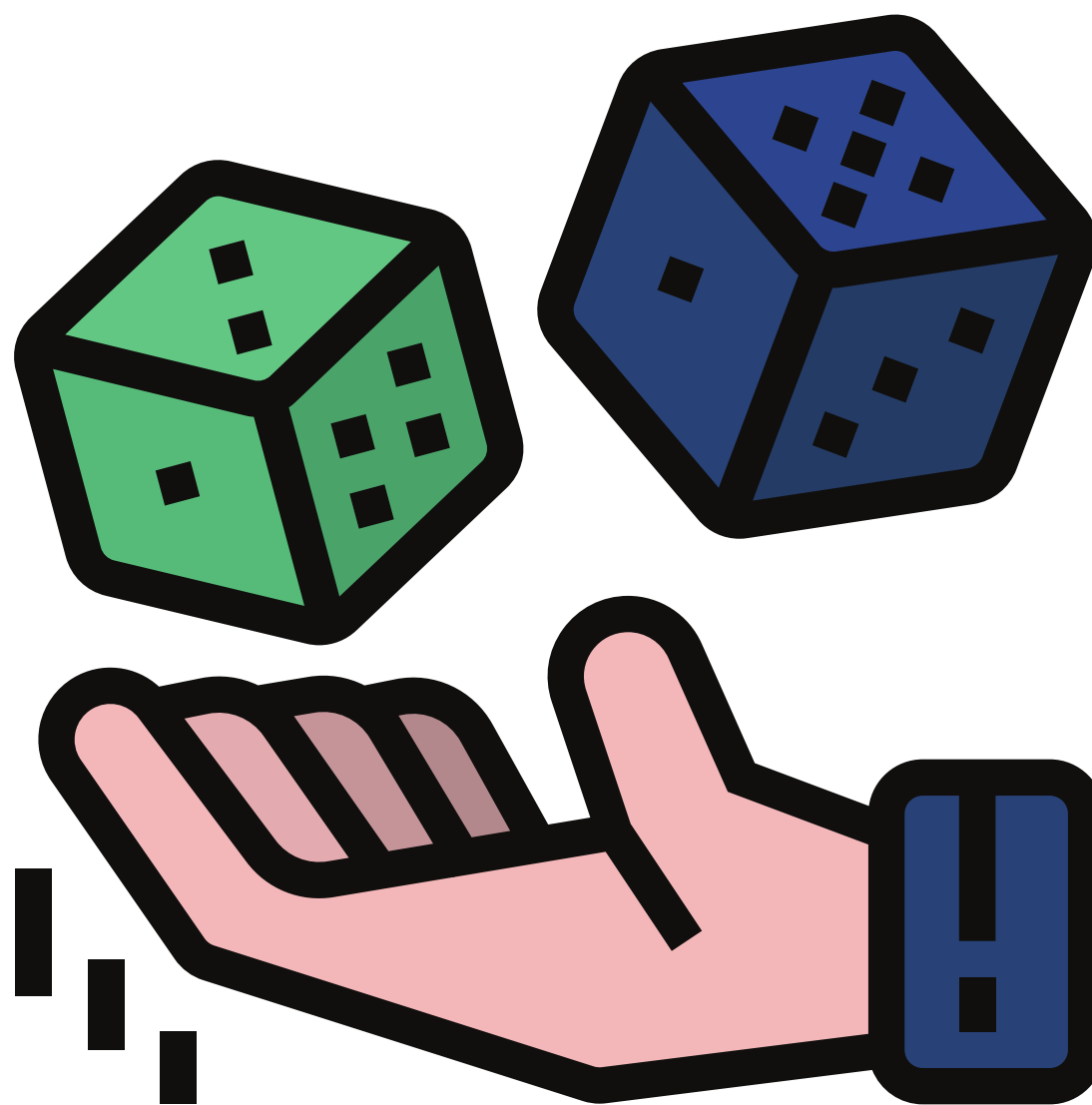


2º Ano



JORGE OLIVEIRA

Copyright © 2021 de Jorge Oliveira

Todos os direitos reservados.

Este e-book ou qualquer parte dele não pode ser reproduzido ou usado sem autorização expressa, por escrito, do autor ou editor, exceto pelo uso de citações em uma resenha ou trabalho acadêmico.

Sobre o Autor.

Professor de matemática, atuando em diversos níveis educacionais, além de cursos preparatórios diversos. Especialista em modelagem matemática.

<https://linktr.ee/SuperAulas>



Sumário

Análise combinatória

Permutação

Arranjo

Combinação

Permutação com repetição

Probabilidade

Espaço amostral e evento

Probabilidade da união de dois eventos

Probabilidade da interseção de dois eventos

Geometria Espacial

Primas,

Pirâmide,

Corpos redondo, cilindro, cone e esfera.

Matrizes

Representação de uma matriz,
Matrizes especiais,
Matriz transposta,
Igual de matrizes,
Adição de matrizes,
Matriz transpostas,
Subtração de matrizes,
Multiplicação de um número real,
Multiplicação de matrizes,
Matriz identidade.

Sistemas Lineares

Equações Lineares,
Sistemas Lineares 2×2 ,
Sistema Linear $m \times n$,
Determinantes.

Circunferências trigonométricas

Arcos e Ângulos

Circunferência trigonométrica.

Razões trigonométricas na circunferência.

Seno: valores notáveis,

Cosseno: Valores notáveis.

Relações seno e cosseno.

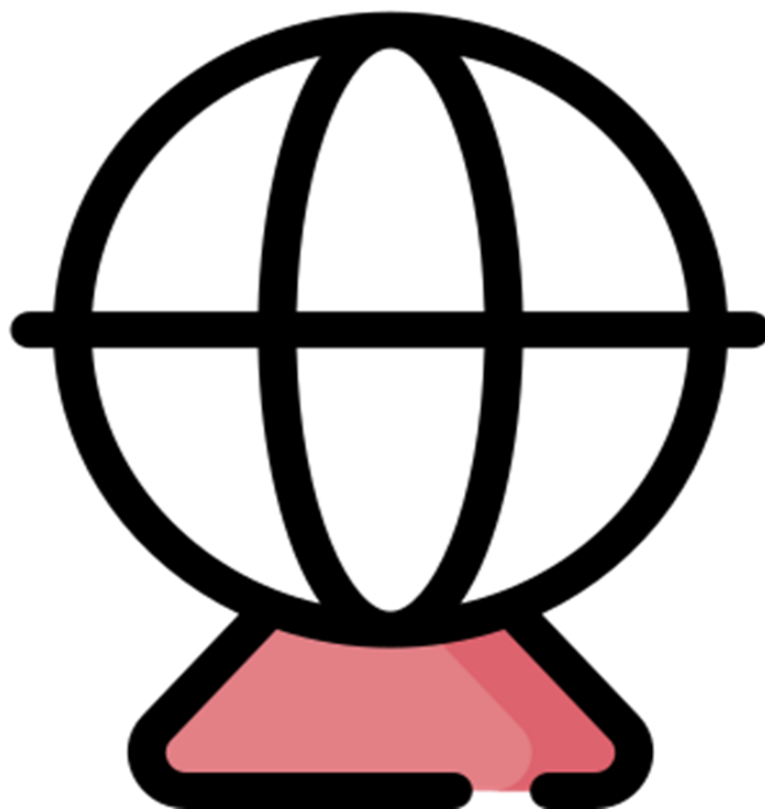
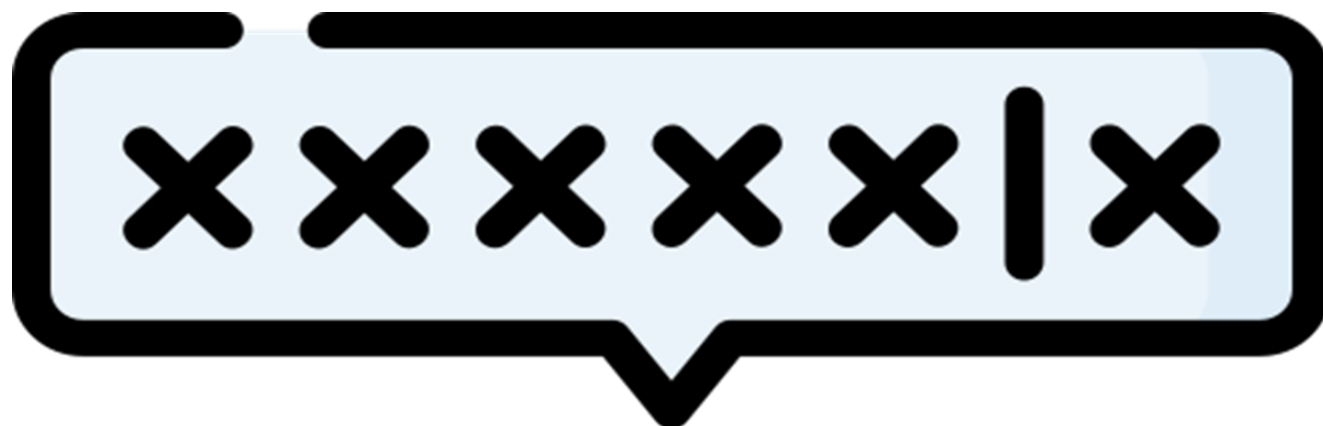
Tangente: valores notáveis.

Trigonometria em triângulos quaisquer.

Lei dos senos.

Lei dos cossenos.

Combinatória



O que é?

Contagem é uma técnica para se calcular de quantas maneiras uma decisão pode ser tomada.

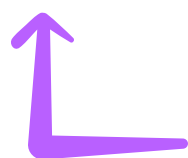
P.F.C

Dados os conjuntos A (m elementos) e B (n elementos), podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados entre A e B.

Exemplo

Se dispomos de 2 meias azuis e 3 vermelhas, quanto pares diferentes podem ser formados?

$$\left. \begin{array}{l} n(A) = 2 \\ n(B) = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{possibilidades} \\ 2 \cdot 3 = 6 \text{ pares} \end{array}$$



Contagem

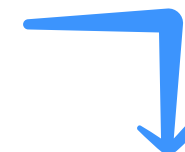
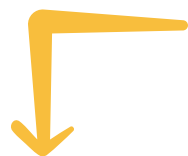


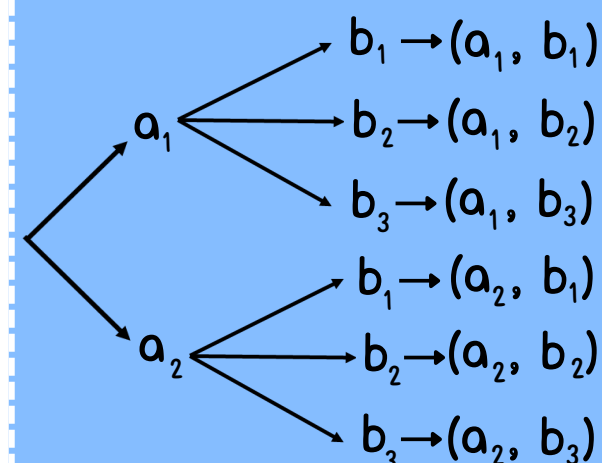
Diagrama árvore

O diagrama de árvore ou árvore de possibilidades é útil para analisar a estrutura de um problema e visualizar o número de combinações.

Exemplo

Dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, podem ser formados $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) , em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$. Um diagrama de árvore pode ser representado ao lado.

O Diagrama



Definição

Em cálculos das quantidades de arranjos, permutações, entre outras, vamos utilizar o símbolo fatorial (!). Seja $m \in \mathbb{N}$, define-se fatorial de m ($m!$, $m \geq 2$) por meio da relação:

$$m! = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemplos

Resolva as seguintes expressões:

a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

b) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d) $\frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

Importante

$$(m - 1)! = \frac{m!}{m}$$

Importante

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

FATORIAL

Atenção

a) $m! + n! \neq (m + n)!$

$$3! + 2! \neq 6!$$

b) $m \cdot (n!) \neq (m \cdot n)!$

$$3 \cdot (2!) \neq (3 \cdot 2)!$$

c) $m! - n! \neq (m - n)!$

$$3! - 2! \neq 1!$$

Resolva

Calcule n em $(n - 6)! = 720$.

$$720 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$$

$$(n - 6)! = 6!$$

é imediato que $n - 6 = 6$,

$$n - 6 = 6$$

$$n = 12 \checkmark$$

ARRANJO

Seja $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, arranjo é cada sequência de n elementos distintos pertencentes a M .

$$A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$A_{m,n}$ é o número de arranjos dos m elementos tomados n a n .

EXEMPLO

Num baralho de 52 cartas, 3 delas são retiradas, sem reposição. Quantas sequências poderemos obter?

$$A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} \Rightarrow A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!}$$

$$A_{52,3} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{49!} = 132600 \text{ sequências}$$

PERMUTAÇÃO

Seja $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, chamamos de permutação sem repetição dos m elementos, ao arranjo em que $m = n$, ou seja:

$$P_m = A_{m,m} = \frac{m!}{(m-m)!} = m!$$

EXEMPLO

De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

Cada forma de ficar em fila indiana é uma permutação das 5 pessoas, portanto;

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \checkmark$$

COMBINATÓRIA

Se o problema perguntar sobre:

Misturar ; Reorganizar

Permutação

simples

circular

c/ repetição

$$P_n = n! \quad P_{\text{circ}} = (n - 1)! \quad P_n^{k_1, k_2, \dots} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \dots}$$

Escolha

Ordem importa

Ordem não importa

Arranjo

Combinação

$$A_{m,n} = \frac{m!}{(m - n)!}$$

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n! (m - n)!}$$

PROBABILIDADE

O que é?

Probabilidade é o estudo das chances de ocorrência de um evento em um experimento aleatório.

Sejam E um espaço amostral equiprovável, e A um evento de E , a probabilidade $P(A)$ do evento A ocorrer é:

Espaço amostral (Ω)

É um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

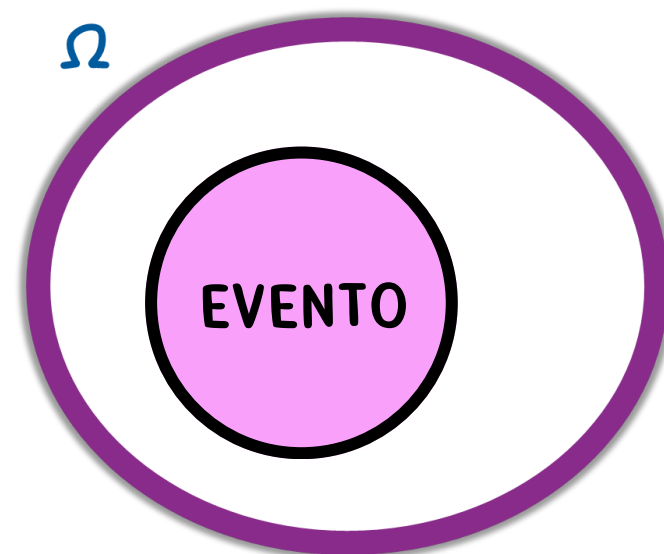
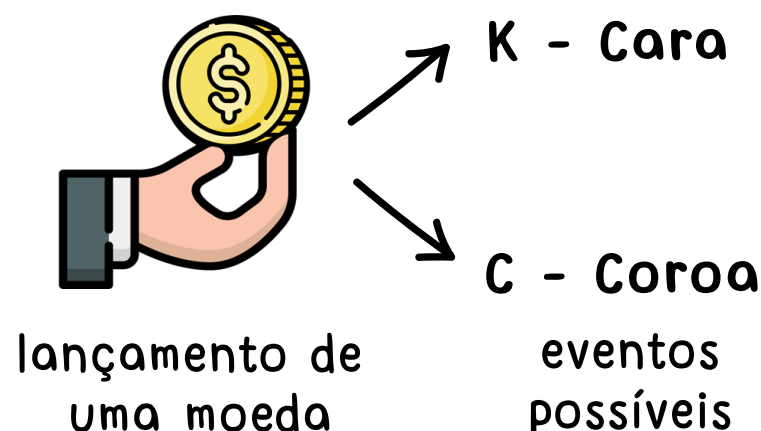
Evento

Considerando um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω , evento é todo subconjunto de Ω . Ao se Lançar uma moeda temos 2 eventos possíveis, $\{K, C\}$.

Cálculo

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de E .



PROBABILIDADES

Teoremas

Se A , B são eventos de um espaço amostral Ω , podemos escrever:

(1) “A probabilidade do evento certo é 1.”

(2) “Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$ ”.

(3) “Se A é um evento de Ω , então $0 \leq P(A) \leq 1$.”

(4) Se A e B são eventos de Ω , então:

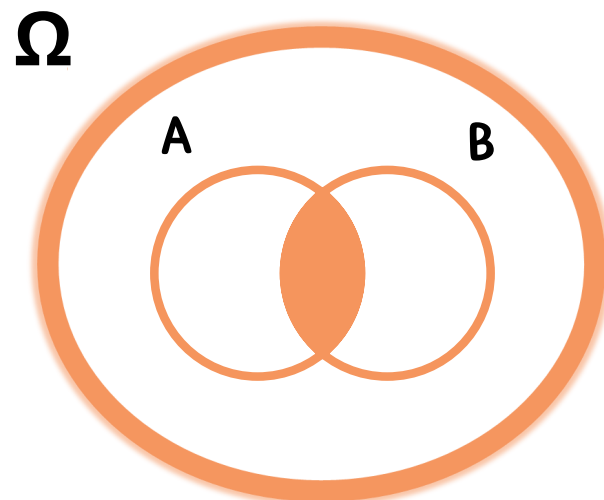
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(5) se A e B são mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$), então

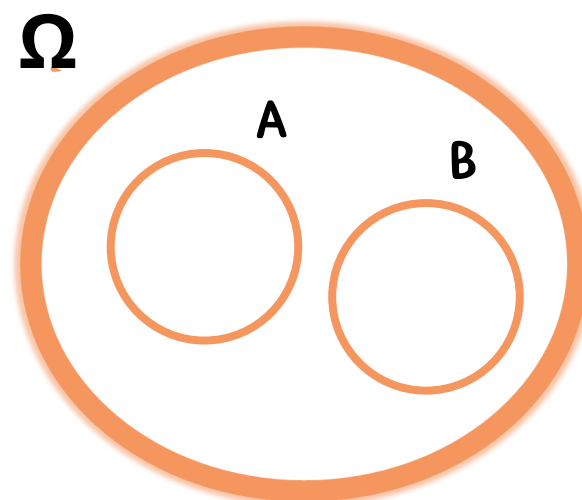
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Condicional

$P(A|B)$ é a probabilidade condicional do evento A , uma vez que B tenha ocorrido. Neste caso a probabilidade de A muda após o evento B ter acontecido.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

