

GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN
DAVID DEGENSZAJN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Matemática comercial
Matemática financeira
Estatística descritiva

11



CAPÍTULO II

Matemática financeira

I. Capital, juros, taxa de juros e montante

Fundamentalmente, a Matemática Financeira estuda os procedimentos utilizados em pagamentos de empréstimos, bem como os métodos de análise de investimentos em geral.

Quando uma pessoa empresta a outra um valor monetário durante um certo tempo, essa quantia é chamada de **capital** (ou **principal**) e é indicada por C . O valor que o empréstador cobra pelo uso do dinheiro, ou o valor pago pelo tomador do empréstimo, é chamado de **juros** e indicado por J .

A **taxa de juros**, indicada por i (do inglês *interest*, que significa juros), é expressa como porcentagem do capital. Ela representa os juros numa certa unidade de tempo, normalmente indicada da seguinte forma: ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a.), etc. Assim, por exemplo, se o capital emprestado for R\$ 8 000,00 e a taxa, 1,5% ao mês, os juros pagos no mês serão iguais a 1,5% sobre R\$ 8 000,00, que equivale a $0,015 \cdot (8\,000)$ e, portanto, igual a R\$ 120,00. De modo geral, os juros no período são iguais ao produto do capital pela taxa, isto é:

$$J = C \cdot i \quad (\text{juros no período da taxa})$$

Se o pagamento do empréstimo for feito numa única parcela, ao final do prazo do empréstimo, o tomador pagará a soma do capital emprestado com o juro, que chamaremos de **montante** e indicaremos por M . No caso do empréstimo de R\$ 8 000,00, durante 1 mês, à taxa de 1,5% ao mês, o montante será igual a R\$ 8 120,00. De modo geral, teremos:

$$M = C + J$$

As operações de empréstimo são feitas geralmente por intermédio de um banco que, de um lado, capta dinheiro de interessados em aplicar seus recursos e, de outro, empresta esse dinheiro aos tomadores interessados no empréstimo. A captação é feita sob várias formas, como, por exemplo, cadernetas de poupança e certificados de depósito bancário (cada aplicação recebe uma taxa de acordo com o prazo e os riscos envolvidos). Os tomadores também podem obter financiamento sob diversas maneiras, e as taxas cobradas dependem do prazo do empréstimo, dos custos do capital para o banco e do risco de não pagamento por parte do tomador.

Exemplos:

- 1º) Um capital de R\$ 12 000,00 foi aplicado durante 3 meses à taxa de 5% a.t. (ao trimestre). Vamos calcular os juros e o montante recebidos após 3 meses. Em reais, após 3 meses, os juros recebidos foram:

$$J = 12\,000 \cdot (0,05) = 600$$

Assim, o montante recebido, em reais, foi:

$$M = 12\,000 + 600 = 12\,600$$

- 2º) Uma empresa recebeu um empréstimo bancário de R\$ 60 000,00 por 1 ano, pagando um montante de R\$ 84 000,00. Vamos obter a taxa anual de juros. Os juros do empréstimo, em reais, são:

$$84\,000 - 60\,000 = 24\,000$$

Como $J = C \cdot i$, segue que $i = \frac{J}{C} = \frac{24\,000}{60\,000} = 0,40 = 40\% \text{ a.a.}$ (ao ano), que corresponde à taxa anual de juros.

- 3º) Um investidor aplicou R\$ 30 000,00 numa caderneta de poupança e R\$ 20 000,00 num fundo de investimento, pelo prazo de 1 ano. A caderneta de poupança rendeu no período 9% e o fundo, 12%. Vamos calcular a taxa global de juros recebidos pelo investidor.

Chamamos de J_1 os juros da caderneta de poupança, e de J_2 , os do fundo de investimento. Assim, temos, em reais:

$$J_1 = 30\,000 \cdot (0,09) = 2\,700 \text{ e } J_2 = 20\,000 \cdot (0,12) = 2\,400$$

Calculando os juros totais recebidos, temos:

$$J = 2\,700 + 2\,400 = 5\,100$$

Assim, a taxa global de juros recebidos é:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{5\,100}{50\,000} = 0,1020 = 10,20\% \text{ a.a.}$$

- 4º) Um investidor aplicou 80% de seu capital num fundo A e o restante num fundo B, pelo prazo de 1 ano. Nesse período, o fundo A rendeu 16%, enquanto o fundo B rendeu 10%. Vamos determinar a taxa global de juros ao ano recebida pelo investidor.

Seja C o capital total aplicado. A parte aplicada no fundo A é $C_A = 0,80 \cdot C$ e a parte aplicada no fundo B é $C_B = 0,20 \cdot C$.

Os juros recebidos por meio do fundo A foram:

$$J_A = 0,16 \cdot C_A = 0,16 \cdot (0,80C) = 0,128C$$

Os juros recebidos por meio do fundo B foram:

$$J_B = 0,10 \cdot C_B = 0,10 \cdot (0,20C) = 0,02C$$

Assim, os juros totais recebidos foram:

$$J_A + J_B = 0,128C + 0,02C = 0,148C$$

Finalmente, a taxa global de juros recebida na aplicação foi:

$$i = \frac{J}{C} = \frac{0,148C}{C} = 0,148 = 14,8\% \text{ a.a.}$$

EXERCÍCIOS

- 128.** Um capital de R\$ 4 000,00 foi aplicado durante 2 meses à taxa de 3% a.b. (ao bimestre). Calcule os juros e o montante recebido.
- 129.** Osvaldo aplicou R\$ 15 000,00 durante 6 meses num fundo que rendeu 10% a.s. (ao semestre). Qual o montante recebido?
- 130.** Olavo aplicou R\$ 25 000,00 numa caderneta de poupança pelo prazo de 1 ano. Sabendo-se que a taxa era de 9% a.a. (ao ano), qual o valor do montante?
- 131.** Sueli aplicou R\$ 4 800,00 num fundo de investimento e recebeu, 3 meses depois, R\$ 500,00 de juros. Qual a taxa trimestral de juros da aplicação?
- 132.** Uma empresa tomou um empréstimo de R\$ 100 000,00 por 1 dia, à taxa de 0,2% a.d. (ao dia). Qual o valor do montante pago?
- 133.** Roberto aplicou R\$ 12 000,00 num fundo e recebeu, 1 ano depois, um montante de R\$ 17 000,00. Qual a taxa anual de juros recebida?
- 134.** Em um empréstimo de R\$ 50 000,00 feito por 1 mês, uma empresa pagou um montante de R\$ 51 200,00. Qual a taxa mensal do empréstimo?

- 135.** Um investidor dobrou seu capital numa aplicação pelo prazo de 2 anos. Qual a taxa de juros no período da operação?
- 136.** (Vunesp-SP) O preço de tabela de um determinado produto é R\$ 1 000,00. O produto tem um desconto de 10% para pagamento à vista e um desconto de 7,2% para pagamento em 30 dias. Admitindo que o valor desembolsado no pagamento à vista possa ser aplicado pelo comprador em uma aplicação de 30 dias, com um rendimento de 3%, determine:
- quanto o comprador teria ao final da aplicação;
 - qual a opção mais vantajosa para o comprador: pagar à vista ou aplicar o dinheiro e pagar em 30 dias. Justifique matematicamente sua resposta.
- 137.** (FGV-SP) Um investidor norte-americano traz para o Brasil 50 000 dólares; faz a conversão de dólares para reais; aplica os reais por um ano à taxa de 18% ao ano, e no resgate converte os reais recebidos para dólares e os envia para os Estados Unidos. No dia da aplicação, um dólar valia R\$ 1,10 e, um ano depois, na data do resgate, um dólar valia R\$ 1,20.
- Qual a taxa de rendimento dessa aplicação, considerando os valores expressos em dólares?
 - Quanto deveria valer um dólar na data de resgate (um ano após a aplicação) para que a taxa de rendimento em dólares tivesse sido de 12% ao ano?
- 138.** Pedro aplicou R\$ 25 000,00 num fundo A e R\$ 45 000,00 num fundo B pelo prazo de 3 meses. Nesse período, o fundo A rendeu 15% e o B rendeu 12%. Qual a taxa global de rendimento no trimestre?
- 139.** Jair aplicou 60% de seu capital na caderneta de poupança e o restante num fundo de investimento, pelo prazo de 6 meses. Nesse período, a caderneta de poupança rendeu 5% e o fundo, 8%. Qual a taxa global de rendimento auferido por Jair nesse período?
- 140.** José Roberto aplicou 30% de seu capital num fundo A, 30% num fundo B e o restante num fundo C, pelo prazo de 8 meses. Nesse período, o fundo A rendeu 8%, o fundo B, 12% e o C, 6%. Qual a taxa global de rendimento obtida pelo investidor?
- 141.** (FGV-SP) O sr. Matias tem R\$ 12 000,00 para investir pelo prazo de um ano. Ele pretende investir parte numa aplicação A que tem um rendimento esperado de 15% ao ano sobre o valor investido, e parte numa outra aplicação B que dá um rendimento esperado de 20% sobre o valor investido.
- Qual o rendimento anual esperado, se ele aplicar R\$ 7 000,00 em A e R\$ 5 000,00 em B?
 - Qual o máximo que deve investir em A para auferir um ganho esperado de, no mínimo, R\$ 2 200,00 daqui a um ano?

