

3º Ano



JORGE OLIVEIRA

Copyright © 2021 de Jorge Oliveira

Todos os direitos reservados.

Este e-book ou qualquer parte dele não pode ser reproduzido ou usado sem autorização expressa, por escrito, do autor ou editor, exceto pelo uso de citações em uma resenha ou trabalho acadêmico.

Sobre o Autor.

Professor de matemática, atuando em diversos níveis educacionais, além de cursos preparatórios diversos. Especialista em modelagem matemática.

<https://linktr.ee/SuperAulas>

Sumário

NÚMEROS COMPLEXOS

Operações com números complexos

Módulo de um número complexo

Forma trigonométrica dos números complexos

Representação geométrica dos números complexos

POLINÔMIO

Valor numérico de um polinômio

Igualdade de polinômios

Raiz de um polinômio

Operações com polinômios

Equações polinomiais (ou algébricas)

Teorema fundamental da álgebra

Decomposição de fatores de 1 grau

Relações de Girard
Multiplicidade de uma raiz
Raízes Complexas
Pesquisa de raízes racionais

GEOMETRIA ANALÍTICA

Estudo do Ponto
Distância entre dois pontos
Ponto médio de um segmento de reta
Condição de alinhamento de três pontos
Área de um triângulo
Estudo da Reta
Inclinação de uma reta
Coeficiente angular de uma reta
Equação da reta
Posições relativas de duas retas no plano
Distância de um ponto a uma reta

A CIRCUNFERENCIA E AS CÔNICAS

Circunferência
Cônicas

ESTATÍSTICA

Variáveis Estatísticas

População e amostra estatística

Tabelas e gráficos

Medidas de tendência central (Média, Mediana, Moda)

Medidas de dispersão (Variância, Desvio-padrão)

Distribuição de Frequência

Número Imaginário

Chamamos unidade imaginária o número complexo i , de modo que:

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

Potência de i

Para n inteiro e $n > 4$, dividimos n por 4, obtendo um resto inteiro r , ou seja:

$$i^n = i^r \quad (n > 4)$$

$$\text{Ex.: } i^7 = ? \quad \begin{array}{r} 7 \overline{) 4} \\ 3 \quad 1 \end{array}$$

$$i^7 = i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^7 = -i$$

Números Complexos

Forma Algébrica

$$z = a + b.i$$

$a = \text{Re}(z)$ parte real de z

$b = \text{Im}(z)$ parte imaginária de z

(a e b são números reais)

$$\text{se } b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

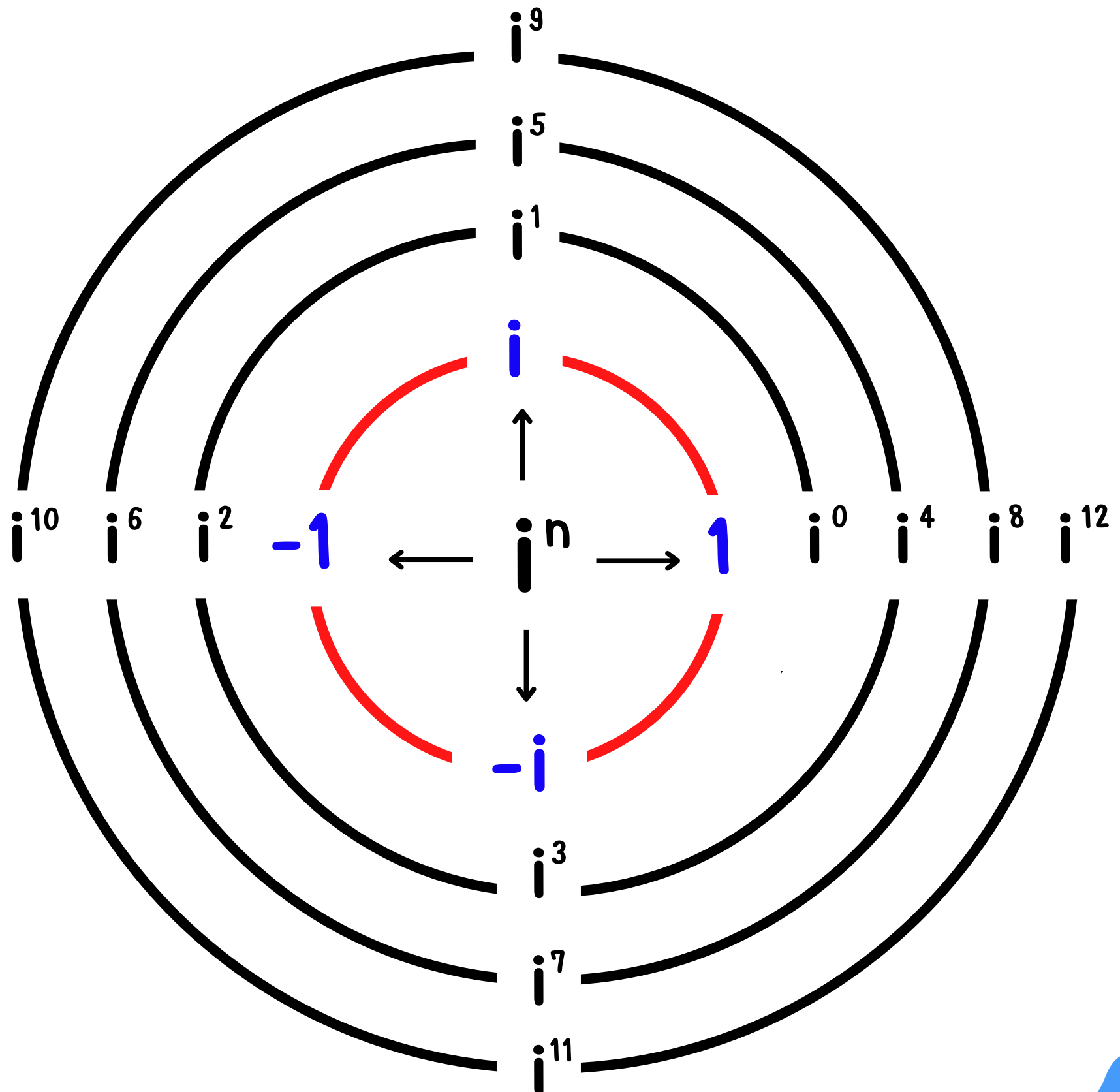
Conjugado

Dado o complexo $\bar{z} = a + bi$, chamamos de conjugado ao complexo z , de modo que:

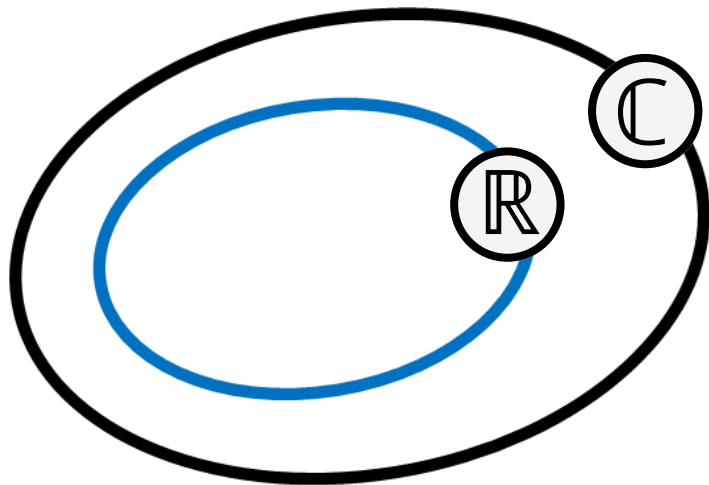
$$z = a - b.i$$

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 2.\text{Re}(z) \\ z - \bar{z} = 2.\text{Im}(z) \\ z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Potência dos Complexos



Relação de inclusão



Todo número real é, também, um número complexo.

Demonstrações

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, temos:

$$(1) \quad z + \bar{z} = 2.\text{Re}(z)$$

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$(2) \quad z - \bar{z} = 2.\text{Im}(z).i$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

$$(3) \quad z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$(a + bi = a - bi) \Leftrightarrow b = -b, z \in \mathbb{R}$$

Números Complexos

Importante

- (1) O complexo z é um número real se $\text{Im}(z) = 0$.
- (2) O complexo z é um imaginário puro se e só se $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$.
- (3) O complexo z é nulo se e só se $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = 0$.

