FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria plana

OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

9

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO IX

Polígonos

I. Definições e elementos

123. Polígonos — definição

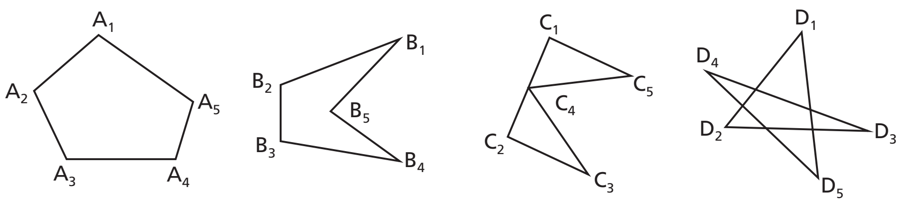
Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ com $n \geqslant 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

Indicação:

polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ ou, simplesmente, $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$

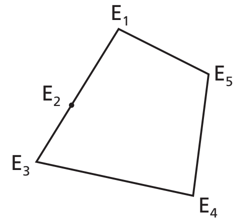
$$A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$$

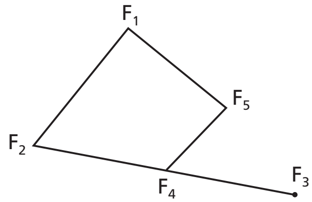
124. Exemplos:



$A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$ e $D_1D_2D_3D_4D_5$ são polígonos.

Para n = 5, os dois casos abaixo não são polígonos.





$E_1E_2E_3E_4E_5$ apresenta E_1, E_2 e E_3 colineares e $F_1F_2F_3F_4F_5$ apresenta F_2, F_3 e F_4 colineares

125. Elementos

Considerando o polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$, temos:

- os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ são os vértices do polígono;
- os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ são os lados do polígono;
- e os ângulos $\hat{A}_1 = A_n\hat{A}_1A_2$, $\hat{A}_2 = A_1\hat{A}_2A_3, \ldots,$ $\hat{A}_n = A_{n-1}\hat{A}_nA_1$ são os ângulos do polígono.

Dois lados que têm um vértice comum (ou uma extremidade comum) são lados consecutivos.

Dois lados não consecutivos não têm vértice (ou extremidade) comum.

Dois ângulos de um polígono são consecutivos se têm um lado do polígono comum.

Um polígono de *n* vértices possui *n* lados e *n* ângulos.

A soma dos lados é o **perímetro** do polígono:

perímetro de $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1}$

126. Polígono simples

Um polígono é simples se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia.

Dos polígonos do exemplo anterior (item 124), temos:

$A_1A_2A_3A_4A_5$ e $B_1B_2B_3B_4B_5$ são polígonos simples

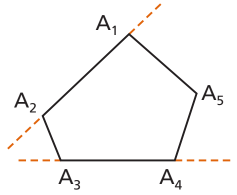
$C_1C_2C_3C_4C_5$ não é polígono simples (é complexo) e

$D_1D_2D_3D_4D_5$ não é polígono simples (é complexo e ainda entrelaçado).

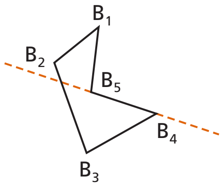
127. Polígono convexo e polígono côncavo

Um polígono simples é um **polígono convexo** se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais (n − 2) vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina.

Se um polígono não é polígono convexo, diremos que ele é um **polígono côncavo.**



$A_1A_2A_3A_4A_5$ é polígono convexo.



$B_1B_2B_3B_4B_5$ é polígono côncavo.

128. Interior e exterior de um polígono

Dado um polígono simples e um ponto não pertencente a ele, se conduzirmos uma semirreta com origem no ponto e que não passe por nenhum vértice, mas intercepte o polígono, se o número de pontos de interseção:

a) for ímpar, então o ponto é **interno** ao polígono;

b) for par, então o ponto é **externo** ao polígono.

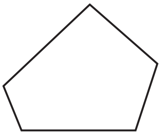
O conjunto dos pontos internos de um polígono é seu **interior** e o conjunto dos pontos externos ao polígono é seu **exterior**.

O interior de um polígono convexo é uma região convexa.

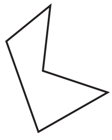
O interior de um polígono côncavo é uma região côncava.

129. Superfície poligonal

A reunião de um polígono com o seu interior é uma **região poligonal** ou **superfície poligonal**.



superfície poligonal
(convexa)



superfície poligonal
(côncava)

130. Observação

Sob uma outra orientação, até este ponto não adotada neste texto, o ente **polígono** corresponde ao que denominamos **superfície poligonal** ou **região poligonal**; o ente **poligonal fechada** ou **contorno do polígono** corresponde ao que chamamos de **polígono**. As conclusões práticas a que se chega com uma ou outra orientação são as mesmas.

131. Nome dos polígonos

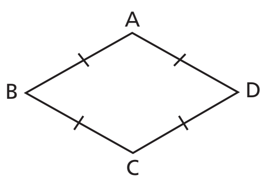
De acordo com o número *n* de lados, os polígonos recebem nomes especiais. Veja a seguir as correspondências:

$n = 3$	$\longrightarrow$	triângulo ou trilátero	$\longrightarrow$	3 lados
$n = 4$	$\longrightarrow$	quadrângulo ou quadrilátero	$\longrightarrow$	4 lados
$n = 5$	$\longrightarrow$	pentágono	$\longrightarrow$	5 lados
$n = 6$	$\longrightarrow$	hexágono	$\longrightarrow$	6 lados
$n = 7$	$\longrightarrow$	heptágono	$\longrightarrow$	7 lados
$n = 8$	$\longrightarrow$	octógono	$\longrightarrow$	8 lados
$n = 9$	$\longrightarrow$	eneágono	$\longrightarrow$	9 lados
$n = 10$	$\longrightarrow$	decágono	$\longrightarrow$	10 lados
$n = 11$	$\longrightarrow$	undecágono	$\longrightarrow$	11 lados
$n = 12$	$\longrightarrow$	dodecágono	$\longrightarrow$	12 lados
$n = 15$	$\longrightarrow$	pentadecágono	$\longrightarrow$	15 lados
$n = 20$	$\longrightarrow$	icoságono	$\longrightarrow$	20 lados

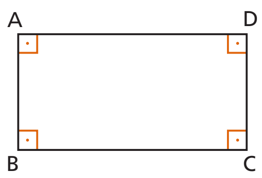
Em geral, para um número *n* ($n \geqslant 3$) qualquer de lados dizemos que o polígono é um **n-látero**.

132. Polígono regular

Um polígono que possui os lados congruentes é equilátero. Se possui os ângulos congruentes, é equiângulo.



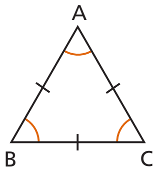
quadrilátero equilátero



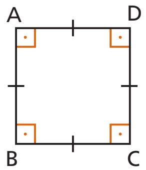
quadrilátero equiângulo

Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes (é equilátero) e todos os ângulos congruentes (é equiângulo).

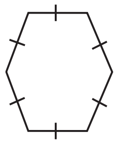
Exemplos:



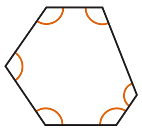
O triângulo regular é o triângulo equilátero.



