SAMUEL HAZZAN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Combinatória
Probabilidade

5

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO III
Probabilidade

I. Experimentos aleatórios

69. Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de **todos os resultados possíveis** que podem ocorrer. As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos **acaso**.

70. Exemplos de experimentos aleatórios

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.

b) Lançar um dado e observar o número da face de cima.

c) Lançar duas moedas e observar as sequências de caras e coroas obtidas.

d) Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas.

e) De um lote de 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de peças defeituosas.

f) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, selecionar uma bola e observar sua cor.

g) De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.

h) Numa cidade onde 10% dos habitantes possuem determinada moléstia, selecionar 20 pessoas e observar o número de portadores da moléstia.

i) Observar o tempo que um certo aluno gasta para ir de ônibus de sua casa até a escola.

j) Injetar uma dose de insulina em uma pessoa e observar a quantidade de açúcar que diminuiu.

k) Sujeitar uma barra metálica a tração e observar sua resistência.

II. Espaço amostral

71. Chamamos de **espaço amostral**, e indicamos por Ω, um conjunto formado por **todos os resultados possíveis** de um experimento aleatório.

72. Exemplos:

a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.

$\Omega = \{K, C\}$, em que K representa **cara** e C, **coroa**.

b) Lançar um dado e observar o número da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), extrair uma bola e observar sua cor.

$\Omega = \{V, B, A\}$

d) Lançar uma moeda duas vezes e observar a sequência de caras e coroas.

$\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$

e) Lançar uma moeda duas vezes e observar o número de caras.

$\Omega = \{0, 1, 2\}$

f) Um lote tem 20 peças. Uma a uma, elas são ensaiadas e observa-se o número de defeituosas.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, ..., 19, 20)$

g) Uma moeda é lançada até que o resultado cara (K) ocorra pela primeira vez. Observa-se em qual lançamento esse fato ocorre.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

73. Observação:

Diremos que o espaço amostral Ω é finito, se $\#\Omega = n \in \mathbb{N}^*$ (e o caso dos exemplos a, b, c, d, e, f); caso contrário diremos que Ω é infinito (é o caso do exemplo g).

Neste livro, nos restringiremos aos experimentos aleatórios cujos espaços amostrais são finitos.

EXERCÍCIOS

Dê um espaço amostral para cada experimento abaixo.

339. Uma letra é escolhida entre as letras da palavra PROBABILIDADE.

340. Uma urna contém bolas vermelhas (V), bolas brancas (B) e bolas azuis (A). Uma bola é extraída e observada sua cor.

341. Uma urna tem 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma bolinha e extraída e observado seu número.

342. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída e observada.

343. Uma urna contém 5 bolas vermelhas (V) e 2 brancas (B). Duas bolas são extraídas, sem reposição, e observadas suas cores, na sequência em que foram extraídas.

344. Três pessoas A, B e C são colocadas numa fila e observa-se a disposição das mesmas.

345. Um casal planeja ter 3 filhos. Observa-se a sequência de sexos dos 3 filhos.

346. Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados; observam-se os números das faces de cima.

Solução

Podemos considerar cada resultado como um par de números (a, b) em que *a* representa o resultado no dado verde e *b* o resultado no dado vermelho. Isto é, Ω é o conjunto.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1, 1)\quad (2, 1)\quad (3, 1)\quad (4, 1)\quad (5, 1)\quad (6, 1)\\ &(1, 2)\quad (2, 2)\quad (3, 2)\quad (4, 2)\quad (5, 2)\quad (6, 2)\\ &(1, 3)\quad (2, 3)\quad (3, 3)\quad (4, 3)\quad (5, 3)\quad (6, 3)\\ &(1, 4)\quad (2, 4)\quad (3, 4)\quad (4, 4)\quad (5, 4)\quad (6, 4)\\ &(1, 5)\quad (2, 5)\quad (3, 5)\quad (4, 5)\quad (5, 5)\quad (6, 5)\\ &(1, 6)\quad (2, 6)\quad (3, 6)\quad (4, 6)\quad (5, 6)\quad (6, 6)\}\end{aligned}$$

347. Entre 5 pessoas A, B, C, D, E, duas são escolhidas para formarem uma comissão. Observam-se os elementos dessa comissão.

348. Pergunta-se a uma pessoa (não nascida em ano bissexto) a data de seu aniversário (mas não o ano do nascimento). Observa-se essa data.