- 142.** (UnB-DF) Uma pessoa investiu certo capital, por um período de 5 anos, da seguinte maneira: com $\frac{2}{5}$ do capital comprou ações da bolsa de valores; do restante, aplicou metade em imóveis e metade em caderneta de poupança. Ao final de 5 anos, ela contabilizou um prejuízo de 2% na aplicação em ações, um ganho de 20% na aplicação imobiliária e um ganho de 26% na aplicação em poupança. Calcule, em relação ao capital inicial, o percentual ganho pelo investidor, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

II. Regimes de capitalização

Se um capital for aplicado a uma certa taxa por período, por vários intervalos ou períodos de tempo, o valor do montante pode ser calculado segundo duas convenções de cálculo, chamadas de **regimes de capitalização**: **capitalização simples** (ou juros simples) e **capitalização composta** (ou juros compostos).

10. Regime de capitalização simples

De acordo com esse regime, os juros gerados em cada período são sempre os mesmos e são dados pelo produto do capital pela taxa. Os juros são pagos somente no final da aplicação.

Exemplo:

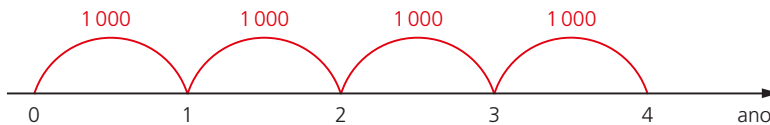
Um capital de R\$ 5 000,00 é aplicado a juros simples durante 4 anos à taxa de 20% a.a. Vamos calcular os juros gerados em cada período e o montante após o período de aplicação.

Os juros gerados no 1º ano são $5\,000 \cdot (0,20) = 1\,000$.

Os juros gerados no 2º ano são $5\,000 \cdot (0,20) = 1\,000$.

Os juros gerados no 3º ano são $5\,000 \cdot (0,20) = 1\,000$.

Os juros gerados no 4º ano são $5\,000 \cdot (0,20) = 1\,000$.



No cálculo dos juros de cada ano, a taxa incide apenas sobre o capital inicial. Assim, o montante após 4 anos vale R\$ 9 000,00.

11. Regime de capitalização composta

Nesse regime, os juros do 1º período correspondem ao produto do capital pela taxa; esses juros são adicionados ao capital, gerando o montante M_1 após 1 período.

Os juros do 2º período são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante M_1 ; esses juros são adicionados a M_1 , gerando o montante M_2 após 2 períodos.

Os juros do 3º período são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante M_2 ; esses juros são adicionados a M_2 , gerando o montante M_3 após 3 períodos.

Dessa forma, os juros em cada período são iguais ao montante do início do período multiplicado pela taxa, e esses juros são adicionados ao montante do início do período, gerando o montante do final do período.

Exemplo:

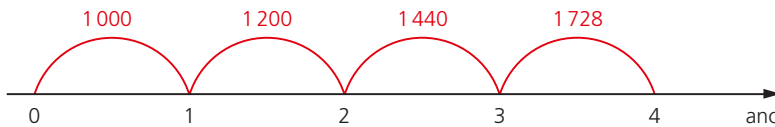
Um capital de R\$ 5 000,00 é aplicado a juros compostos durante 4 anos à taxa de 20% a.a. Vamos calcular os juros e o montante para cada período.

Os juros do 1º ano são $5\,000 \cdot (0,20) = 1\,000$, e o montante após 1 ano é $M_1 = 6\,000$.

Os juros do 2º ano são $6\,000 \cdot (0,20) = 1\,200$, e o montante após 2 anos é $M_2 = 7\,200$.

Os juros do 3º ano são $7\,200 \cdot (0,20) = 1\,440$, e o montante após 3 anos é $M_3 = 8\,640$.

Os juros do 4º ano são $8\,640 \cdot (0,20) = 1\,728$, e o montante após 4 anos é $M_4 = 10\,368$.



No Brasil, o regime de juros compostos é o mais utilizado em operações tradicionais, embora haja também a utilização dos juros simples. Entretanto, quando a operação não tiver uma prática tradicional (ou seja, operações consagradas, tais como cheque especial, crédito direto ao consumidor, desconto de títulos, etc.), o que prevalece é o regime acordado entre o tomador e o prestador.

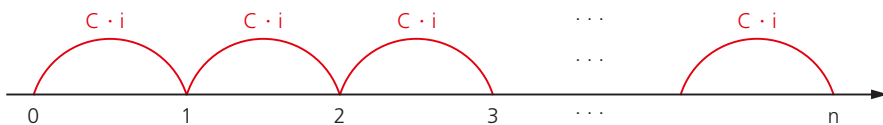
EXERCÍCIOS

- 143.** Um capital de R\$ 4 000,00 é aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m. Calcule o montante para os seguintes prazos de aplicação:
 - a) 2 meses
 - b) 3 meses
 - c) 6 meses
- 144.** Qual o montante de uma aplicação de R\$ 12 000,00 a juros simples, à taxa de 18% a.a., durante 5 anos?

- 145.** Um capital de R\$ 4 000,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 2% a.m. Calcule o montante para os seguintes prazos de aplicação:
- a) 2 meses b) 3 meses c) 4 meses
- 146.** Qual o montante de uma aplicação de R\$ 7 000,00 a juros compostos durante 4 anos, à taxa de 15% a.a.?
- 147.** (Unicamp-SP) Uma pessoa investiu R\$ 3 000,00 em ações. No primeiro mês ela perdeu 40% do total investido e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido.
- a) Com quantos reais ela ficou após os dois meses?
- b) Qual foi seu prejuízo após os dois meses, em porcentagem, sobre o valor do investimento inicial?
- 148.** (UF-MG) Um televisor estava anunciado por R\$ 500,00 para pagamento à vista ou em três prestações mensais de R\$ 185,00 cada uma; a primeira delas a ser paga um mês após a compra. Paulo, em vez de pagar à vista, resolveu depositar, no dia da compra, os R\$ 500,00 numa caderneta de poupança, que lhe renderia 2% ao mês nos próximos três meses. Desse modo, ele esperava liquidar a dívida, fazendo retiradas de R\$ 185,00 daquela caderneta nas datas de vencimento de cada prestação. Mostre que a opção de Paulo não foi boa, calculando quanto a mais ele teve de desembolsar para pagar a última prestação.
- 149.** (UF-SC, adaptado) Classifique como verdadeira ou falsa a proposição abaixo: Se uma loja vende um artigo à vista por R\$ 54,00, ou por R\$ 20,00 de entrada e mais dois pagamentos mensais de R\$ 20,00, então a loja está cobrando mais do que 10% ao mês sobre o saldo que tem a receber.

III. Juros simples

Consideremos um capital C aplicado a juros simples, a uma taxa i por período e durante n períodos de tempo. Os juros no 1º período são iguais a $C \cdot i$ e, de acordo com a definição de capitalização simples, em cada um dos períodos os juros são iguais a $C \cdot i$, conforme mostra a figura.



Assim, os juros simples da aplicação serão iguais à soma de n parcelas iguais a $C \cdot i$, ou seja:

$$J = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \dots + C \cdot i$$

E, portanto:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Os juros simples são resultados do produto do capital pela taxa e pelo prazo da aplicação. Observemos que nessa fórmula o prazo n deve estar expresso na mesma unidade de i , isto é, se a taxa i for definida em meses, o prazo n virá também em meses. Além disso, embora a fórmula tenha sido deduzida para n inteiro, ela é estendida também para qualquer prazo fracionário, por exemplo, $\frac{1}{2}$ ano, $\frac{5}{12}$ de ano.

Exemplos:

1º) Um capital de R\$ 8 000,00 é aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m., durante 5 meses. Vamos calcular os juros e o montante da aplicação.