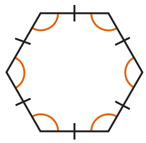
O quadrilátero regular é o quadrado.



hexágono equilátero



hexágono equiângulo

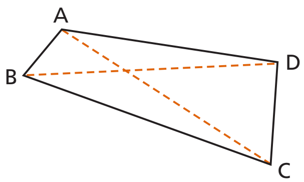


hexágono regular

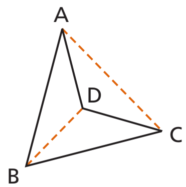
II. Diagonais — Ângulos internos — Ângulos externos

1º) **Número *d* de diagonais de um polígono de *n* lados (n $\geqslant$ 3)**

133. Diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.



ABCD é um quadrilátero convexo.
$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais.



ABCD é um quadrilátero côncavo.
$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais.

134. O número de diagonais *d* de um polígono de *n* lados ($n \geqslant 3$) é dado por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Dedução:

Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono de *n* lados.

Com extremidade num dos vértices do polígono (vértice A_1, por exemplo), temos:

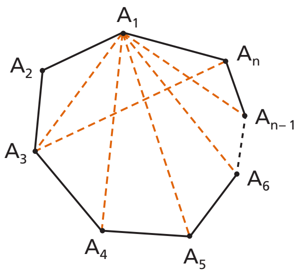
$(n - 3)$ diagonais.

Se com extremidade em cada vértice temos

$(n - 3)$ diagonais,

então com extremidades nos *n* vértices, temos:

$n(n - 3)$ diagonais.



Porém, nesta conta

$n(n - 3)$

cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidades em 2 vértices.

(Por exemplo, na conta acima, $\overline{A_1A_3}$ e $\overline{A_3A_1}$ são contadas como duas diagonais, quando na realidade é uma só $\overline{A_1A_3} = \overline{A_3A_1}$.)

Logo, o número *d* de diagonais é:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

2º) **Soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo**

135. A soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* lados ($n \geqslant 3$) é dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 2 \text{ retos}$$

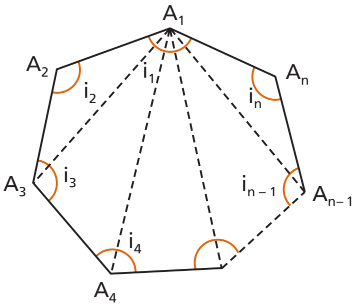
ou, simplesmente,

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Dedução:

Seja $A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono convexo de *n* lados.



De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que têm esse vértice como extremo.

O polígono fica então dividido em (n – 2) triângulos e a soma S_i dos ângulos internos do polígono

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n$$

é igual à soma dos ângulos internos dos (n – 2) triângulos.

Logo,

$\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 2 \text{ retos}}$ ou $\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180°}$

3º) **Soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo**

136. **Ângulo externo** de um polígono convexo é um ângulo suplementar adjacente a um ângulo (interno) do polígono.

137. A soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo de *n* lados ($n \geqslant 3$) é dada por:

$$S_e = 4 \text{ retos}$$

ou, simplesmente,

A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é:

$$S_e = 360°$$

Dedução:

Seja $A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono convexo de *n* lados.

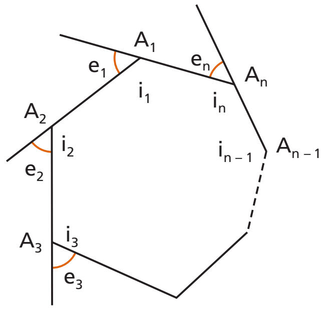
Considerando os ângulos externos

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$$

suplementares adjacentes aos respectivos ângulos internos

$$i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$$

temos:



$$\left.\begin{aligned} e_1 + i_1 &= 180° \\ e_2 + i_2 &= 180° \\ e_3 + i_3 &= 180° \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ e_n + i_n &= 180° \end{aligned}\right\} \text{ somando membro a membro as } n \text{ igualdades}$$

$$S_e + S_i = n \cdot 180°$$

Substituindo-se S_i por $(n - 2) \cdot 180°$, vem:

$$S_e + (n - 2) \cdot 180° = n \cdot 180°$$

$$S_e + \cancel{n \cdot 180°} - 360° = \cancel{n \cdot 180°}$$

$$\boxed{S_e = 360°}$$

138. Expressões do ângulo interno (a_i) e do ângulo externo (a_e) de um polígono regular

Os ângulos internos de um polígono regular são congruentes.

$$n \cdot a_i = S_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \cdot a_i = (n - 2) \cdot 180°} \quad \Rightarrow \quad a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

Os ângulos externos de um polígono regular são congruentes.

$$n \cdot a_e = S_e \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \cdot a_e = 360°} \quad \Rightarrow \quad a_e = \frac{360°}{n}$$

E, ainda:

$$a_i + a_e = 180°$$

Nota

Para se calcular a medida do ângulo interno (a_i) de um polígono regular é mais prático se obter, em primeiro lugar, a medida do ângulo externo (a_e) e, pelo suplemento, se encontra a medida do ângulo interno.

EXERCÍCIOS

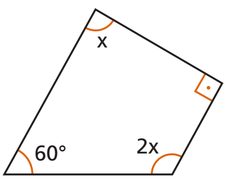
292. Determine, de preferência sem usar a fórmula, a soma dos ângulos internos de um:

a) pentágono convexo

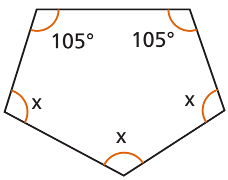
b) hexágono convexo

293. Determine o valor de x nos casos:

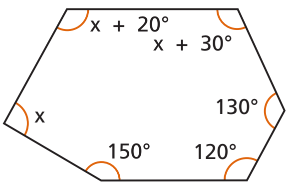
a)



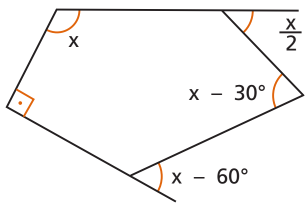
b)



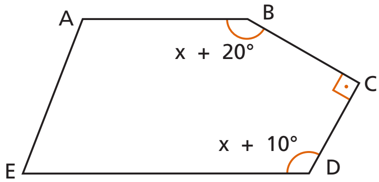
c)



d)

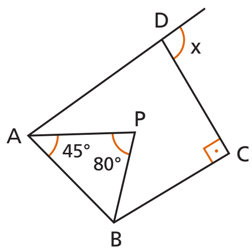


e) $\overline{AB} // \overline{ED}$

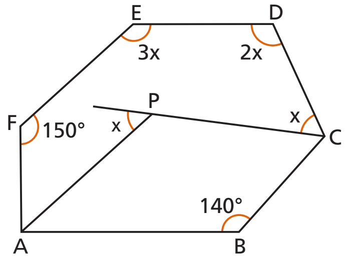


294. Nos casos abaixo, determine x, sabendo que os segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ e $\overline{DP}$ nas figuras em que aparecem são bissetrizes.