III. Evento

74. Consideremos um experimento aleatório, cujo espaço amostral é Ω. Chamaremos de **evento** todo subconjunto de Ω. Em geral indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, ..., X, Y, Z.

Diremos que **um evento A ocorre** se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. Os eventos que possuem um **único elemento** ($\#A = 1$) serão chamados **eventos elementares**.

75. Exemplos:

1º) Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de número ímpar. $A = \{1, 3, 5\}$.

B: ocorrência de número primo. $B = \{2, 3, 5\}$.

C: ocorrência de número menor que 4. $C = \{1, 2, 3\}$.

D: ocorrência de número menor que 7. $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

E: ocorrência de número maior ou igual a 7. $E = \varnothing$.

2º) Uma moeda é lançada 3 vezes, e observa-se a sequência de caras e coroas.

$\Omega = \{(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C); (C, K, K); (C, K, C); (C, C, K); (C, C, C)\}$.

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de cara (K) no 1º lançamento.

$A = \{(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C)\}$

B: ocorrência de exatamente uma coroa.

$B = \{(K, K, C); (K, C, K); (C, K, K)\}$

C: ocorrência de, no máximo, duas coroas.

C = {(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C); (C, K, K); (C, K, C); (C, C, K)}

D: ocorrência de pelo menos duas caras.

D = {(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (C, K, K)}

76. Observação:

Notemos que, se $\#\Omega = n$, então Ω terá 2^n subconjuntos e, portanto; 2^n eventos. Entre os eventos, salientamos o $\varnothing$ (chamado **evento impossível**) e o próprio Ω (chamado **evento certo**).

IV. Combinações de eventos

Se usarmos certas operações entre conjuntos (eventos), poderemos combinar conjuntos (eventos) para formar novos conjuntos (eventos).

77. União de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem. Dizemos que $A \cup B$ é a **união** entre o evento A e o evento B.

78. Interseção de dois eventos

Sejam A e B dois eventos; então $A \cap B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem **simultaneamente**. Dizemos que $A \cap B$ é a interseção entre o evento A e o evento B.

Em particular, se $A \cap B = \varnothing$, A e B são chamados **mutuamente exclusivos.**

79. Complementar de um evento

Seja A um evento; então A^C será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A **não ocorrer**.

Dizemos que A^C é o **evento complementar** de A.

80. Exemplo:

Um dado é lançado e é observado o número da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sejam os eventos:

A: ocorrência de número par. $A = \{2, 4, 6\}$

B: ocorrência de número maior ou igual a 4. $B = \{4, 5, 6\}$

C: ocorrência de número ímpar. $C = \{1, 3, 5\}$

Então, teremos:

$A \cup B$: ocorrência de número par ou número maior ou igual a 4.

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

$A \cap B$: ocorrência de um número par e um número maior ou igual a 4.

$A \cap B = \{4, 6\}$

$A \cap C$: ocorrência de um número par e um número ímpar.

$A \cap C = \varnothing$ (A e C mutuamente exclusivos).

A^C: ocorrência de um número não par.

$A^C = \{1, 3, 5\}$

B^C: ocorrência de um número menor que 4.

$B^C = \{1, 2, 3\}$

81. União de *n* eventos

Seja $A_1, A_2, ..., A_n$ uma sequência de eventos. Então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

será também um evento que ocorrerá se, e somente se, **ao menos um dos eventos A_j ocorrer**. Dizemos que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ é a união dos eventos $A_1, A_2 ..., A_n$.

82. Interseção de *n* eventos

Seja $A_1, A_2, ..., A_n$ uma sequência de eventos. Então

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

será também um evento que ocorrerá se, e somente se, **todos os eventos A_j ocorrerem simultaneamente**.

