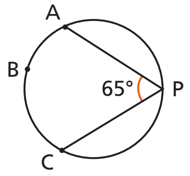


b)

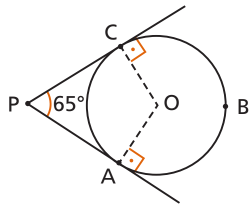


381. Nas figuras, calcule o valor do arco $\overset{\frown}{ABC}$.

a)

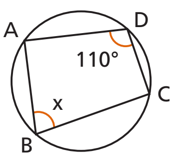


b)

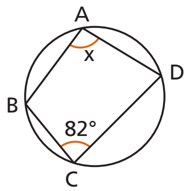


382. Nas figuras, calcule x.

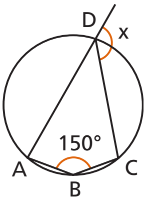
a)



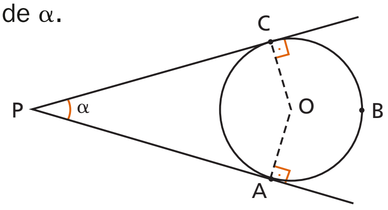
b)



c)

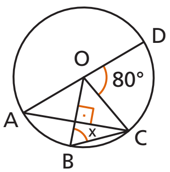


383. Na figura, sendo $\overset{\frown}{ABC} = 260°$, calcule o valor de α.

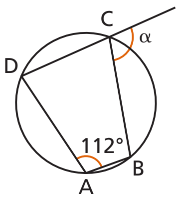


384. Calcule o valor de x.

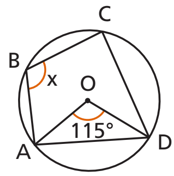
a)



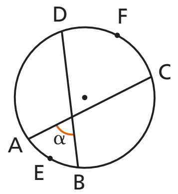
b)



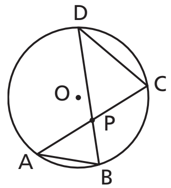
385. O arco $\overset{\frown}{CD}$ da figura mede 105°. Calcule o valor de x.



386. Na circunferência, o arco $\overset{\frown}{CFD}$ excede o arco $\overset{\frown}{AEB}$ em 50°. Determine suas medidas, sabendo que o ângulo α mede 70°.

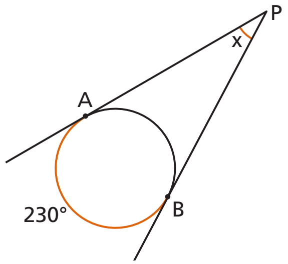


387. Na figura ao lado, o ângulo $A\hat{C}D$ é igual a 70° e o ângulo $A\hat{P}D$ é igual a 110°. Determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

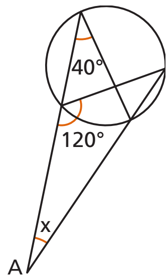


388. Calcule x nas figuras:

a)

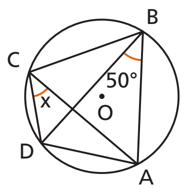


b)

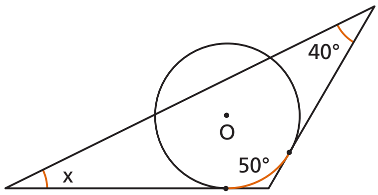


389. Calcule x nas figuras:

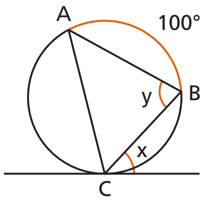
a)



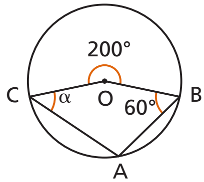
b)



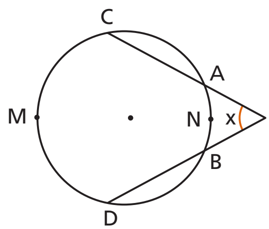
390. Se $y = 75°$ e $\overset{\frown}{AB} = 100°$, calcule x.



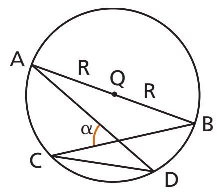
391. Na figura, qual é o valor de α?



392. Na figura, o arco $\overset{\frown}{CMD}$ é igual a 100° e o arco $\overset{\frown}{ANB}$ mede 30°. Calcule o valor de x.

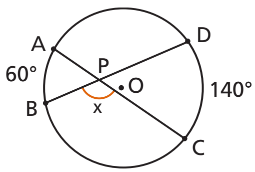


393. Determine a medida do ângulo α, sabendo que, na figura ao lado, $CD = R$.

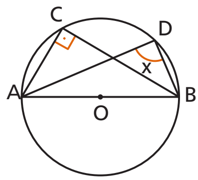


394. Calcule x nas figuras:

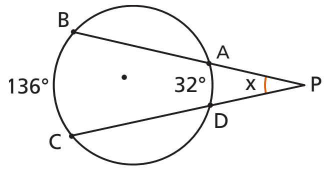
a)



b)

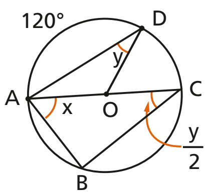


c)

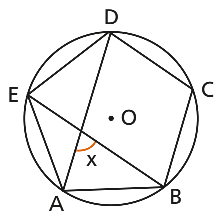


395. Calcule x nas figuras:

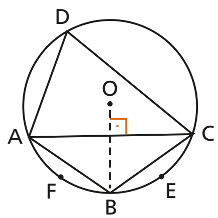
a)



b) ABCDE é um pentágono regular.