Os juros da aplicação, em reais, são:

$$J = 8000 \cdot (0,02) \cdot 5 = 800$$

O montante da aplicação, em reais, é:

$$M = 8000 + 800 = 8800$$

2º) Vamos obter o montante de uma aplicação de R\$ 5 000,00 a juros simples e à taxa de 3% a.m., durante 2 anos.

Seja $C = 5000$, $i = 3\%$ a.m. e $n = 24$ meses.

Para calcular os juros simples, temos:

$$J = 5000 \cdot (0,03) \cdot 24 = 3600$$

E, conseqüentemente, o montante é dado por:

$$M = 5000 + 3600 = 8600$$

Assim, o valor do montante é R\$ 8600,00.

3º) Vamos determinar o capital que, aplicado a juros simples, à taxa de 1,5% a.m., durante 6 meses, resulta em um montante de R\$ 14 000,00.

Seja C o capital procurado, temos:

$$C + J = 14000$$

Portanto:

$$C + C \cdot (0,015) \cdot 6 = 14000$$

$$1,09 \cdot C = 14000$$

$$C = \frac{14000}{1,09} = 12844,04$$

Assim, o capital aplicado a juros simples é R\$ 12844,04.

- 151.** Um capital de R\$ 20 000,00 é aplicado a juros simples, durante 2 anos, à taxa de 2% a.m. Qual o montante obtido?
- 152.** Qual o capital que, aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m., durante 8 meses, resulta em um montante de R\$ 6 000,00?
- 153.** Determine o capital que, aplicado a juros simples, à taxa de 2,5% a.m., durante 2 anos, resulta em um montante de R\$ 16 000,00.
- 154.** Calcule o capital que, aplicado a juros simples, durante 11 meses e à taxa de 1,5% a.m., proporciona juros de R\$ 700,00.
- 155.** O banco RST empresta R\$ 2 000 000,00 a uma firma pelo prazo de 120 dias, cobrando juros simples à taxa de 3% a.m. Simultaneamente, ele paga aos aplicadores dessa quantia juros simples com prazo de 120 dias, à taxa de 2% a.m.
- Qual a diferença entre os juros recebidos e os pagos após os 120 dias?
 - Qual o valor dos juros pagos aos aplicadores?
- 156.** Roberto pretende comprar um carro usado cujo preço é R\$ 12 000,00 para pagamento daqui a 4 meses. Se ele conseguir aplicar seu dinheiro a juros simples e à taxa de 2% a.m.:
- Quanto deverá aplicar no ato da compra para fazer frente ao pagamento?
 - Se o preço para pagamento à vista for R\$ 11 200,00, é melhor ele pagar à vista ou a prazo?
- 157.** O sr. Macedo quer dividir seu capital de R\$ 30 000,00 em duas partes, uma para ser aplicada no banco A, que paga juros simples à taxa de 1,8% a.m., e a outra no banco B, que também paga juros simples à taxa de 2,2% a.m. A aplicação no banco A é por 2 anos e no B, por 1 ano e meio. Calcule o valor aplicado em cada banco de modo que os juros sejam iguais.
- 158.** Uma televisão é vendida à vista por R\$ 1 800,00 ou então com R\$ 400,00 de entrada mais uma parcela de R\$ 1 500,00 após 2 meses. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?
- 159.** Uma máquina de lavar roupa é vendida à vista por R\$ 1 500,00 ou então com 30% de entrada mais uma parcela de R\$ 1 200,00 após 3 meses. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?
- 160.** (Ibmec-SP, adaptado) Classifique a sentença abaixo como verdadeira ou falsa: Um televisor é vendido à vista por R\$ 1 000,00 ou a prazo com 10% de entrada e mais uma parcela de R\$ 1 080,00 após 4 meses. Logo, a taxa mensal de juros simples do financiamento é 4,5%.

- 161.** (FGV-SP) Carlos adquiriu um aparelho de TV em cores pagando uma entrada de R\$ 200,00 mais uma parcela de R\$ 450,00 dois meses após a compra. Sabendo-se que o preço à vista do aparelho é R\$ 600,00:
- qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?
 - após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R\$ 450,00 para que a taxa de juros simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês?
- 162.** (U.F. Juiz de Fora-MG, adaptado) O preço à vista de uma mercadoria é R\$ 130,00. O comprador pode pagar 20% no ato da compra e o restante em uma única parcela de R\$ 128,96, vencível em 3 meses. Admitindo-se o regime de juros simples comerciais, qual a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo?
- 163.** Um aparelho de som é vendido por R\$ 1 200,00 para pagamento dentro de 3 meses após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 9% sobre o preço de R\$ 1 200,00. Qual a taxa mensal de juros simples cobrada na compra a prazo?
- 164.** Resolva o exercício anterior considerando um desconto de 5% sobre o preço de R\$ 1 200,00.
- 165.** Um banco concedeu a uma empresa um empréstimo a juros simples por 15 meses. Qual a taxa mensal do empréstimo sabendo-se que o montante é igual a 160% do capital emprestado?
- 166.** Durante quanto tempo um capital de R\$ 25 000,00 deve ser aplicado a juros simples e à taxa de 2% a.m. para se obter um montante de R\$ 30 000,00?
- 167.** Um capital aplicado a juros simples e à taxa de 8% a.a. triplica em que prazo?
- 168.** Calcule o montante de uma aplicação de R\$ 8 000,00 a juros simples, durante 96 dias, à taxa de:
- 3% a.m.
 - 54% a.a.
 - 24% a.t.
- 169.** Calcule o montante de uma aplicação de R\$ 200 000,00 a juros simples, durante 1 dia, à taxa de 30% a.a.
- 170.** Qual o montante de uma aplicação de R\$ 200 000,00 a juros simples, durante 1 dia, à taxa de 4% a.m.?
- 171.** Uma aplicação financeira de R\$ 2 500,00 a juros simples gerou, 6 meses depois, um montante de R\$ 2 920,00. Qual a taxa anual da aplicação?
- 172.** Uma aplicação financeira de R\$ 8 000,00 gerou, após 142 dias, um montante de R\$ 10 000,00. Qual a taxa mensal de juros simples da aplicação?
- 173.** A que taxa anual um capital de R\$ 4 500,00 deve ser aplicado, a juros simples, para render juros de R\$ 300,00 no prazo de 3 meses e 12 dias?

- 174.** A que taxa anual um capital deve ser aplicado, a juros simples, para triplicar num prazo de 72 dias?
- 175.** Renata pretende comprar um aparelho de som cujo preço é R\$ 1 200,00 para pagamento dentro de 100 dias. Se ela conseguir aplicar seu dinheiro a juros simples e à taxa de 1,8% a.m.:
- Quanto deverá aplicar no ato da compra para fazer frente ao pagamento?
 - Se o preço para pagamento à vista for de R\$ 1 050,00, é melhor ela pagar à vista ou a prazo?

IV. Descontos simples

Quando um comprador efetua uma compra de muitas unidades de um produto, é comum que ele peça um abatimento no preço por unidade. Esse abatimento é chamado **desconto**. O pedido de desconto ocorre também quando o comprador, tendo um prazo para o pagamento de um produto, propõe o pagamento à vista, desde que haja abatimento no preço. O pedido de desconto também pode ocorrer quando o comprador tenta pagar menos por algum produto ou serviço.

Existe ainda o conceito de **desconto de títulos**, muito empregado por empresas. Suponhamos que uma empresa faça uma venda de R\$ 15 000,00 para outra empresa, concedendo um prazo de 2 meses para o pagamento. Nesse caso, o vendedor emite um documento chamado **duplicata**, que lhe dará o direito de cobrar o valor de R\$ 15 000,00 do comprador dentro de 2 meses.

Caso o vendedor necessite do dinheiro antes do vencimento da duplicata, ele pode ir a um banco e efetuar o desconto da duplicata. O procedimento consiste em a empresa ceder o direito do recebimento da duplicata para o banco, em troca recebendo do banco um valor menor que o valor da duplicata. Digamos, por exemplo, que a duplicata de R\$ 15 000,00 seja descontada 1 mês antes do vencimento e que a empresa receba do banco R\$ 14 800,00 nessa data. Assim, em troca de um adiantamento de R\$ 14 800,00, o banco fica com o direito de receber a duplicata de R\$ 15 000,00 um mês depois. A diferença entre R\$ 15 000,00 e o valor de R\$ 14 800,00 adiantado pelo banco é chamada de **desconto da duplicata**.

De modo análogo, os bancos descontam **cheques pré-datados** e **notas promissórias** (estas são papéis que representam uma promessa de pagamento ao credor, feita pelo devedor).