83. Exemplo:

Um número é sorteado entre os 100 inteiros de 1 a 100. Sejam os eventos A_i: ocorrência de um número maior que i, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Então:

$A_1 = \{2, 3, ..., 100\}$

$A_2 = \{3, 4, ..., 100\}$

$A_3 = \{4, 5, ..., 100\}$

$A_4 = \{5, 6, ..., 100\}$

$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = \{2, 3, ..., 100\}$ $\qquad$ $\bigcap_{i=1}^{4} A_i = \{5, 6, ..., 100\}$

EXERCÍCIOS

349. Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha é escolhida e é observado seu número. Seja $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 29, 30\}$. Descreva os eventos:

a) o número obtido é par

b) o número obtido é ímpar

c) o número obtido é primo

d) o número obtido é maior que 16

e) o número é múltiplo de 2 e de 5

f) o número é múltiplo de 3 ou de 8

g) o número não é múltiplo de 6

350. Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados. Seja Ω o conjunto dos pares (a, b), em que *a* representa o número do dado verde e *b* o do dado vermelho.

Descreva os eventos:

a) A: ocorre 3 no dado verde

b) B: ocorrem números iguais nos dois dados

c) C: ocorre número 2 em ao menos um dado

d) D: ocorrem números cuja soma é 7

e) E: ocorrem números cuja soma é menor que 7

351. Uma moeda e um dado são lançados. Seja:

$\Omega = \{(K, 1); (K, 2); (K, 3); (K, 4); (K, 5); (K, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}$

Descreva os eventos:

a) A: ocorre cara

b) B: ocorre número par

c) C: ocorre o número 3

d) $A \cup B$

e) $B \cap C$

f) $A \cap C$

g) A^C

h) C^C

352. Um par ordenado (a, b) é escolhido entre os 20 pares ordenados do produto cartesiano $A \times B$, em que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Considere $\Omega = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Descreva os eventos:

a) $A = \{(x, y) \mid x = y\}$

b) $B = \{(x, y) \mid x > y\}$

c) $C = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$

d) $D = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

e) $E = \{(x, y) \mid x = 1\}$

f) $F = \{(x, y) \mid y = 3\}$

353. A urna I tem duas bolas vermelhas (V) e três brancas (B) e a urna II tem cinco bolas vermelhas e seis brancas. Uma urna é escolhida e dela é extraída uma bola e observada sua cor. Seja:

$\Omega = \{(I, V); (I, B); (II, V); (II, B)\}$

Descreva os eventos:

a) A: a urna escolhida é a I

b) B: a urna escolhida é a II

c) C: a bola escolhida é vermelha

d) D: a bola escolhida é branca

e) $A \cup B$

f) $A \cap C$

g) D^C

354. Um experimento consiste em perguntar a 3 mulheres se elas usam ou não o sabonete da marca A.

a) Dê um espaço amostral para o experimento.

b) Descreva o evento A: no máximo duas mulheres usam o sabonete da marca X.

V. Frequência relativa

84. Num experimento aleatório, embora não saibamos qual o evento que irá ocorrer, sabemos que alguns eventos ocorrem frequentemente e outros, raramente. Desejamos, então, associar aos eventos **números** que nos deem uma **indicação quantitativa** da sua ocorrência, quando o experimento é repetido muitas vezes, nas mesmas condições. Para isso, vamos definir **frequência relativa de um evento**.

85. Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral Ω, finito, isto é, $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Suponhamos que o experimento seja repetido N vezes, nas mesmas condições. Seja n_i o número de vezes que ocorre o evento elementar $a_{i.}$ Definimos **frequência relativa do evento** $\{a_i\}$ como sendo o número f_i, tal que:

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$$

Por exemplo, se lançarmos um dado 100 vezes (N = 100) e observarmos o número 2 (evento 2) 18 vezes, então a frequência relativa desse evento elementar será:

$$f_2 = \frac{18}{100} = 0{,}18$$

A frequência relativa possui as seguintes propriedades:

a) $0 \leqslant f_i \leqslant 1 \quad \forall i$, pois $0 \leqslant \dfrac{n_i}{N} \leqslant 1$.

b) $f_1 + f_2 + ... + f_k = 1$, pois

$$\frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + ... + \frac{n_k}{N} = \frac{n_1 + n_2 + ... + n_k}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

c) Se A é um evento de Ω ($A \neq \varnothing$), a frequência relativa do evento A (f_A) é o número de vezes que ocorre A, dividido por N. É claro que:

$$f_A = \sum_{a_i \in A} \frac{n_i}{N} = \sum_{a_i \in A} f_i.$$

Por exemplo, se $A = \{a_1, a_3, a_5\}$, então:

$$f_A = \frac{n_1 + n_3 + n_5}{N} = f_1 + f_3 + f_5$$

d) Verifica-se **experimentalmente** que a frequência relativa tende a se "estabilizar" em torno de algum valor bem definido, quando o número N de repetições do experimento é suficientemente grande.