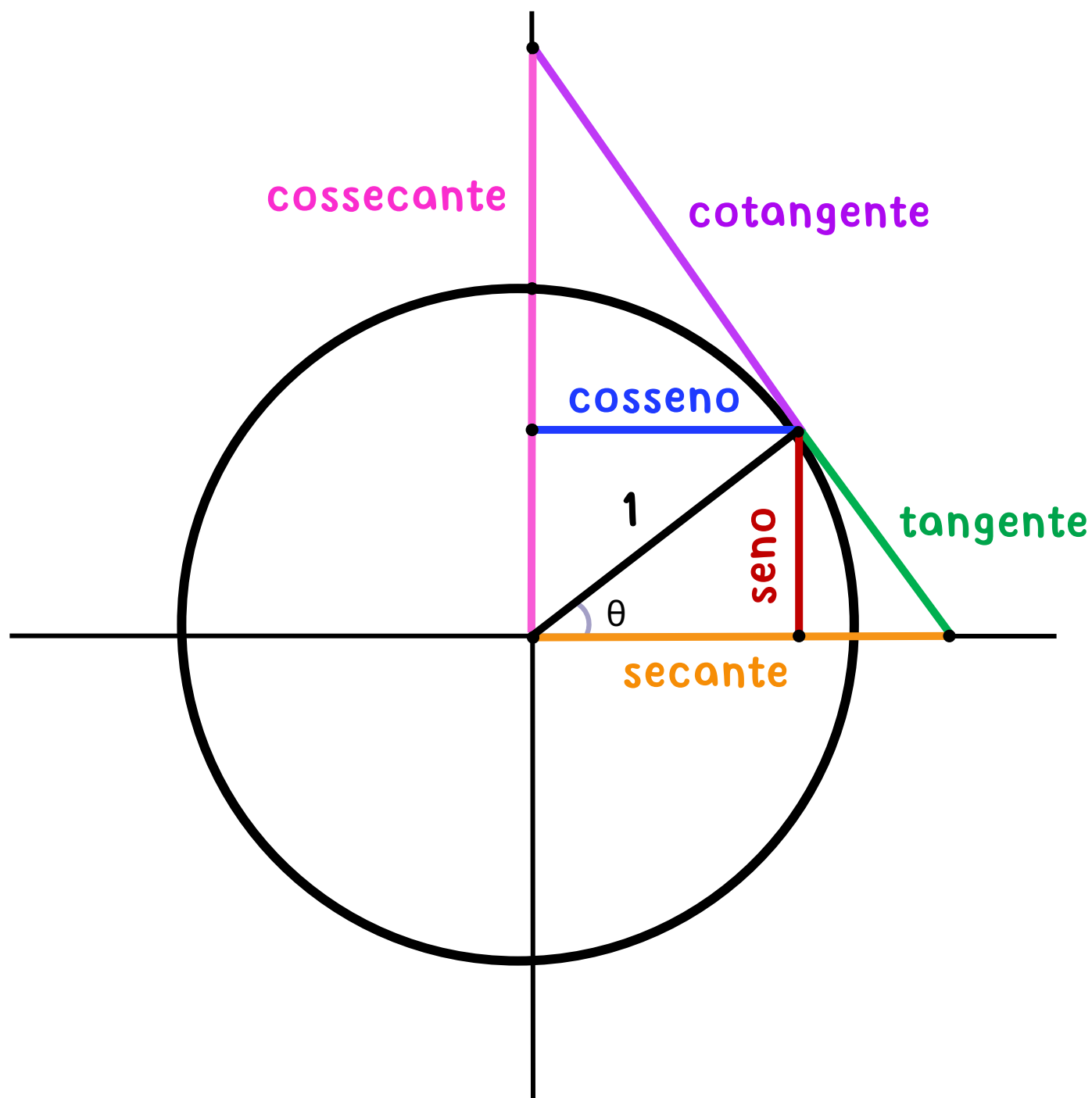


$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

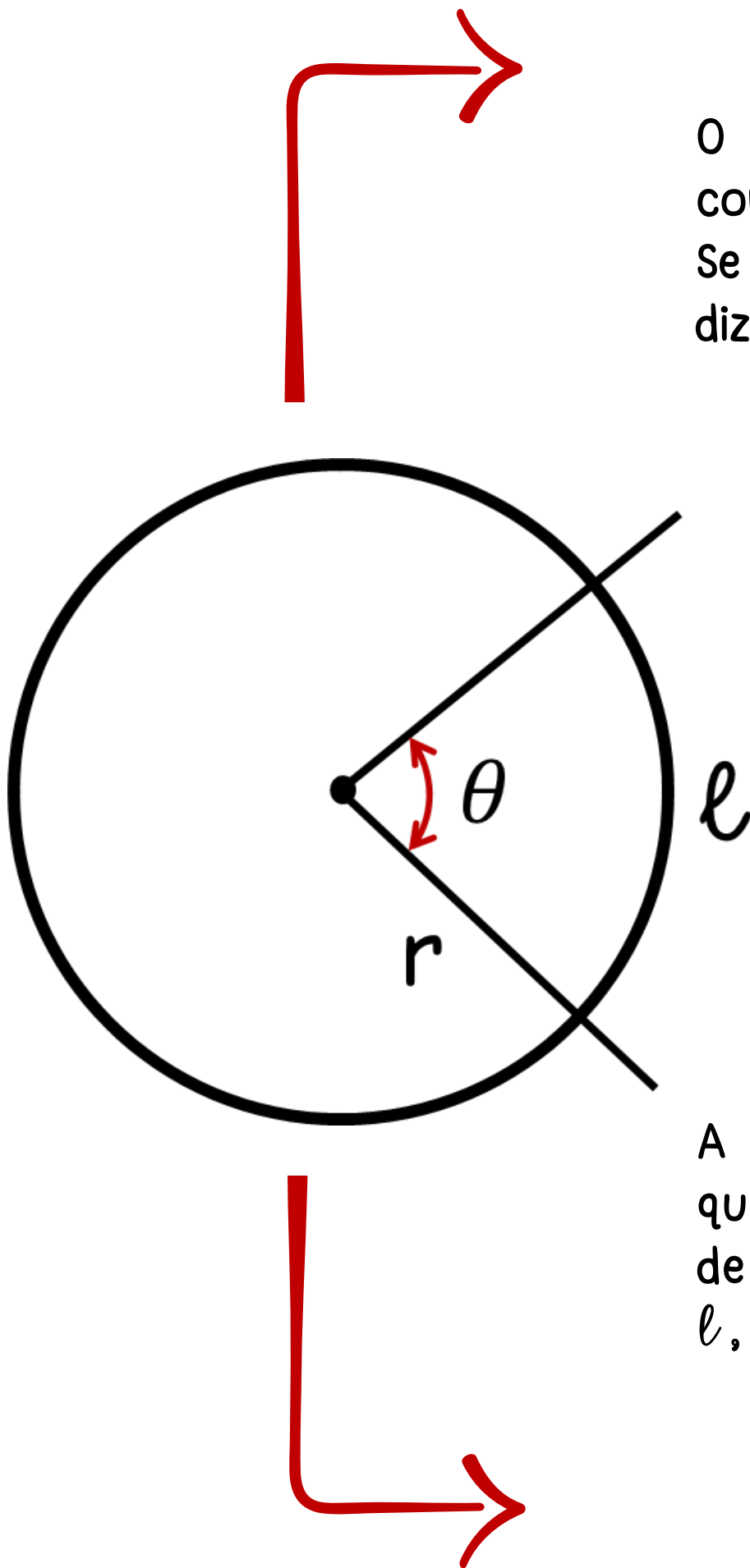
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) > 0$$

Trigonometria



Radianos



Definição

O radiano é a razão entre o comprimento de um arco e seu raio. Se o arco tem medida igual ao raio, dizemos que o ângulo mede 1 rad.

$$\text{se } \ell = r \Rightarrow \theta = 1 \text{ rad.}$$

Para uma volta temos:

$$\theta = 2\pi r / r = 2\pi \text{ rad}$$

$$\pi \text{ rad} \leftrightarrow 180^\circ$$

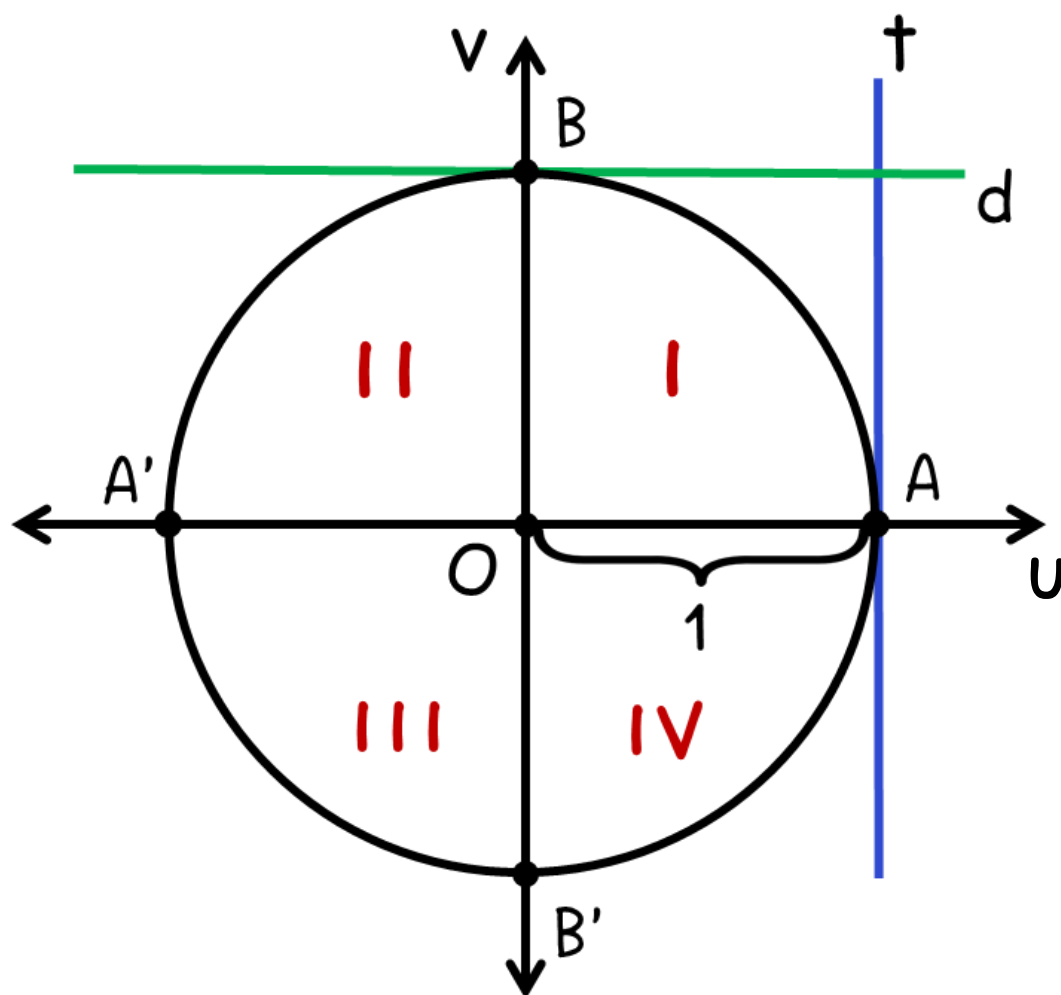
Cálculo

A medida de um ângulo central θ , que determina na circunferência de raio r um arco de comprimento ℓ , é dado em radianos por:

$$\theta = \frac{\ell}{r}$$

O que é?

É toda circunferência orientada de raio $r = 1$, de centro em $(0, 0)$.



Eixos

- (1) Eixo dos cossenos (u)
 - direção: OA
 - sentido positivo: $0 \rightarrow A$
- (2) Eixo dos senos (v)
 - direção: perpendicular a u , passando por O
 - sentido positivo: $0 \rightarrow B$
- (3) Eixo das tangentes (t)
 - direção: paralelo a v , passando por A
 - sentido positivo: o mesmo de v
- (4) Eixo das cotangentes (d)
 - direção: paralelo a u por B
 - sentido positivo: o mesmo de u

Importante

(1) Para todo ponto (x, y) pertencente a circunferência trigonométrica, temos

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1$$

(2) Os eixos u e v dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes chamadas quadrantes (I, II, III e IV).

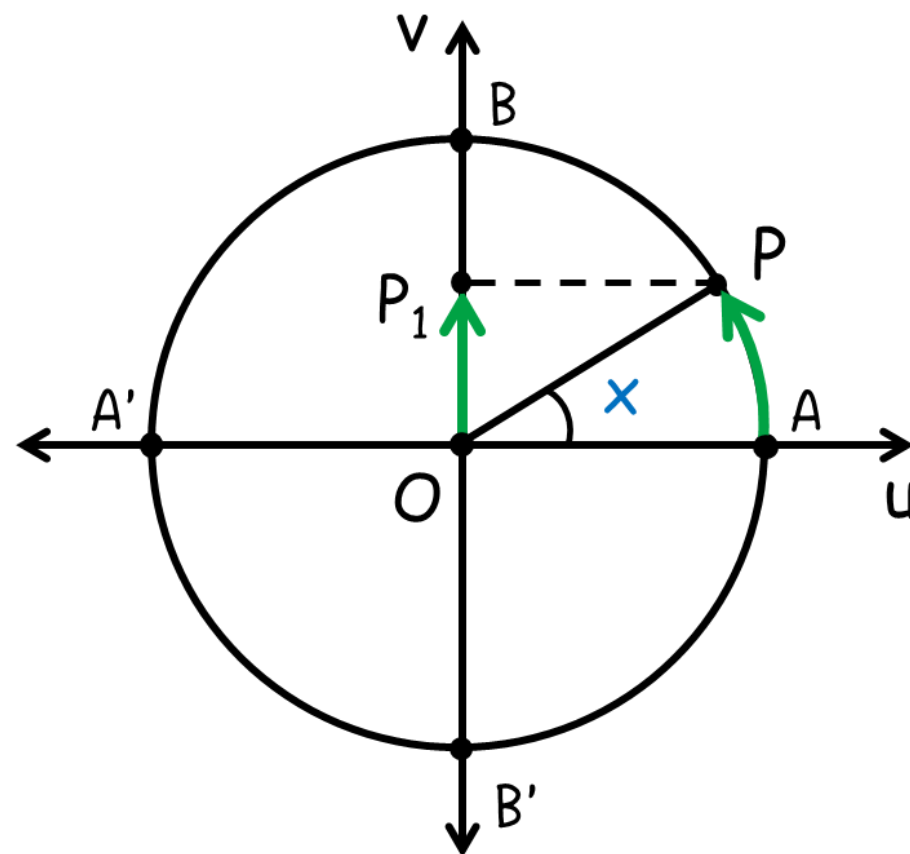
O seno de um ângulo x ($\text{sen } x$) é dado pela ordenada OP do ponto P .

O seno é máximo em $\pi/2$

$$\text{sen}(\pi/2) = 1$$

O seno é mínimo em $3\pi/2$

$$\text{sen}(3\pi/2) = -1$$

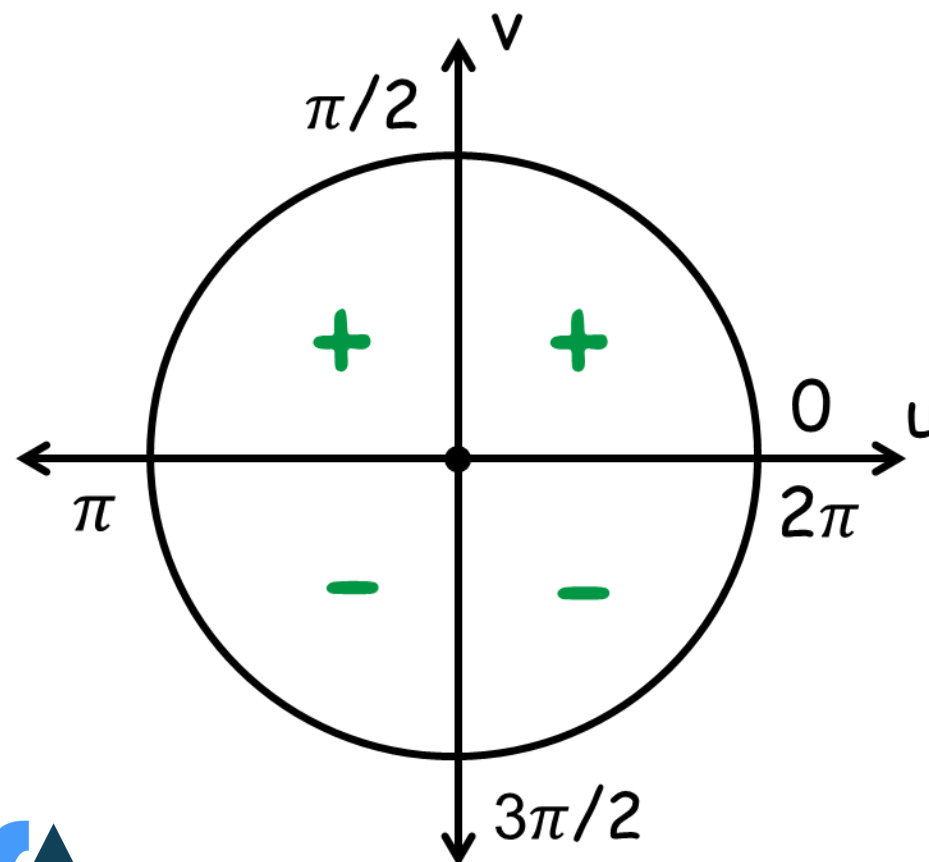


$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$$

Seno

Se x é do 1º ou do 2º quadrante, então $\text{sen } x$ é positivo.

Se x é do 3º ou do 4º quadrante, então $\text{sen } x$ é negativo.



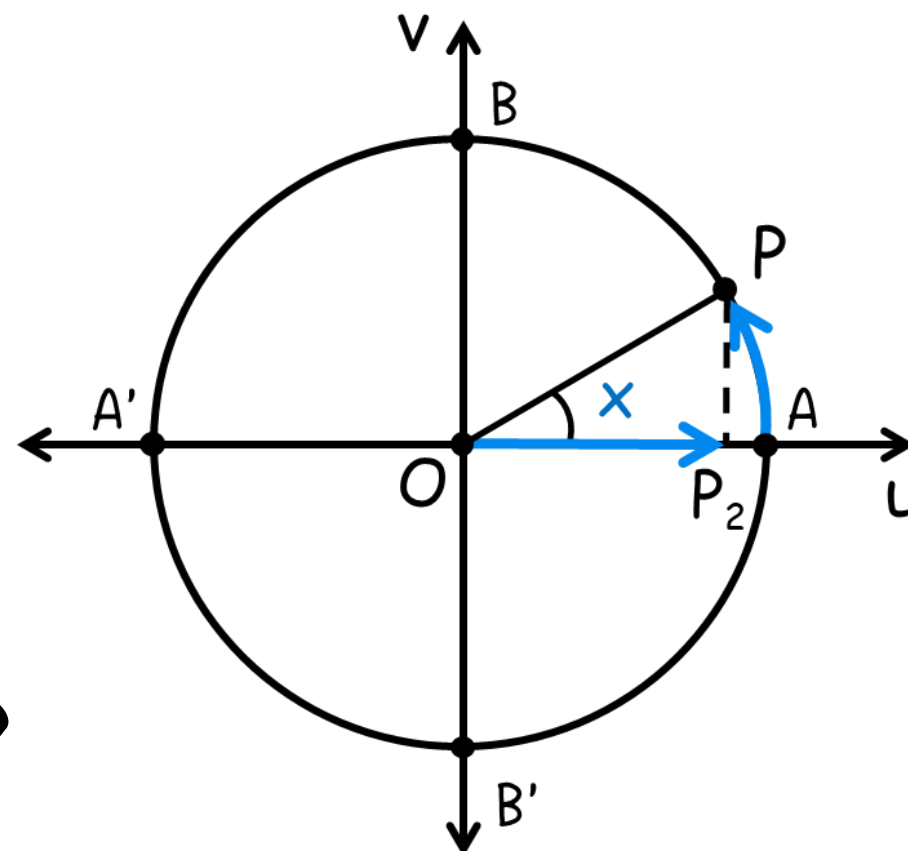
O cosseno de um ângulo x ($\cos x$) é dado pela ordenada OP_2 do ponto P .

O cosseno é máximo em 0 ou 2π

$$\cos 0 = \cos 2\pi = 1$$

O cosseno é mínimo em π

$$\cos \pi = -1$$

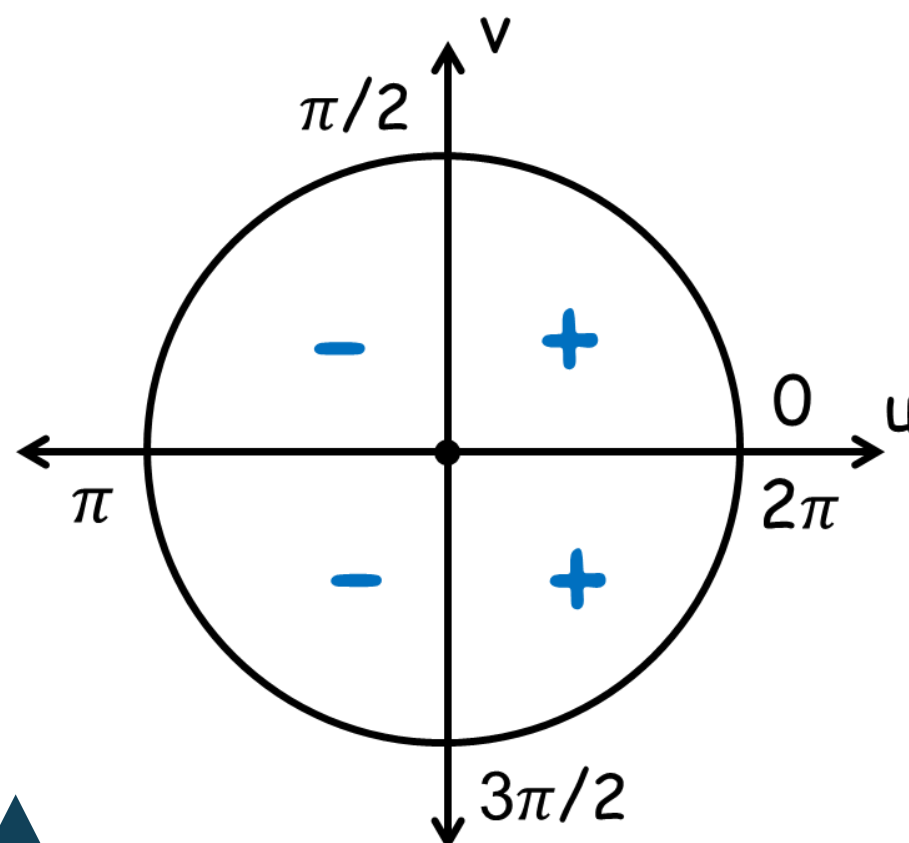


Cosseno

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Se x é do 1º ou do 4º quadrante, então $\cos x$ é positivo.