Considerações

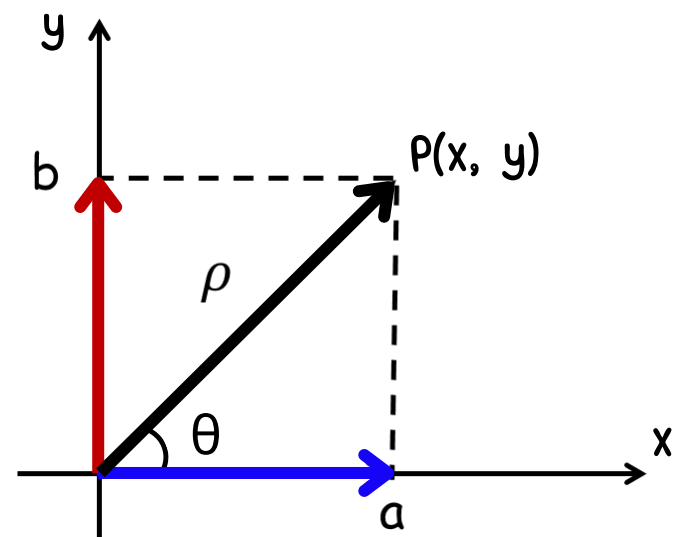
- (1) Conjunto dos números reais:
 $\mathbb{R} = \{a + ib \in \mathbb{C}, b = 0\}$
- (2) Conjunto dos imaginários puros:
 $\text{imaginários} = \{a + ib \in \mathbb{C}, a = 0\}$

Definição

É a representação dos números complexo, $z = a + bi$, pelos pontos (P) do plano cartesiano xOy.

$$z = a + bi \begin{cases} a, \text{ parte real (Ox)} \\ b, \text{ parte imaginária (Oy)} \end{cases}$$

Representação



Plano de Gauss*

Módulo

Chama-se norma do complexo $z = a + bi$, o real não negativo $N(z) = a^2 + b^2$. O módulo de z (ρ) é dado por:

$$\rho = |z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Importante

- (1) xOy = plano de *Argand-Gauss
- (2) P = afixo de z
- (3) Ox = eixo real
- (4) Oy = eixo imaginário
- (5) θ é o argumento principal de z
- (6) $|z| = |\bar{z}|$

Forma Polar

Todo número complexo $z = a + bi$, pode ser escrito sob a forma;

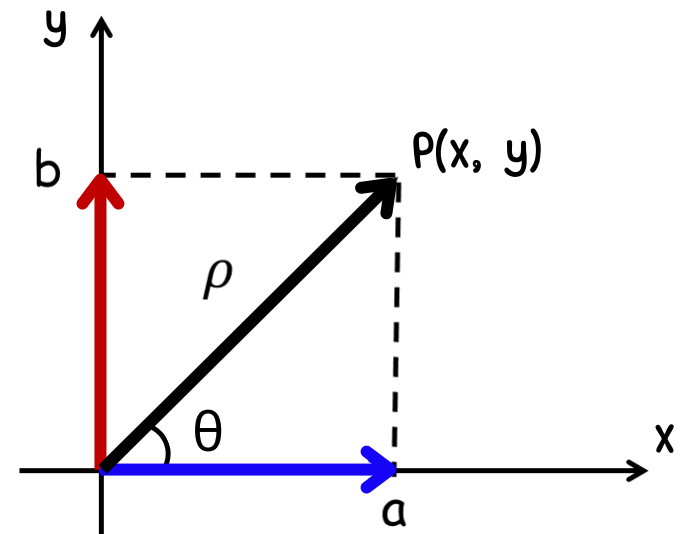
$$z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

chamada forma trigonométrica ou forma polar de z , onde:

- (1) θ é o argumento principal de z .
- (2) ρ é o módulo de z .

Demonstração

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, temos:



Números Complexos

Demonstração

Do plano de Gauss, podemos escrever:

$$\cos \theta = a/\rho \text{ e } \operatorname{sen} \theta = b/\rho$$

sendo se $z = a + bi$, temos:

$$z = \rho(a/\rho + ib/\rho)$$

$$z = \rho(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

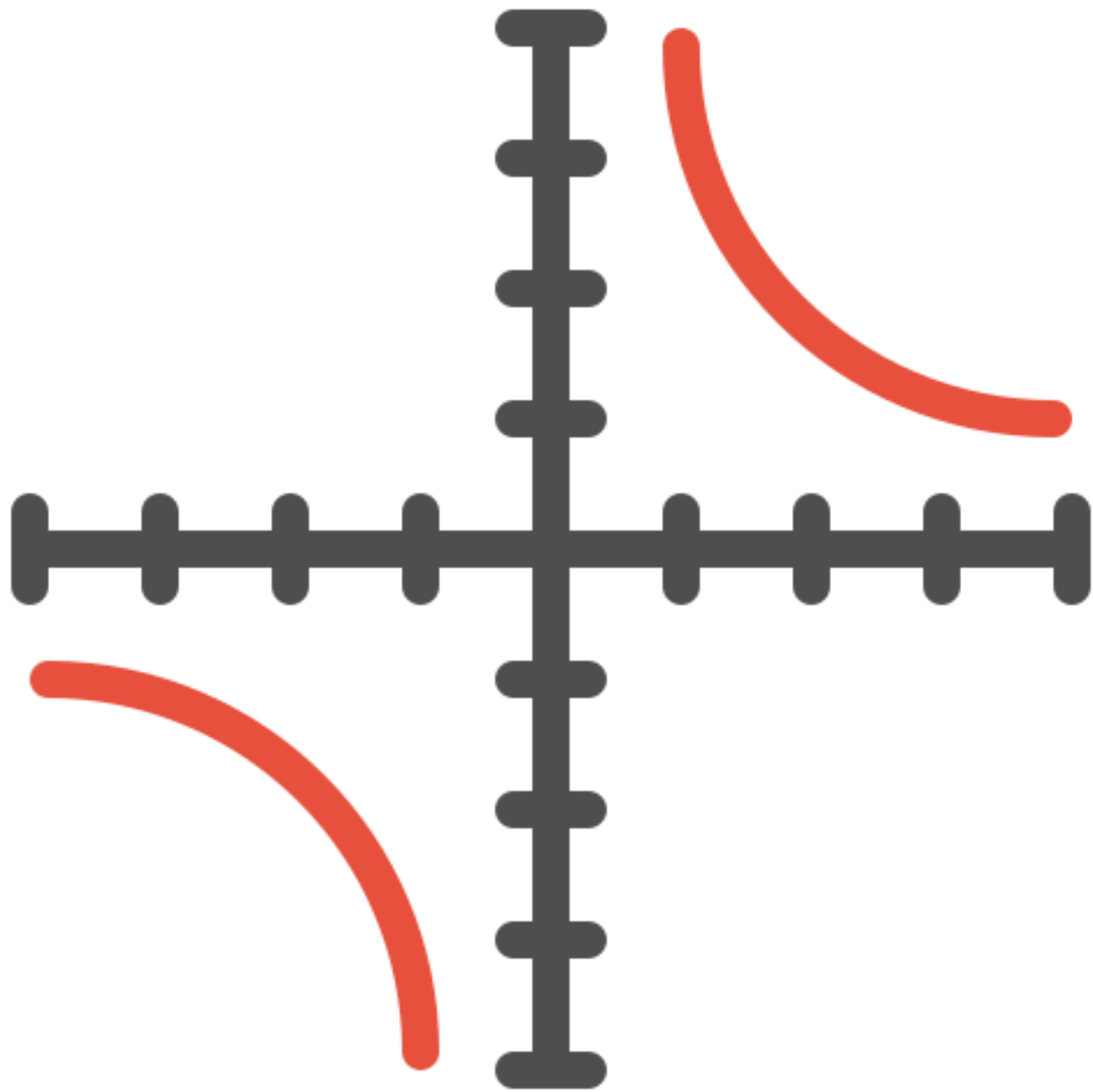
Exemplo

Escreva na forma trigonométrica o complexo $z = -1 + i$.

$$z = -1 + i \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = 5\pi/4 \end{cases}$$

$$z = 2 \cdot (\cos 5\pi/4 + i \cdot \operatorname{sen} 5\pi/4) \checkmark$$

Geometria Analítica



Considerações

Considere dois eixos x e y perpendiculares em O , os quais determinam o plano α . Dado um ponto P qualquer de α , traça-se por ele duas retas, de modo que:

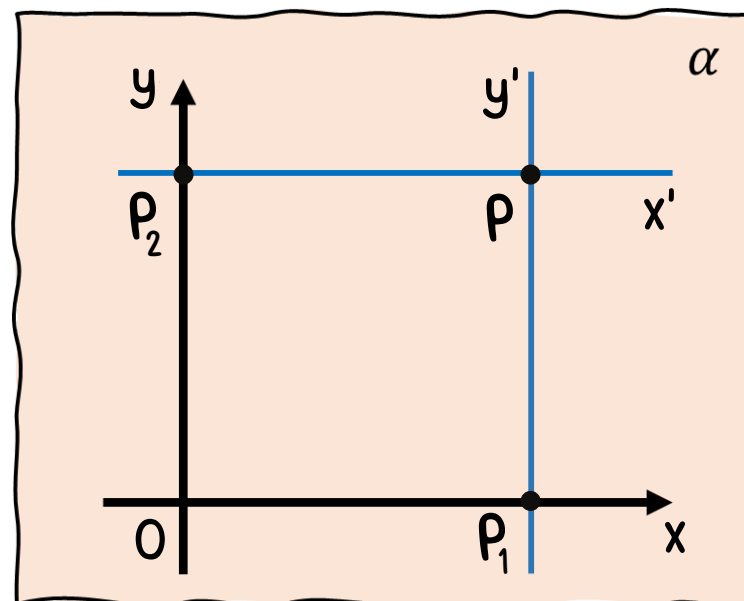
$$x' \parallel x \text{ e } y' \parallel y$$

Temos que:

P_1 é a interseção de x com y'

P_2 a interseção de y com x'

Graficamente



Sistema de eixos cartesianos ortogonais.

Coordenadas

Definições

- a) abscissa de P é o número $x_p = OP_1$;
- b) ordenada de P é o número $y_p = OP_2$;
- c) coordenadas de P , x_p e y_p ;
- d) par ordenado (x_p, y_p) ;
- e) eixo das abscissas é o eixo x ;
- f) eixo das ordenadas é o eixo y .

Importante

- (1) cada ponto (x_p, y_p) é único em α ;
- (2) se a e b são números reais distintos, então $(a, b) \neq (b, a)$;
- (3) "dar um ponto P " significa dar o par ordenado (x_p, y_p) ;
- (4) "pedir um ponto P " significa pedir suas coordenadas (x_p, y_p) .