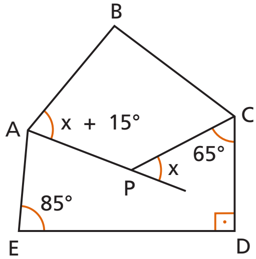
a)



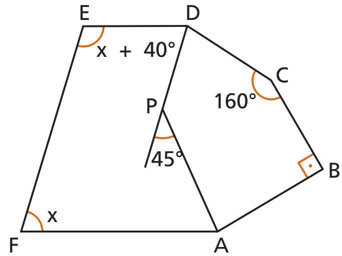
c)



b)

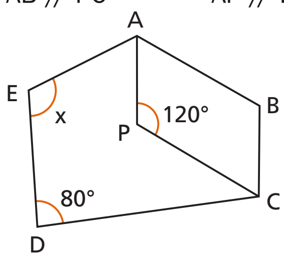


d)

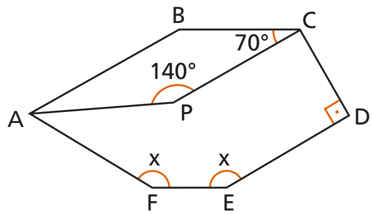


295. Sendo $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{C}$, determine x.

a) $\overline{AB} \,//\, \overline{PC}$ $\quad$ $\overline{AP} \,//\, \overline{BC}$



b) $\overline{AB} \,//\, \overline{PC}$

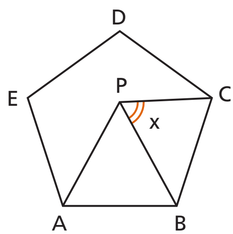


296. Determine o ângulo interno e o ângulo externo de um:

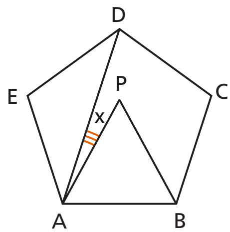
a) triângulo equilátero;
b) quadrado;
c) pentágono regular;
d) hexágono regular.

297. Se o triângulo ABP é equilátero e ABCDE é pentágono regular, determine x nos casos:

a)

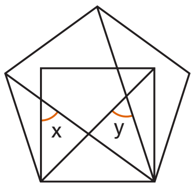


b)

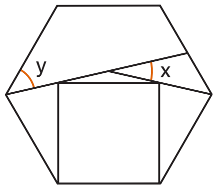


298. Determine os valores de *x* e *y* nos casos:

a) pentágono regular e quadrado;



b) hexágono regular e quadrado.



299. Calcule a soma dos ângulos internos de um eneágono.

300. Calcule a soma dos ângulos internos de um decágono.

301. Calcule a soma dos ângulos internos de um icoságono.

302. Qual é o polígono cuja soma dos ângulos internos vale 1800°?

303. Calcule o número de diagonais de um decágono.

304. Calcule o número de diagonais de um icoságono.

305. Determine o polígono cujo número de diagonais é o triplo do número de lados.

306. Determine o polígono cujo número de diagonais é o quádruplo do número de lados.

307. Determine o polígono que tem 9 diagonais distintas.

308. Determine o maior ângulo de um pentágono cujos ângulos internos estão na razão 3 : 3 : 3 : 4 : 5.

309. Um polígono regular possui a partir de um de seus vértices tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Ache:

a) o polígono;

b) o total de diagonais;

c) a soma dos ângulos internos;

d) a soma dos ângulos externos;

e) a medida de cada ângulo interno e de cada ângulo externo.

Solução

1) Número de diagonais do hexágono

$$\left(n = 6,\ d = \frac{n(n-3)}{2}\right) \Rightarrow d = \frac{6(6-3)}{2} \Rightarrow d = 9$$

2) Novo polígono

De cada vértice partem n − 3 diagonais. Então:

$$n - 3 = 9 \Rightarrow n = 12$$

a) O polígono é o dodecágono ($n = 12$).

b) $d = \dfrac{n(n - 3)}{2} \Rightarrow d = \dfrac{12(12 - 3)}{2} \Rightarrow d = 54$ (diagonais)

c) $S_i = (n - 2) \cdot 180° \Rightarrow S_i = (12 - 2) \cdot 180° \Rightarrow S_i = 1\,800°$

d) A soma dos ângulos externos é constante: $S_e = 360°$.

e) $n \cdot a_e = 360° \Rightarrow 12 \cdot a_e = 360° \Rightarrow a_e = 30°$
$a_1 + a_e = 180° \Rightarrow a_1 = 180° - 30° \Rightarrow a_i = 150°$

310. Quantas diagonais podemos traçar, partindo de um vértice de um polígono convexo de 20 lados?

311. Determine o número de lados de um polígono convexo, sabendo que de um de seus vértices partem 25 diagonais.

312. Determine o polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é igual ao número de diagonais multiplicado por 180°.

313. Podem os ângulos internos e externos de um polígono regular apresentar medidas iguais? Em que caso isso ocorre?

314. Determine o número de diagonais de um polígono regular convexo cujo ângulo externo vale 24°.

315. A razão entre o ângulo interno e o ângulo externo de um polígono regular é 9.
Determine o número de lados do polígono.

316. O ângulo interno de um polígono regular vale 1,5 vez o seu ângulo externo.
Determine o número de lados do polígono.

317. O ângulo externo de um polígono regular é igual ao dobro do seu ângulo interno.
Determine o número de diagonais desse polígono.

318. A soma dos ângulos internos com a dos ângulos externos de um polígono regular vale 1 800°. Determine o número de diagonais do polígono.

319. Determine o número de lados de um polígono convexo regular cujo ângulo interno é o quíntuplo do externo.

320. Determine o número de lados de um polígono regular ABCDE ..., sabendo que as bissetrizes $\overline{AP}$ e $\overline{CP}$ dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo que vale $\dfrac{2}{9}$ do seu ângulo interno.

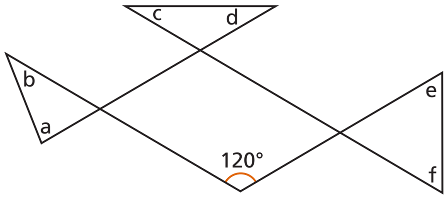
321. Determine a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um polígono regular ABCD ... de 20 lados.

322. As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 24°. Determine o número de diagonais desse polígono.

323. Aumentando o número de lados de um polígono em 3, seu número de diagonais aumenta em 21. Determine o número de diagonais desse polígono.

324. Na figura abaixo, determine a soma das medidas dos ângulos.

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} + \hat{f}$



325. Dados dois polígonos com *n* e n + 6 lados, respectivamente, calcule *n*, sabendo que um dos polígonos tem 39 diagonais mais do que o outro.

326. Três polígonos convexos têm *n*, n + 1, n + 2 lados, respectivamente. Sendo 2 700° a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos, determine o valor de *n*.

327. Os números que exprimem o número de lados de três polígonos são n − 3, *n* e n + 3. Determine o número de diagonais de cada um dos polígonos, sabendo que a soma de todos os seus ângulos internos vale 3 240°.

Solução

$$n_1 = n - 3; \quad n_2 = n; \quad n_3 = n + 3$$

$(n - 3 - 2)180° + (n - 2)180° + (n + 3 - 2)180° = 3\,240°$

$(n - 5)180° + (n - 2)180° + (n + 1)180° = 3\,240°$

$(n - 5 + n - 2 + n + 1)180° = 3\,240°$

$3n - 6 = 18 \quad \Rightarrow \quad 3n = 24 \quad \Rightarrow \quad n = 8$

Então:

$n_1 = 5$ e $d_1 = \dfrac{5(5 - 3)}{2} = 5 \qquad n_2 = 8$ e $d_2 = \dfrac{8(8 - 3)}{2} = 20$

$n_3 = 11$ e $d_3 = \dfrac{11(11 - 3)}{2} = 44$

328. Três polígonos têm o número de lados expressos por números inteiros consecutivos. Sabendo que o número total de diagonais dos três polígonos é igual a 28, determine o polígono com maior número de diagonais.