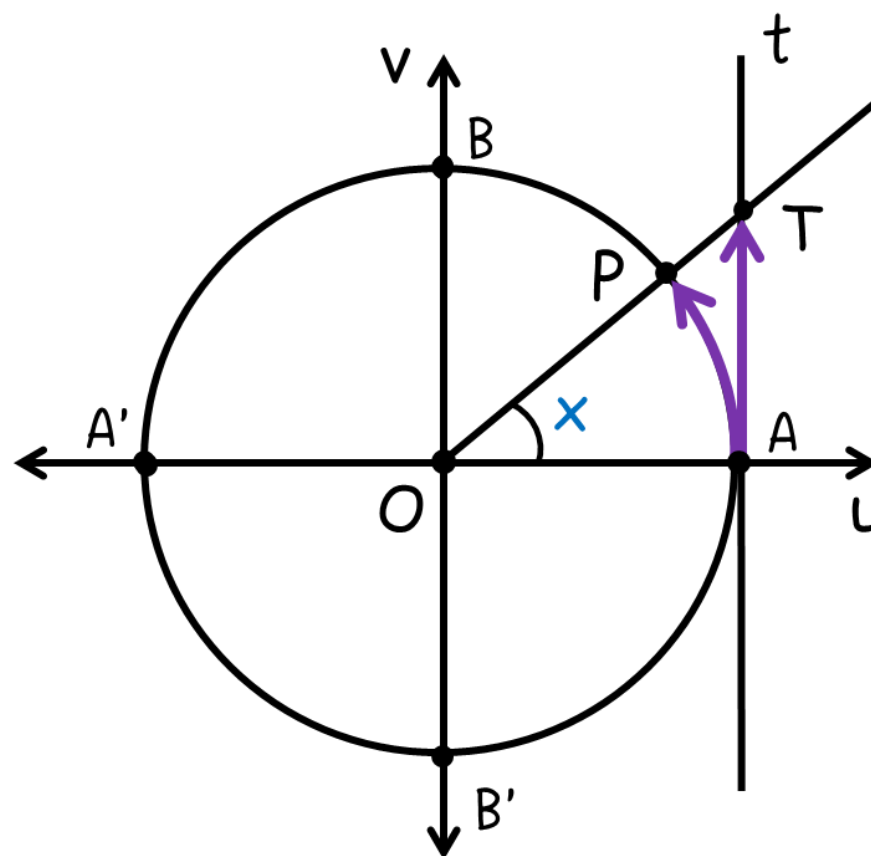
Se x é do 2º ou do 3º quadrante, então $\cos x$ é negativo.



A tangente de um ângulo x ($\text{tg} x$) é dada pela medida AT .

A $\text{tg} x$ pode assumir qualquer valor real.

Para $x = \pi/2$ ou $x = 3\pi/2$, a tangente não está definida.

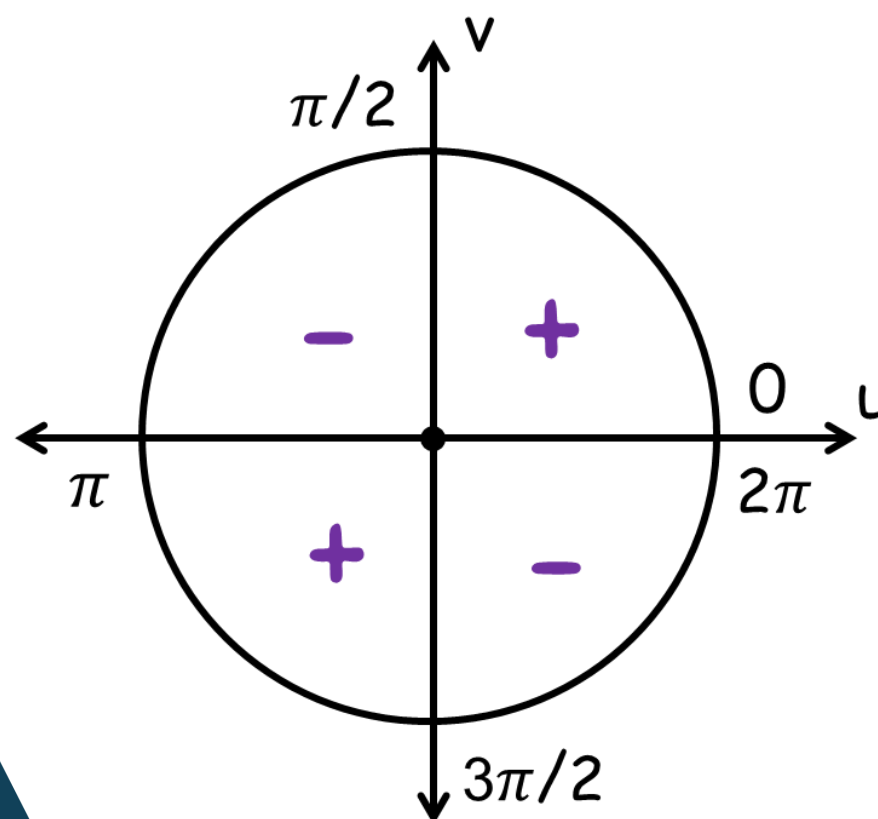


Tangente

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

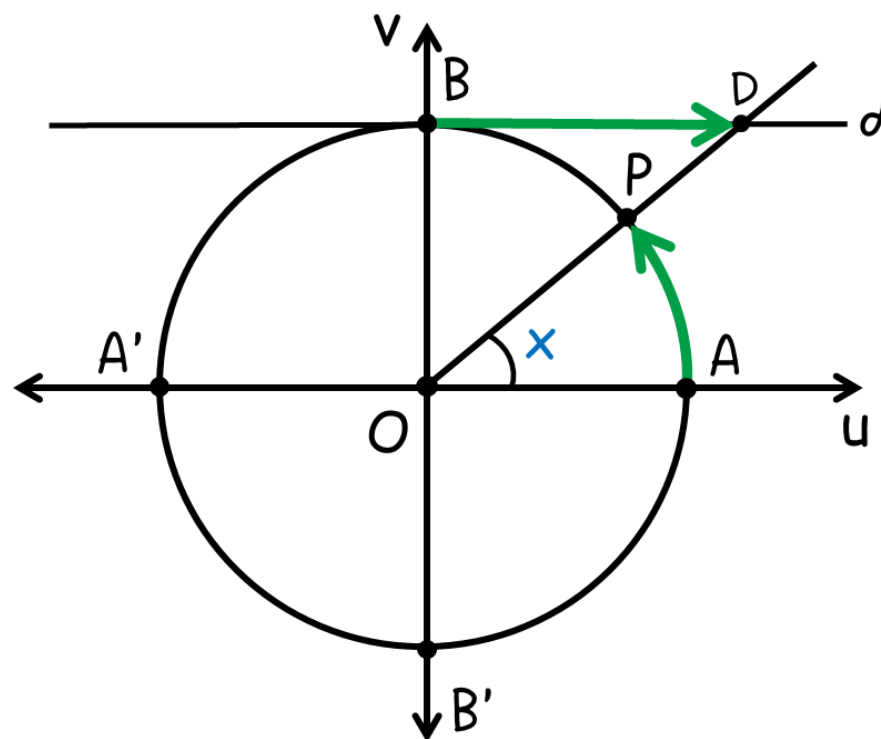
Se x é do 1º ou do 3º quadrante, então $\text{tg} x$ é positiva.

Se x é do 2º ou do 4º quadrante, então $\text{tg} x$ é negativa.



A cotangente de um ângulo x ($\cotg x$) é dada pela medida BD .

Se $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, a cotangente não está definida.

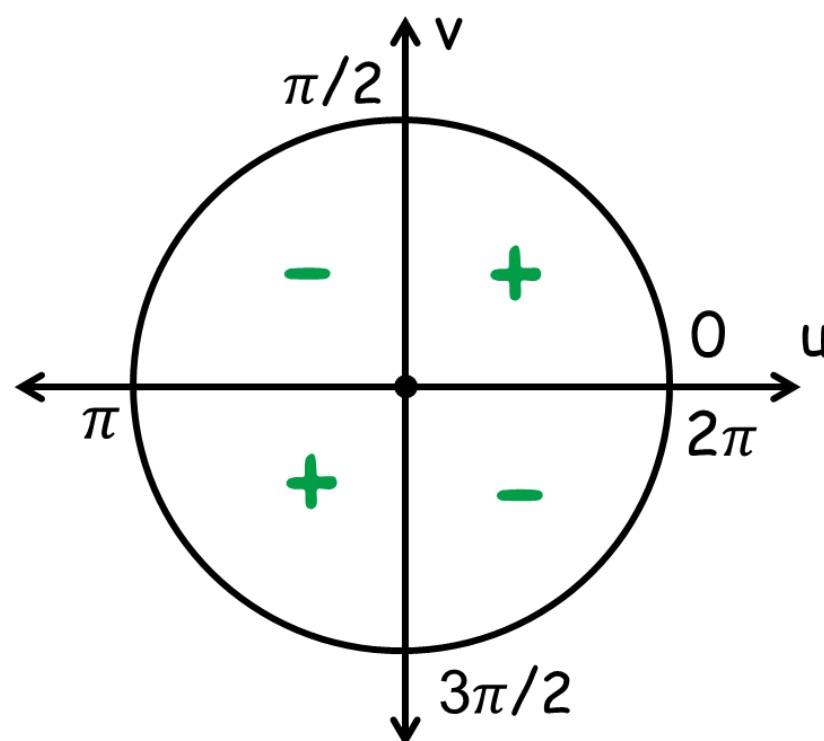


Cotangente

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sen x}$$

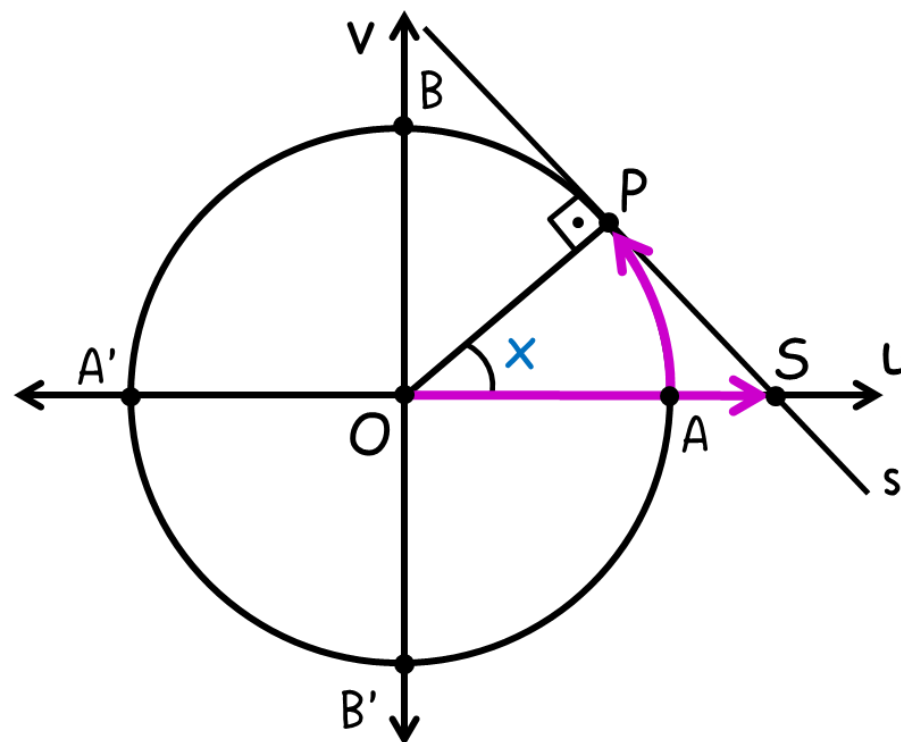
Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\cotg x$ é positiva.

Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\cotg x$ é negativa.



A secante de um ângulo x ($\sec x$) é dada pela medida OS.

Se $x \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, a secante não está definida.

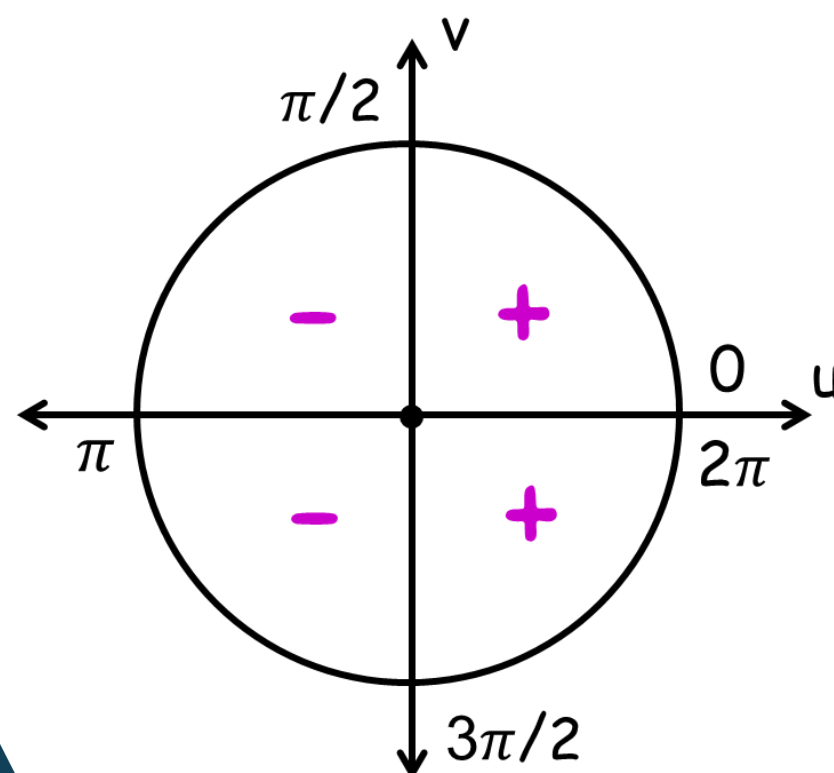


Secante

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

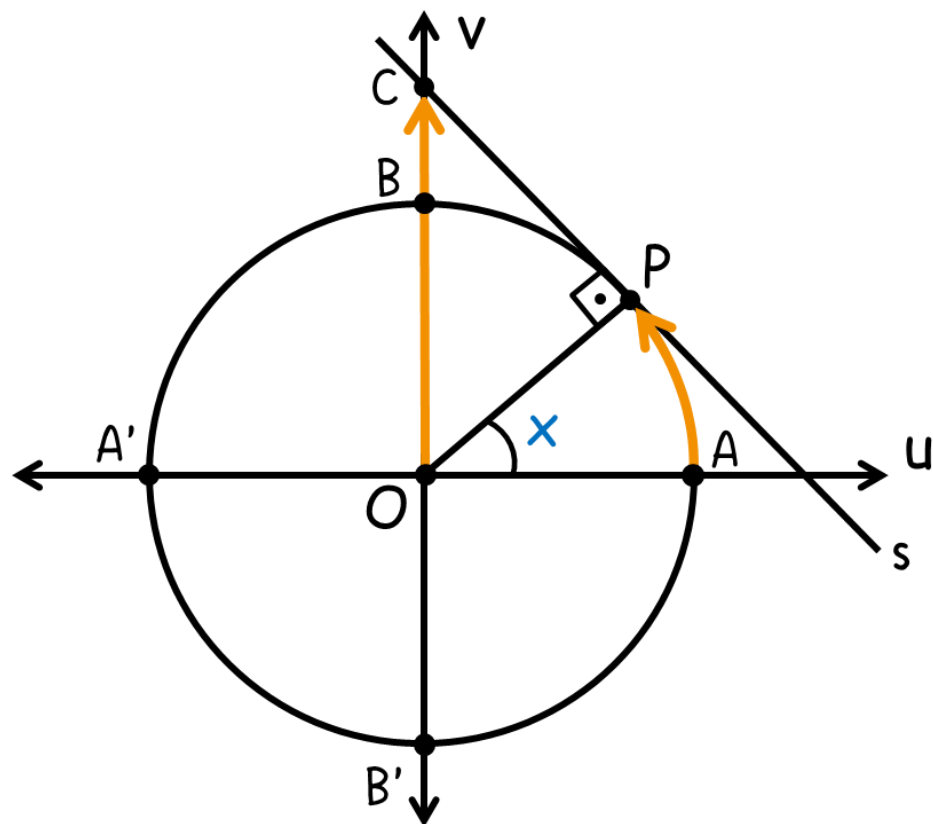
Se x é do 1º ou 4º quadrante, então $\sec x$ é positiva.

Se x é do 2º ou 3º quadrante, então $\sec x$ é negativa.



A secante de um ângulo x ($\sec x$) é dada pela medida OS.

Se $x \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, a secante não está definida.

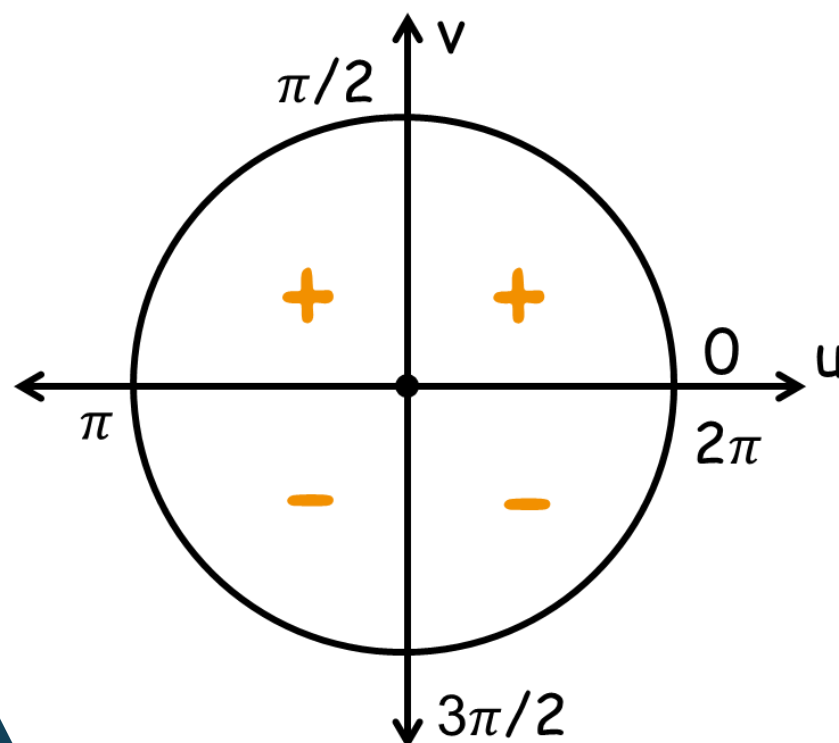


Cossecante

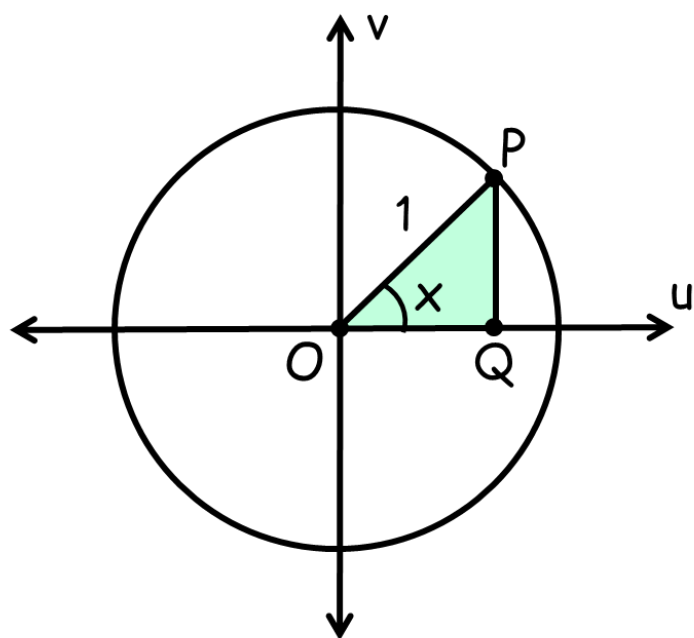
$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Se x é do 1º ou 2º quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é positiva.

Se x é do 3º ou 4º quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é negativa.