Posições

Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas quadrantes, em que dado um ponto $P(x_p, y_p)$ temos:

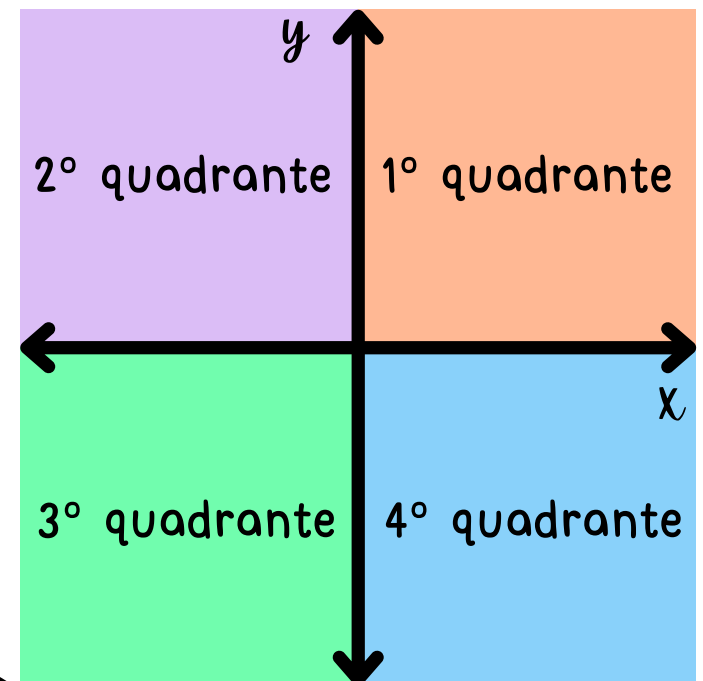
$P \in 1^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_p \geq 0 \text{ e } y_p \geq 0$

$P \in 2^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_p \leq 0 \text{ e } y_p \geq 0$

$P \in 3^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_p \leq 0 \text{ e } y_p \leq 0$

$P \in 4^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_p \geq 0 \text{ e } y_p \leq 0$

Quadrantes



Posições do ponto

Sobre os eixos

(1) Um ponto pertence ao eixo das abscissas, sua ordenada é nula:

ponto sobre $Ox = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$

(2) Um ponto pertence ao eixo das ordenadas se sua abscissa é nula:

ponto sobre $Oy = \{(0, b) | b \in \mathbb{R}\}$

Importante

Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares ($1^\circ B$), se tiver coordenadas iguais:

ponto na $1^\circ B = \{(m, m) | m \in \mathbb{R}\}$

Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares ($2^\circ B$) se tiver coordenadas opostas:

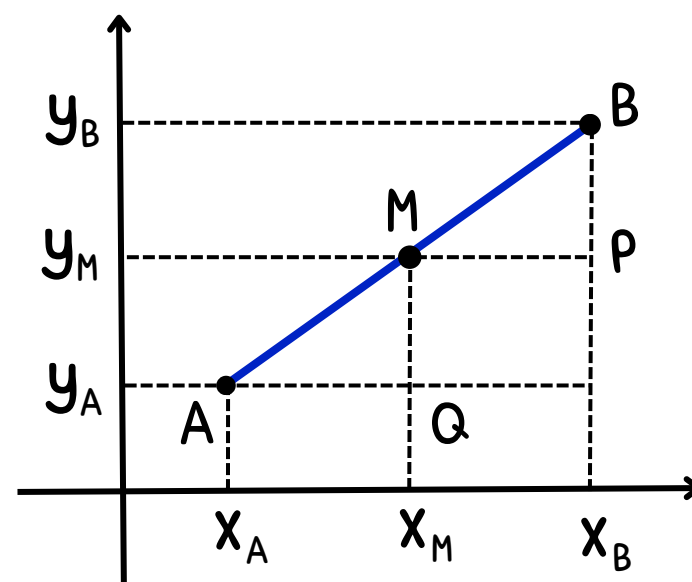
ponto na $2^\circ B = \{(n, -n) | n \in \mathbb{R}\}$

Definição

Dados três pontos colineares A, M e B ($A \neq M \neq B$), chama-se ponto médio do segmento (AB), o ponto M, o qual divide (AB) em dois segmentos de mesma medida.

$$M_{AB} = (x_M; y_M) \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Graficamente



Ponto
médio

Demonstração

Considerando a congruência entre os triângulos AMQ e MBP, temos:

$$AQ = MP \begin{cases} x_M - x_A = x_B - x_M \\ 2x_M = x_A + x_B \\ x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \end{cases}$$

$$MQ = BP \begin{cases} y_M - y_A = y_B - y_M \\ 2y_M = y_A + y_B \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Exemplo

Determine as coordenadas de M, sendo AM uma mediana do triângulo ABC de vértices A(0, 0), B(3, 7) e C(5, -1).

M está entre B e C, daí temos:

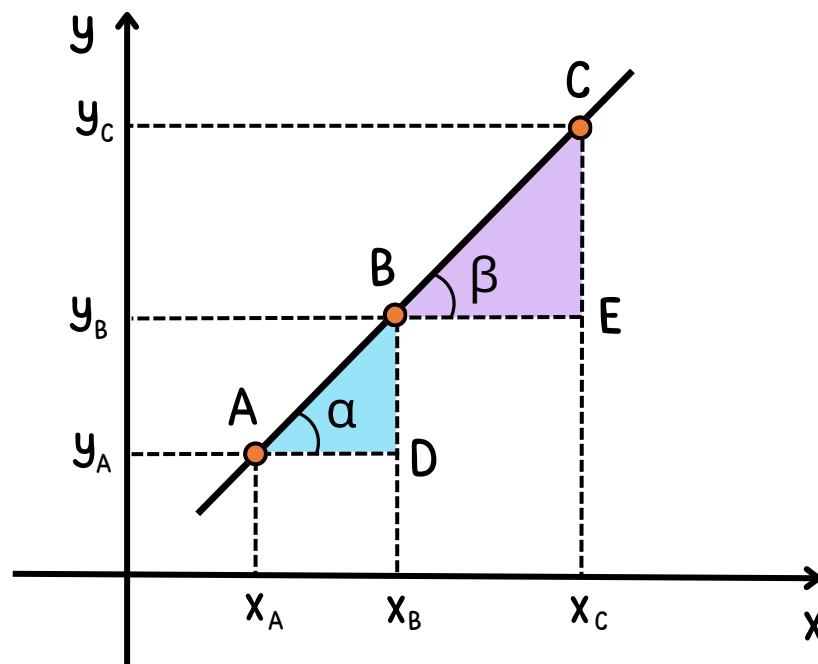
$$x_M = (x_B + x_C)/2 = (3 + 5)/2 = 4$$

$$y_M = (y_B + y_C)/2 = (7 - 1)/2 = 3$$

$$M = (4, 3)$$

Alinhamento

Três pontos A, B e C, estão alinhados se eles pertencem a uma mesma reta.



No esquema acima temos que $\alpha = \beta$, e deste modo podemos afirmar que pontos A, B, C são colineares. Da semelhança de triângulos temos:

$$\frac{(x_B - x_A)}{(x_C - x_B)} = \frac{(y_B - y_A)}{(y_C - y_B)} \Leftrightarrow (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_B) = (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_A)$$

$$(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_B) - (x_C - x_B) \cdot (y_B - y_A) = 0$$

Se três pontos A, B e C, estão alinhados é verdadeira a igualdade:

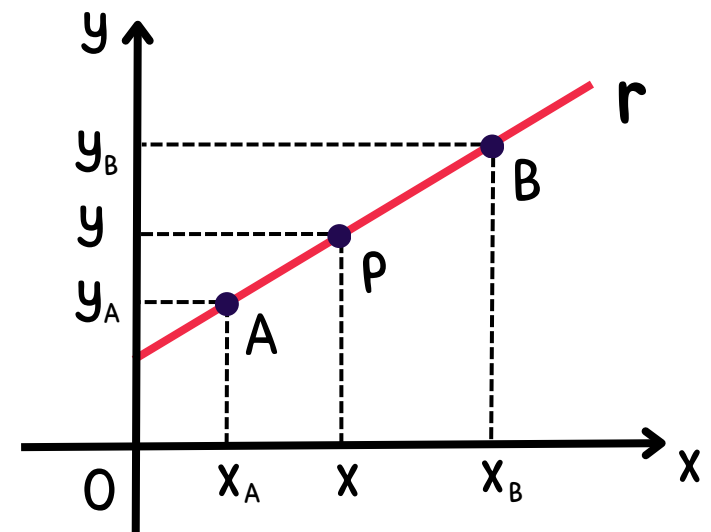
$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

O que é?

"A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ em que a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e $P(x, y)$ representa um ponto genérico de r ."

$$r: ax + by + c = 0$$

Graficamente



Equação da reta

Demonstração

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos do plano cartesiano, r é a reta determinada pelos pontos A e B . Se $P(x, y)$ é um ponto de r , então x e y são variáveis. A condição de alinhamento dos pontos é dada pelo determinante a seguir.

Cálculo

Como P, A, B e c são colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(y_A - y_B)}_a \cdot x + \underbrace{(x_A - x_B)}_b \cdot y + \underbrace{(x_A y_B - x_A y_B)}_c = 0$$

$$r: ax + by + c = 0$$

Forma Geral

Dada uma reta r , podemos determinar pelo menos uma equação do tipo.

$$r: ax + by + c = 0$$

Essa equação é chamada de equação geral da reta r , a qual é satisfeita por todos os pontos $P(x, y)$ pertencentes à r .

Forma reduzida

Dada a equação geral da reta $r: ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$, temos:

$$by = -ax - c \Rightarrow y = \underbrace{\left(\frac{-a}{b}\right)}_m x + \underbrace{\left(\frac{-c}{b}\right)}_n$$

$$y = mx + n \quad \begin{cases} m = \text{coef. angular} \\ n = \text{coef. linear} \end{cases}$$

Equações da reta

Forma segmentária

Dada uma reta r , que intercepta os eixos cartesianos nos pontos $P(p, 0)$, $Q(0, q)$, distintos, temos:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

essa igualdade é denominada equação segmentária da reta.