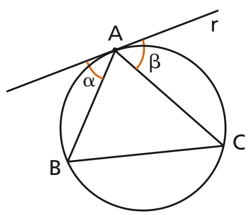


396. Na figura, o arco $\overset{\frown}{BEC}$ mede 60° e $\overline{OB}$ é perpendicular a $\overline{AC}$. Determine a medida do arco $\overset{\frown}{AFB}$ e a medida do ângulo $A\hat{D}C$.

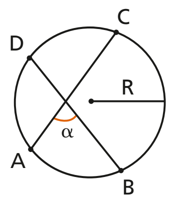


397. Determine as medidas dos ângulos de um triângulo, obtido pelos pontos de tangência do círculo inscrito com os lados de um triângulo ABC, sendo $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 40°$ e $\hat{C} = 80°$.

398. Determine a razão entre os ângulos α e β da figura ao lado, sabendo que a reta *r* tangencia a circunferência no ponto A e que os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AC}$ são proporcionais aos números 2, 9 e 7.

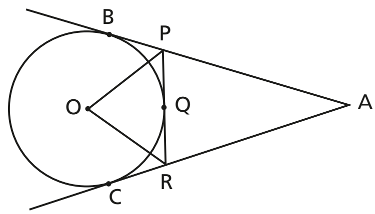


399. Na figura, determine a medida do ângulo α, sabendo que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 100° e que a corda $\overline{CD}$ mede R, sendo R o raio do círculo.

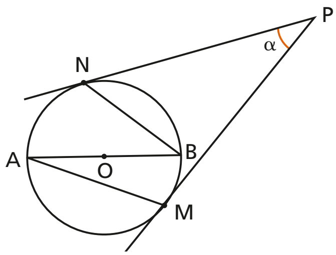


400. Determine o menor ângulo formado por duas retas secantes a uma circunferência, conduzidas por um ponto P externo, sabendo que essas secantes determinam na circunferência dois arcos cujas medidas valem 30° e 90°.

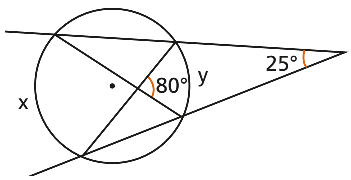
401. Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são tangentes ao círculo de centro O e Q é um ponto do arco menor $\overset{\frown}{BC}$. PQR é tangente ao círculo, $\hat{A} = 28°$. Ache $P\hat{O}R$.



402. Na figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro, a corda $\overline{AM}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito e $\overline{BN}$, o lado do quadrado inscrito. Calcule o ângulo α, formado pelas tangentes $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$.



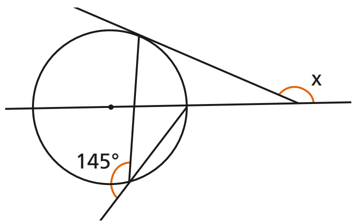
403. Determine as medidas *x* e *y*.



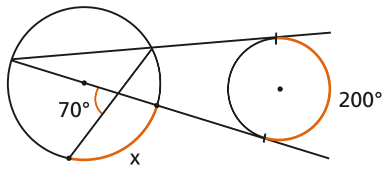
404. Consideremos um triângulo equilátero ABC inscrito em um círculo. Determine o menor ângulo formado pelas retas tangentes a esse círculo nos pontos A e B.

405. Determine o valor de *x* nos casos:

a)

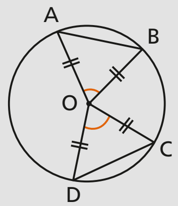


b)



406. Mostre que, se $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ são arcos de medidas iguais de uma circunferência, então as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes.

Solução



Hipótese Tese

$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD}) \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CD}$

Demonstração:

Sendo O o centro do círculo, considere os triângulos AOB e COD em que OA = OB = OC = OD = raio e $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$ $\left(\text{pois } \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}\right)$.

Então, pelo caso LAL, os triângulos são congruentes.

Logo: $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Note que vale também a recíproca desta propriedade.

407. Prove que retas paralelas distintas, secantes com uma circunferência, determinam na circunferência, entre as paralelas, arcos de mesma medida.

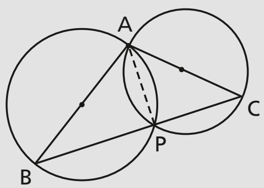
408. Prove que um trapézio inscrito em um círculo é isósceles.

409. Sejam *r* e R os raios das circunferências inscrita e circunscrita em um triângulo retângulo de catetos *a* e *b*. Prove que $a + b = 2(R + r)$.

410. Prove que a soma dos diâmetros dos círculos inscrito e circunscrito a um triângulo retângulo é igual à soma dos catetos desse triângulo.

411. Se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo são diâmetros de duas circunferências, prove que o outro ponto comum às circunferências está em $\overline{BC}$.

Solução



Seja P o outro ponto de interseção. Como os triângulos APB e APC estão inscritos em semicircunferências, eles são retângulos. Logo $A\hat{P}B$ e $A\hat{P}C$ são ângulos retos. Então $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PC}$ são semirretas opostas, isto é, P está em $\overline{BC}$.

412. Seja ABC um triângulo acutângulo e H_1, H_2, H_3 os pés das alturas. Prove que o ortocentro H do triângulo ABC é o incentro do triângulo $H_1H_2H_3$.