Relação I



$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

Demonstração

Para $x \in \mathbb{R}$ temos que:

$$(\text{PQ})^2 + (\text{OQ})^2 = (\text{OP})^2$$

Sabemos que:

$$\text{OP} = R = 1$$

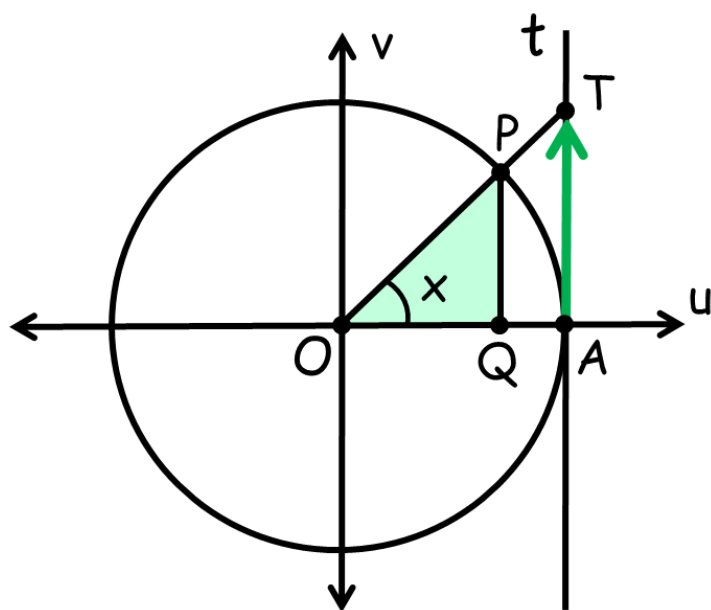
$$\text{OQ} = \text{cos } x$$

$$\text{PQ} = \text{sen } x$$

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

*Relações
Fundamentais*

Relação II



$$\text{tg } x = \text{sen } x / \text{cos } x$$

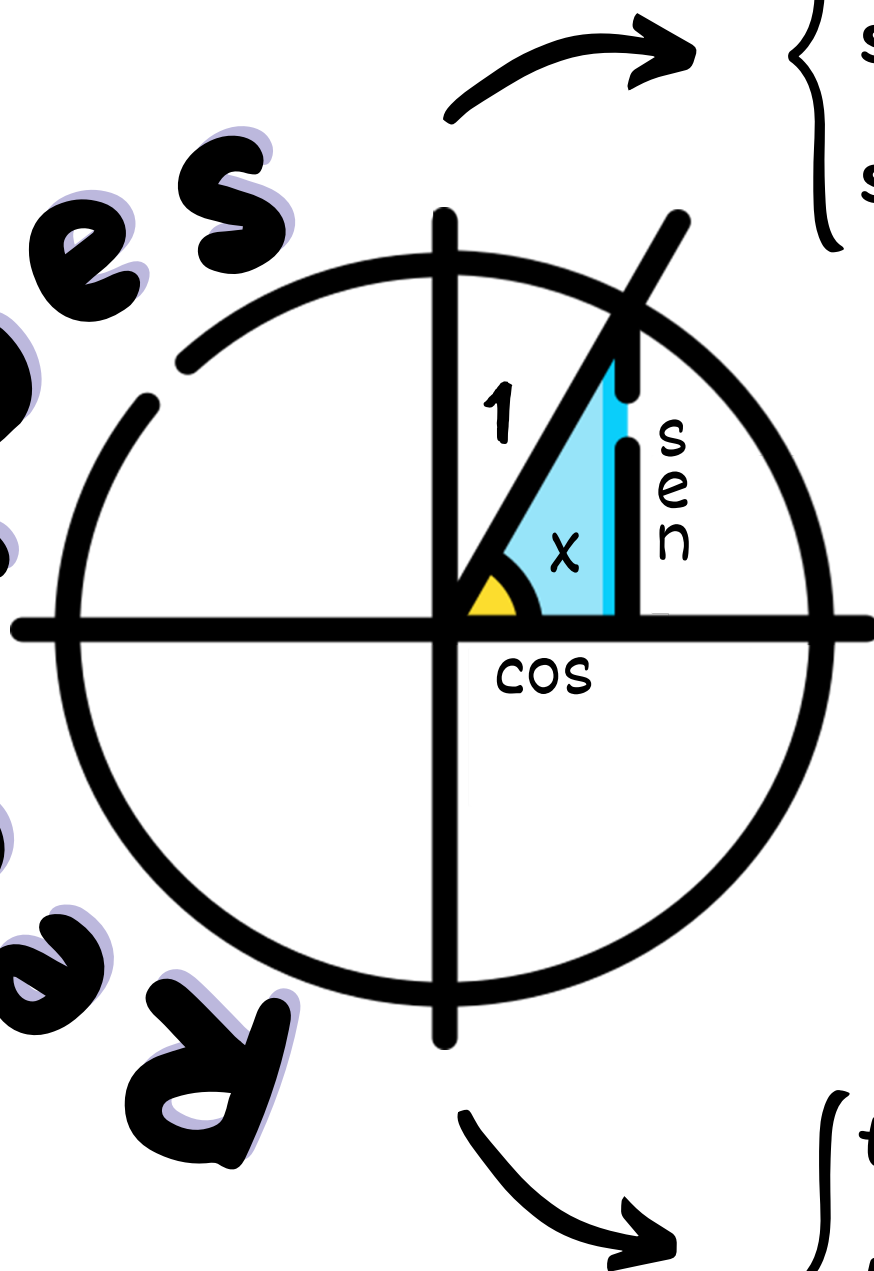
Demonstração

Impondo $x \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$, e $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever:

$$\frac{\text{AT}}{\text{OA}} = \frac{\text{PQ}}{\text{OQ}} \Rightarrow \frac{\text{tg } x}{1} = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

Relações
Fundamentais



seno

$$\begin{cases} \text{sen} (\pi - x) = \text{sen } x \\ \text{sen} (\pi + x) = - \text{sen } x \\ \text{sen} (2\pi - x) = -\text{sen } x \end{cases}$$

coseno

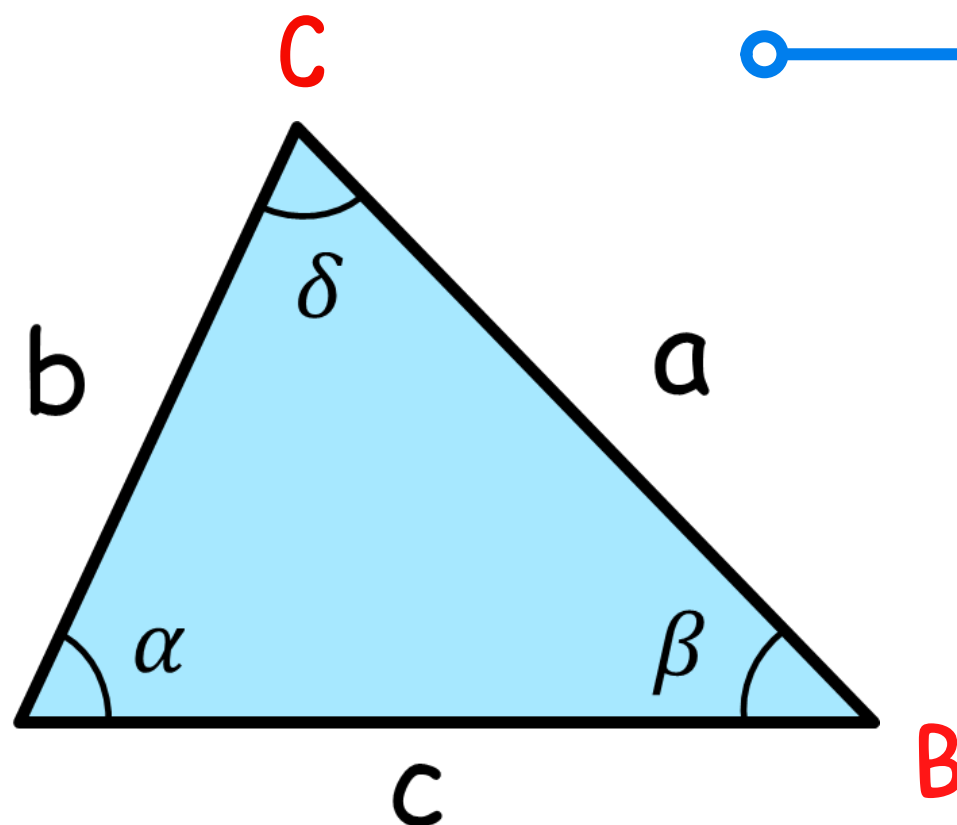
$$\begin{cases} \cos (\pi - x) = -\cos x \\ \cos (\pi + x) = -\cos x \\ \cos (2\pi - x) = \cos x \end{cases}$$

tangente

$$\begin{cases} \text{tg} (\pi - x) = -\text{tg } x \\ \text{tg} (\pi + x) = \text{tg } x \\ \text{tg} (2\pi - x) = -\text{tg } x \end{cases}$$

Relação Fundamental

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$



Lei dos senos

$$\frac{a}{\text{sen}(\textcolor{red}{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\textcolor{red}{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\textcolor{red}{C})}$$



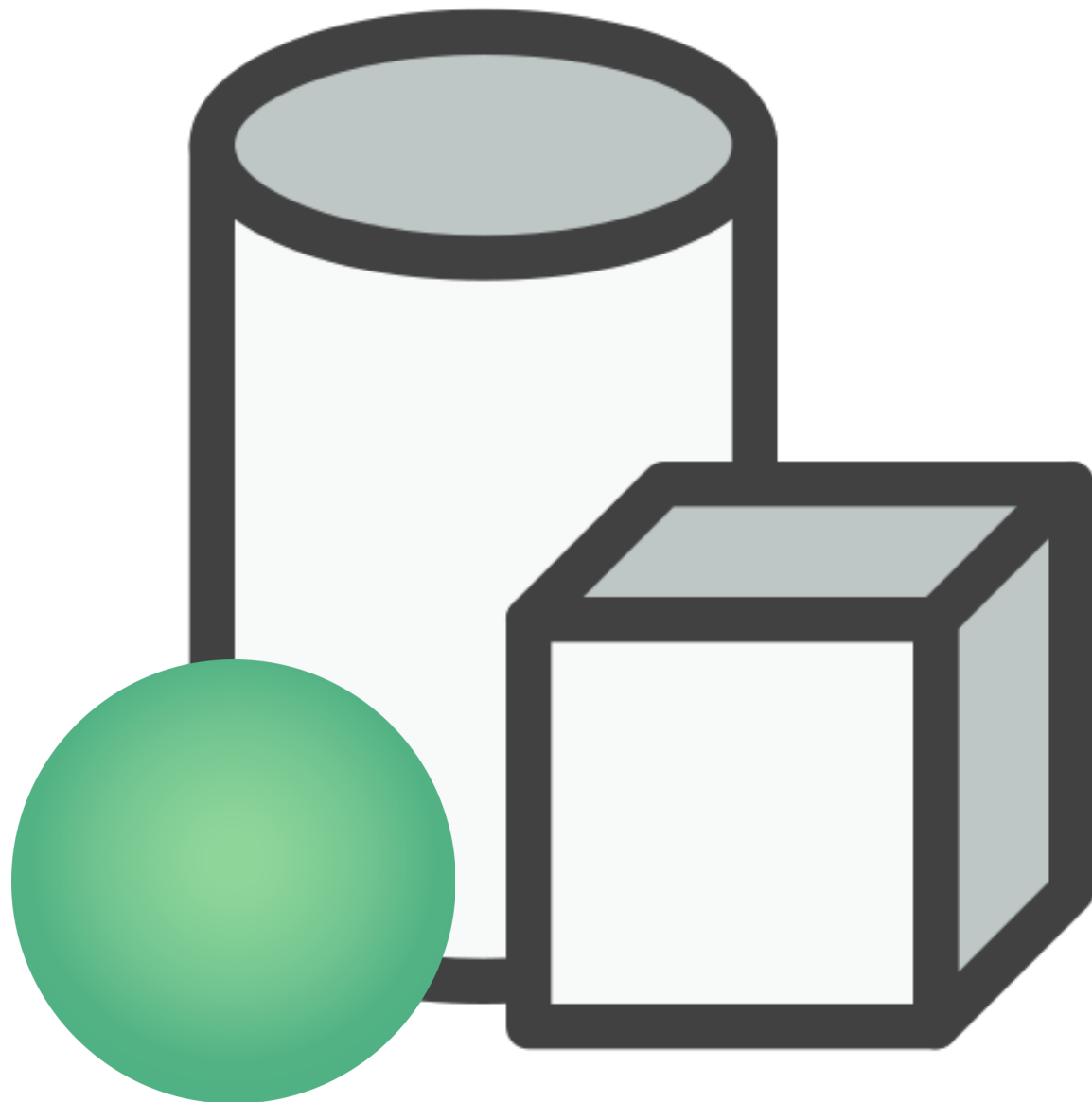
Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.bc.\cos(\textcolor{red}{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.ac.\cos(\textcolor{red}{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.ab.\cos(\textcolor{red}{C})$$

Geometria Espacial



As noções primitivas são adotadas sem definição ou seja são conceitos intuitivos. Os principais são:

ponto, reta e plano



Conceitos Primitivos

Importante

- (i) Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta.
- (ii) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.
- (iii) Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Ponto

São representados por letras latinas maiúsculas: A, B, C, ... (adimensional)

• (ponto A)
A

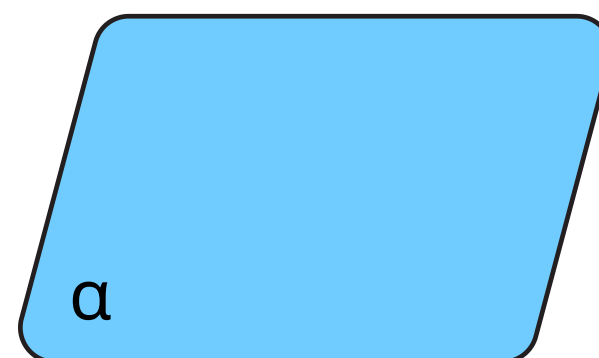
Reta

São representados por letras latinas minúsculas: a, b, c, ...

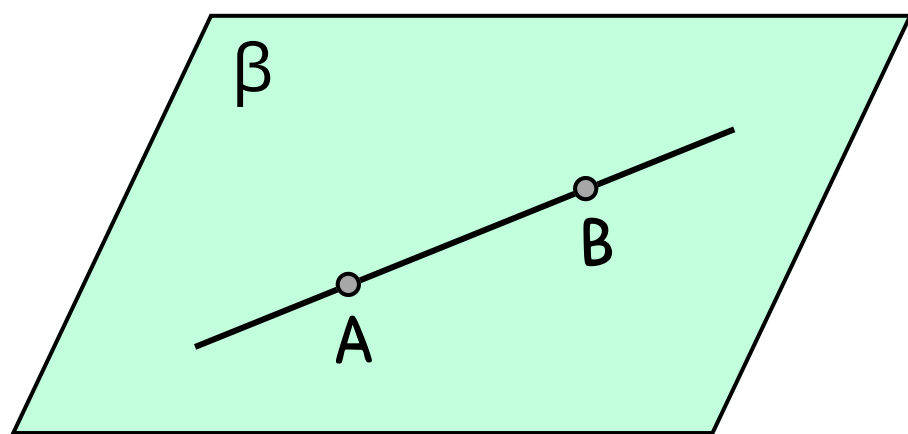
— r
(reta r)

Plano

São representados por letras gregas minúsculas: α , β , γ , ...



(plano α)

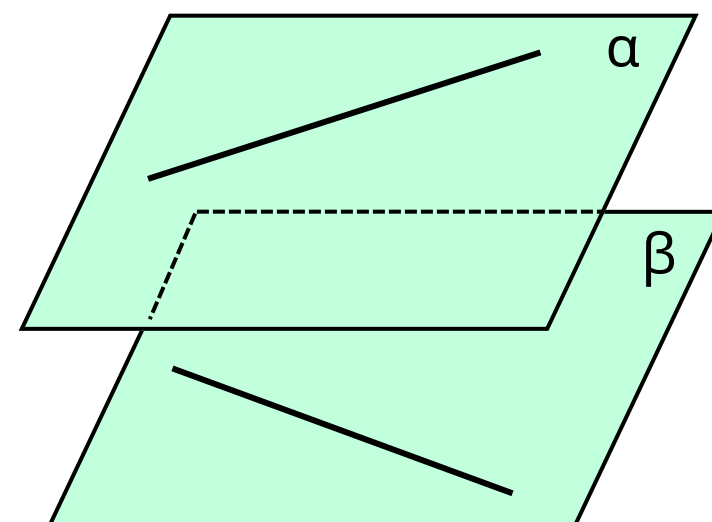


Plano β

É uma superfície tal que, dados dois pontos quaisquer desta superfície, existe uma única reta que passa por esses pontos.

Pelos pontos A e B, do plano β , passa uma única reta.

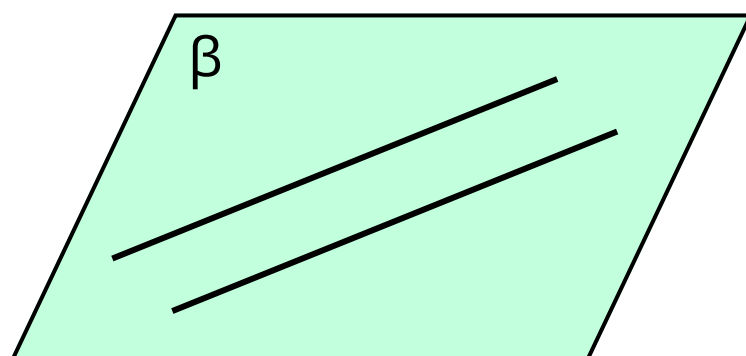
Planos e retas



reversas

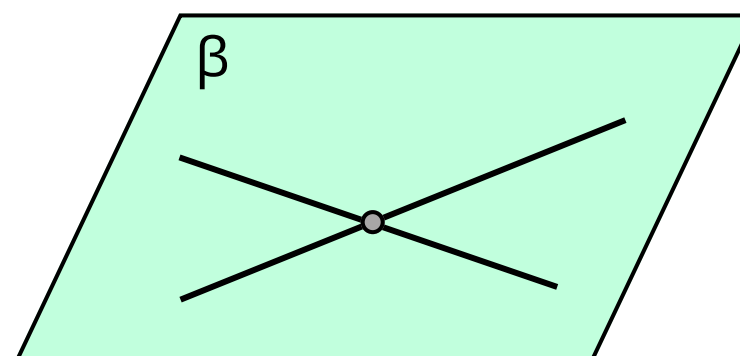
não têm um ponto em comum

Duas retas no espaço podem ser: paralelas, concorrentes ou reversas.



paralelas

não têm um ponto em comum



concorrentes

têm um ponto em comum

Determinação de um plano

No espaço, um plano pode ser determinado, obedecendo algumas condições, vejamos algumas delas:

(1) Três pontos não colineares determinam um plano.

(2) Um ponto e uma reta ou um segmento de reta que não contém o ponto.

(3) Um ponto e um segmento de reta que não contém o ponto.

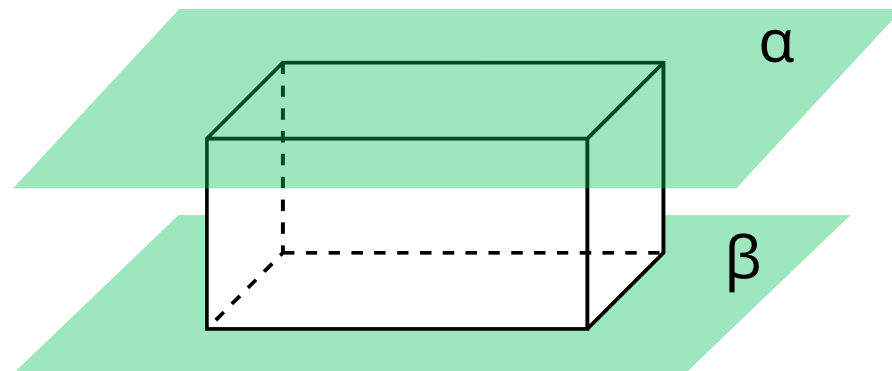
(4) Duas retas paralelas que não se sobrepõem.

(5) Dois segmentos de reta paralelos que não se sobrepõem.

(6) Duas retas concorrentes ou Dois segmentos de reta concorrentes.

Planos Paralelos

Dois planos α e β são paralelos e distintos, se e somente se, eles não possuem ponto em comum.