Demonstração

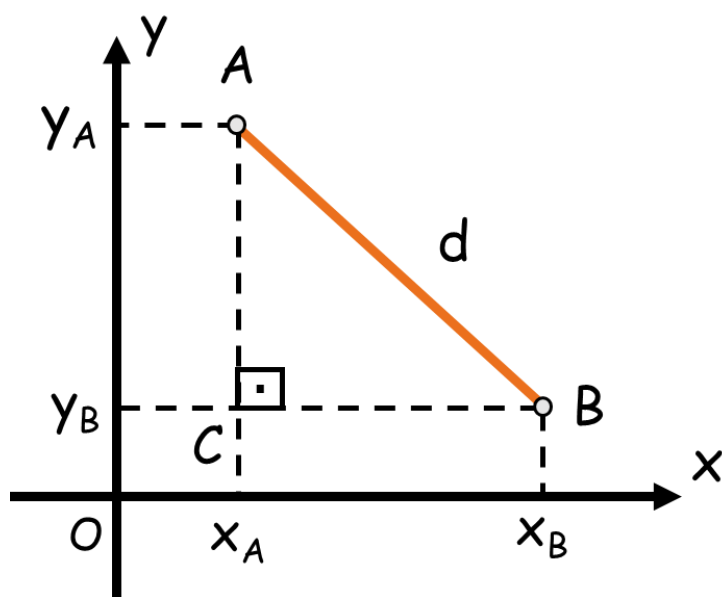
Como $P(p, 0)$ e $Q(0, q)$ temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow qx + py - pq = 0$$

$$qx + py = pq \div (pq)$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Entre dois pontos



A distância d entre os pontos A e B pode ser calculada pelo teorema de Pitágoras (triângulo ABC).

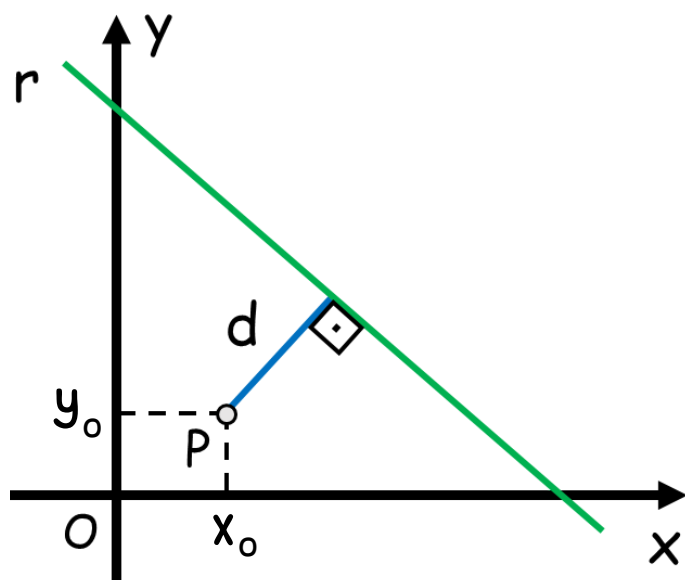
$$d^2 = d_{BC}^2 + d_{AC}^2$$

$$d^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Distâncias

Entre ponto e reta



A distância d entre uma reta r , de equação geral $ax + by + c = 0$, e um ponto $P(x_0, y_0)$ é dada por:

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Substituímos as coordenadas de P no numerador da equação, e dividir o resultado por $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ponto Comum

O ponto P de interseção entre duas retas, r e s, deve satisfazer as equações de ambas as retas. Então o ponto comum $P(x_0, y_0)$, deve ser a solução do sistema abaixo:

$$r : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$s : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Intersecção de retas

Exemplo

Obter a interseção das retas:

$$r: x - y + 1 = 0 \text{ e } s: 2x + y - 2 = 0$$

Resolvendo o sistema pelo método da adição temos:

$$x - y + 1 = 0 \quad (I) \Rightarrow 1/3 - y + 1 = 0$$

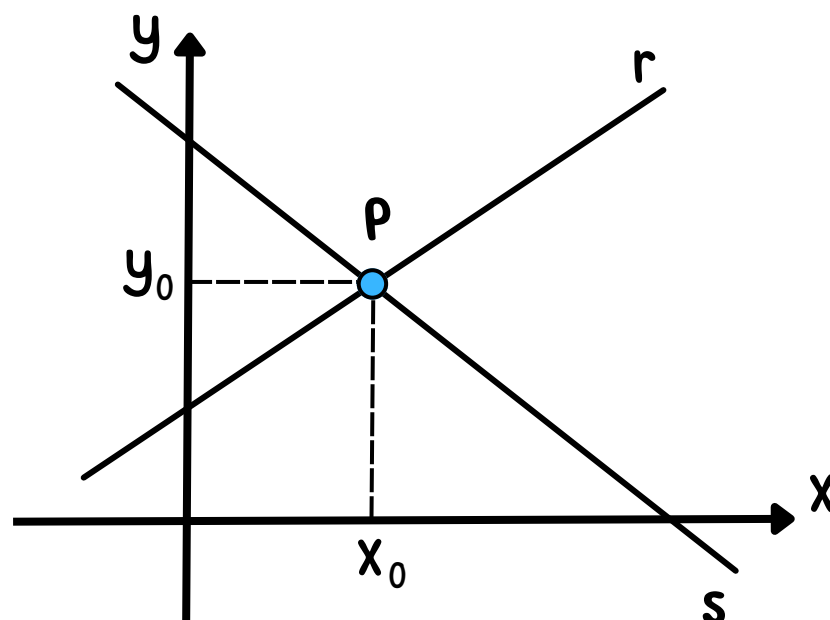
$$2x + y - 2 = 0 \quad (II) \quad y = 4/3$$

$$\begin{array}{r} 3x - 1 = 0 \end{array}$$

$$x = 1/3$$

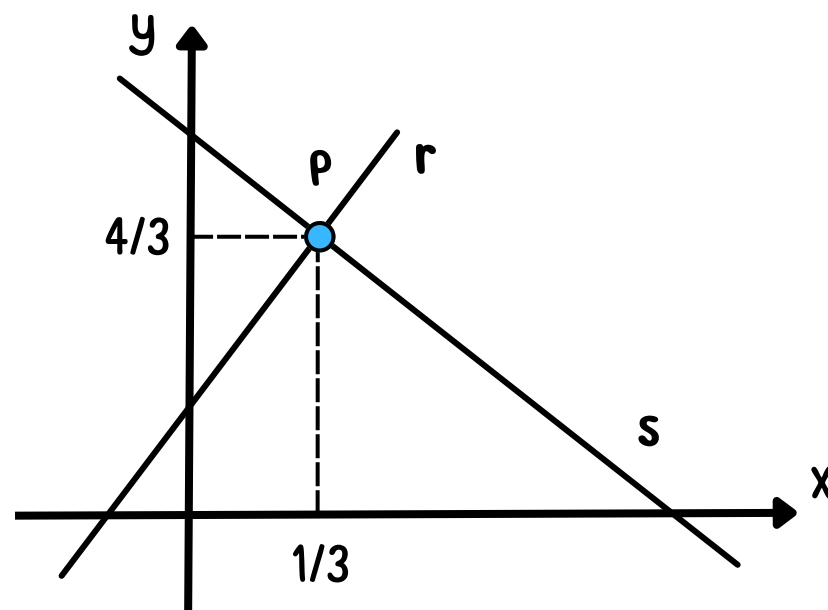
$$r \cap s = (1/3, 4/3)$$

Graficamente



Importante:

Retas paralelas não têm pontos comuns entre si, portanto o sistema não apresenta solução.

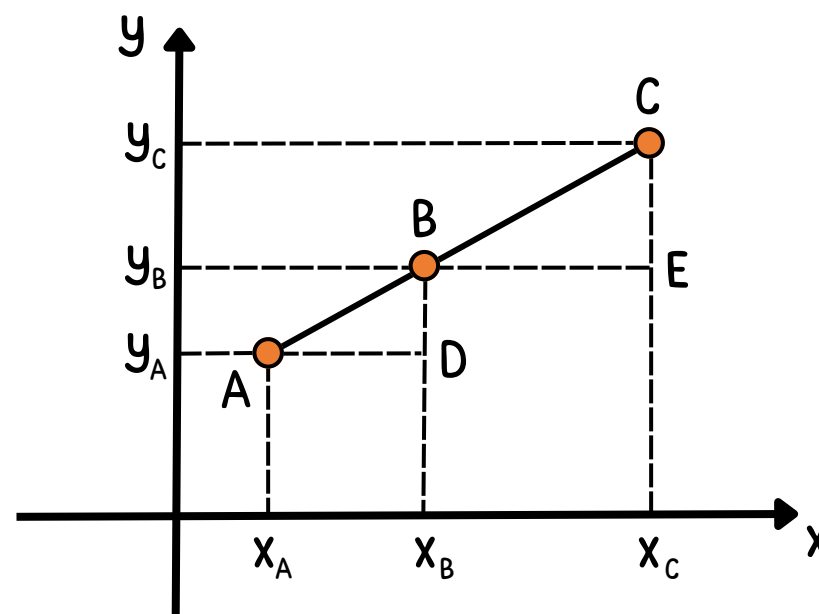


O que é?