Chamemos de N o valor do título a ser descontado, d a taxa de desconto utilizada pelo banco e n o prazo de antecipação do vencimento do título. O **desconto bancário** (ou **comercial**), indicado por D , é definido por:

$$D = N \cdot d \cdot n$$

em que o prazo n deve estar expresso na mesma unidade da taxa de desconto d .

A diferença $N - D$, que a empresa recebe antecipadamente, recebe o nome de **valor descontado** (ou **valor líquido**) do título e é indicada por V_d .

Exemplos:

1º) Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R\$ 12 000,00, três meses antes do vencimento, a uma taxa de desconto de 3% a.m. Vamos calcular a taxa de juros simples efetivamente cobrada pelo banco.

O desconto é dado por $D = 12\,000 \cdot (0,03) \cdot 3 = 1\,080$.

Calculando o valor descontado (ou líquido) recebido pela empresa, temos, em reais:

$$V_d = 12\,000 - 1\,080 = 10\,920$$

Para o banco, o valor de R\$ 10 920,00 adiantado para a empresa é o capital, e o valor de R\$ 12 000,00, a ser recebido dentro de 3 meses, é o montante. Assim, os juros recebidos pelo banco totalizam R\$ 1 080,00.

A taxa mensal de juros simples efetivamente cobrada pelo banco é dada pela fórmula $J = C \cdot i \cdot n$, ou seja, $1\,080 = 10\,920 \cdot i \cdot 3$.

Portanto, a taxa de juros simples cobrada pelo banco é $i = 3,30\%$ a.m.

Observemos que a diferença entre a taxa de desconto (d) e a taxa de juros (i) decorre do fato de a primeira incidir sobre o valor final (R\$ 12 000,00), enquanto a segunda incide sobre o valor inicial (R\$ 10 920,00).

2º) Um banco cobra em suas operações de desconto de duplicatas, com prazo de antecipação de 2 meses, uma taxa de desconto comercial de 2,5% a.m. Qual a taxa mensal de juros simples que está sendo efetivamente cobrada?

Como o valor da duplicata não foi informado, admitamos, por exemplo, um valor igual a R\$ 100,00.

Assim, o desconto vale, em reais:

$$D = 100 \cdot (0,025) \cdot 2 = 5$$

e o valor descontado é igual a R\$ 95,00.

Em resumo, o banco emprestou R\$ 95,00 (capital) para receber um montante igual a R\$ 100,00. Os juros cobrados somaram R\$ 5,00.

Pela fórmula dos juros simples, temos, então:

$$5 = 95 \cdot i \cdot 2 \Rightarrow i = 0,0263 = 2,63\% \text{ a.m.}$$

Observemos que, atribuindo à duplicata qualquer outro valor, encontramos a mesma resposta. Genericamente, podemos chamar de N o valor da duplicata.

3º) Um pequeno comerciante leva a um banco o seguinte conjunto de cheques pré-datados para serem descontados à taxa de desconto de 2,8% a.m.

Cheque	Valor	Prazo de antecipação
A	R\$ 500,00	2 meses
B	R\$ 1 500,00	1 mês
C	R\$ 2 000,00	45 dias

Vamos determinar o valor líquido recebido pela empresa.
O valor total dos cheques é R\$ 4 000,00.

Calculando os descontos, temos:

- desconto do cheque A: $D_A = 500 \cdot (0,028) \cdot 2 = 28$
- desconto do cheque B: $D_B = 1 500 \cdot (0,028) \cdot 1 = 42$
- desconto do cheque C: $D_C = 2 000 \cdot (0,028) \cdot \frac{45}{30} = 84$

Subtraindo os descontos do valor total dos cheques, temos:

$$4 000 - 28 - 42 - 84 = 3 846$$

Portanto, o valor líquido recebido pela empresa é R\$ 3 846,00.

EXERCÍCIOS

- 176.** Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R\$ 14 000,00, dois meses antes do vencimento, a uma taxa de desconto de 3,5% a.m.
- Qual o valor do desconto?
 - Qual o valor descontado recebido pela empresa?
 - Qual a taxa mensal de juros simples efetivamente cobrada pelo banco?
- 177.** Uma empresa desconta em um banco uma duplicata de R\$ 18 000,00, setenta e dois dias antes do vencimento, a uma taxa de desconto de 3,2% a.m. Responda:
- Qual o valor do desconto?
 - Qual o valor descontado recebido pela empresa?
 - Qual a taxa mensal de juros simples efetivamente cobrada pelo banco?
- 178.** Ao descontar uma promissória de R\$ 2 800,00 a uma taxa de desconto de 2,4% a.m., o banco creditou na conta de uma certa empresa um valor líquido de R\$ 2 632,00. Qual o prazo de antecipação?

- 179.** Artur descontou uma promissória de R\$ 8 000,00 em um banco a uma taxa de desconto de 2,5% a.m. Sabendo-se que o desconto foi de R\$ 250,00, obtenha o prazo de antecipação expresso em dias.
- 180.** Ao descontar uma promissória com prazo de 45 dias, um banco calculou um desconto de R\$ 1 200,00. Qual o valor da promissória sabendo-se que a taxa de desconto utilizada foi de 4% a.m.?
- 181.** Uma gráfica, ao descontar em um banco uma duplicata com prazo de antecipação de 65 dias e valor de R\$ 15 000,00, recebeu um valor líquido de R\$ 13 800,00. Qual a taxa de desconto mensal utilizada pelo banco?
- 182.** Uma gráfica, necessitando de R\$ 15 000,00 para pagamento em 3 meses, pode obter esse valor mediante o desconto de uma duplicata à taxa de desconto de 4% a.m. ou ainda mediante uma linha de crédito bancário que cobra juros simples de 4,2% a.m. Qual das duas opções é a mais vantajosa para a gráfica?
- 183.** Um banco cobra, em suas operações de desconto de duplicatas com prazo de antecipação de 3 meses, uma taxa de desconto de 3,6% a.m. Qual a taxa mensal de juros simples que está sendo efetivamente cobrada?
- 184.** Um comerciante, necessitando hoje de R\$ 30 000,00, resolve pedir um empréstimo a um agiota. Este propõe que o comerciante assine uma nota promissória de valor N com prazo de 3 meses. Em seguida, o comerciante desconta a promissória a uma taxa de desconto de 3% a.m. a fim de obter um valor líquido de R\$ 30 000,00. Qual o valor de N?
- 185.** Em relação ao exercício anterior, suponha que fossem assinadas duas promissórias, cada uma de valor P, vencíveis em 2 e 3 meses, de modo que a soma de seus valores descontados fosse R\$ 30 000,00. Qual o valor de P?
- 186.** Um pequeno comerciante leva a um banco 3 cheques pré-datados, cujos valores são R\$ 2 000,00, R\$ 2 500,00 e R\$ 3 000,00, vencíveis em 45, 60 e 100 dias, respectivamente. O banco utiliza uma taxa de desconto de 2,7% a.m. Qual é o valor líquido recebido pelo comerciante?
- 187.** O dono de uma pequena indústria metalúrgica leva a um banco as duplicatas A, B e C para serem descontadas.

Duplicata	Valor	Prazo de antecipação
A	R\$ 4 000,00	2 meses
B	R\$ 14 000,00	50 dias
C	R\$ 8 000,00	75 dias

Se o banco utilizar uma taxa de desconto de 2,5% a.m., qual será o valor líquido recebido pela empresa?

Observação:

Nesses cálculos, primeiro calculamos a potência usando as teclas y^x ou x^y de uma calculadora e, com o resultado no visor, multiplicamos pelo capital.

Caso tivéssemos calculado a potência arredondada para 4 casas decimais, por exemplo, e multiplicássemos o resultado pelo capital, teríamos um resultado ligeiramente diferente em virtude do arredondamento. Assim, no cálculo de $5\,000(1,02)^5$, teríamos:

$$5\,000(1,02)^5 = 5\,000(1,1041) = 5\,520,50$$

Todavia, julgamos que essas pequenas diferenças por arredondamento não devem constituir motivo de preocupação, pelo menos nesta etapa da aprendizagem.

- 2º) Qual o capital que deve ser aplicado a juros compostos durante 5 meses e à taxa de 1,5% a.m. para resultar em um montante de R\$ 12 000,00?

Seja C o capital aplicado. Devemos ter:

$$12\,000 = C(1 + 0,015)^5$$

Portanto:

$$12\,000 = C(1,015)^5$$

$$12\,000 = C(1,0773)$$

$$C = \frac{12\,000}{1,0773} = 11\,138,96$$

O capital que deve ser aplicado é R\$ 11 138,96.