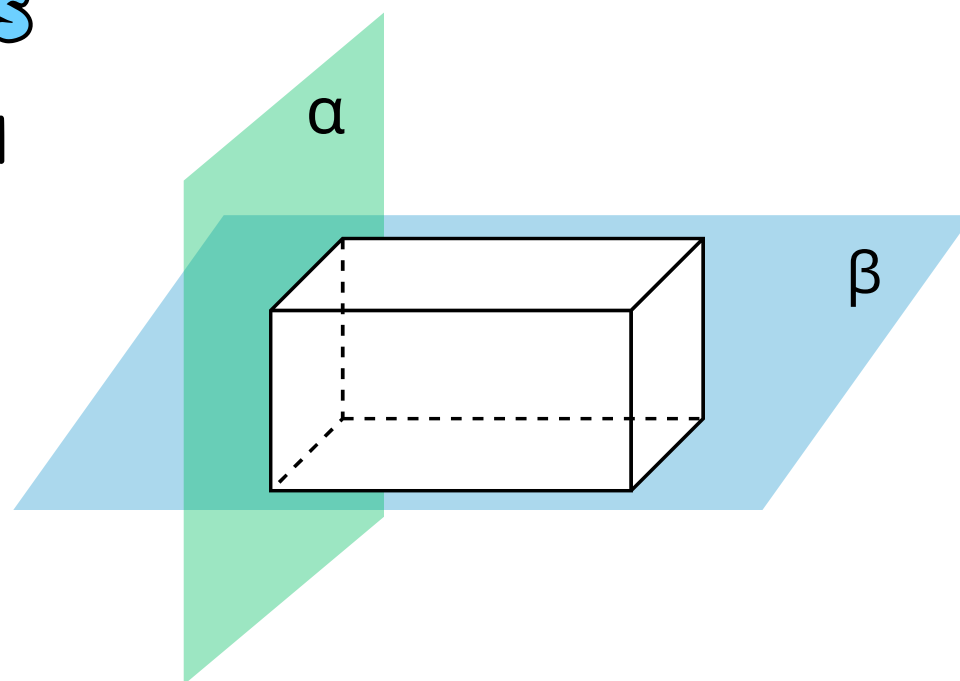
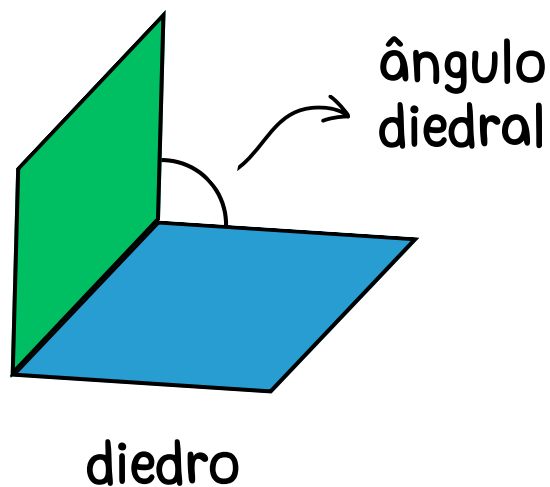


planos paralelos distintos

Geometria de posição

Planos Perpendiculares

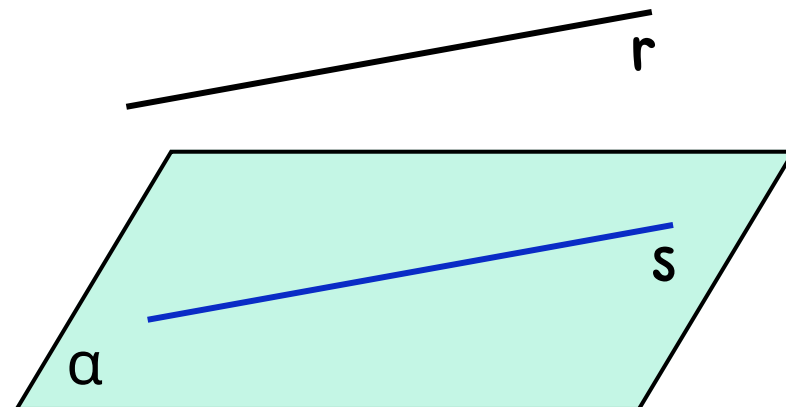
É o diedro em que o ângulo diedral mede 90° .



planos perpendiculares

Reta paralela ao plano

Uma reta é paralela a um plano quando não existem pontos em comum entre eles. Para mostrar que uma reta é paralela a um plano, basta mostrar que ela é paralela a uma única reta inteiramente contida nesse plano.

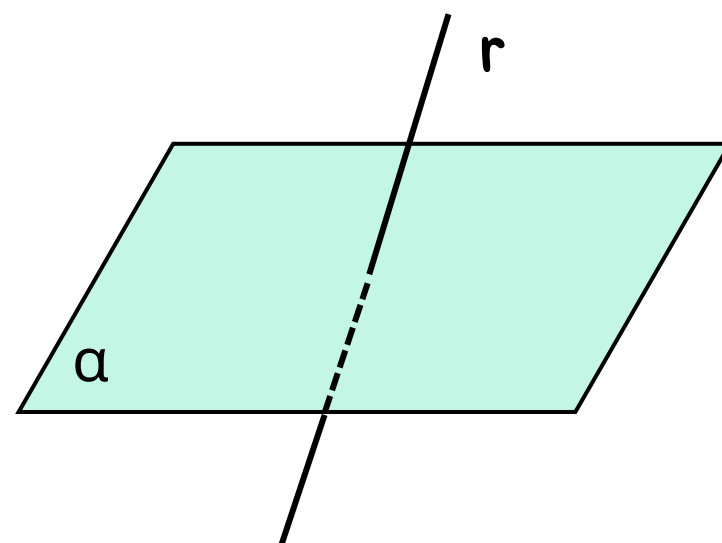


Se r for paralela a s , então r é paralela ao plano α

Geometria de posição

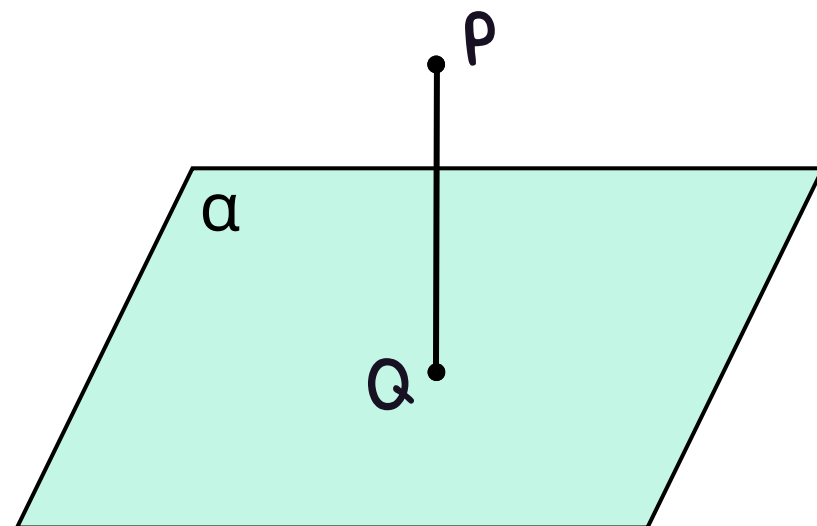
Reta e plano concorrentes

Uma reta é concorrente a um plano quando eles possuem um único ponto em comum. Essa posição relativa também é conhecida como reta secante ao plano. Na figura ao lado, r é secante a α .



Entre Ponto e Plano

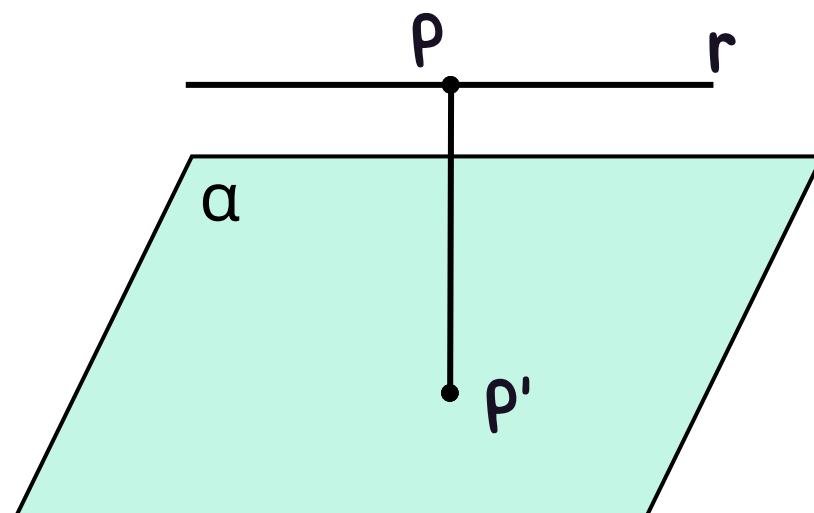
Seja P um ponto localizado fora de um plano α , a distância entre P e α , é a medida do segmento de reta perpendicular ao plano α em que uma extremidade é o ponto P e a outra extremidade é o ponto Q , onde ocorre a interseção entre o plano e o segmento PQ .



Distâncias

Entre Reta e Plano

Se uma reta r for transversal a um plano α , então a distância entre a reta e o plano é ZERO. Já se a reta for paralela ao plano, teremos uma distância para ser calculada, que será objetivo da geometria analítica.

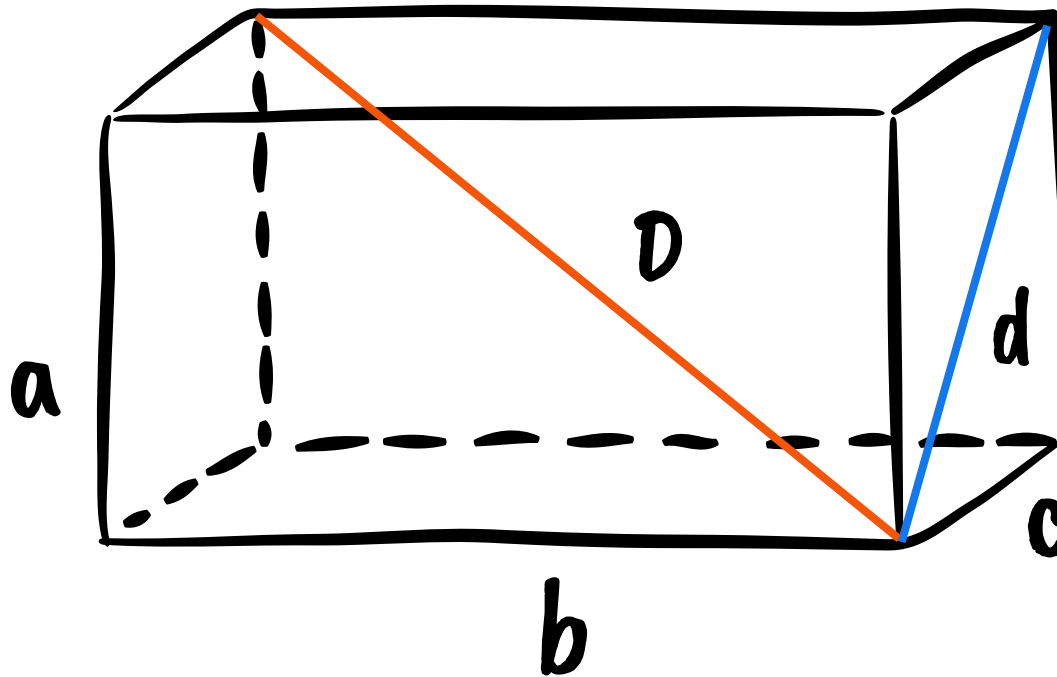


Área total

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

Diagonal

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Paralelepipedo

Diagonal da face

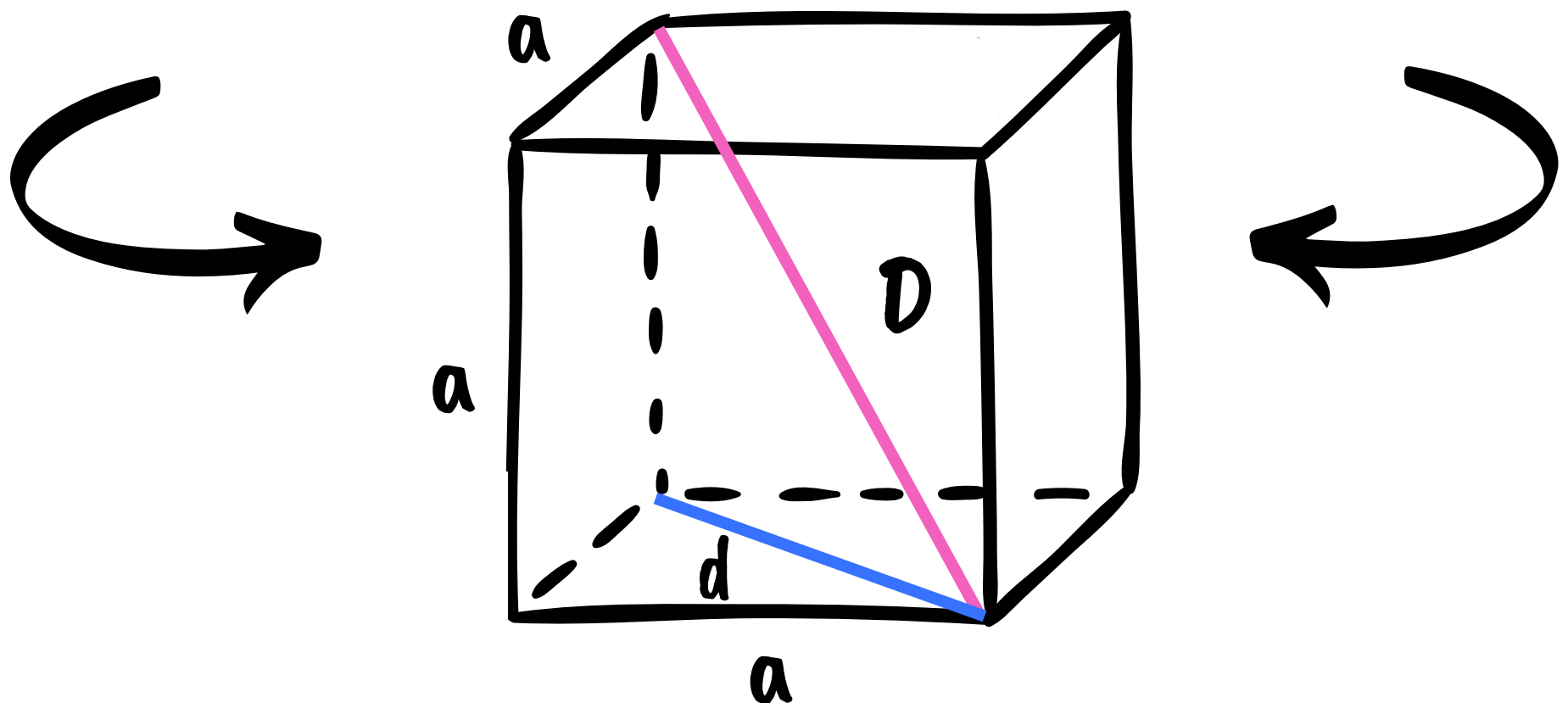
$$d^2 = a^2 + c^2$$

Área total

$$A = 6a^2$$

Diagonais

$$D = a\sqrt{3} \text{ e } d = a\sqrt{2}$$



Cubo

Volume

$$V = a^3$$

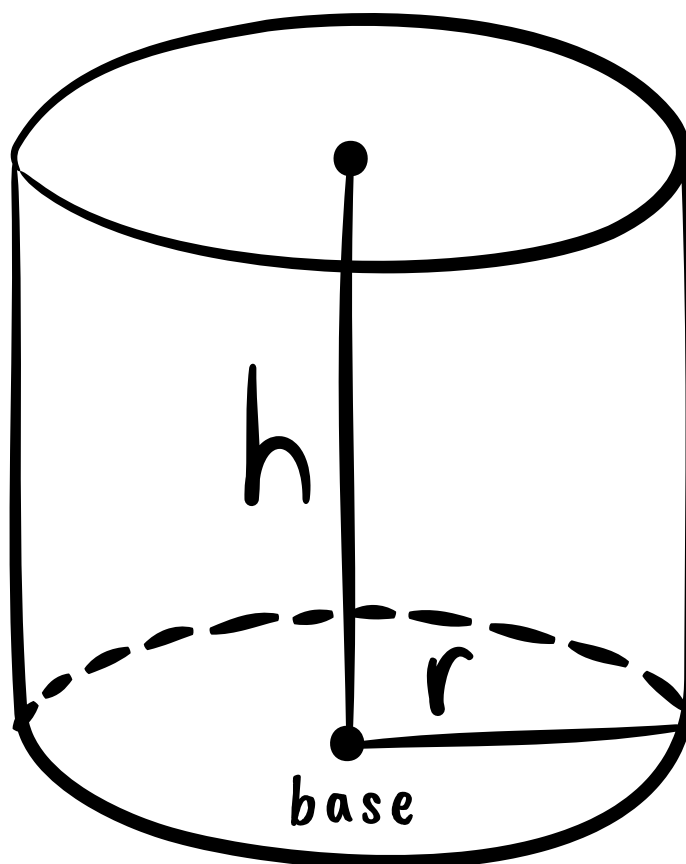
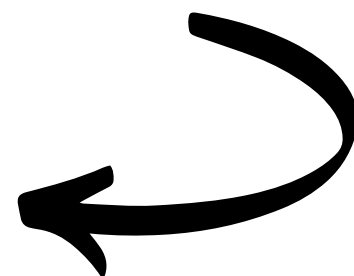
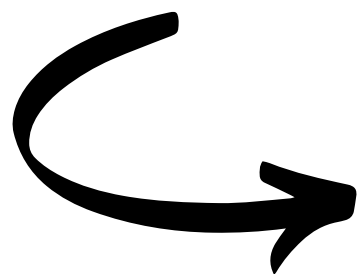
D e d = diagonais
 a = aresta

Área Lateral

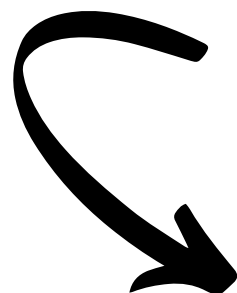
$$A_l = 2\pi rh$$

Área total

$$A_t = 2A_b + A_l$$



Cilindro Equilátero
 $h = r$



Cilindro



r = raio da base
 h = altura

Volume

$$V = A_b h$$

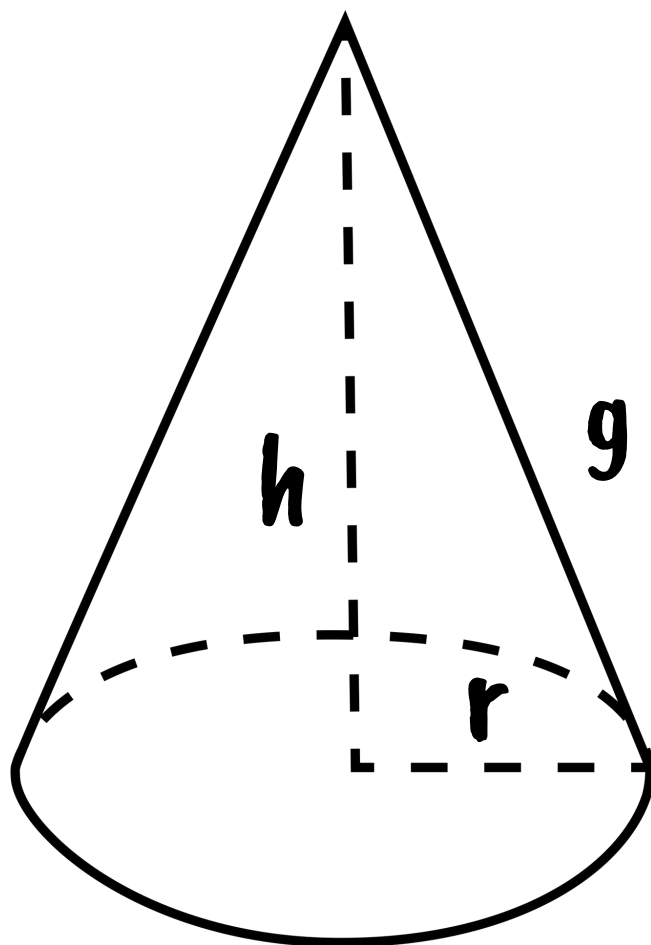
Área da base
($A_b = \pi r^2$)

Área Lateral

$$A_l = \pi r g$$

Área total

$$A_t = \pi r(r + g)$$



geratriz

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Cone

Volume

r = raio da base
 h = altura

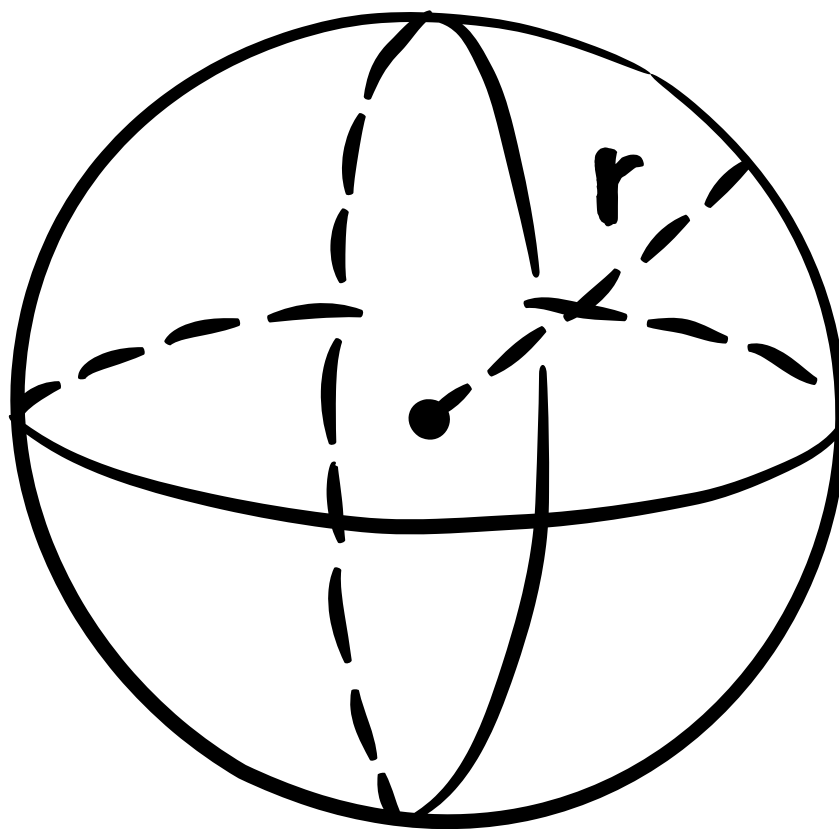
$$V = \left(\frac{1}{3}\right) \pi r^2 h$$