Dados três pontos colineares A, B e C ($A \neq B \neq C$), chama-se razão entre os segmentos orientados $(\overrightarrow{AB})$ e $(\overrightarrow{BC})$, o número real r tal que:

$$r = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{x_A - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y_A - y_B}{y_C - y_B}$$

Graficamente



Razão de seção

Exemplo

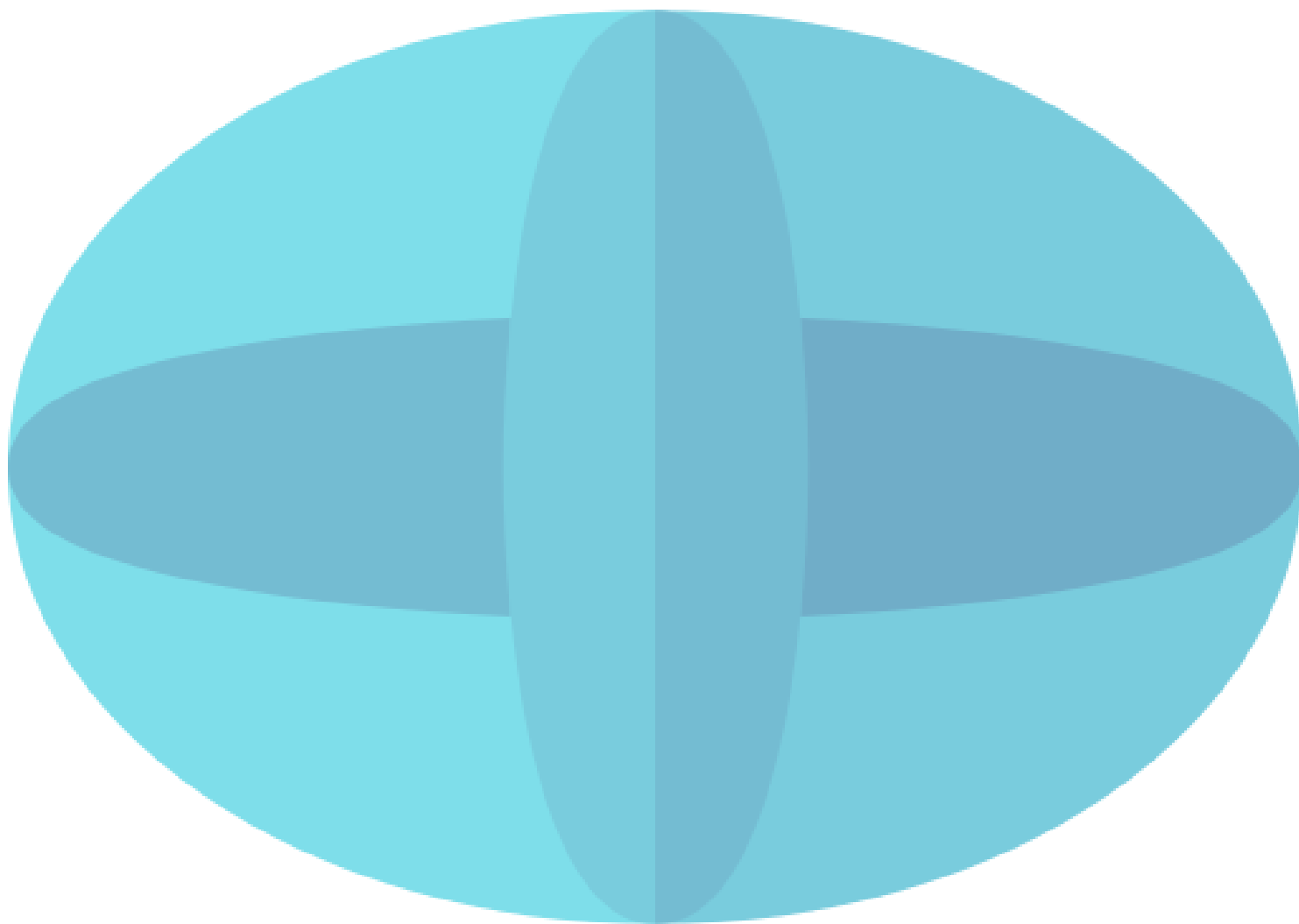
Dados A (5, 3) e B (-1, -3), seja C a interseção da reta AB com o eixo das abscissas. Calcule a razão $(\overrightarrow{AC})/(\overrightarrow{CB})$.

$$r = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{3 - 0}{0 - (-3)} = 1$$

Importante

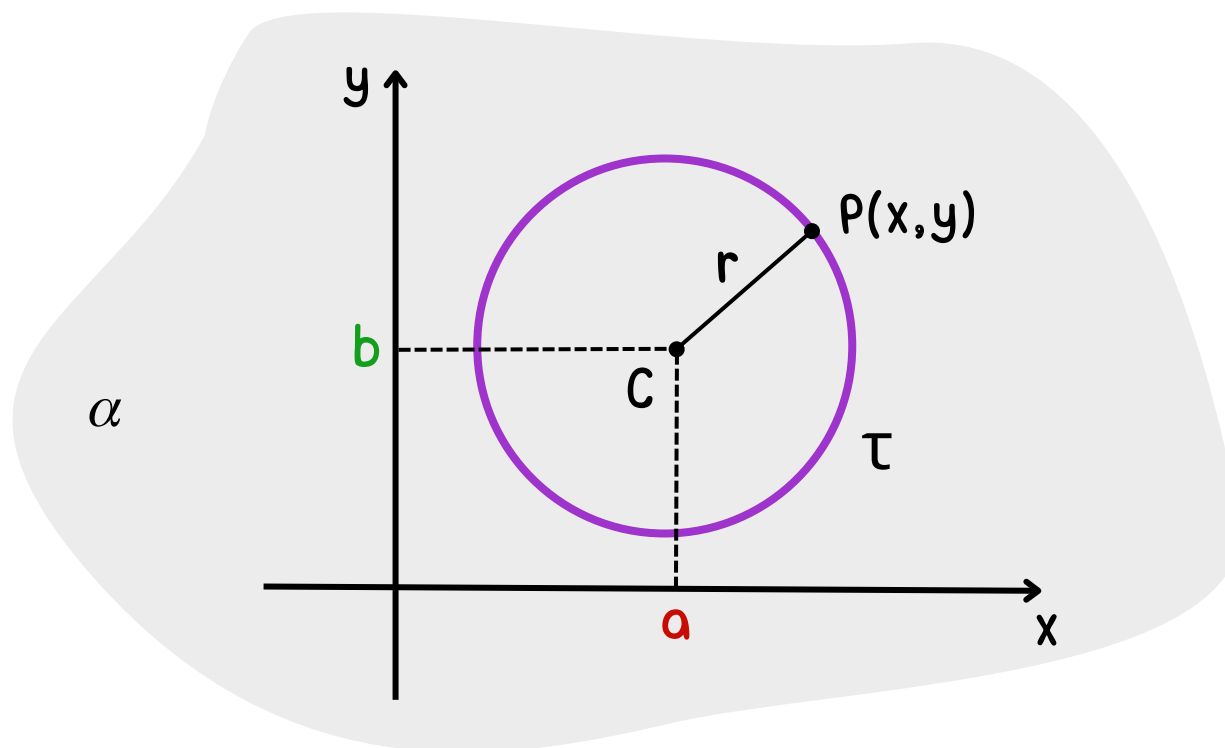
- 1º) Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm o mesmo sentido, então a razão r é positiva, caso contrário razão r é negativa.
- 2º) A razão entre as áreas dos triângulos BCE e ABD é r^2 .
- 3º) Se B é o ponto médio do segmento AC então $r = 1$.

Cônicas



Circunferência

Dados um ponto $C(a,b)$, pertencente a um plano α , e uma distância r não nula, chama-se **circunferência** (τ) o conjunto dos pontos de α que estão à uma distância r do ponto C . Um ponto $P(x, y)$ pertence a τ , se a distância (PC) for igual ao raio r .



$$\text{circunferência} = \{P \in \alpha \mid (PC) = r\}$$

A equação reduzida da circunferência é aquela que é satisfeita pelos pontos $P(x, y)$ pertencentes à τ , de centro $C(a,b)$.

$$P \in \tau \Leftrightarrow (PC) = r$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

daí, vem a equação reduzida da circunferência:

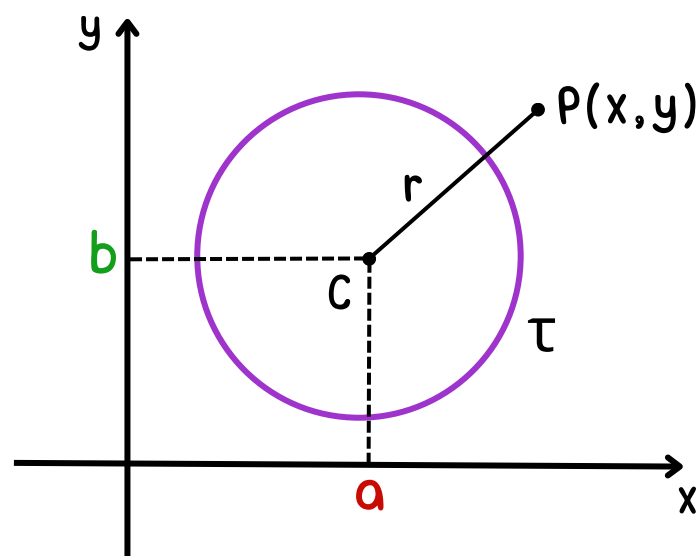
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Problema

Dados um ponto $P(x,y)$ e uma circunferência τ de equação:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

A posição de P em relação a τ é dada pela distância de P até o centro $C(a, b)$, em compararmos com a medida do raio r .



Neste caso P é exterior a τ , pois $\overline{PC} > r$.

Posições do ponto

Casos possíveis

1º caso: P é exterior a τ ($PC > r$)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 > 0$$

2º caso: P pertence a τ ($PC = r$)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

3º caso: P é interior a τ ($PC < r$)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 < 0$$

Exemplo

Qual é a posição de $P(2, 3)$ e τ : $x^2 + y^2 - 4x = 0$?