Notemos que o resultado foi obtido usando-se 4 casas decimais na calculadora. Se tivéssemos utilizado um número diferente de casas decimais, teríamos obtido um resultado ligeiramente diferente.

- 3º) Um capital de R\$ 2 000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 4 meses, produzindo um montante de R\$ 2 200,00. Qual a taxa mensal de juros da aplicação? Designando por i a taxa mensal procurada, devemos ter:

$$2\,200 = 2\,000(1 + i)^4$$

Portanto:

$$(1 + i)^4 = 1,1$$

$$[(1 + i)^4]^{\frac{1}{4}} = [1,1]^{\frac{1}{4}}$$

$$(1 + i)^1 = (1,1)^{0,25}$$

$$1 + i = 1,0241$$

$$i = 0,0241 = 2,41\% \text{ a.m.}$$

Assim, a taxa mensal de juros da aplicação é 2,41%.

EXERCÍCIOS

- 188.** Qual o montante de uma aplicação de R\$ 3 000,00 a juros compostos, durante 10 meses, à taxa de 1,4% a.m.?
- 189.** Uma empresa tomou um empréstimo bancário de R\$ 80 000,00 pelo prazo de 1 ano. Calcule o montante pago sabendo que o banco cobrou juros compostos à taxa de 5% a.t.
- 190.** a) Um investidor aplicou R\$ 12 000,00 a juros compostos, durante 2 anos, à taxa de 1,5% a.m. Qual o valor dos juros recebidos?
b) Considerando o valor de juros recebidos o mesmo do item anterior, e o regime de juros simples, qual seria a taxa mensal com o mesmo prazo de aplicação?
- 191.** (PUC-RJ, adaptado) Uma carteira de investimento rende 2% ao mês. Depois de três meses, R\$ 1 500,00 aplicados cumulativamente nessa carteira valem aproximadamente x reais. Determine o valor de x .
- 192.** Afonso pode comprar um terreno por R\$ 20 000,00. Ele sabe que, com certeza, o terreno valerá R\$ 30 000,00 daqui a 5 anos. Se ele tiver a alternativa de aplicar o dinheiro a juros compostos, à taxa de 9% ao ano, será que a aplicação no terreno valerá a pena?
- 193.** Em 1626, Peter Minuit comprou a ilha de Manhattan (em Nova Iorque) dos índios em troca de objetos no valor de 24 dólares. (Dados extraídos de: Zvi Bodie. *Finanças*. Porto Alegre: Bookman, 1999.) Se os índios tivessem recebido em dinheiro e aplicado esse valor a juros compostos, à taxa de 8% a.a., qual teria sido seu montante em 2004, 378 anos depois?
- 194.** (UF-PE, adaptado) Em um país irreal, o governante costuma fazer empréstimos para viabilizar sua administração. Existem dois empréstimos possíveis: pode-se tomar emprestado de países ricos, com juros de 4,2% ao ano (aqui incluída a taxa de risco) ou toma-se emprestado dos banqueiros do país irreal, que cobram juros compostos de 3% ao mês. Pressões políticas da oposição obrigam o governante a contrair empréstimos com os banqueiros do seu país. Quantas vezes maiores que os juros anuais cobrados pelos países ricos são os juros anuais cobrados pelos banqueiros do país irreal? (Use a aproximação $1,03^{12} \cong 1,42$.)
- 195.** José Luís aplicou R\$ 12 000,00 por 10 meses num fundo que rende juros compostos à taxa de 1,4% a.m.
a) Qual o montante recebido?
b) Quanto ele ganhou de juros ao longo do 10º mês?

- 196.** (UF-PA, adaptado) Suely recebeu R\$ 1 000,00 (mil reais) e pretende investi-los no prazo de dois anos. Um amigo lhe sugere duas opções de investimento. Na primeira delas, a rentabilidade é de 20% ao ano e, no momento do resgate, há um desconto de 25% sobre o valor acumulado, referente ao imposto de renda. Na segunda, a rentabilidade é de 6% ao ano, sem incidência de imposto. Efetuando os cálculos necessários, determine qual aplicação renderá mais a Suely após dois anos. Suponha regime de juros compostos.
- 197.** José Carlos aplicou R\$ 10 000,00 e aplicará mais R\$ 10 000,00 daqui a 3 meses num fundo de investimentos que rende juros compostos à taxa de 1,3% a.m. Qual será seu montante daqui a 9 meses?
- 198.** Teresa aplicou 30% de seu capital, durante um ano, a juros simples e à taxa de 2,5% a.m. O restante foi aplicado a juros compostos, à taxa de 1,5% a.m., também por um ano. Qual foi a taxa de rendimento anual auferida na aplicação como um todo em relação ao capital inicial?
- 199.** Qual o capital que deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 1,8% a.m., durante 8 meses, para dar um montante de R\$ 6 000,00?
- 200.** Cristina tem uma dívida de R\$ 10 000,00 que vence no prazo de 5 meses. Quanto deverá aplicar hoje, a juros compostos e à taxa de 1,2% a.m., para poder pagar a dívida?
- 201.** O sr. Fontana pretende abrir mais uma farmácia dentro de 2 anos, em sua rede de farmácias. Para isso, ele precisará ter R\$ 120 000,00 daqui a 2 anos. Quanto deverá aplicar hoje, a juros compostos e à taxa de 1,6% a.m., para atingir seu objetivo?
- 202.** Um capital de R\$ 2 000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 10 meses, gerando um montante de R\$ 2 400,00. Qual a taxa mensal de juros compostos?
- 203.** Um microcomputador é vendido à vista por R\$ 2 000,00 ou a prazo com R\$ 400,00 de entrada mais uma parcela de R\$ 1 800,00 a ser paga três meses após a compra. Qual a taxa mensal de juros compostos do financiamento?
- 204.** Um fogão é vendido à vista por R\$ 800,00 ou a prazo com 30% de entrada mais uma parcela de R\$ 700,00 após 5 meses. Qual a taxa mensal de juros compostos do financiamento?
- 205.** Um aparelho de blu-ray é vendido por R\$ 600,00 para pagamento dentro de 2 meses após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 5% sobre o preço de R\$ 600,00. Qual a taxa mensal de juros compostos cobrada na venda a prazo?
- 206.** A que taxa trimestral de juros compostos um capital deve ser aplicado durante 1 ano para que duplique seu valor?

- 207.** César aplicou um capital a juros compostos, durante 2 anos e meio, e recebeu de juros 40% do capital aplicado. Qual a taxa mensal de juros?
- 208.** Um capital de R\$ 4000,00 foi aplicado a juros compostos à taxa de 25% a.a. Calcule o montante, considerando cada um dos seguintes prazos de aplicação:
a) 90 dias b) 1 mês c) 120 dias d) 75 dias e) 5 meses
- 209.** Um banco concedeu um empréstimo a uma empresa no valor de R\$ 20 000,00, pelo prazo de 72 dias, cobrando um montante de R\$ 26 000,00.
a) Qual a taxa mensal de juros compostos do financiamento?
b) Qual a taxa anual de juros compostos do financiamento?
- 210.** Durante quanto tempo um capital de R\$ 5 000,00 deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 1,9% a.m., para se obter um montante de R\$ 7 000,00?
- 211.** Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 2% a.m., para que triplique seu valor?
- 212.** Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 5% a.t., para que quadruple seu valor?
- 213.** Augusto aplicou um capital a juros compostos e à taxa de 1,3% a.m. Qual o prazo da aplicação para que ele receba de juros 60% do capital aplicado?
- 214.** Um agiota emprestou certa quantia, por 1 ano e 8 meses, a juros simples, à taxa de 10% a.m., recebendo ao final desse período o capital acrescido dos juros. Por quanto tempo ele deveria aplicar o capital emprestado, a juros compostos, à taxa de 1,5% a.m., a fim de receber o mesmo montante do empréstimo?
- 215.** (UF-PI) Um capital é empregado a uma taxa anual de 5% (juros compostos), calculada anualmente. Se o valor do montante, depois de n anos, é aproximadamente 34% maior do que o capital inicial, qual o valor de n ? (Use $\log_{10} 1,05 = 0,02$ e $\log_{10} 1,34 = 0,12$.)
- 216.** Um capital de R\$ 900,00 é aplicado a juros compostos e à taxa de 3% a.m. Outro capital de R\$ 1 000,00 também é aplicado a juros compostos, à taxa de 2% a.m. Depois de quanto tempo aproximadamente os montantes se igualam?
- 217.** (FGV-SP)
a) Uma empresa tomou um empréstimo bancário de R\$ 500 000,00 para pagamento em 3 parcelas anuais, sendo a 1ª daqui a 1 ano. O banco combinou cobrar juros compostos a uma taxa de 20% ao ano. Sabendo-se que a 1ª parcela foi de R\$ 180 000,00 e a 2ª de R\$ 200 000,00, qual será o valor da 3ª?
b) Durante quantos meses um capital deve ser aplicado a juros compostos e à taxa de 8% ao ano para que o montante seja o triplo do capital aplicado? (Você pode deixar a resposta indicada, sem fazer os cálculos.)