Área total

$$A = 4\pi r^2$$

Volume

$$V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi.r^3$$



$r = \text{raio}$

Esfera

Área fuso

$$A = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right)4\pi r^2$$

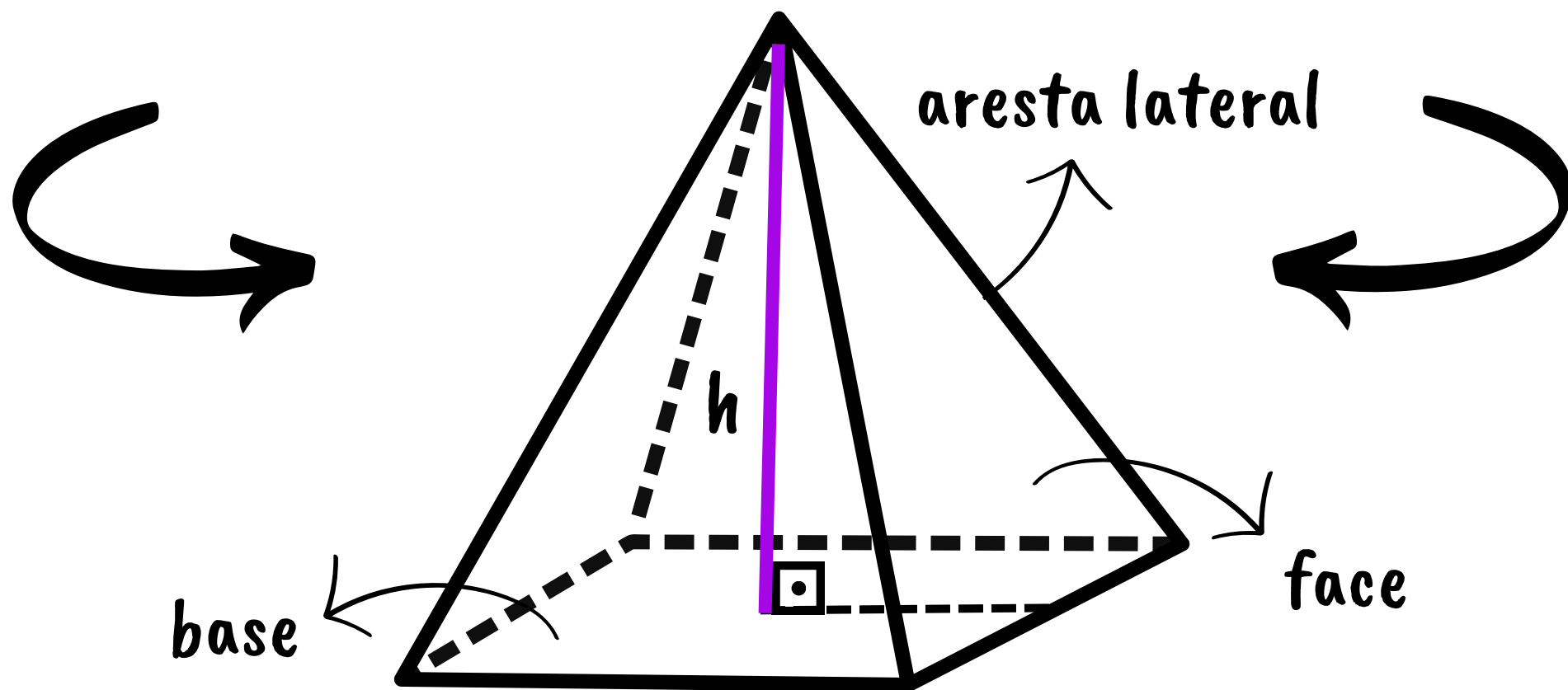
$\alpha = \text{ângulo do fuso}$

Área total

$$A = A_b + A_L$$

Volume

$$V = (1/3)A_b.h$$

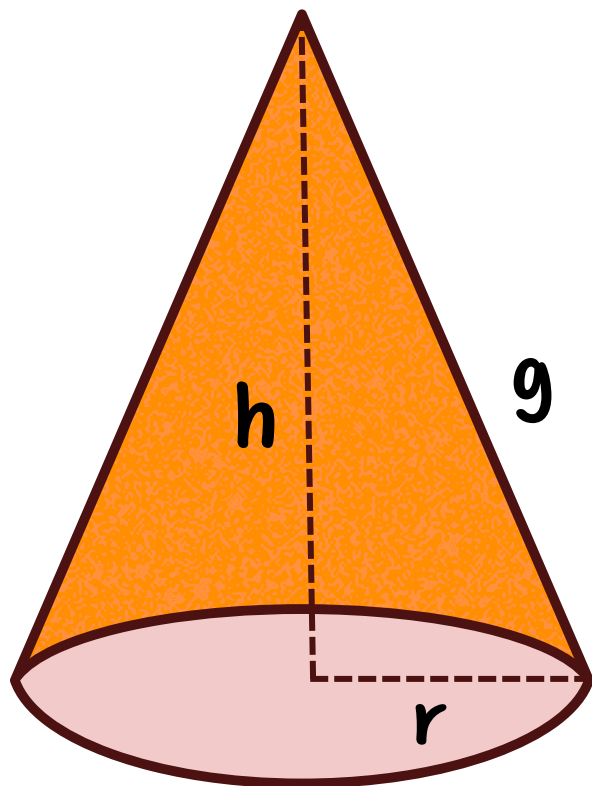


Pirâmide

Importante

Todas as faces são congruentes
A base determina sua nomenclatura

Cone

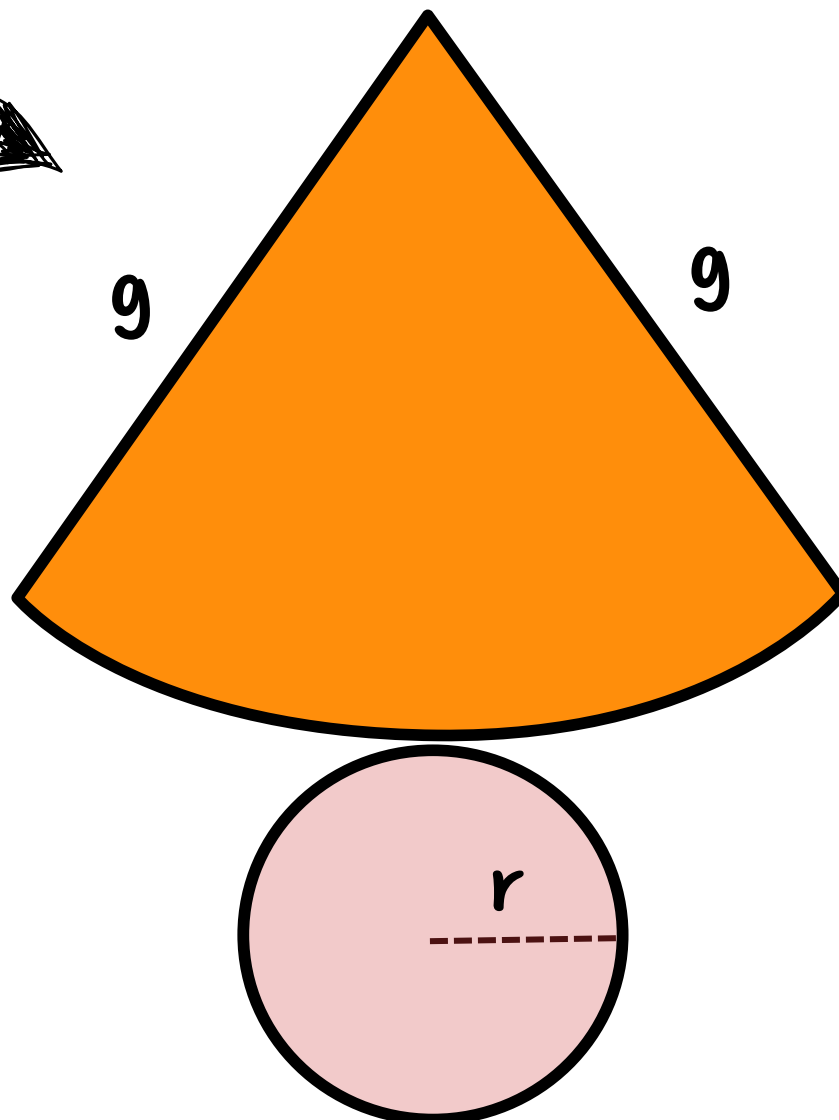
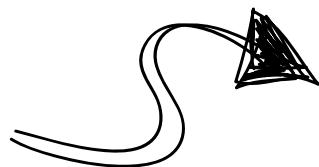


Geratriz

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Volume

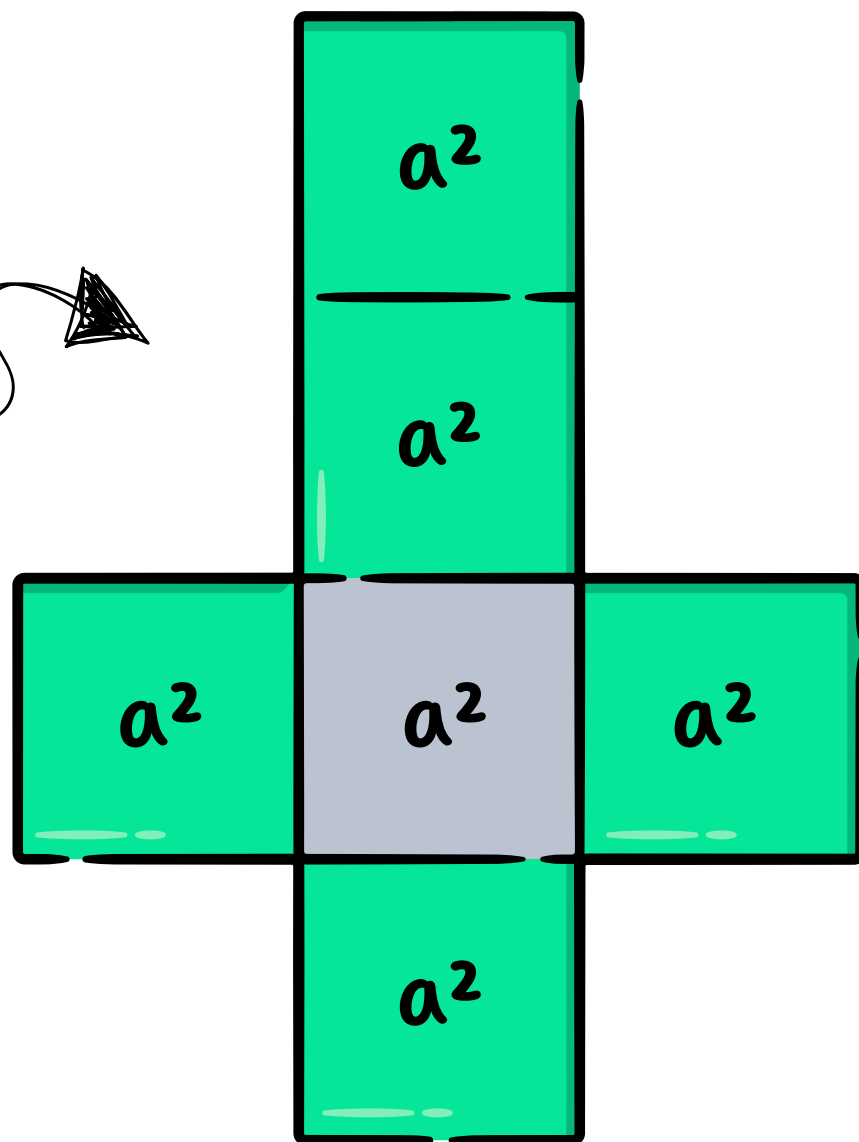
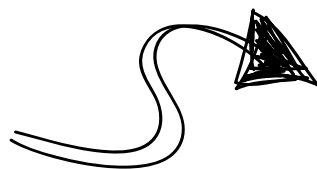
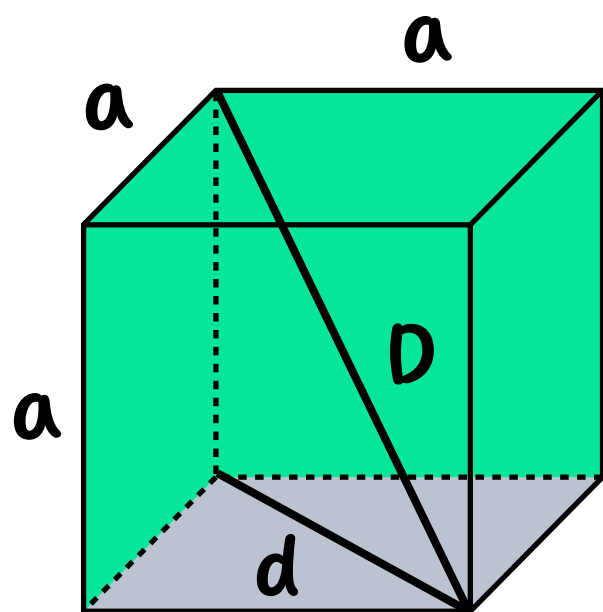
$$V = (1/3)\pi r^2 h$$



Área total

$$A_t = \pi r(r + g)$$

Cubo



Diagonais

$$d = a\sqrt{2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$

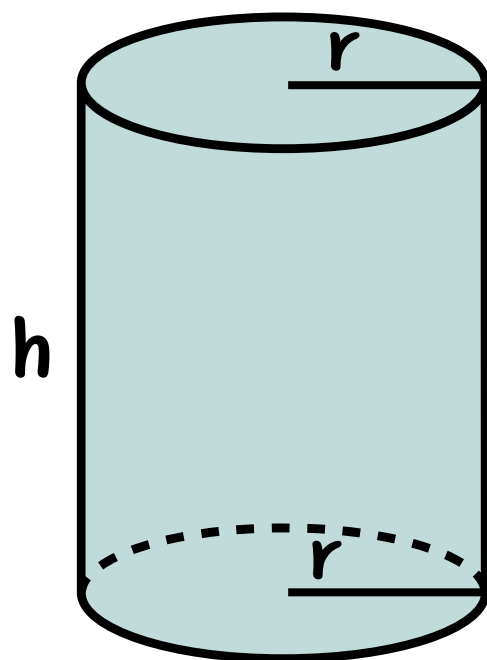
Volume

$$V = a^3$$

Área total

$$A_t = 6a^2$$

Cilindro

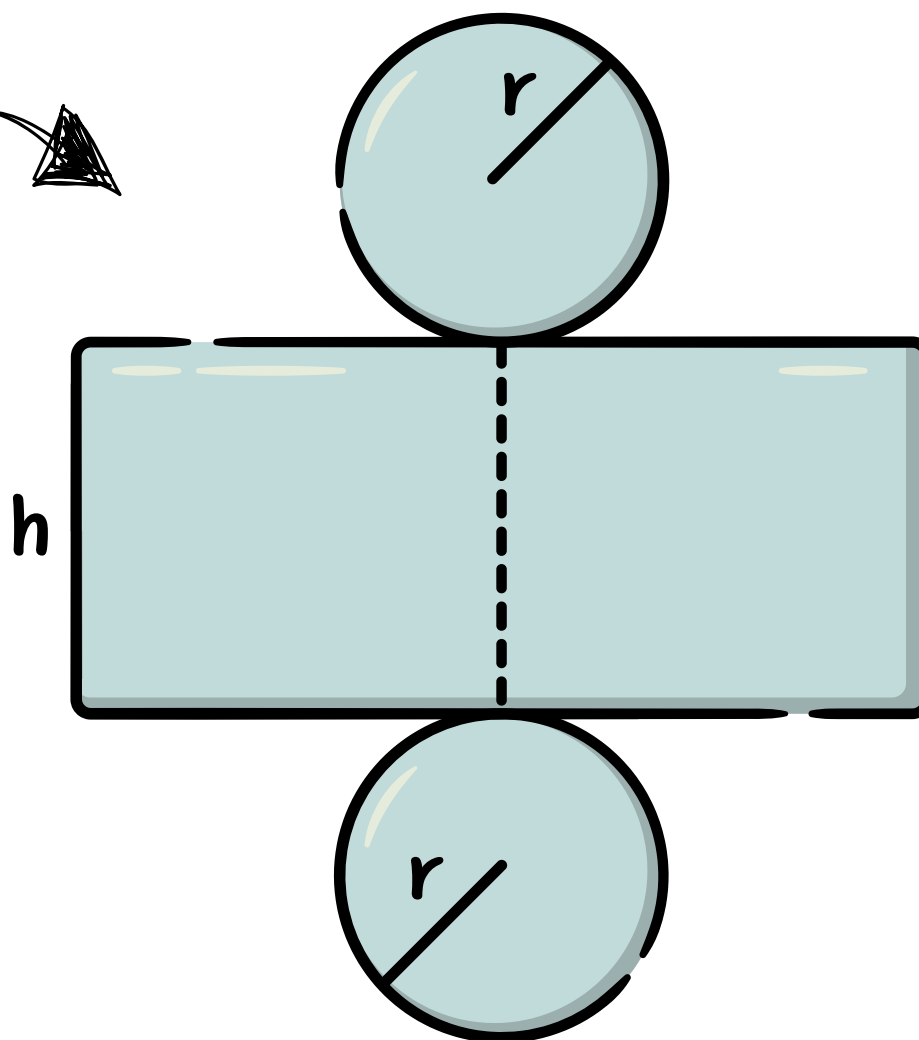
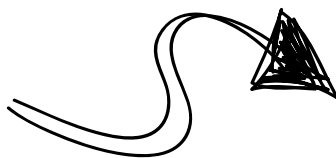


Volume

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Área Lateral

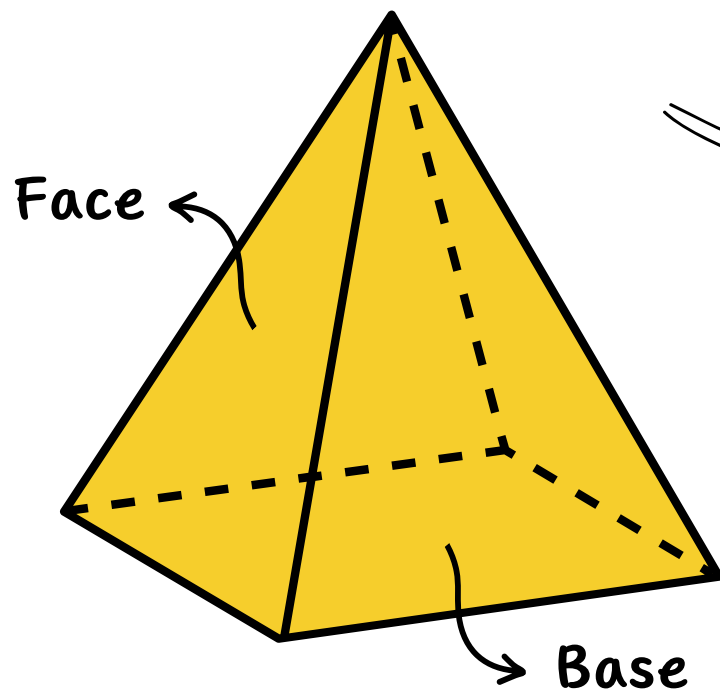
$$A = 2\pi \cdot r \cdot h$$



Área total

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

Pirâmide



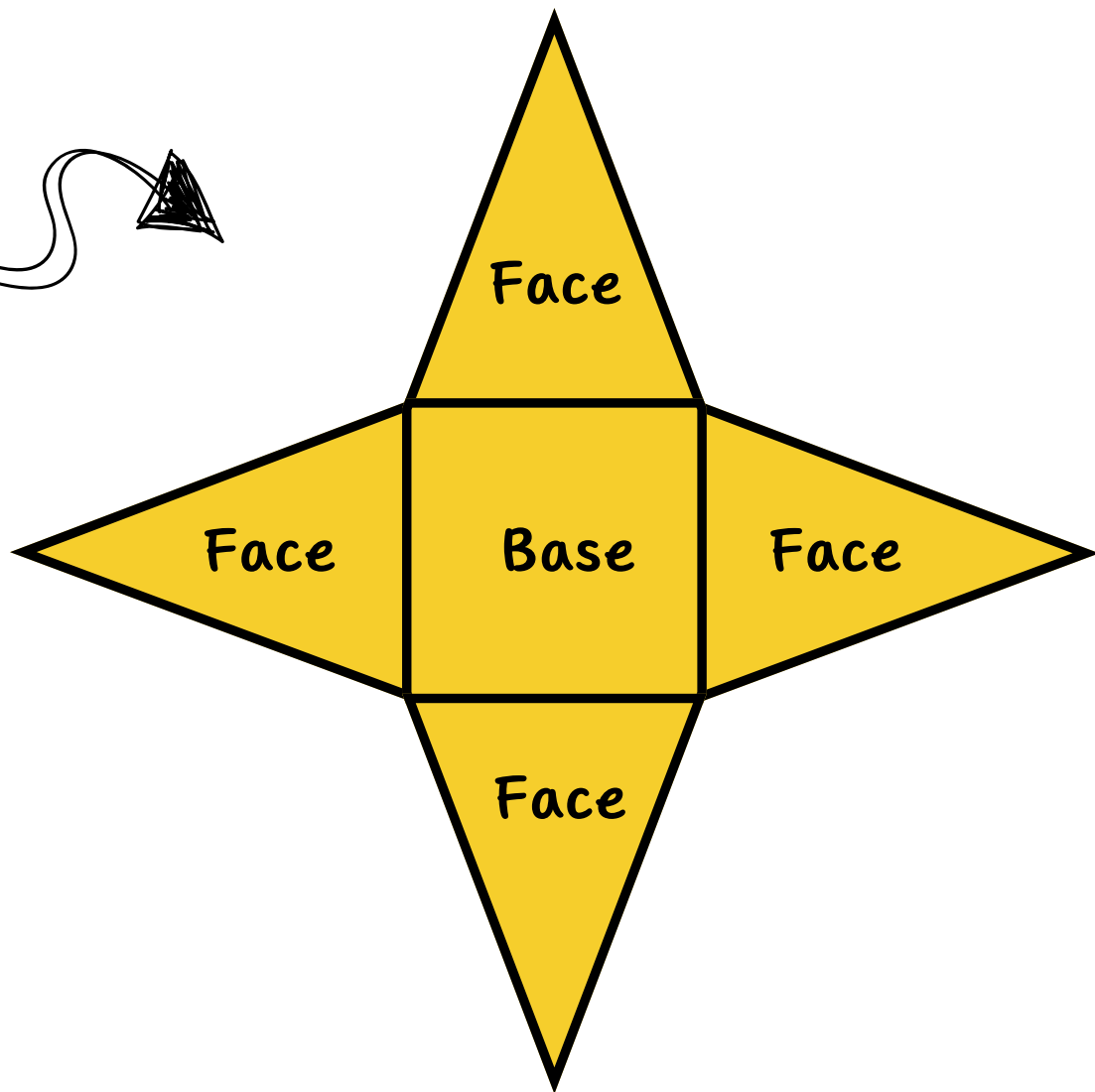
Volume

$$V = (1/3)A_b \cdot h$$

Área Lateral

$$A = n \cdot A_{\text{face}}$$

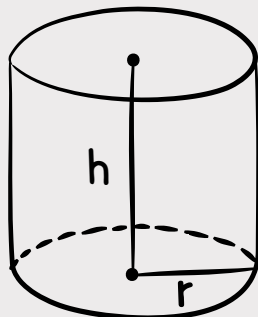
n = número de faces



Área total

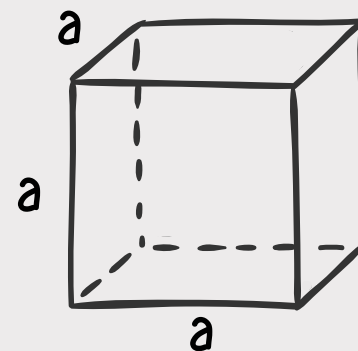
$$A_t = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$$