329. Dois polígonos convexos têm o número de lados expresso pelos números *n* e n + 4. Determine o valor de *n*, sabendo que um dos polígonos tem 34 diagonais mais do que o outro.

330. Um polígono convexo tem 5 lados mais do que o outro. Sabendo que o número total de diagonais vale 68, determine o número de diagonais de cada polígono.

331. Dados dois polígonos regulares, com (n + 1) lados e *n* lados, respectivamente, determine *n*, sabendo que o ângulo interno do primeiro polígono excede o ângulo interno do segundo em 5°.

332. Um polígono regular possui 30 diagonais que não passam pelo seu centro. Quanto mede cada ângulo interno dele?

Solução

Um polígono regular só tem diagonais passando pelo centro se o número *n* de lados for par e o número de diagonais que passam pelo centro for $\frac{n}{2}$.
Nesse problema temos que considerar 2 casos:

1º) *n* é impar — Não há diagonal passando pelo centro.
Neste caso o número total de diagonais é d = 30.
Vamos calcular o número de lados:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \quad \Rightarrow \quad 30 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \Rightarrow \quad n^2 - 3n - 60 = 0$$

As raízes da equação não são números naturais ($\Delta = 249$). Logo, não existe polígono com 30 diagonais e com número ímpar de lados.

2º) *n* é par — Há $\frac{n}{2}$ diagonais passando pelo centro.
Neste caso o número total de diagonais é $d = \frac{n}{2} + 30$.

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2} + 30 = \frac{n(n-3)}{2} \quad \Rightarrow \quad n^2 - 4n - 60 = 0$$

A raiz da equação que é número natural é n = 10.
O polígono é o decágono regular.
Cálculo do ângulo interno:

$$a_i = 180° - a_e = 180° - \frac{360°}{10} \quad \Rightarrow \quad a_i = 144°$$

333. Qual o polígono regular que tem 6 diagonais passando pelo seu centro?

334. Um polígono regular tem 170 diagonais. Quantas passam pelo centro?

335. O ângulo interno de um polígono regular mede 140°. Quantas diagonais passam pelo centro?

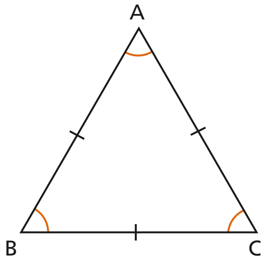
CAPÍTULO XVI

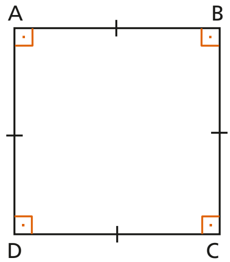
Polígonos regulares

Conceitos e propriedades

211. Definição

Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.





Assim, o triângulo equilátero é o triângulo regular e o quadrado é o quadrilátero regular.

Um polígono regular é equilátero e equiângulo.

212. Propriedades

Dividindo-se uma circunferência em *n* (n ⩾ 3) arcos congruentes, temos:

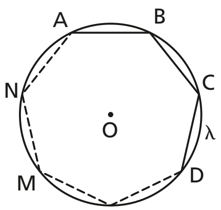
a) todas as cordas determinadas por dois pontos de divisão consecutivos, reunidas, formam um polígono regular de *n* lados inscrito na circunferência;

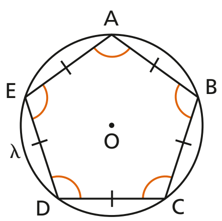
b) as tangentes traçadas pelos pontos de divisão determinam um polígono regular de *n* lados circunscrito à circunferência.

Demonstração:

1º) Da parte *a*)

Com n = 5





Sejam A, B, C, D, ..., M e N os *n* pontos de divisão da circunferência λ. O polígono ABCD ... MN é de *n* lados e é inscrito, pois todos os vértices pertencem à circunferência λ (tome o pentágono ABCDE para fixar as ideias).

Sendo

$$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{DE} \equiv \ldots \equiv \overset{\frown}{MN} \equiv \overset{\frown}{NA},$$

então

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \ldots \equiv \overline{MN} \equiv \overline{NA} \quad (1)$$

pois, numa mesma circunferência, arcos congruentes subentendem cordas congruentes.

Os ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \ldots, \hat{M}$ e $\hat{N}$ são congruentes (2),
pois cada um deles é ângulo inscrito em λ e tem por medida metade da soma de (n − 2) dos arcos congruentes em que λ ficou dividida.

De (1) e (2) concluímos que ABCD ... MN é um polígono regular de *n* lados inscrito na circunferência λ.

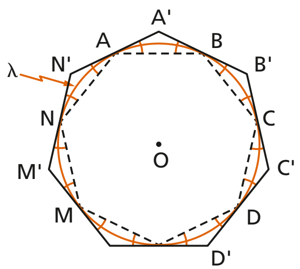
No caso do pentágono, por exemplo, temos:

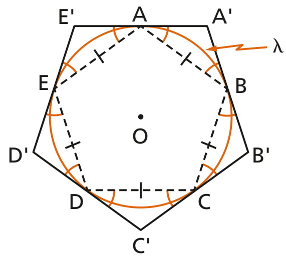
$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE}}{2}, \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EA}}{2}, \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EA} + \overset{\frown}{AB}}{2}$$

$$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{EA} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{2} \text{ e } \hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

2º) Da parte *b*)

Com n = 5





Pelos pontos de divisão A, B, C, D, ..., M e N conduzimos tangentes a λ e obtemos o polígono A'B'C'D' ... M'N' de *n* lados e circunscrito a λ, pois todos os seus lados são tangentes à circunferência (tome o pentágono A'B'C'D'E' para fixar as ideias).

Os triângulos A'AB, B'BC, C'CD, D'DE, ..., M'MN e N'NA são

— **isósceles**, pois cada um dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \dots, \hat{M}$ e $\hat{N}$ desses triângulos tem medida igual à metade da medida de uma das partes congruentes $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DE}, \dots, \overset{\frown}{MN}, \overset{\frown}{NA}$ em que foi dividida a circunferência (são ângulos de segmento ou semi-inscritos) e

— **congruentes** pelo caso ALA, visto que sendo ABCD ... MN um polígono regular (parte *a*), e os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \dots, \overline{MN}, \overline{NA}$ desses triângulos são congruentes.

Da congruência dos triângulos decorre que

$$\hat{A}' \equiv \hat{B}' \equiv \hat{C}' \equiv \hat{D}' \equiv \dots \equiv \hat{M}' \equiv \hat{N}' \quad (1)$$

e, por soma conveniente, temos:

$$\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'} \equiv \overline{C'D'} \equiv \dots \equiv \overline{M'N'} \equiv \overline{N'A'} \quad (2)$$

De (1) e (2) concluímos que ABCD ... MN é um polígono regular de *n* lados circunscrito à circunferência λ.

213. Polígono regular é inscritível

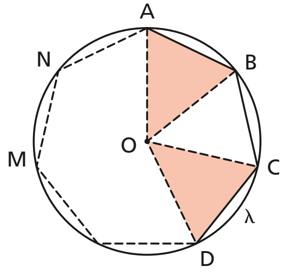
Todo polígono regular é inscritível numa circunferência.