218. (U.F. Ouro Preto-MG) Chamamos de sistema de juros contínuos ao tipo de aplicação na qual os juros são capitalizados a cada instante t . Nesse tipo de aplicação, um capital C , empregado a uma taxa de $i\%$ ao ano, depois de t anos, será transformado em $C \cdot e^{\left(\frac{i \cdot t}{100}\right)}$, onde e é um número irracional cujo valor aproximado é 2,71.

Com base nas informações anteriores, calcule, aproximadamente, quanto tempo será necessário para que seja dobrado um capital C aplicado a juros contínuos de 20% ao ano.

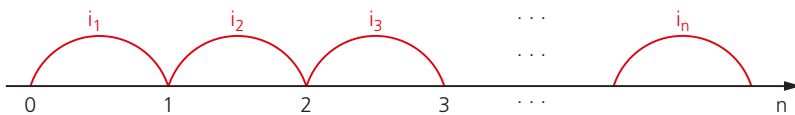
(Dado: $\log_e 2 \cong 0,69$.)

219. Um capital C é aplicado a uma taxa mensal de juros i durante n meses. Para que valores de n o montante a juros simples é maior que o montante a juros compostos?

VI. Juros compostos com taxa de juros variáveis

Ao deduzirmos a fórmula do montante no item **Juros compostos**, admitimos que a taxa de juros permanecia constante em todos os períodos. Todavia, há algumas situações em que a taxa pode se modificar ao longo dos períodos. Um exemplo comum dessa situação ocorre quando analisamos as taxas de rentabilidade de fundos, que geralmente assumem valores diferentes mês a mês.

Consideremos um capital C aplicado a juros compostos, durante n períodos de tempo, sendo i_1 a taxa no 1º período, i_2 a taxa no 2º período, i_3 a taxa no 3º período, e assim sucessivamente até a taxa i_n no n -ésimo período, como mostra a figura abaixo.



Para obtermos o montante final da aplicação, vamos calcular o montante em cada um dos períodos.

- Montante ao final do 1º período:

$$M_1 = C + C \cdot i_1 = C(1 + i_1)$$

- Montante ao final do 2º período:

$$M_2 = M_1(1 + i_2) = C(1 + i_1)(1 + i_2)$$

- Montante ao final do 3º período:

$$M_3 = M_2(1 + i_3) = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$$

Procedendo de modo análogo até o último período, podemos concluir que o montante ao final do último período é dado por:

$$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_n)$$

Exemplos:

1º) Um investidor aplicou R\$ 8000,00 num fundo de investimentos por 3 meses. No 1º mês o fundo rendeu 1,2%, no 2º mês rendeu 1,7% e no 3º rendeu 1,5%.

a) Qual o montante ao final dos 3 meses?

De acordo com a fórmula descrita anteriormente:

$$M = 8000(1,012)(1,017)(1,015)$$

$$M = 8357,14$$

Assim, o montante ao final dos três meses foi R\$ 8357,14.

b) Qual a taxa de rentabilidade acumulada no trimestre?

Seja i a taxa acumulada no trimestre. O montante para essa taxa deve ser igual ao montante obtido no item a, isto é:

$$8000(1 + i)^1 = 8357,14$$

Portanto:

$$1 + i = 1,0446$$

$$i = 0,0446 = 4,46\%$$

A taxa de rentabilidade acumulada no trimestre foi de 4,46%.

2º) Em certo mês, um fundo de investimentos rendeu 5%, e, no mês seguinte, rendeu -3%. Qual foi a taxa de rentabilidade acumulada no bimestre?

Seja i a taxa acumulada no bimestre. Devemos ter:

$$C(1 + i) = C(1,05)(1 - 0,03)$$

$$1 + i = (1,05)(0,97)$$

$$1 + i = 1,0185$$

$$i = 0,0185 = 1,85\%$$

Portanto, a taxa de rentabilidade acumulada no bimestre foi de 1,85%.

EXERCÍCIOS

220. Um investidor aplicou R\$ 7500,00 num fundo de investimentos por 2 meses. No 1º mês o fundo rendeu 1,9% e no 2º rendeu 2,4%.

a) Qual o montante após os 2 meses?

b) Qual a taxa acumulada no bimestre?

- 221.** Em outubro, novembro e dezembro um fundo de investimentos rendeu 2,1%, 1,7% e 1,9%, respectivamente. Qual foi o montante, no final de dezembro, de uma aplicação de R\$ 12 000,00 feita no início de outubro?
- 222.** Em 3 meses sucessivos um fundo de ações rendeu 4%, -2% e -6%. Qual o montante obtido, ao final dos 3 meses, de uma aplicação inicial de R\$ 14 000,00?
- 223.** Se em 12 meses sucessivos um fundo render 1,2% a.m., qual será o montante de uma aplicação inicial de R\$ 10 000,00?
- 224.** Em janeiro, um fundo rendeu 2% e em fevereiro rendeu 2,5%. Responda:
 a) Qual a taxa de rentabilidade acumulada no período?
 b) Qual deveria ser a taxa de rentabilidade em março para que a taxa acumulada no trimestre fosse 6,5%?
- 225.** Se em 4 meses sucessivos um fundo de ações render -1,5% a.m., qual será a taxa acumulada no quadrimestre?

VII. Valor atual de um conjunto de capitais

Suponhamos que uma pessoa tenha uma dívida de R\$ 15 000,00 que vence daqui a 1 mês. Suponhamos ainda que ela consiga aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 2% a.m. Quanto essa pessoa deverá aplicar hoje àquela taxa para ter dinheiro suficiente para pagar a dívida?

Para resolvermos essa questão, devemos encontrar o capital que, aplicado por 1 mês a juros compostos e à taxa de 2% a.m., gera um montante de R\$ 15 000,00. Assim, indicando esse capital por C , devemos ter:

$$C(1,02)^1 = 15000$$

E, portanto:

$$C = \frac{15000}{(1,02)^1} = 14705,88$$

O valor encontrado é chamado de **valor atual** de R\$ 15 000,00 a uma taxa de 2% a.m.

No exemplo citado, caso a pessoa tivesse uma dívida de R\$ 15 000,00 para daqui a 1 mês e outra de R\$ 16 000,00 para daqui a 2 meses, o valor que ela precisaria para pagar ambos os compromissos pode ser obtido da seguinte forma:

- Para pagar a dívida de R\$ 15 000,00, hoje a pessoa precisaria de:

$$C = \frac{15000}{(1,02)^1} = 14705,88$$

- Para pagar a dívida de R\$ 16 000,00, hoje ela precisaria de:

$$C = \frac{16000}{(1,02)^2} = 15378,70$$

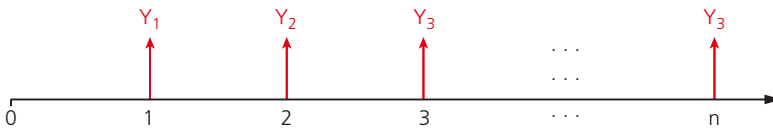
- Portanto, para saldar as duas dívidas, hoje ela precisaria de:

$$\frac{15000}{(1,02)^1} + \frac{16000}{(1,02)^2} = 30084,58$$

Esse valor é chamado de **valor atual** dos valores de R\$ 15 000,00 e R\$ 16 000,00 à taxa de 2% a.m.