CILINDRO



$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

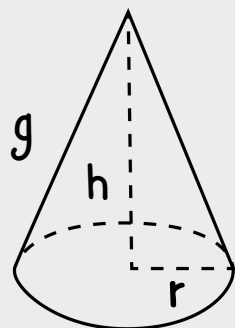
CUBO



$$A = 6 \cdot a^2$$

Áreas

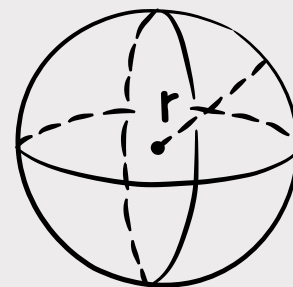
CONE



$$A = \pi \cdot r \cdot (r + g)$$

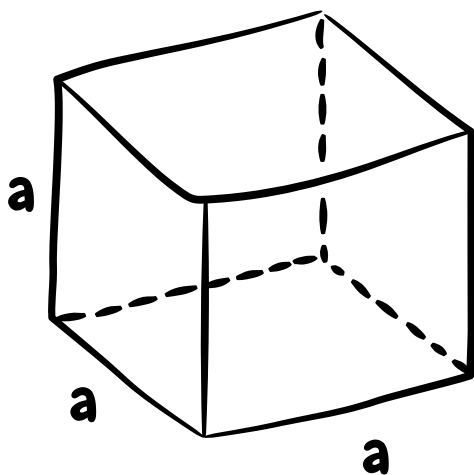
$$g^2 = h^2 + r^2$$

ESFERA

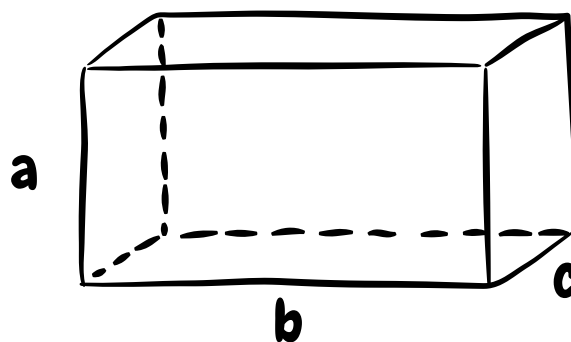


$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

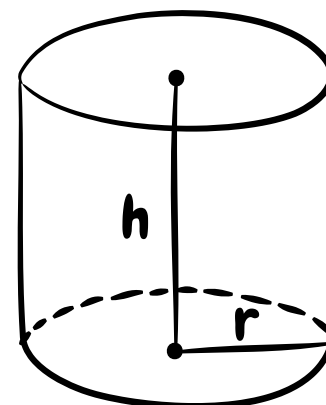
cubo



prisma

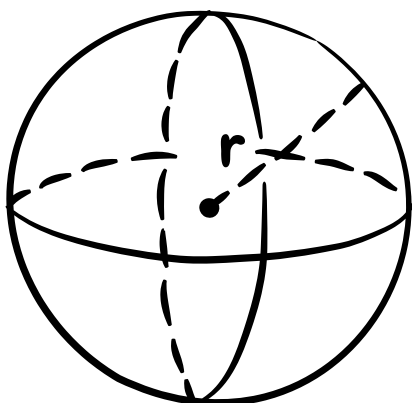


cilíndro

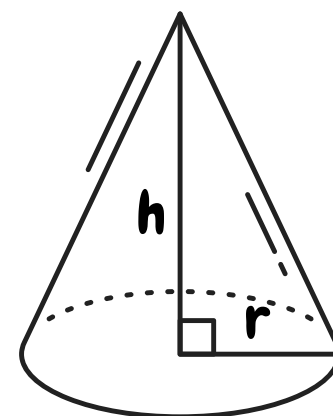


Volumes

esfera



cone



✓ cubo = a^3

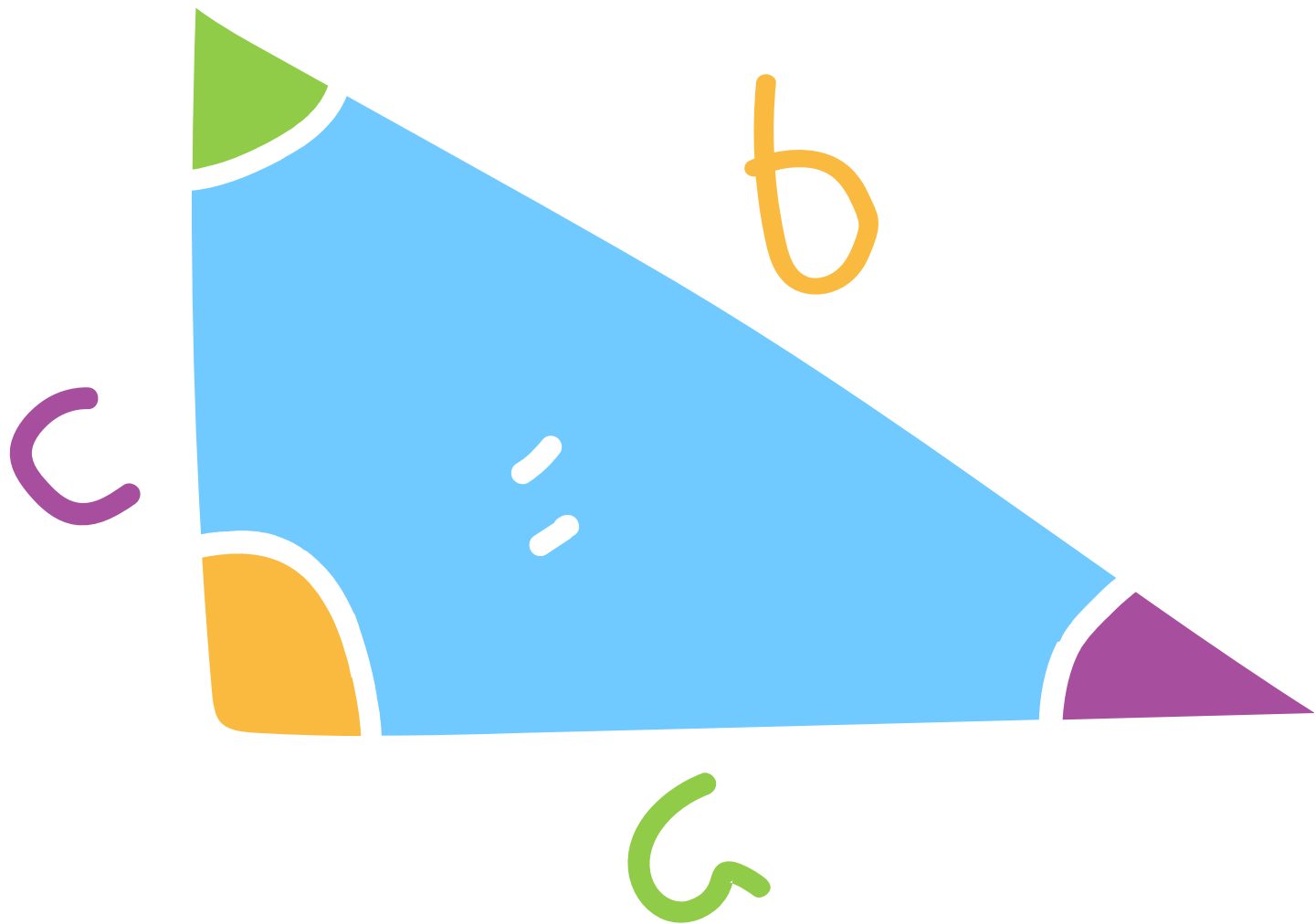
✓ prisma = $a.b.c$

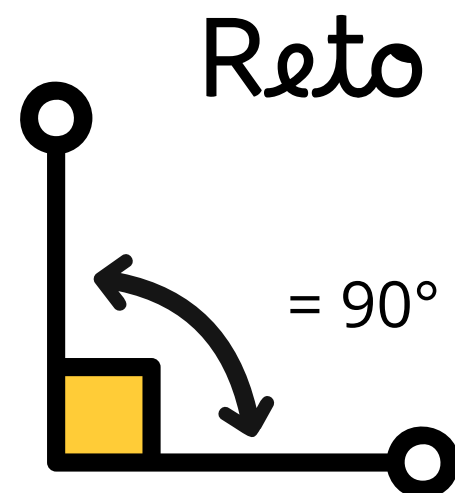
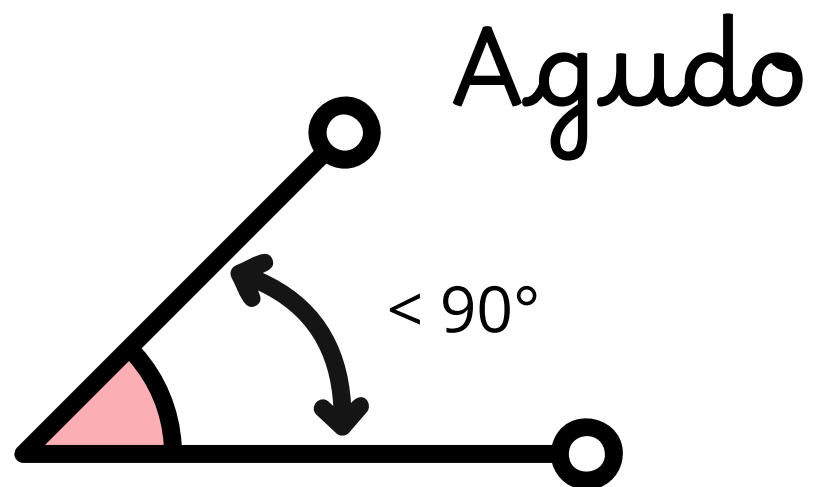
✓ cilindro = $\pi.r^2.h$

✓ esfera = $(4/3)\pi.r^3$

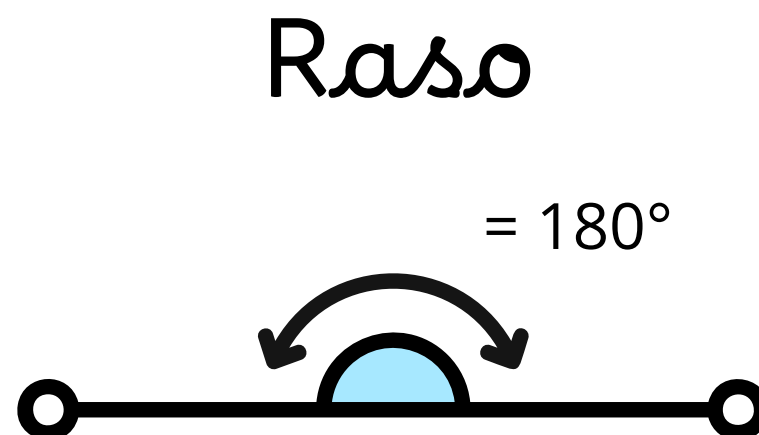
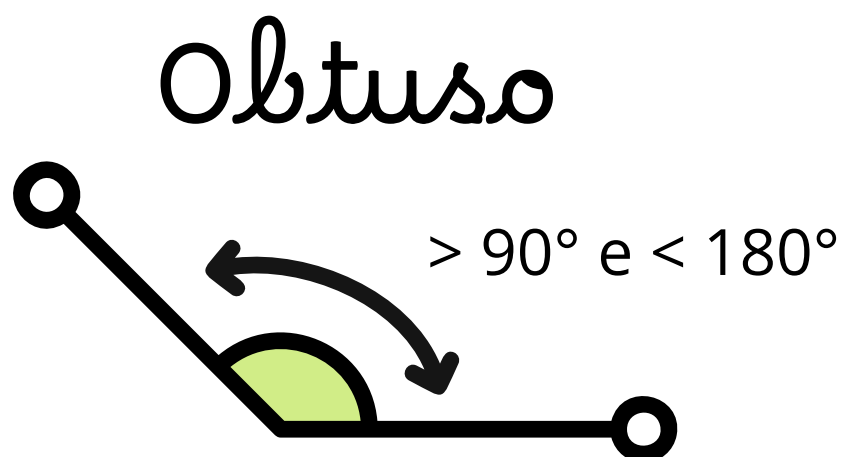
✓ cone = $(1/3)\pi.r^2.h$

Elementos de Geometria Plana

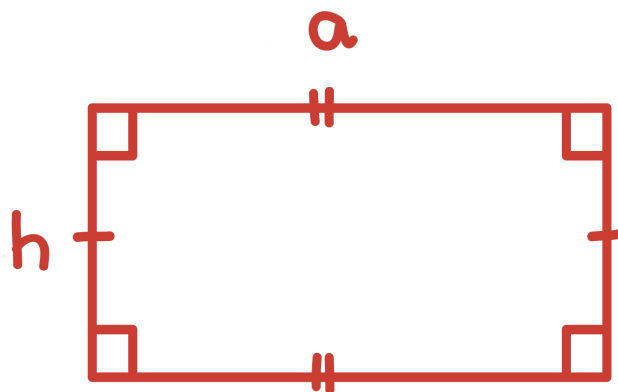




Ângulos

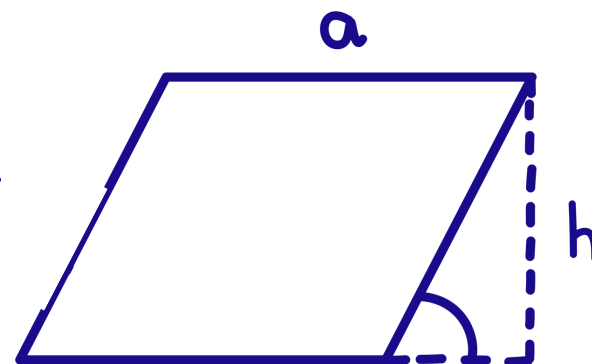


RETÂNGULO



$$A = a \times h$$

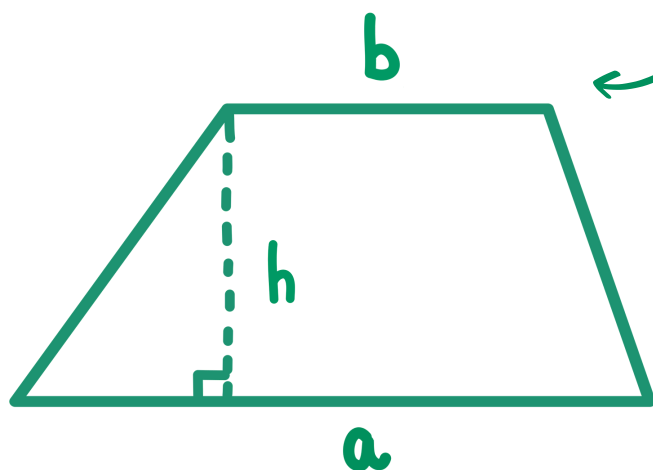
PARALELOGRAMO



$$A = a \times h$$

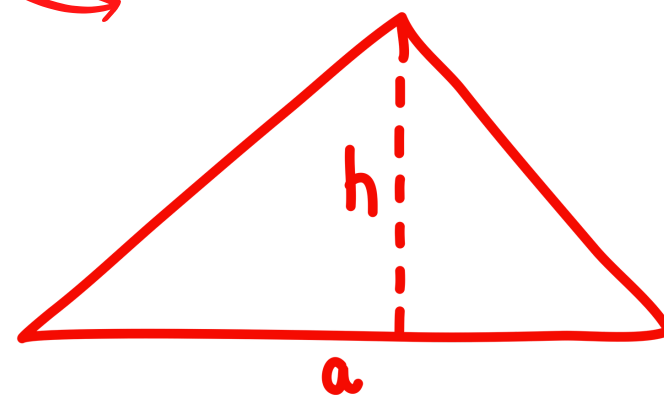
Áreas

TRAPÉZIO



$$A = \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$$

TRIÂNGULO



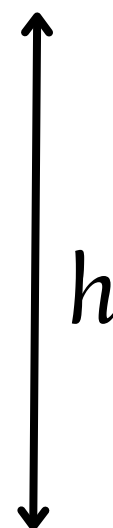
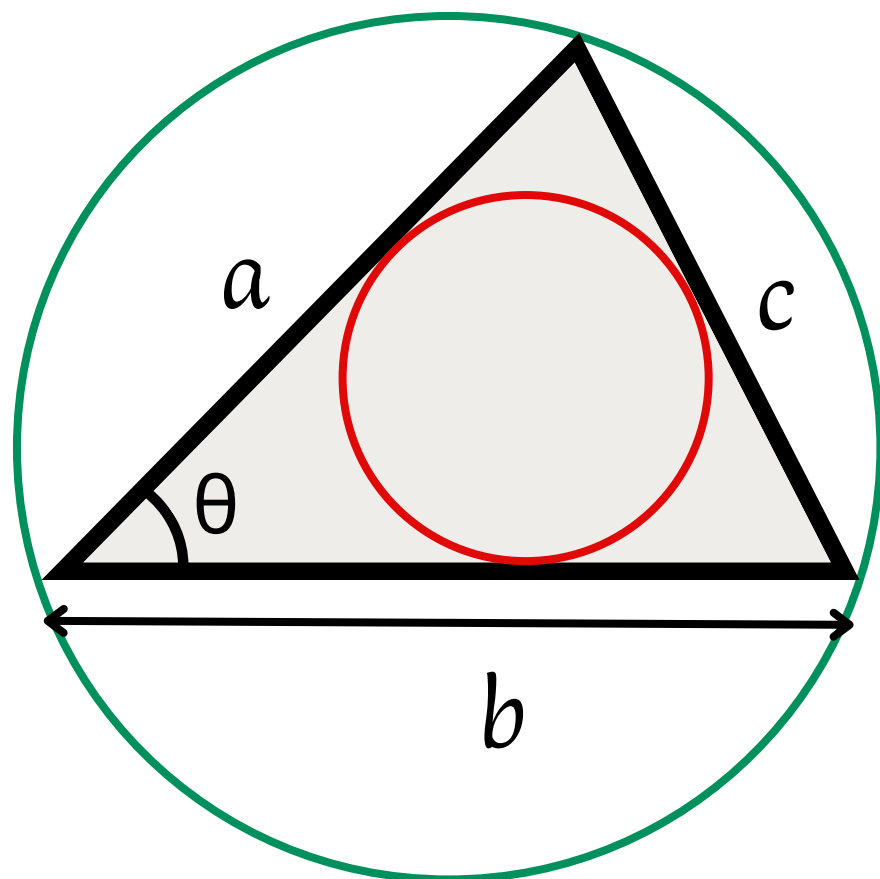
$$A = \frac{1}{2} \times a \times h$$