Substituindo as coordenadas de P temos:

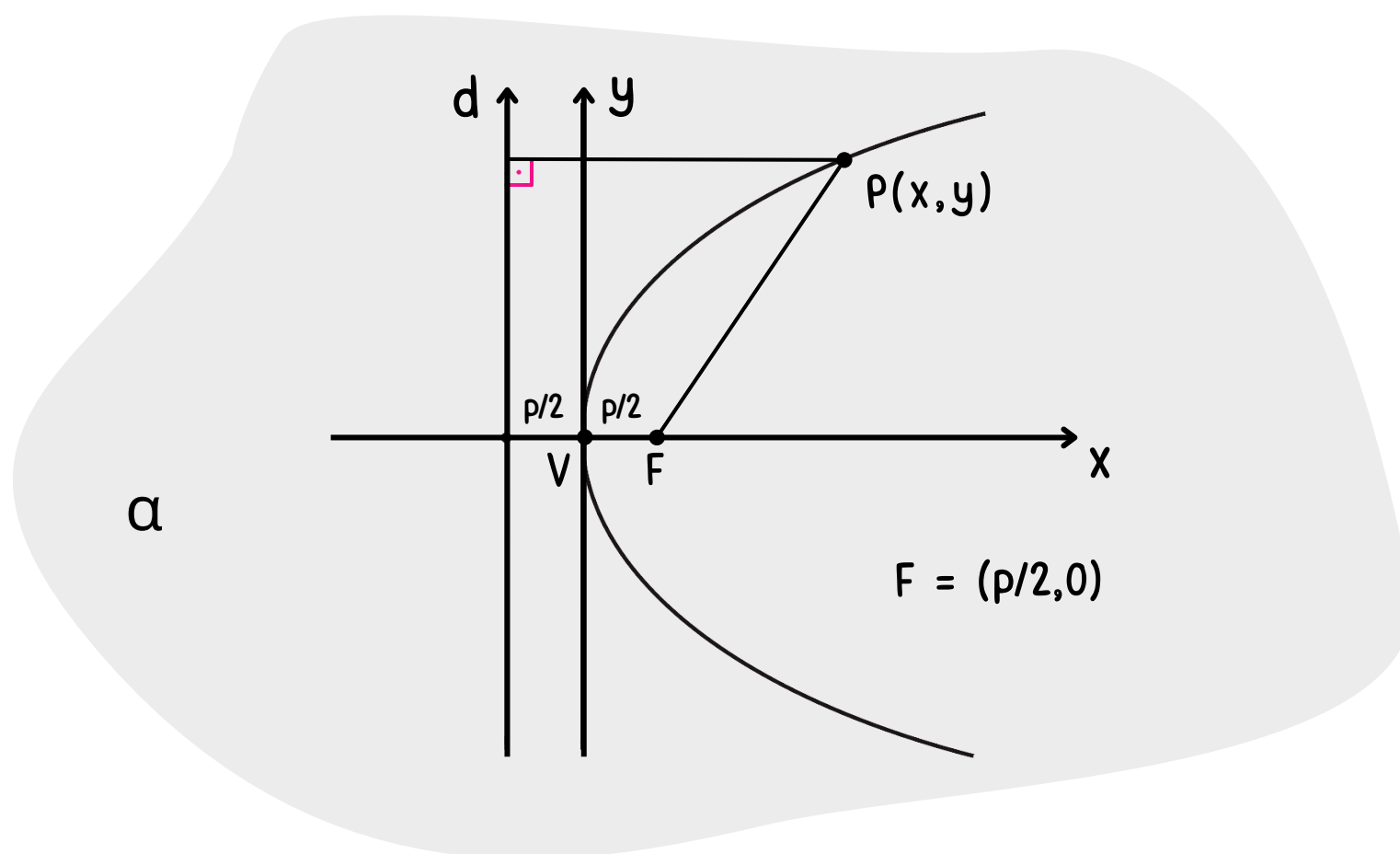
$$2^2 + 3^2 - 4 \cdot 2 = 5$$

como $5 > 0 \Rightarrow P$ exterior a τ

Definição

Dados um ponto F e uma reta d , pertencentes a um plano α , com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d . **Parábola** é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de d .

parábola



$$\text{Parábola} = \{P \in \alpha \mid PF = Pd\}$$

Elementos

$F \rightarrow$ Foco
 $d \rightarrow$ Diretriz
 $p \rightarrow$ Parâmetro (Fd)
 $V \rightarrow$ Vértice
 $VF \rightarrow$ Eixo de Simetria

$$VF = p/2$$

Equação reduzida

Eixo de Simetria em OX

$$y^2 = 2px$$



Eixo de Simetria em Oy

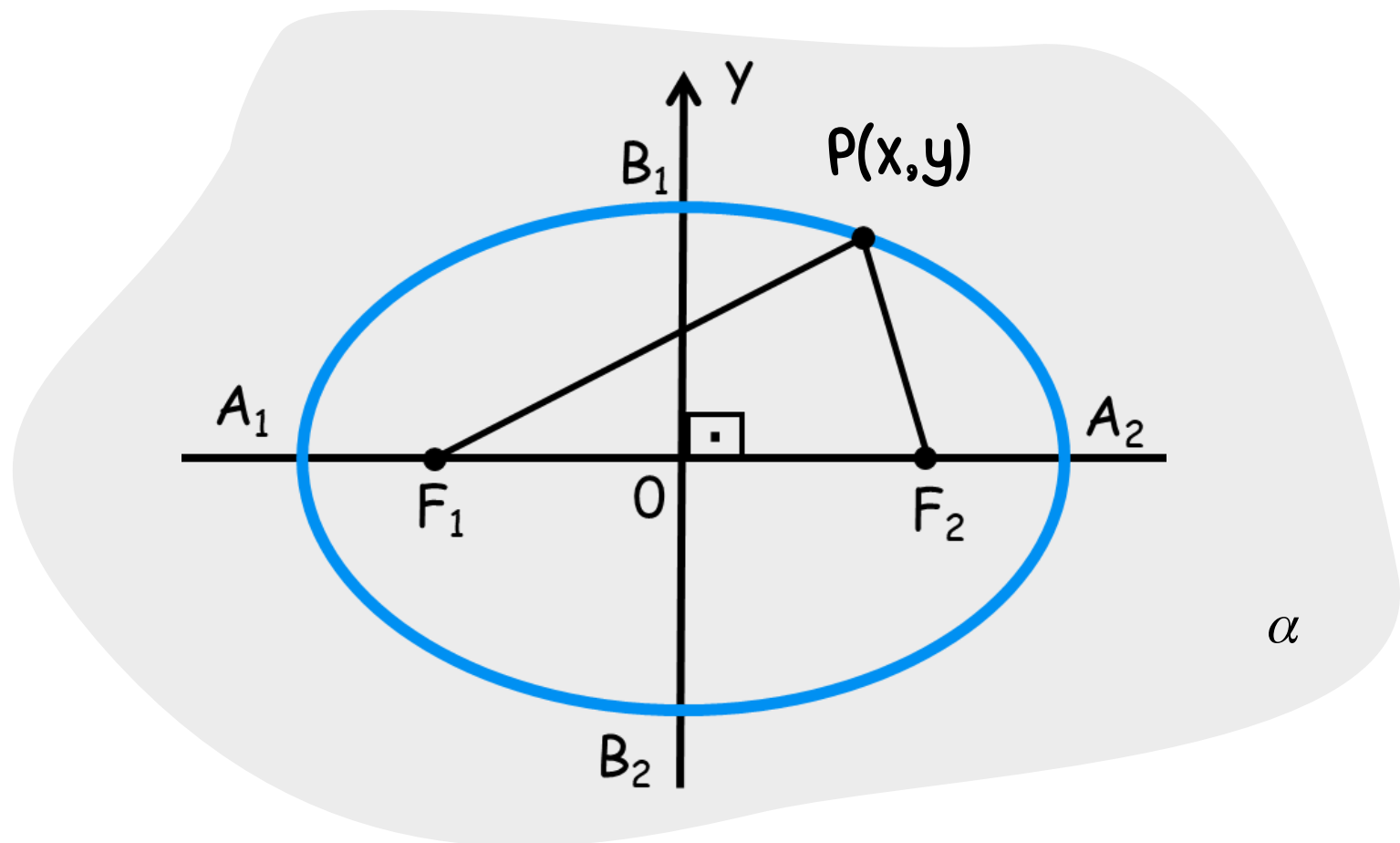
$$x^2 = 2py$$



Definição

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles, elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$ (sendo $2a > 2c$).

Elipse



$$\text{Elipse} = \{P \in \alpha \mid (PF_1) + (PF_2) = 2a\}$$

Elementos

F_1 e $F_2 \rightarrow$ focos

$A_1A_2 \rightarrow$ eixo maior ($2a$)

$B_1B_2 \rightarrow$ eixo menor ($2b$)

$2c \rightarrow$ distância focal (F_1F_2)

$c/a \rightarrow$ excentricidade

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Equação reduzida

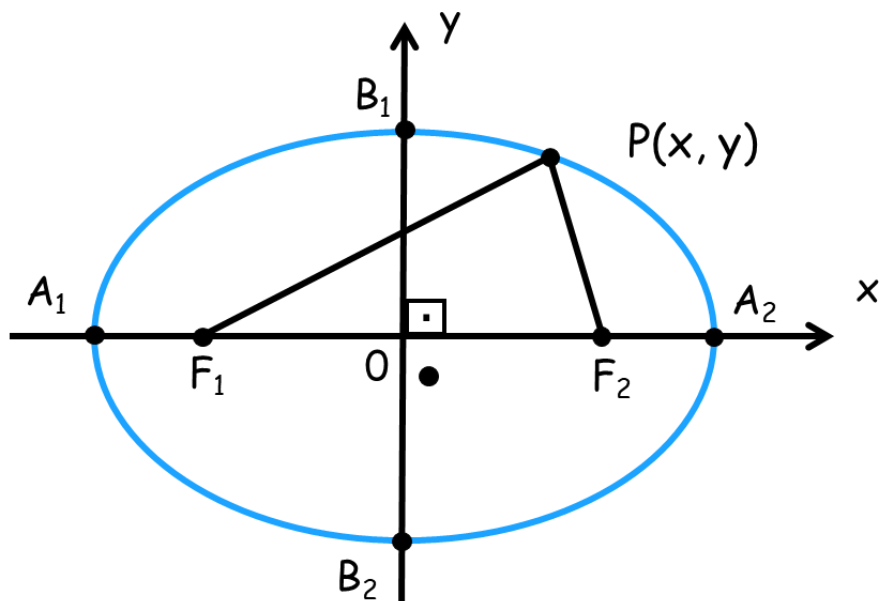
$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

desenvolvendo a igualdade teremos:

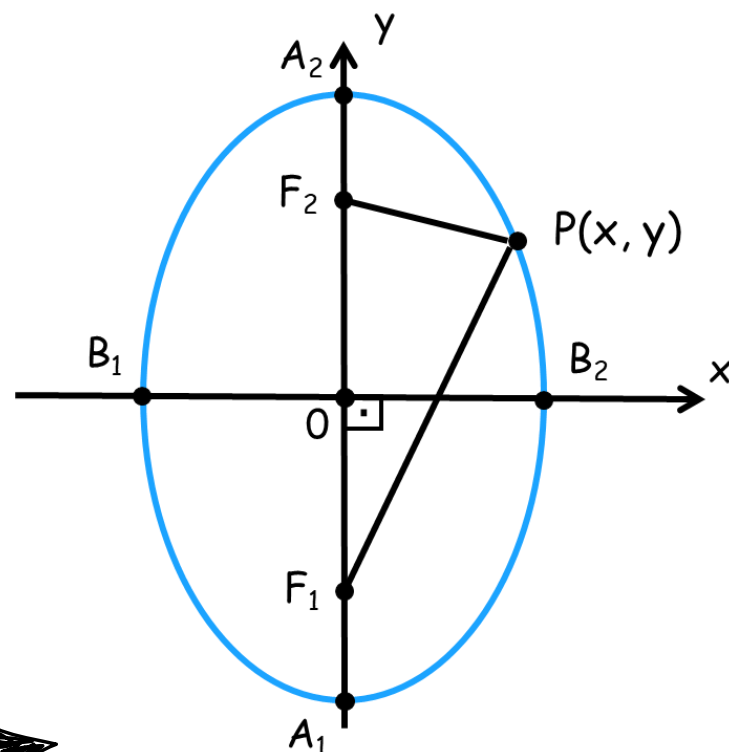
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

(eixo maior em Ox)

(eixo maior em Oy)

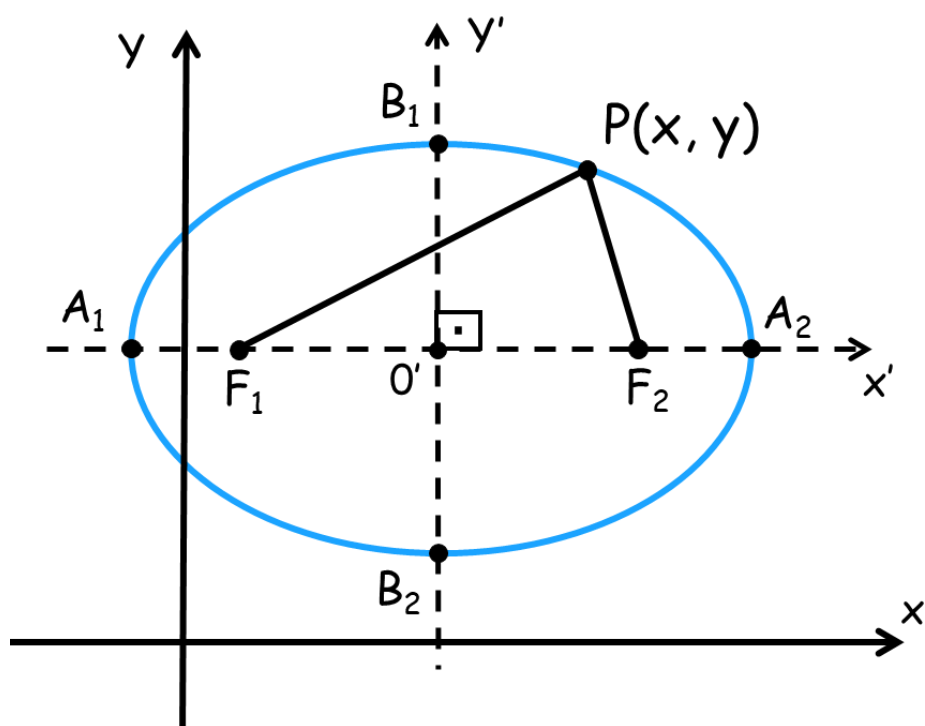


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

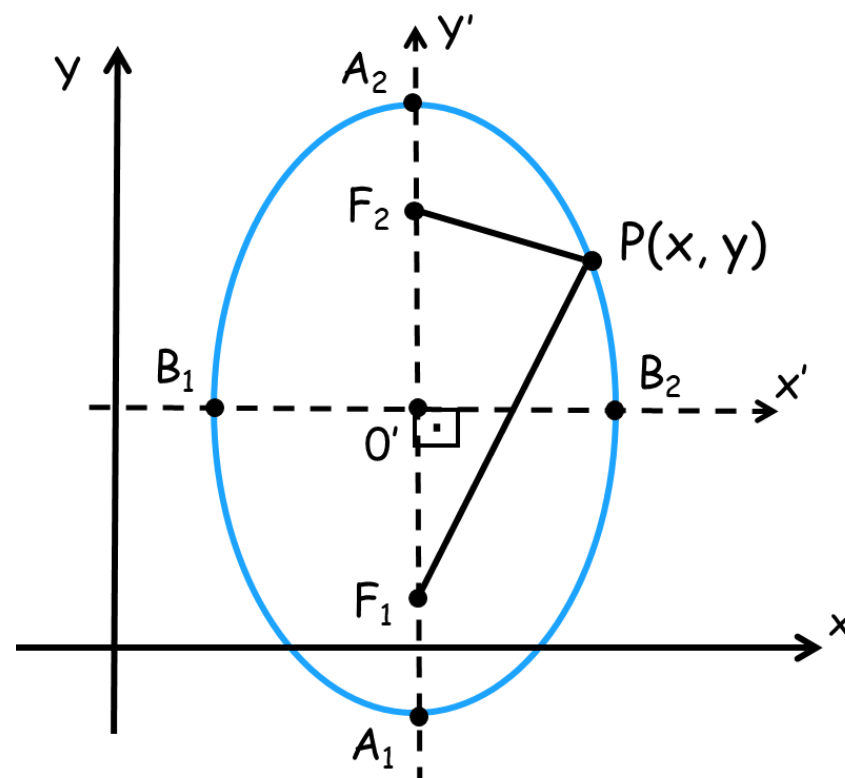


$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ellipse



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

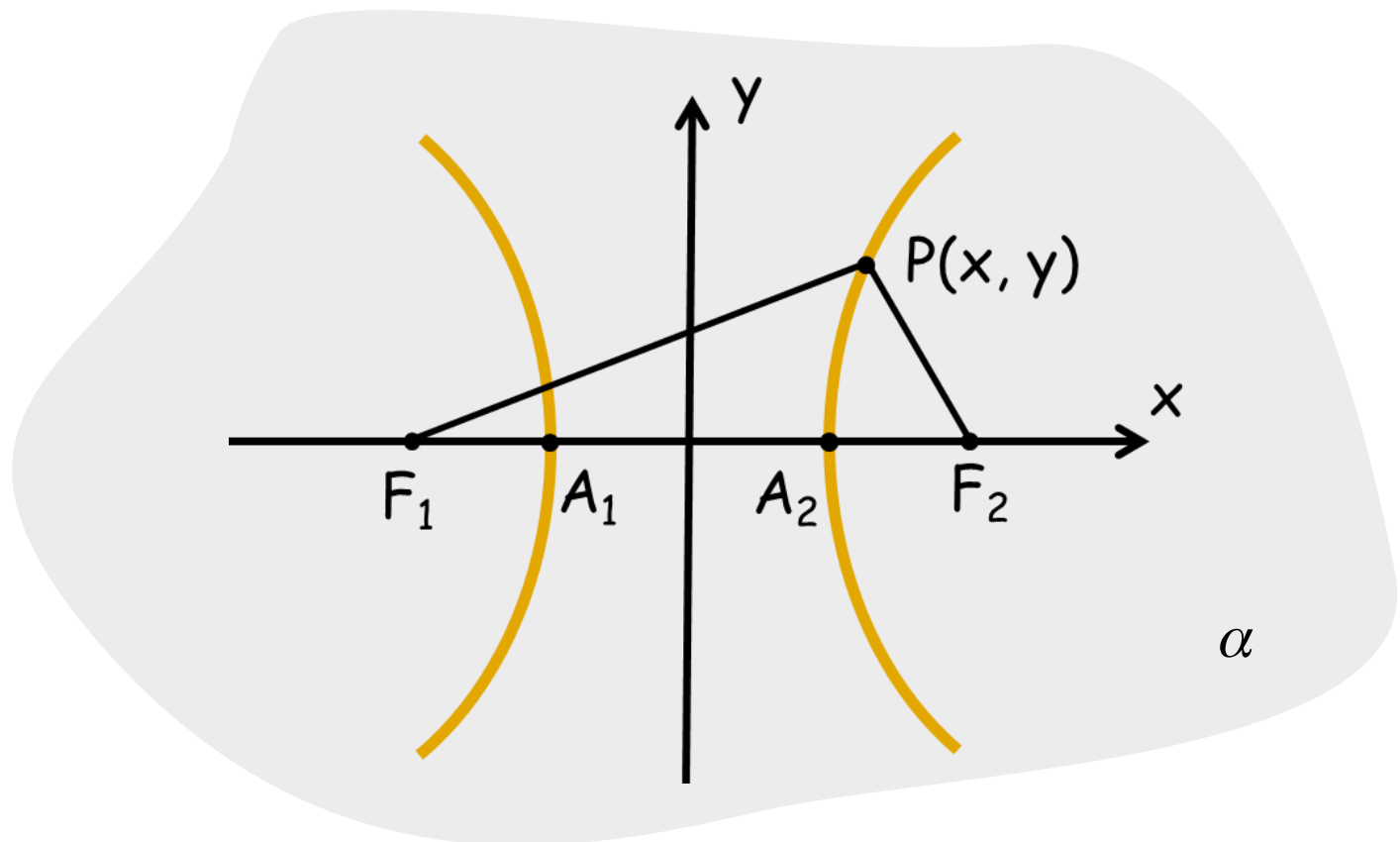


$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Definição

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles, define-se **Hipérbole** o conjunto dos pontos de α cuja diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$ (sendo $2a > 2c$).