De modo geral, dado um conjunto de valores monetários Y_1 na data 1, Y_2 na data 2, Y_3 na data 3, e assim por diante até o valor Y_n na data n (ver figura a seguir), chamamos de valor atual desse conjunto, a uma taxa i , ao valor indicado por V , que, aplicado à taxa i , gera as rendas $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$, isto é:

$$V = \frac{Y_1}{(1+i)^1} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{Y_n}{(1+i)^n}$$



Exemplos:

- 1º) Uma pessoa tem dívidas de R\$ 2 000,00, R\$ 3 500,00 e R\$ 5 000,00 que vençam dentro de 2, 5 e 6 meses, respectivamente. Quanto deverá aplicar hoje, a juros compostos e à taxa de 1% a.m., para poder pagar esses compromissos? O valor que deve ser aplicado hoje, para fazer frente aos compromissos, corresponde ao valor atual dos compromissos à taxa de 1% a.m., e vale:

$$V = \frac{2000}{(1,01)^2} + \frac{3500}{(1,01)^5} + \frac{5000}{(1,01)^6}$$

Portanto:

$$V = 1960,59 + 3330,13 + 4710,23 = 10000,95$$

O valor a ser aplicado é R\$ 10 000,95.

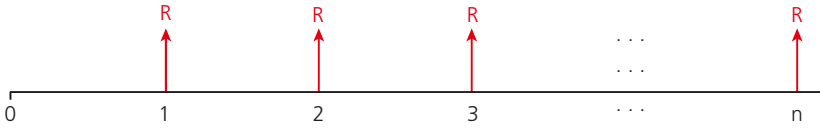
- 2º) Um conjunto de sofás é vendido a prazo em 5 prestações mensais de R\$ 400,00 cada uma, sendo a primeira um mês após a compra. Se o pagamento for à vista, o preço cobrado é R\$ 1 750,00. Qual a melhor alternativa de pagamento de um comprador que consegue aplicar seu dinheiro à taxa de juros compostos igual a 2% a.m.?

- 230.** Um microcomputador é encontrado à venda em duas condições de pagamento:
- em 3 prestações mensais de R\$ 1 024,00 cada uma, sem entrada;
 - em 4 prestações mensais de R\$ 778,00 cada uma, sem entrada.
- Qual a melhor alternativa de pagamento para um comprador que aplica seu dinheiro a juros compostos à taxa de 1% a.m.?
- 231.** (Unicamp-SP) O IPVA de um carro, cujo valor é R\$ 8 400,00, é de 3% do valor do carro e pode ser pago de uma das seguintes formas:
- À vista, no dia 15/1/1996, com um desconto de 5%. Qual o valor a ser pago nesse caso?
 - Em 3 parcelas iguais (sem desconto), sendo a primeira no dia 15/1/1996, a segunda no dia 14/2/1996 e a terceira no dia 14/3/1996. Qual o valor de cada parcela nesse caso?
 - Suponha que o contribuinte disponha da importância para o pagamento à vista (com desconto) e que, nos períodos de 15/1/1996 a 14/2/1996 e de 14/2/1996 a 14/3/1996, o dinheiro disponível possa ser aplicado a uma taxa de 4% em cada um desses períodos. Qual a forma de pagamento mais vantajosa para o contribuinte? Apresente os cálculos que justificam sua resposta.
- 232.** (UF-RJ) A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%. Certa mercadoria, cujo preço à vista é P, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R\$ 100,00 de entrada, uma prestação de R\$ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R\$ 220,00 a ser paga em 60 dias. Determine P, o valor de venda à vista dessa mercadoria.
- 233.** Uma televisão é vendida à vista por R\$ 1 100,00 ou a prazo, em duas prestações mensais iguais, sem entrada.
- Qual o valor de cada prestação se a loja cobra juros compostos com taxa de 4% a.m.?
 - Qual o valor de cada prestação, considerando uma taxa de juros compostos de 3% a.m.?
- 234.** Um aparelho de som é vendido à vista por R\$ 1 200,00 ou a prazo com R\$ 200,00 de entrada mais 3 prestações mensais iguais. Qual o valor de cada prestação se a loja cobra juros compostos à taxa de 3% a.m.?

VIII. Sequência uniforme de pagamentos

Consideremos um valor financiado V que deve ser pago em prestações iguais de valor R nas datas 1, 2, 3, ..., n e suponhamos que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo.

Chamamos esse conjunto de **sequência uniforme de pagamentos**. Veja a figura a seguir, em que os pagamentos são representados por R.



Podemos indicar o valor atual das prestações, representado por V, à taxa i, como:

$$V = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Considerando que o 2º membro dessa expressão é a soma dos termos de uma Progressão Geométrica finita, cuja razão é $q = \frac{1}{1+i}$ e cujo 1º termo é $a_1 = \frac{R}{(1+i)}$, podemos aplicar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica finita, como segue:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

Assim, temos:

$$V = \frac{R}{(1+i)} \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$\frac{1}{(1+i)} - 1$$

$$V = R \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)} \left[\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n} \right]}{\frac{1 - (1+i)}{(1+i)}}$$

$$V = R \cdot \frac{\left[\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n} \right]}{-i} = R \cdot \frac{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \right]}{i}$$

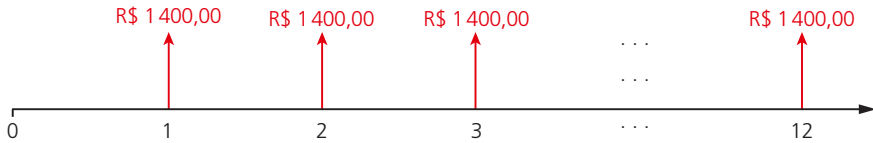
E, finalmente:

$$V = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

Essa é a fórmula que relaciona o valor atual com a prestação, taxa de juros e número de prestações.

Exemplos:

- 1º) Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro. O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R\$ 1400,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor do empréstimo, sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% a.m.? O empréstimo deve ser pago em 12 prestações mensais uniformes, sem entrada, conforme mostra a figura abaixo:



Assim, temos $R = 1400$, $n = 12$ e $i = 3\%$ a.m.

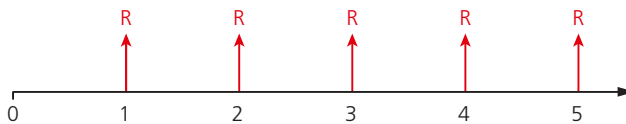
O valor do empréstimo corresponde ao valor atual desses pagamentos, que, conforme a fórmula dada, vale:

$$V = 1400 \cdot \frac{(1,03)^{12} - 1}{(1,03)^{12} \cdot 0,03}$$

$$V = 13935,61$$

Portanto, o valor emprestado pelo banco foi de R\$ 13935,61.

- 2º) Uma loja vende uma televisão por R\$ 1200,00 à vista ou financia essa quantia em 5 prestações mensais iguais, sem entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos cobrada for de 2,5% a.m.? Chamando de R o valor de cada prestação, os pagamentos podem ser representados pela figura abaixo:



Temos $V = 1200$, $n = 5$ e $i = 2,5\%$ a.m.

Portanto:

$$1200 = R \cdot \frac{(1,025)^5 - 1}{(1,025)^5 \cdot 0,025}$$

$$1200 = R \cdot 4,645828$$

$$R = \frac{1200}{4,645828} = 258,30$$

Assim, cada prestação mensal deve valer R\$ 258,30.

3º) Qual será o valor de cada prestação do exemplo anterior se a loja cobrar uma entrada de R\$ 300,00?

Nesse caso o valor financiado passa a ser R\$ 900,00 (1200 – 300).

Assim, $V = 900$, $n = 5$ e $i = 2,5\%$ a.m.

Portanto:

$$900 = R \cdot \frac{(1,025)^5 - 1}{(1,025)^5 \cdot 0,025}$$

$$900 = R \cdot 4,645828$$

$$R = \frac{900}{4,645828} = 193,72$$

O valor de cada prestação será R\$ 193,72.

EXERCÍCIOS

- 235.** Um banco concede um empréstimo a uma pessoa cobrando 10 prestações mensais de R\$ 700,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor emprestado, sabendo-se que o banco cobra juros compostos, à taxa de 4% a.m.?
- 236.** Na venda de uma geladeira, uma loja anuncia o pagamento em 6 prestações mensais de R\$ 1250,00 cada uma, sem entrada. Qual o preço à vista, sabendo-se que a loja cobra no financiamento juros compostos, à taxa de 3,2% a.m.?
- 237.** Um banco concede um empréstimo de R\$ 20 000,00 a uma pessoa, para ser pago em 8 prestações mensais iguais, sem entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos cobrada for de 2,8% a.m.?
- 238.** Um aparelho de som é vendido à vista por R\$ 900,00 ou a prazo em n prestações mensais iguais, sem entrada. Se a loja cobra em seus financiamentos a taxa de juros compostos de 2,7% a.m., determine o valor de cada prestação nos seguintes casos:
- a) $n = 12$ b) $n = 18$ c) $n = 24$
- 239.** Um automóvel 0 km é vendido à vista por R\$ 32 000,00 ou a prazo com 20% de entrada mais 24 prestações mensais iguais. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros compostos do financiamento for de 1,8% a.m.?