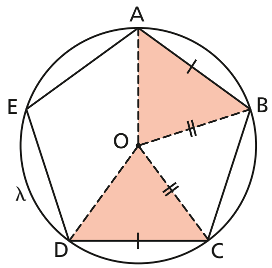
ou

Dado um polígono regular, existe uma única circunferência que passa pelos seus vértices.

Demonstração:

Seja ABCD ... MN o polígono regular (tome o pentágono ABCDE para fixar as ideias).





Pelo pontos A, B e C tracemos a circunferência λ e seja O o seu centro.

Provemos que λ passa pelos demais vértices D, E, ..., M e N do polígono.

Comecemos provando que $D \in \lambda$.

Consideremos os triângulos OBA e OCD. Esses triângulos são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (lados do polígono regular), $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$ (raios da circunferência) e considerando o triângulo isósceles BOC (ângulos da base congruentes) e, ainda, que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do polígono são congruentes, por diferença decorre que $O\hat{B}A \equiv O\hat{C}D$.

$$\triangle OBA \equiv \triangle OCD \quad \Rightarrow \quad \overline{OA} \equiv \overline{OD} \quad \Rightarrow \quad D \in \lambda$$

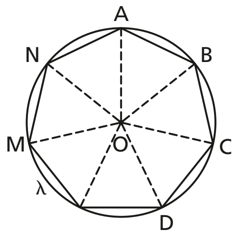
De modo análogo temos que $E \in \lambda$ (basta considerar $\triangle OCB$ e $\triangle ODE$), ... $M \in \lambda$ e $N \in \lambda$, e o polígono ABCD ... MN é inscrito na circunferência λ.

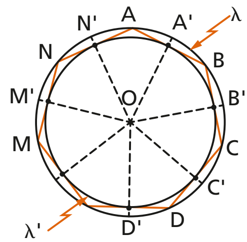
Da unicidade da circunferência que passa por A, B e C sai a unicidade de λ por A, B, C, D, ..., M, N.

214. Polígono regular é circunscritível

Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.
ou
Dado um polígono regular, existe uma única circunferência inscrita no polígono.

Demonstração:





Seja ABCD ... MN o polígono regular. Em vista do teorema anterior, ele é inscrito numa circunferência λ. Seja O o centro dessa circunferência.

Os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ..., $\overline{MN}$, $\overline{NA}$ são cordas congruentes de λ, por isso distam igualmente do centro O.

Sendo A', B', C', D', ..., M', N' os respectivos pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, ..., $\overline{MN}$, $\overline{NA}$, temos:

$$\overline{OA'} \equiv \overline{OB'} \equiv \overline{OC'} \equiv \overline{OD'} \equiv \ldots \equiv \overline{OM'} \equiv \overline{ON'}$$
(distância do centro a cordas congruentes)

donde se conclui que O é o centro de uma circunferência λ' que passa pelos pontos A', B', C', D', ..., M' e N'.

E ainda, sendo:

$\overline{OA'} \perp \overline{AB}$, $\overline{OB'} \perp \overline{BC}$, $\overline{OC'} \perp \overline{CD}$, $\overline{OD'} \perp \overline{DE}$, ..., $\overline{OM'} \perp \overline{MN}$ e $\overline{ON'} \perp \overline{NA}$, temos que ABCD ... MN tem lados tangentes a λ'.

Conclusão: o polígono regular ABCD ... MN é circunscrito à circunferência λ'.

Unicidade de λ': se existisse outra circunferência inscrita no polígono ABCD... MN, ela passaria pelos pontos A', B', C', ... e seria, então, coincidente com λ'.

215. Nota

As duas últimas propriedades (itens 213 e 214) são recíprocas da primeira (item 212).

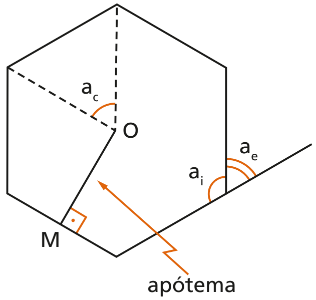
As circunferências inscrita e circunscrita a um polígono regular são concêntricas.

216. Elementos notáveis

Centro de um polígono regular é o centro comum das circunferências circunscrita e inscrita.

Apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado.

O apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.



217. Expressão do ângulo cêntrico

Todos os ângulos cêntricos de um polígono regular (vértices no centro e lados passando por vértices consecutivos do polígono) são congruentes; então a medida de cada um deles é dada por:

$$a_c = \frac{360°}{n} \quad \text{ou} \quad a_c = \frac{4 \text{ retos}}{n}$$

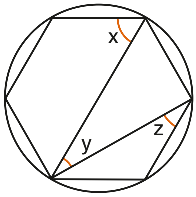
218. Diagonais pelo centro

Se um polígono regular possui um número par de lados, ele possui diagonais passando pelo centro: são as que unem vértices opostos. Se ele possui um número ímpar de lados, não há diagonais passando pelo centro.

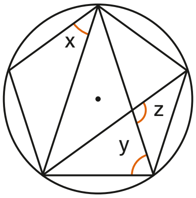
EXERCÍCIOS

685. Determine as medidas dos ângulos *x*, *y* e *z* nos casos:

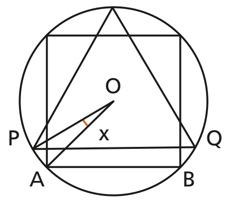
a) hexágono regular



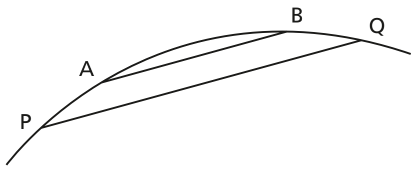
b) pentágono regular



686. Na figura temos um triângulo equilátero e um quadrado inscritos no mesmo círculo. Determine $A\hat{O}P$, sendo $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{PQ}$.



687. Na figura, $\overline{AB}$ é lado do pentadecágono regular e $\overline{PQ}$ o lado do hexágono regular, inscritos na mesma circunferência. Determine $A\hat{Q}P$, sendo $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$ paralelos.



688. Determine o número de lados de um polígono regular convexo, cujos ângulos internos medem 179° cada.

689. Determine a medida do ângulo formado pelos prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de um polígono ABCDE... regular de 30 lados.

690. Dados dois polígonos regulares, com (n + 1) lados e *n* lados, respectivamente, determine *n*, sabendo que o ângulo interno do primeiro polígono excede o ângulo interno do segundo em 5°.

Solução

Se a diferença dos ângulos internos é de 5°, a diferença entre o ângulo externo do 2º polígono e o ângulo externo do 1º também é de 5°. Então:

$$\frac{360°}{n} - \frac{360°}{n} = 5° \Rightarrow 72(n + 1) - 72n = n(n + 1) \Rightarrow n^2 + n - 72 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n = -9 \text{ ou } n = 8)$$

Resposta: n = 8.

691. Quantas medidas, duas a duas diferentes, obtemos quando medimos as diagonais de um:

a) hexágono regular;

b) octógono regular;

c) decágono regular;

d) dodecágono regular;
e) heptágono regular;
f) eneágono regular;
g) polígono de n lados, para n sendo par;
h) polígono de n lados, para n sendo ímpar?

692. Ao medir as diagonais de um polígono regular foram encontradas 6 medidas, duas a duas diferentes. Determine a soma do ângulos internos desse polígono.

693. De um polígono regular ABCDE... sabemos que o ângulo $A\hat{C}B$ mede 10°. Quantas diagonais desse polígono não passam pelo centro?