TRIÂNGULO

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



$$A = \frac{ab \cdot \text{sen} \theta}{2}$$



$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$R = \text{Raio}$



$$A = p \cdot r$$

$r = \text{raio}$

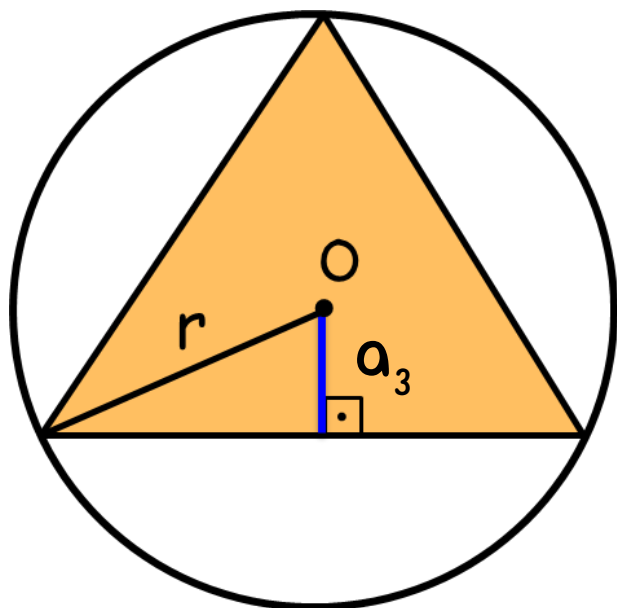
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

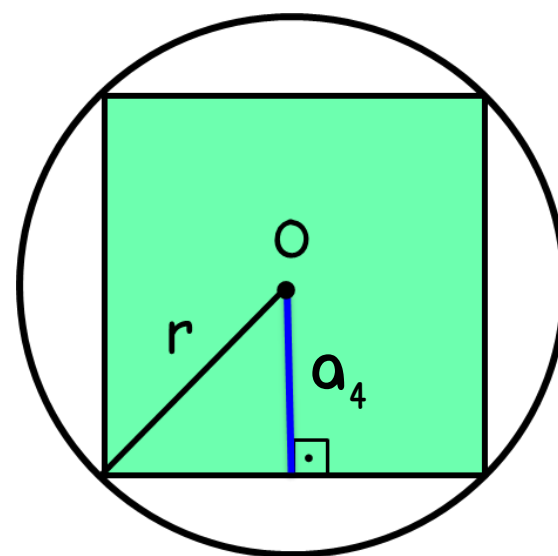
APÓTEMAS

TRIÂNGULO
EQUILÁTERO



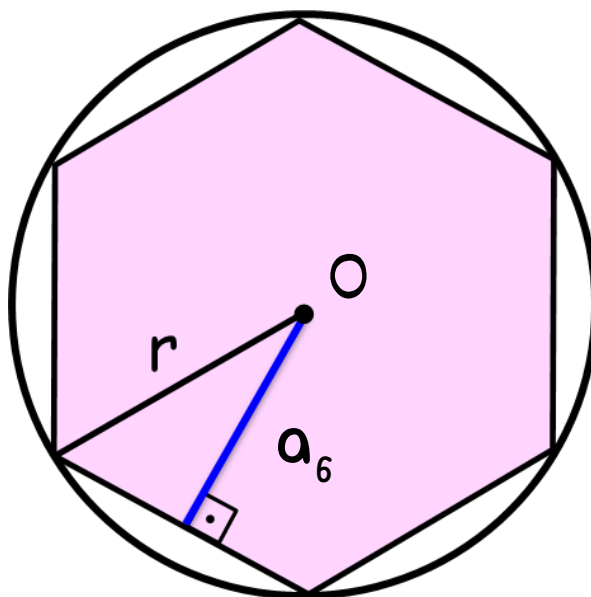
$$a_3 = \frac{r}{2}$$

QUADRADO



$$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

HEXÁGONO
REGULAR



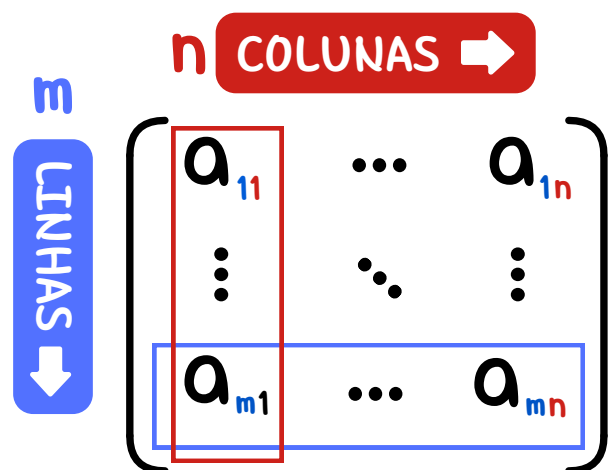
$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

O que é?

É toda disposição de números reais distribuídos em m linhas e n colunas.



Representação

Cada elemento de uma matriz $M_{m \times n}$, é indicado por a_{ij} , onde o índice i indica a linha e o j a coluna as quais o elemento a_{ij} está localizado em M .

$$M = (a_{ij})_{m \times n}$$

Se M é uma matriz do tipo $m \times n$, M possui $m \cdot n$ elementos.

Matriz

Matrizes Especiais

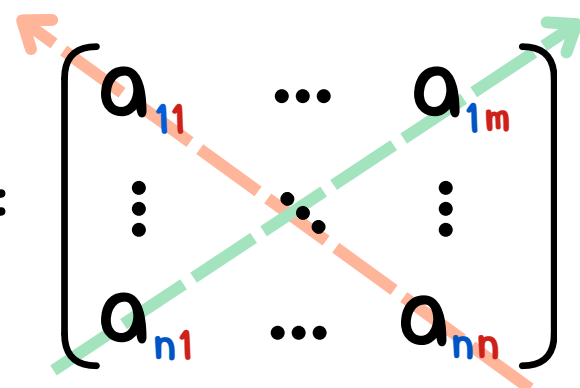
- a) Matriz linha é toda matriz do tipo $1 \times n$.
- b) Matriz coluna é toda matriz do tipo $m \times 1$.
- c) Matriz nula é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Matrizes Especiais

- d) Matriz quadrada é toda matriz em que o número de linhas é igual ao de colunas.
- e) Matriz identidade de ordem n (indica-se I_n) é toda matriz quadrada em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos.

O que é?

É toda matriz do tipo $n \times n$ (A_n), isto é, em que se tem igual número de linhas e colunas.


$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Chama-se **DIAGONAL PRINCIPAL** de uma matriz quadrada conjunto dos elementos que apresenta os dois índices iguais, isto é:

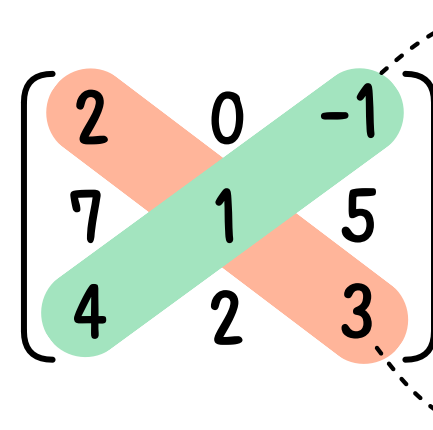
$$\{a_{ij} \mid i = j\}$$

Matriz Quadrada

Chama-se **DIAGONAL SECUNDÁRIA** de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm soma dos índices igual a $n + 1$, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i + j = n + 1\}$$

Exemplo


$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

DIAGONAL SECUNDÁRIA

DIAGONAL PRINCIPAL

DEFINIÇÃO

Multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A , todos multiplicados por k .

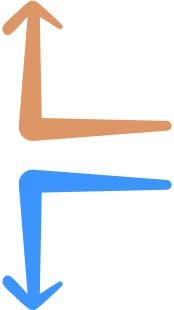
$$k \cdot A = B$$

Onde todo $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo i e j .

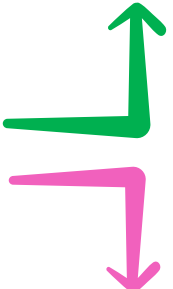
EXEMPLO

$$\text{a) } 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } -2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$



Igualdade de Matrizes



PROPRIEDADES

- (1) $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$
- (2) $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
- (3) $(a \cdot b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- (4) $1 \cdot A = A$

Em que A e B são matrizes quaisquer do tipo $m \times n$, a e b são números reais.

IGUALDADE

Duas matrizes, $A = (a_{ij})$, e $B = (b_{ij})$, do mesmo tipo, são iguais, quando todo $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e j , naturais e não nulos. Ou seja, para serem iguais, duas matrizes do mesmo tipo, devem apresentar os elementos correspondentes iguais.

DEFINIÇÃO

Dadas as matrizes, $A_{m \times n} = (a_{ij})$ e $B_{m \times n} = (b_{ij})$, chama-se soma $A + B$, a matriz $C_{m \times n} = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e j .

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}$$

EM SÍMBOLOS

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{m \times n} = \begin{cases} c_{11} = a_{11} + b_{11} \\ c_{12} = a_{12} + b_{12} \\ c_{21} = a_{21} + b_{21} \\ c_{22} = a_{22} + b_{22} \end{cases}$$

Soma de matrizes

EXEMPLOS

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -6 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

PROPRIEDADES

Considere A , B e C matrizes do mesmo tipo, temos:

$$(1) (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(2) A + B = B + A$$

$$(3) \exists M | A + M = A$$

$$(4) \forall A, \exists A' | A + A' = 0$$

O que é?

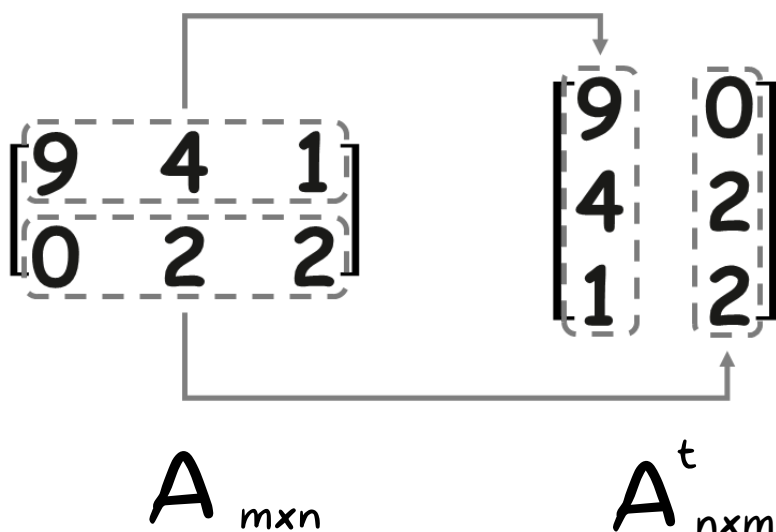
Seja $A_{m \times n} = (a_{ij})$, a transposta de A é a matriz $A^t_{n \times m} = (a^t_{ji})$ tal que $(a^t_{ji}) = (a_{ij})$, para todo i e todo j , ou seja, as colunas de A são ordenadamente iguais à linhas de A .

Na prática



Matriz Transposta

Exemplo



Propriedades

- (1) $(A^t)^t = A$ para toda matriz A ;
- (2) Se $A_{m \times n} = (a_{ij})$, e $B_{n \times p} = (b_{ij})$, então $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- (3) Se $A_{m \times n} = (a_{ij})$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = kA^t$;
- (4) Se $A_{m \times n} = (a_{ij})$, e $B_{n \times p} = (b_{ij})$, então $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

que é?

Dada as matrizes $A_{m \times n} = (a_{ij})$, e $B_{n \times p} = (b_{jk})$, chama-se de produto $A \cdot B$, a matriz $C_{m \times p} = (c_{ik})$, tal que:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Condição

A existência do produto $A \cdot B$ somente é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B , ou seja:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Propriedades

Associativa

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Distributiva

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

Propriedades

$$(k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$$

ou

$$(k \cdot A) \cdot B = k \cdot (A \cdot B)$$

para $k \in \mathbb{R}$

Multiplicação de matrizes

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = ?$$

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = C_{2 \times 1}$$

Cálculo

$$C_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (1 \ 2 \ 5) \times (4 \ 2 \ 1) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 13$$

$$c_{12} = (-1 \ 1 \ 3) \times (4 \ 2 \ 1) = -1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 1$$

O que é?

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é matriz invertível (admite inversa) se existir uma matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Onde I_n é a matriz identidade de ordem n . Simbolicamente:

$$B = A^{-1}$$

Exemplo

Dadas as matrizes A e B abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neste caso, B é a inversa A .

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa

Propriedades

Se A e B são matrizes invertíveis de ordem n , então:

$$(1) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

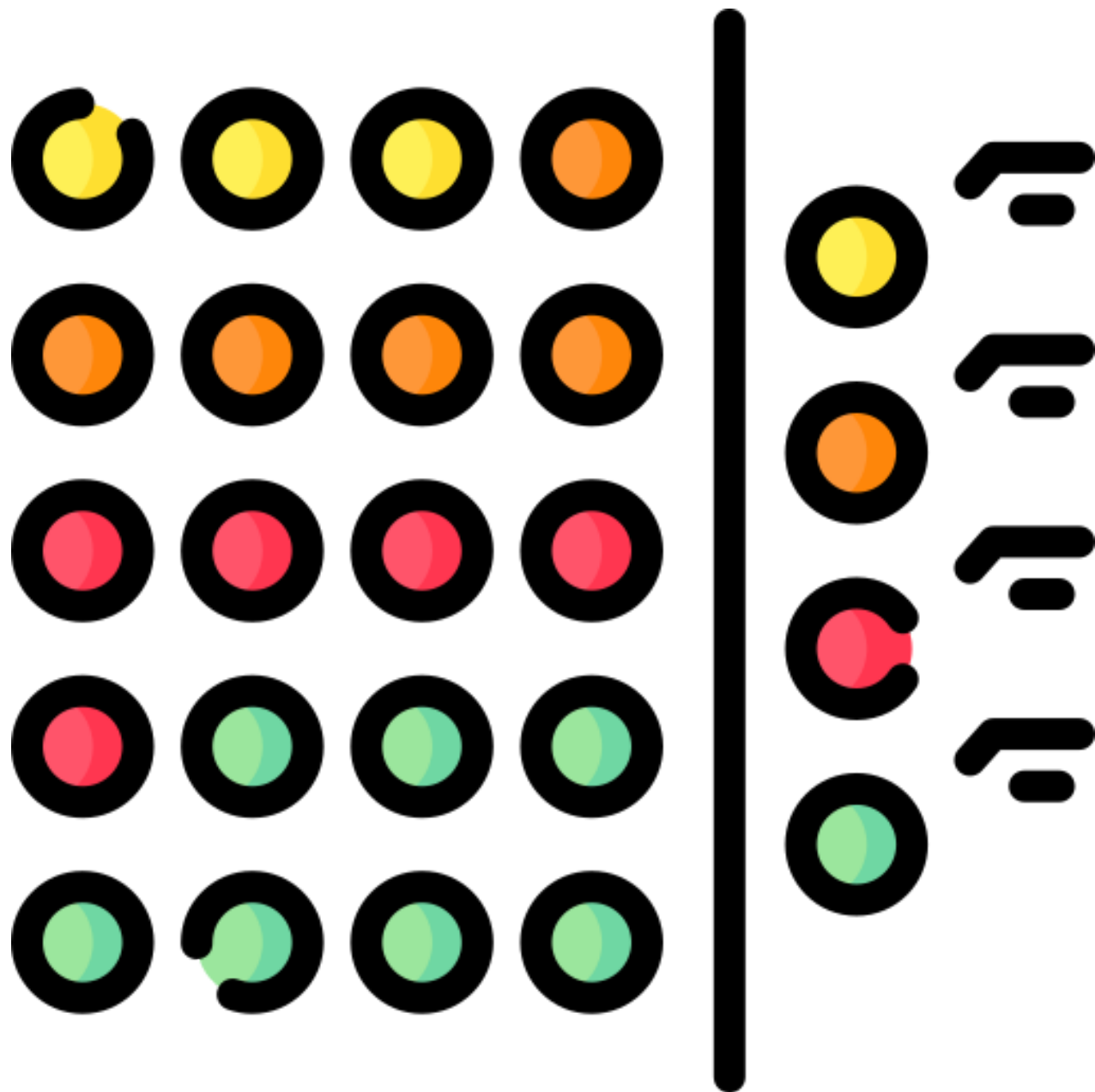
$$(2) (A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(3) (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \text{ (pra } n = 2).$$

Importante

Com o estudo dos determinantes veremos que a definição de matriz inversa e sua determinação ficara mais ampla e completa. Se o determinante de uma matriz for nulo, ela não possui inversa.

Determinantes



Determinante

O que é?

É uma função que transforma uma matriz quadrada em um número real.

Cálculo

Para as matrizes de ordem 1, o valor do determinante é o próprio elemento: $\det(a_{11}) = a_{11}$.

Para as matrizes de ordem 2, multiplicam-se os elementos da diagonal principal e diminui-se do resultado a multiplicação dos elementos da diagonal secundária, ou seja:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Para as matrizes de ordem 3, utilizamos a Regra de Sarrus, a qual fornece:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
$$= (aei + bfg + cdh) - (afh + bdi + ceg)$$

Regra de Sarrus

A Regra de Sarrus é um método que permite calcular o determinante de uma matriz 3×3 . O nome refere-se ao matemático francês Pierre Frederic Sarrus.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = ?$$

Cálculo

(1) Copie as duas primeiras colunas da matriz à direita da 3ª coluna, de modo que seja obtida uma sequência de 5 colunas.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

(diagonais)

(2) Some os produtos das três diagonais "**principais**" e subtraia dos produtos das três diagonais "**secundárias**".

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (afh + bdi + ceg)$$

Determinante nulo

Fila Nula

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Filas Iguais

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 9 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filas proporcionais

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

(A dashed arrow points from the second row to the third row with a label $\times 2$)

Os determinante das matrizes A, B e C, serão nulos.

$$\det(A) = \det(B) = \det(C) = 0$$

Propriedades

Determinante da transposta

Sendo M^t a transposta de uma matriz M quadrada de ordem n , podemos escrever:

$$\det(M) = \det(M^t)$$

Exemplo:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 49$$

$$\det(M)^t = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 49$$

Troca de filas paralelas

Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas), obteremos uma nova matriz M' tal que:

$$\det(M') = -\det(M)$$

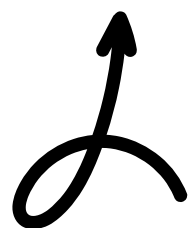
Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

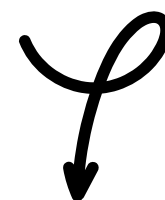
$\det(M) = -39$

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det(M') = 39$



Propriedades



Multiplicando uma fila por $k \in \mathbb{R}$

Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M por número k , o determinante da nova matriz M' obtida será:

$$\det(M') = k \cdot \det(M)$$

Exemplo:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 49$$

$$\det(M') = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 98$$

$L1 \times 2$

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a - b + c = 3 \\ a + b - c = 2 \end{cases}$$

O que é?

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x, y, z, \dots, w$, toda equação do tipo:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + \dots + a_n w = b$$

Sistema linear é um conjunto de n equações lineares, nas incógnitas $x, y, z, \dots, w$.

Os números reais $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, são chamados coeficientes e b , também real, é o termo independente da equação.

Exemplo de sistema linear com três incógnitas e três equações lineares.

Sistema Linear

$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

Representação Matricial

Sistema Linear

$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$



Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

TEOREMA DE CRAMER

Teorema

Seja S um sistema linear com número de equações igual ao de incógnitas, a matriz do sistema (A) será quadrada. Se $D = \det(A) \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$), tal que:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D} \quad D \neq 0$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

... em que D_i é o determinante da matriz obtida de A , substituindo-se a i -ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Importante

Os sistemas lineares que têm solução única são chamados possíveis e determinados.

Exemplo

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

Temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{-4}{-4} \quad y = \frac{-12}{-4} \quad z = \frac{-8}{-4}$$

$$S = \{ 1, 3, 2 \}$$

SISTEMAS LINEARES

Possível
(admite solução)

Determinado
(solução única)

retas concorrentes

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

solução = (1, 2, 3)

Indeterminado
(infinitas soluções)

retas coincidentes

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$

solução = (2y - 2, y), y real

Impossível
(não admite solução)

retas paralelas

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

solução = $\emptyset$

Super Aulas

- ◆ | Matemática Criativa.
- ◆ | Inspirando professores; motivando alunos.
 - ◆ | Mapas Mentais
 - ◆ | Animações Matemáticas
 - ◆ | Slides Criativos e Editáveis

site: superaulas.lojavirtualnuvem.com.br