- 240.** Um microcomputador é vendido à vista por R\$ 3 000,00 ou a prazo em 3 prestações mensais iguais, considerando-se a 1ª prestação como entrada. Qual o valor de cada prestação se a taxa de juros do financiamento for de 2,6% a.m.?
- 241.** A sra. Estela pretende ter uma renda mensal de R\$ 2 500,00, durante 48 meses, começando daqui a um mês. Quanto deverá aplicar hoje, num fundo que rende 1,4% a.m., para atingir seu objetivo?
- 242.** O sr. Tanaka pretende juntar um montante M de modo que esse valor aplicado num fundo que rende juros compostos à taxa de 14% a.a. lhe proporcione a possibilidade de fazer cinco retiradas anuais de R\$ 25 000,00 cada uma. Supondo que a primeira retirada seja feita um ano após a aplicação, determine o valor de M.
- 243.** A empresa Vesúvio S.A., visando promover suas vendas, resolve dar um prêmio de R\$ 500 000,00 a um de seus clientes escolhido por sorteio. O prêmio será pago em 10 parcelas anuais de R\$ 50 000,00 cada uma, sendo a primeira um ano após o sorteio. Quanto a empresa deverá aplicar, na data do sorteio, a juros compostos à taxa de 15% a.a., para fazer frente aos pagamentos?
- 244.** A sra. Helena pretende passar 24 meses na Europa fazendo um curso de pós-graduação. Ela estima que precisará ter uma renda mensal de R\$ 4 500,00, começando com sua chegada à Europa. Para atingir seu objetivo, ela precisará aplicar um valor X, a juros compostos à taxa de 1,6% a.m., 60 meses antes do 1º saque de R\$ 4 500,00. Qual o valor de X?
- 245.** (FGV-SP) Se um investidor aplicar hoje P reais a uma taxa de juros mensal igual a i , ele poderá sacar R reais por mês (começando daqui a um mês), durante n meses, até esgotar seu saldo bancário. Sabendo-se que

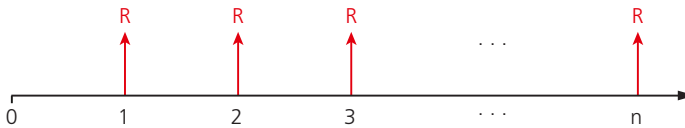
$$P = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \cdot i}$$

- a) calcule R para que ele esgote seu saldo 1 mês após aplicar R\$ 5 000,00, à taxa de juros de 2% ao mês.
- b) expresse n em função de P, R e i .
- 246.** Num país sem inflação, o sr. Olavo recebeu \$ 100 000,00 de prêmio em uma loteria. Se ele aplicar esse valor num fundo que rende juros compostos à taxa de 0,5% a.m. e sacar \$ 1 000,00 por mês (começando 1 mês após o depósito), durante quantos meses aproximadamente ele poderá efetuar os saques até esgotar seu saldo? Qual seria a resposta se ele sacasse \$ 2 000,00 por mês?

IX. Montante de uma seqüência uniforme de depósitos

Suponhamos que uma pessoa deposite mensalmente R\$ 500,00 num fundo que renda juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Se ela quiser saber seu montante logo após ter feito o 20º depósito, podemos achar o montante de cada depósito e, em seguida, somá-los para obter o resultado desejado. A soma dos montantes de cada depósito recebe o nome de **montante de uma seqüência uniforme de depósitos**. O cálculo desse montante pode ser facilitado se levarmos em consideração o raciocínio a seguir.

Consideremos n depósitos mensais iguais a R , nas datas 1, 2, 3, ... n , rendendo juros compostos, a uma taxa i mensal (veja a figura abaixo). Queremos saber qual a soma M dos montantes desses depósitos na data n (isto é, logo após ter sido feito o último depósito).



Temos:

- o montante do 1º depósito na data n : $R \cdot (1 + i)^{n-1}$;
- o montante do 2º depósito na data n : $R \cdot (1 + i)^{n-2}$;
- o montante do 3º depósito na data n : $R \cdot (1 + i)^{n-3}$.

Procedendo de modo análogo com os outros depósitos, obtemos o montante do último depósito na data n , que vale R .

Assim:

$$M = R \cdot (1 + i)^{n-1} + R \cdot (1 + i)^{n-2} + R \cdot (1 + i)^{n-3} + \dots + R$$

Os termos do 2º membro dessa expressão constituem uma Progressão Geométrica cuja razão vale $q = \frac{1}{1 + i}$ e cujo 1º termo é $a_1 = R(1 + i)^{n-1}$. Ao aplicar a fórmula da soma dos termos da Progressão Geométrica finita, temos:

$$M = \frac{R \cdot (1 + i)^{n-1} \left[\frac{1}{(1 + i)^n} - 1 \right]}{\frac{1}{1 + i} - 1}$$

$$M = R \cdot \frac{\frac{1}{(1 + i)} - (1 + i)^{n-1}}{\frac{-i}{1 + i}}$$

$$M = R \cdot \frac{\frac{1 - (1 + i)^n}{1 + i}}{\frac{-i}{1 + i}}$$

$$M = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^n}{-i}$$

E, finalmente:

$$M = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Exemplo:

Uma pessoa deposita mensalmente R\$ 600,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,5% a.m. Qual será seu montante no instante imediatamente após o 30º depósito?

Temos $R = 600$, $n = 30$ e $i = 1,5\%$ a.m.

Portanto:

$$M = 600 \cdot \frac{(1,015)^{30} - 1}{0,015}$$

$$M = 22523,21$$

Assim, no instante imediatamente após o 30º depósito, o montante valerá R\$ 22523,21.

EXERCÍCIOS

247. Uma pessoa deposita mensalmente R\$ 700,00 num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,3% a.m. São feitos 25 depósitos.

- Qual será seu montante no instante após o último depósito?
- Qual será seu montante 3 meses após ter feito o último depósito?

- 248.** Quanto uma pessoa deverá depositar num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,2% a.m., para ter um montante de R\$ 30 000,00 no instante após o último depósito? (Considere que foram feitos 40 depósitos.)
- 249.** Calcule a quantia que uma pessoa deverá depositar num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,6% a.m., para ter um montante de R\$ 20 000,00 no instante após o último depósito. (Considere que foram feitos 30 depósitos.)
- 250.** Para ampliar as instalações de sua loja de eletrodomésticos, o sr. Martinez estima que precisará de R\$ 80 000,00 daqui a 18 meses. Quanto deverá depositar mensalmente, num total de 18 parcelas, à taxa de juros compostos de 1,5% a.m., para que no instante do último depósito consiga um montante de R\$ 80 000,00?
- 251.** Uma transportadora pretende comprar um caminhão dentro de 24 meses e estima que seu preço nessa data será R\$ 90 000,00. Para atingir seu objetivo, ela resolve fazer 24 depósitos mensais de x reais cada um num fundo que rende 1,5% ao mês, de modo que, no instante do último depósito, o saldo dessas aplicações seja R\$ 90 000,00.
- Qual o valor de x ?
 - No dia em que foi feito o 18º depósito, surgiu uma emergência e a empresa teve que sacar todo o saldo das aplicações. Qual era o valor desse saldo?
- 252.** (FGV-SP) O salário líquido do sr. Ernesto é R\$ 3 000,00 por mês. Todo mês ele poupa 10% de seu salário líquido e aplica essa poupança num fundo que rende juros compostos, à taxa de 2% ao mês.
- Qual seu saldo no fundo, no dia em que fez o segundo depósito?
 - Quantos depósitos deverá fazer para ter um saldo de R\$ 7 289,00 no dia do último depósito?
- 253.** A sra. Marli pretende custear os estudos universitários de seu filho, estimados em R\$ 1 800,00 por mês, durante 60 meses. Para isso, ela resolve depositar k reais por mês num fundo que rende juros compostos, à taxa de 1,2% a.m., num total de 48 depósitos. Sabendo-se que serão sacados R\$ 1 800,00 por mês desse fundo, sendo o primeiro saque realizado 1 mês após o último depósito, obtenha o valor de k .
- 254.** Num país sem inflação, uma pessoa efetua 180 depósitos mensais de \$ 800,00 cada um, num fundo que rende 0,5% a.m.
- Qual seu montante no instante após o último depósito?
 - Se 1 mês após o último depósito ela resolve sacar desse fundo uma quantia x por mês, durante 200 meses, qual o valor de x ?