694. O ângulo $A\hat{D}C$ de um polígono regular ABCDEF... mede 30°. Determine a soma dos ângulos internos desse polígono.

695. As mediatrizes do lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um polígono regular ABCDEF... formam um ângulo, que contém B e C, de 20°. Quantas diagonais desse polígono passam pelo centro?

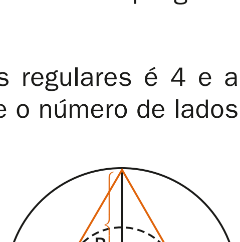
696. As bissetrizes dos ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ de um polígono regular ABCDEFG... são perpendiculares. Qual a soma dos ângulos internos desse polígono?

697. As mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ de um polígono regular ABCDE ... formam um ângulo, que contém B, C e D e excede o ângulo externo desse polígono em 20°. Quantas medidas, duas a duas diferentes, obtemos ao medir as diagonais desse polígono?

698. As retas que contêm os lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ de um polígono regular ABCDEFG... formam um ângulo, que contém C e D e é o dobro do ângulo externo do polígono. Quantas diagonais tem esse polígono?

699. A diferença entre o número de lados de dois polígonos regulares é 4 e a diferença entre os seus ângulos externos é 3°. Determine o número de lados desses polígonos.

700. Lembrando que no triângulo equilátero o ortocentro, o baricentro, o incentro (centro da circunferência inscrita) e o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) são coincidentes e que o baricentro divide a mediana em duas partes que medem $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ desta, sendo 6 m o lado do triângulo equilátero, determine:



a) a altura do triângulo;
b) o raio R da circunscrita;
c) o raio r da inscrita;
d) o apótema do triângulo.

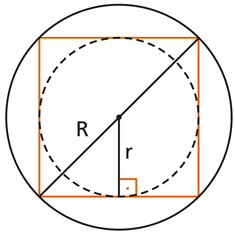
701. Lembrando que no quadrado a diagonal passa pelo centro, sendo 8 m o lado do quadrado, determine:

a) a diagonal;

b) o raio R da circunscrita;

c) o raio *r* da inscrita;

d) o apótema do quadrado.



702. Lembrando que no hexágono regular as diagonais maiores passam pelo centro e determinam nele 6 triângulos equiláteros, sendo 6 m o lado do hexágono, determine:

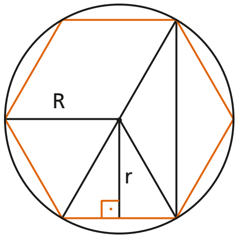
a) a diagonal maior;

b) o raio R da circunscrita;

c) o raio *r* da inscrita;

d) a diagonal menor;

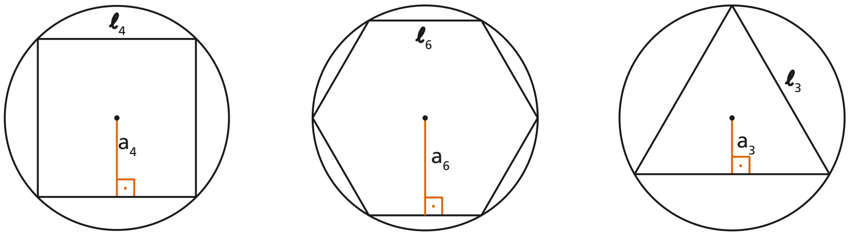
e) o apótema do hexágono.



219. Cálculo de lado e apótema dos polígonos regulares

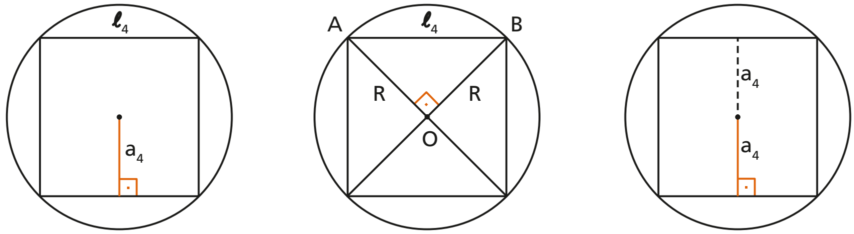
Indicaremos por ℓ_n a medida do lado do polígono regular de *n* lados e por a_n a medida do apótema do polígono regular de *n* lados.

Exemplo:



Problema 1. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado e o apótema do quadrado.

Na figura, dado o R, calcular o ℓ_4 e o a_4.

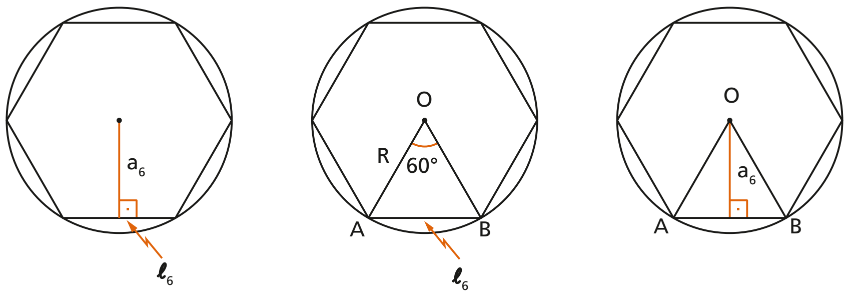


$$\triangle AOB \xrightarrow{\text{T.P.}} \ell_4^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow \boxed{\ell_4 = R\sqrt{2}}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\ell_4 \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

Problema 2. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado e o apótema do hexágono regular.

Na figura, dado o R, calcular o ℓ_6 e o a_6.



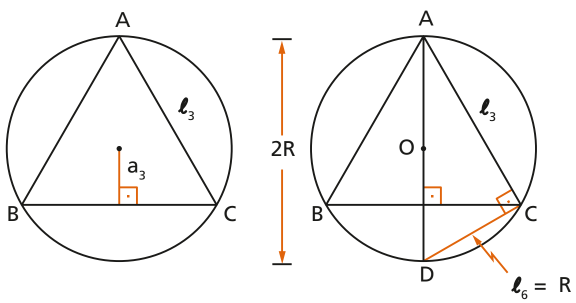
$$\left.\begin{array}{l} \text{No } \triangle AOB\text{, temos: } A\hat{O}B = \dfrac{360°}{6} = 60° \\ \overline{OA} \equiv \overline{OB} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O} = \hat{A} = \hat{B} = 60° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \triangle AOB \text{ é equilátero} \Rightarrow \boxed{\ell_6 = R}$$

a_6 é a altura do triângulo equilátero de lado R $\Rightarrow \boxed{a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}}$

Problema 3. Dado o raio do círculo, calcular o lado e o apótema do triângulo equilátero.

Na figura, dado R, calcule o ℓ_3 e o a_3.



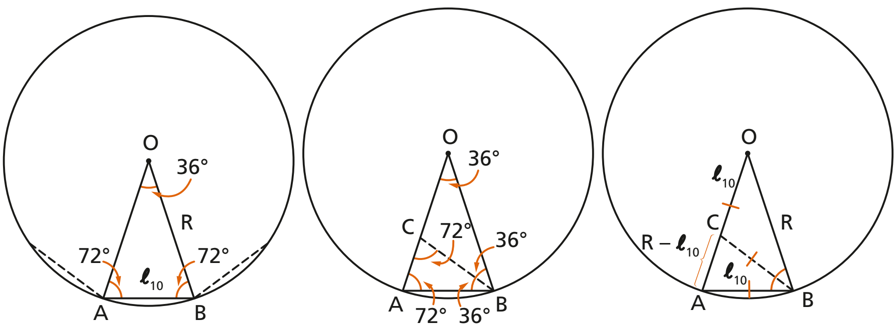
Note que, sendo $\overline{BC} = \ell_3$, então $\overline{CD} = \ell_6 = R$ e $\overline{AD}$ é diâmetro.