Hipérbole



$$\text{Hipérbole} = \{P \in \alpha \mid (PF_1) - (PF_2) = \pm 2a\}$$

Elementos

F_1 e $F_2 \rightarrow$ focos

$A_1A_2 \rightarrow$ eixo real ($2a$)

$B_1B_2 \rightarrow$ eixo imaginário ($2b$)

$2c \rightarrow$ distância focal (F_1F_2)

$c/a \rightarrow$ excentricidade

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Equação reduzida

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

desenvolvendo a igualdade teremos:

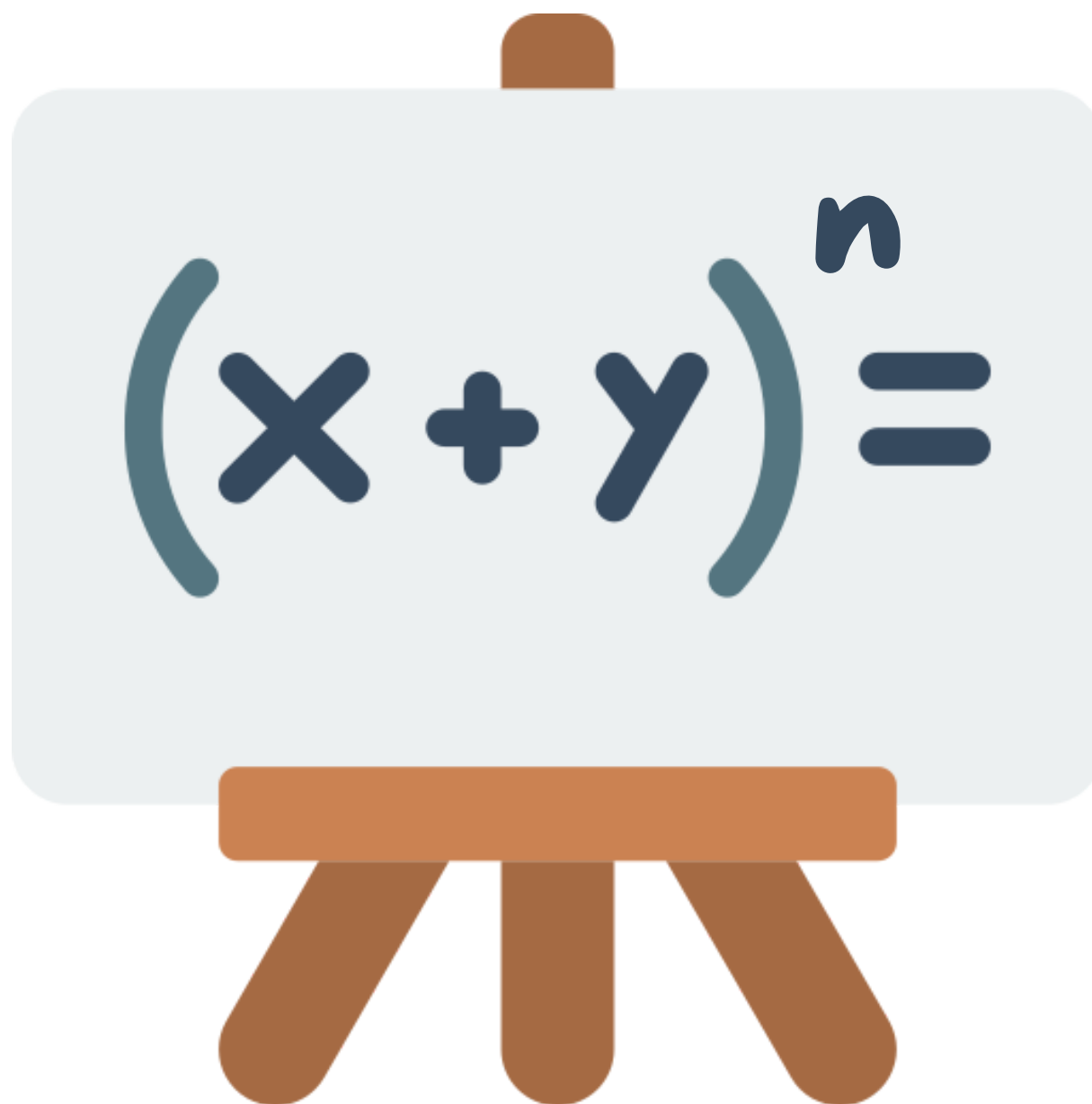
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(eixo real em Ox)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

(eixo real em Oy)

Polinômios


$$(x + y)^n =$$

● 0 que é?

Chamamos expressão polinomial ou polinômio na variável complexa x , toda expressão da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Onde:

- coeficientes $\rightarrow a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$
- Os coeficientes são números complexos
- n é um inteiro número não negativo

● Grau

O grau do polinômio é dado pelo maior expoente de x .

Exemplo: $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4$

O polinômio $P(x)$ tem grau igual a 4.

● Valor Numérico

Atribuindo-se um valor k à variável x , determinamos o valor numérico do polinômio para $x = k$, indicamos $P(k)$.

Exemplo: Dado $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4$, determinar $P(-1)$.

$$P(-1) = 2(-1)^4 + 5(-1)^3 - 3(-1)^2 + 4$$

$$P(-1) = 2 - 5 - 3 + 4 = -2$$

● Igualdade

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos se, e somente se, $P(k) = Q(k)$, $\forall k \in \mathbb{C}$.

● Raiz

Chamamos de raiz do $P(x)$ todo número complexo k , tal que, $P(k) = 0$.

ADIÇÃO

Para adicionar-se dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, devemos somar os coeficientes das partes semelhantes.

Exemplo: Dados $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4$ e $Q(x) = 5 + 3x^2 + x^3$, determine $P + Q$.

Solução: O resultado da adição entre P e Q será um polinômio R .

Temos que:

$$R(x) = P(x) + Q(x)$$

$$\begin{array}{r} P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4 \\ Q(x) = + x^3 + 4x^2 + 5 \\ \hline R(x) = 2x^4 + 6x^3 + x^2 + 9 \end{array}$$

OPERAÇÕES

GRAU DA SOMA

Se os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, tem graus m e n , respectivamente, com $m \geq n$, e $P + Q$ não nulo, então:

$$\text{gr}(P \pm Q) \leq m$$

No exemplo ao lado, $m = 4$ e $n = 3$, temos que $\text{gr}(P \pm Q) = 4$.

As regras aplicadas à adição $P + Q$ são as mesmas aplicadas à subtração $P - Q$.

$$\text{gr}(P \cdot Q) = \text{gr}(P) + \text{gr}(Q)$$

Exemplo:

$$\begin{array}{r} P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4 \\ Q(x) = + x^3 + 4x^2 + 5 \\ \hline R(x) = 2x^4 + 6x^3 + x^2 + 9 \end{array}$$

$$\text{gr}(P \pm Q) = 4$$

MULTIPLICAÇÃO

Definimos o produto de **P** por **Q** como a soma dos produtos de cada monômio de **P** por todos os monômios de **Q**.

Exemplo: Dados $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4$ e $Q(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$, calcular $P(x).Q(x)$.

OPERAÇÕES

DISPOSITIVO PRÁTICO

P \ Q	$4x^3$	$3x^2$	$0x^2$	-2
$2x^4$	$8x^7$	$6x^6$	$0x^5$	$-4x^4$
$5x^3$	$20x^6$	$15x^5$	$0x^4$	$-10x^3$
$-3x^2$	$-12x^5$	$-9x^4$	$0x^3$	$6x^2$
$0x$	$0x^4$	$0x^3$	$0x^2$	$0x$
4	$16x^3$	$12x^2$	$0x$	-8

Solução: $P(x).Q(x)$ será,

$$(2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4)(4x^3 + 3x^2 - 2) = 8x^7 + 26x^6 + 3x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 0x - 8.$$

$$\text{Finalmente, } P(x).Q(x) = 8x^7 + 26x^6 + 3x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 8.$$

O grau do produto $P.Q$ será:

$$\text{gr}(\mathbf{P.Q}) = \text{gr}(\mathbf{P}) + \text{gr}(\mathbf{Q})$$

Somando-se os termos nas diagonais destacadas:

$$\text{Finalmente } \mathbf{P(x).Q(x)} = 8x^7 + 26x^6 + 3x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 8.$$

Super Aulas

- ◆ | Matemática Criativa.
- ◆ | Inspirando professores; motivando alunos.
 - ◆ | Mapas Mentais
 - ◆ | Animações Matemáticas
 - ◆ | Slides Criativos e Editáveis

site: superaulas.lojavirtualnuvem.com.br