$\triangle ACD$, retângulo em C $\overset{\text{T.P.}}{\Longrightarrow}$ $\ell_3^2 = (2R)^2 - R^2 \Rightarrow \boxed{\ell_3 = R\sqrt{3}}$

O é o baricentro do $\triangle ABC \Rightarrow 2 \cdot a_3 = R \Rightarrow \boxed{a_3 = \dfrac{R}{2}}$

Problema 4. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado do decágono regular.

Na figura, dado o R, calcular o ℓ_{10}.



Sendo $\overline{AB} = \ell_{10}$, então $A\hat{O}B = \dfrac{1}{10} \cdot 360° = 36° \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 72°$.

Conduzindo $\overline{BC}$, bissetriz de $\hat{B}$, vem:

$\triangle BAC$ é isósceles $\left(\hat{A} = \hat{C} = 72°\right) \Rightarrow \overline{BC} = \ell_{10}$

$\triangle COB$ é isósceles $\left(\hat{O} = \hat{B} = 36°\right) \Rightarrow \overline{OC} = \overline{BC} = \ell_{10}$

Então: $\overline{OC} = \ell_{10}$ e $\overline{CA} = R - \ell_{10}$

Aplicando o teorema da bissetriz interna $\left(\overline{BC}\right.$ é bissetriz no $\left.\triangle AOB\right)$, vem:

$$\frac{\ell_{10}}{R} = \frac{R - \ell_{10}}{\ell_{10}} \Rightarrow \ell_{10}^2 = R(R - \ell_{10}) \Rightarrow \ell_{10}^2 + R\ell_{10} - R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

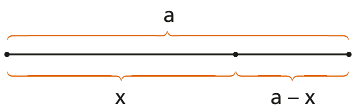
Desprezando a solução negativa que não convém, temos:

$$\boxed{\ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R}$$

220. Nota: segmento áureo

Definição

x é a medida do segmento áureo de um segmento de medida *a* se, e somente se,



$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}.$$

A razão $\frac{x}{a}$ é dita **áurea** e *x* é também a medida do segmento maior da secção áurea do segmento de medida *a*, ou apenas segmento áureo de *a*.

De $\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$, obtemos $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Resolvendo a equação, obtém-se $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a$.

Em vista da definição e da dedução do problema 4, em que se tem

$$\frac{\ell_{10}}{R} = \frac{R - \ell_{10}}{\ell_{10}},$$

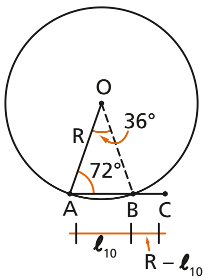
concluímos que o ℓ_{10} é o **segmento áureo do raio**.

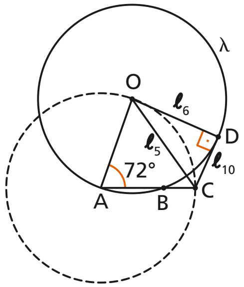
Problema 5. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado do pentágono regular.

Dado R, calcular o ℓ_5.

Inicialmente provaremos a seguinte propriedade:

O ℓ_5 é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o ℓ_{10} e o ℓ_6 (ℓ_5, ℓ_6, ℓ_{10} relativos a um mesmo raio R).





Seja $\overline{AB} = \ell_{10}$ e na reta $\overleftrightarrow{AB}$ um ponto C tal que $\overline{AC} = R$.

Considerando a circunferência de centro A e raio R, o ângulo central $\hat{A} = 72°$ faz corresponder $\overline{OC} = \ell_5$ $\left(\text{basta notar que } 72° = \dfrac{1}{5} \cdot 360°\right)$.

Conduzindo por C a tangente $\overline{CD}$ à circunferência λ de centro O e raio R, temos:

Potência de C em relação a λ: $(CD)^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ R}}{(CA)} \times \underset{\substack{\uparrow \\ R - \ell_{10}}}{(CB)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (CD)^2 = R(R - \ell_{10}) \xrightarrow[\text{anterior}]{\text{problema}} \overline{CD} = \ell_{10}$$

Considerando o triângulo ODC, retângulo em D, temos:

$\overline{OC} = \ell_5 = \text{hipotenusa}$, $\overline{CD} = \ell_{10} = \text{cateto}$ e $\overline{OD} = R = \ell_6 = \text{cateto}$

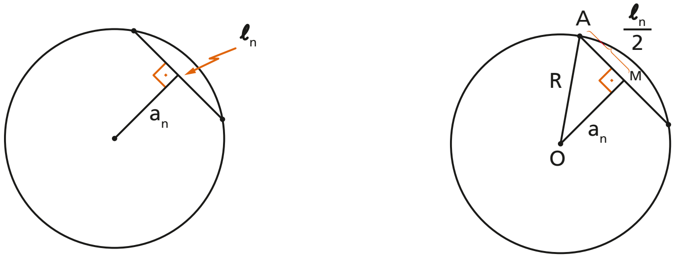
Cálculo do ℓ_5

Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$$\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2 \Rightarrow \ell_5^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_5^2 = \frac{R^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) \Rightarrow \boxed{\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Problema 6. Deduzir a fórmula geral do apótema. Isto é, dados R e ℓ_n, calcular a_n.



$$\triangle AMO \text{ retângulo em } M \Rightarrow a_n^2 = R^2 - \frac{\ell_n^2}{4} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$$

Exemplo:

Para calcular o a_{10} em função do raio R da circunferência circunscrita, basta substituir ℓ_n por ℓ_{10} $\left(\ell_{10} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R\right)$.

E, assim procedendo, obtemos $\boxed{a_{10} = \dfrac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

Analogamente, substituindo o ℓ_n por ℓ_5 $\left(\ell_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$ na expressão de a_n, obtemos:

$$\boxed{a_5 = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)}$$

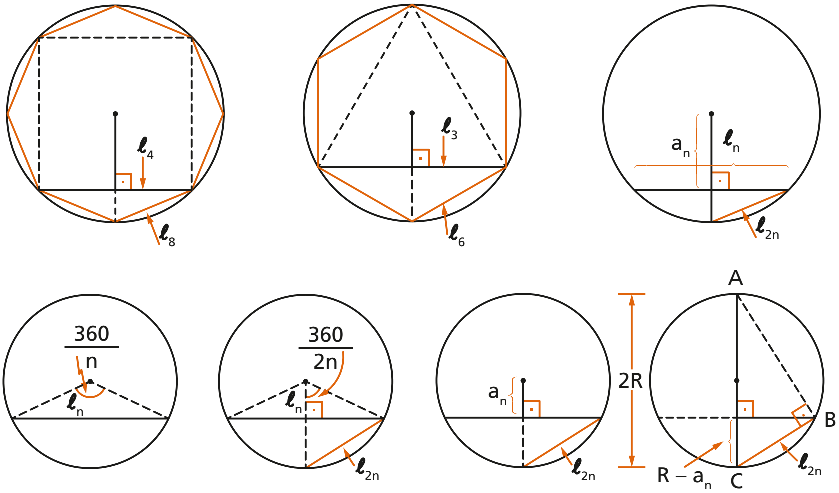
Problema 7. Deduzir uma expressão que dá o ℓ_{2n} em função de ℓ_n e de R (raio da circunferência circunscrita).

Usaremos o símbolo ℓ_{2n} para indicar o lado do polígono regular de 2n lados.

Se o ℓ_n é o ℓ_4, o ℓ_{2n} é o ℓ_8.

Se o ℓ_n é o ℓ_6, o ℓ_{2n} é o ℓ_{12}, e assim por diante.

Notemos que de um modo geral temos:



$\triangle ABC$, retângulo em B, relações métricas $\Rightarrow \ell_{2n}^2 = 2R(R - a_n)$

Substituindo a_n por $\dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$ (problema 6), vem:

$$\ell_{2n}^2 = 2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right) \Rightarrow \ell_{2n}^2 = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right)}}$$

Observação

A expressão do ℓ_{2n} nos indica que, sabendo o valor, por exemplo, do ℓ_6, pode-se obter o de ℓ_{12}; com o de ℓ_{12} em lugar do ℓ_n, obtém-se o de ℓ_{24}; com o de ℓ_{24} em lugar do ℓ_n , obtém-se o de ℓ_{48} e assim por diante.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios a seguir, em geral não é necessário usar as fórmulas deduzidas neste capítulo e sim calcular os elementos pedidos com base num esboço de figura, diagonal de quadrado e altura de triângulo equilátero.

703. Determine o raio da circunferência circunscrita ao polígono regular de 12 m de lado nos casos:
a) quadrado b) hexágono c) triângulo

704. Determine o lado do polígono regular inscrito em uma circunferência de raio 6 m, nos casos:
a) quadrado b) hexágono c) triângulo

705. Determine o apótema (ou raio da circunferência inscrita) do polígono regular de lado 6 m, nos casos:
a) quadrado b) hexágono c) triângulo

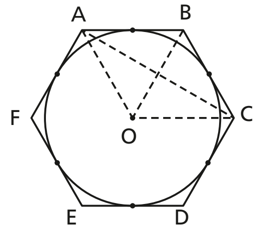
706. Determine o lado do polígono regular de 6 m de apótema nos casos:
a) quadrado b) hexágono c) triângulo

707. Determine o raio da circunferência inscrita no polígono regular, sabendo que o raio da circunscrita é 12 m, nos casos:
a) quadrado b) hexágono c) triângulo

708. Determine o raio da circunferência circunscrita ao polígono regular, sabendo que o raio da circunferência inscrita é 6 m, nos casos:
a) quadrado b) hexágono c) triângulo

709. Dado um triângulo equilátero de 6 cm de altura, calcule:
a) o raio do círculo inscrito;
b) o lado;
c) o apótema;
d) o raio do círculo circunscrito.

710. No hexágono regular ABCDEF da figura, o lado mede 5 cm. Calcule:
a) o apótema;
b) o raio do círculo inscrito;
c) a diagonal $\overline{AC}$.



711. Determine a razão entre o perímetro do quadrado inscrito em um círculo de raio R e o perímetro do quadrado circunscrito a esse mesmo círculo.

712. Determine a relação entre os raios de dois círculos, sabendo que no primeiro está inscrito um triângulo equilátero e no segundo está inscrito um quadrado, e que os perímetros do triângulo e do quadrado são iguais.

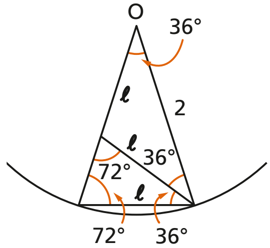
713. Determine a razão entre o apótema do quadrado e o apótema de um hexágono regular, inscritos em um círculo de raio R.

714. Dado o raio R de uma circunferência, calcule o lado e o apótema do octógono regular inscrito.

715. Qual é a razão entre o perímetro de um triângulo equilátero com altura igual ao raio de um círculo para o perímetro do triângulo equilátero inscrito nesse círculo?

716. Calcule a medida do segmento $\overline{AV}$ do triângulo isósceles BCA, circunscrito a uma circunferência de raio unitário, sabendo que o diâmetro da circunferência é igual ao segmento maior da secção áurea da altura do triângulo BCA, sendo V o ponto médio da altura $\overline{AM}$ relativa à base.

717. Se o raio de uma circunferência mede 2 m, determine o lado ℓ do decágono regular inscrito nela. (Use os triângulos isósceles da figura e o teorema da bissetriz interna.)



718. Deduza a fórmula que dá o lado do decágono regular inscrito em um círculo de raio R.

719. Usando o resultado do problema anterior, determine sen 18°.

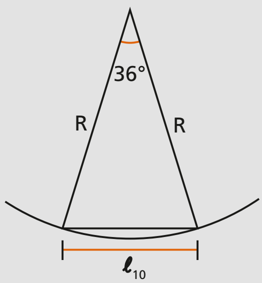
720. Sabendo que o lado do pentágono regular inscrito em um círculo é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são os lados do hexágono regular e do decágono regular inscritos no mesmo círculo, determine o lado do pentágono regular inscrito em um círculo de raio R.

721. Usando o resultado do problema anterior, determine sen 36°.

722. Determine cos 36°.

Solução

Considere um decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R. Note que o ângulo central ao qual está oposto o ℓ_{10} mede 36°.
Aplicando a lei dos cossenos, temos:



$$\ell_{10}^2 = R^2 + R^2 - 2RR\cos 36°$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}R\right)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 36°$$

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{4}R^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 36°$$

$$6 - 2\sqrt{5} = 8 - 8\cos 36°$$

$$4\cos 36° = \sqrt{5} + 1$$

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

723. Sabendo que sen $(90° - \alpha) = \cos \alpha$, determine:

a) cos 72° b) cos 54° c) sen 54°

724. Determine:

a) sen 72° b) cos 18°

725. Usando a lei dos cossenos, determine o lado do octógono regular inscrito em um círculo de raio R.

726. Use a resposta do problema anterior e determine o raio do círculo circunscrito a um octógono regular de lado ℓ.

727. Determine as medidas das diagonais de um octógono regular de lado ℓ.

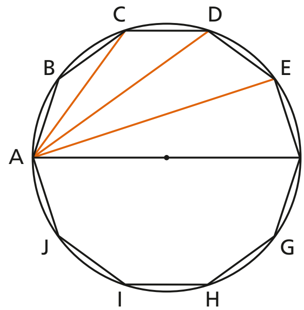
728. Na figura, temos um decágono regular de lado ℓ. Determine:

a) o raio da circunferência circunscrita;

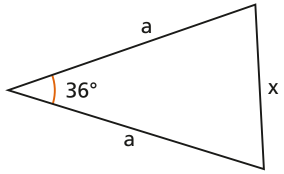
b) a diagonal $\overline{AE}$;

c) a diagonal $\overline{AC}$;

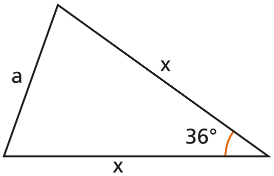
d) a diagonal $\overline{AD}$.



729. No triângulo da figura, determine x em função de a.



730. No triângulo da figura, determine x em função de a.



731. Determine a diagonal de um pentágono regular de lado ℓ.

732. Na figura temos um pentágono regular de lado ℓ.

a) Mostre que o pentágono sombreado é regular.

b) Determine o lado do pentágono sombreado.