VI. Definição de probabilidade

86. Já vimos que a frequência relativa nos dá uma informação quantitativa da ocorrência de um evento, quando o experimento é realizado um grande número de vezes. O que iremos fazer é definir um **número associado a cada evento**, de modo que ele tenha as mesmas características da frequência relativa. É claro que desejamos que a frequência relativa do evento esteja "próxima" desse **número**, quando o experimento é repetido muitas vezes. A esse número daremos o nome de **probabilidade do evento** considerado.

87. Consideremos então um espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. A cada **evento elementar** $\{a_i\}$ vamos associar um **número real**, indicado por $p(\{a_i\})$ ou p_i, chamado **probabilidade do evento** $\{a_i\}$, satisfazendo as seguintes condições:

(1) $0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$

Dizemos que os números $p_1, p_2, ..., p_k$ definem uma **distribuição de probabilidades** sobre Ω.

Em seguida, seja A um evento qualquer de Ω. Definimos **probabilidade do evento A** (e indicamos por P(A)) da seguinte forma:

a) Se $A = \varnothing$, $P(A) = 0$

b) Se $A \neq \varnothing$, $P(A) = \sum\limits_{a_i \in A} p_i$

Isto é, a probabilidade de um evento constituído por um certo número de elementos é a soma das probabilidades dos resultados individuais que constituem o evento A.

88. Exemplo:

$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Considerando a distribuição de probabilidades:

$p_1 = 0,1 \qquad p_2 = 0,3 \qquad p_3 = 0,2 \qquad p_4 = 0,4$

Seja o evento $A = \{a_1, a_2, a_4\}$; então, por definição:

$P(A) = p_1 + p_2 + p_4 = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8$

89. Observação:

Mostramos, acima, como se pode calcular a probabilidade de um evento A (P(A)) quando é dada uma distribuição de probabilidades sobre Ω. Surge então a pergunta: Que critérios usamos para obter os números $p_1, p_2, ..., p_k$?

Podemos responder dizendo inicialmente que, do ponto de vista formal, quaisquer valores $p_1, p_2, ..., p_k$ que satisfazem:

(1) $0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$

(2) $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

constituem uma distribuição de probabilidades sobre Ω. Por outro lado, para sermos **realistas**, devemos fazer com que cada número p_i esteja "próximo" da frequência relativa f_i, quando o experimento é repetido muitas vezes.

Isso pode ser feito levantando-se hipóteses a respeito do experimento, como por exemplo considerações de simetria; é claro que nessas hipóteses são fundamentais a **experiência** e o **bom senso** de quem vai atribuir as probabilidades aos eventos elementares. Nenhuma pessoa de bom senso diria que a probabilidade de observarmos uma bola vermelha é igual à de observarmos uma bola branca, quando extraímos uma bola de uma urna contendo 9 bolas vermelhas e uma branca. Por outro lado, se faltam hipóteses para uma conveniente escolha de uma distribuição, recorre-se então à experimentação para avaliar os p_i's através da frequência relativa.

90. Exemplos:

1º) Uma moeda é lançada e é observada a face de cima.

Temos:

$$\Omega = \begin{array}{l} \{K, \; C\} \\ \;\uparrow \;\;\; \uparrow \\ \;p_1 \;\; p_2 \end{array}$$

Uma distribuição razoável para Ω seria: $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Isso significa que admitimos que a frequência relativa de caras e de coroas é próxima de $\frac{1}{2}$ quando a moeda é lançada muitas vezes.

Experiências históricas foram feitas por Buffon, que lançou uma moeda 4048 vezes e observou o resultado cara 2048 vezes (frequência relativa de caras: $\frac{2048}{4048} = 0{,}5059$).

2º) Um dado é lançado e é observado o número da face de cima.

Temos:

$$\Omega = \begin{array}{cccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array}$$

Uma atribuição razoável para p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 e p_6 (por razões de simetria) é:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$$

Nesse caso, a probabilidade de ocorrência de um número ímpar ($A = \{1, 3, 5\}$) será:

$$P(A) = p_1 + p_3 + p_5 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3º) Seja $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Se $p_4 = 4p_1$, $p_3 = 3p_1$ e $p_2 = 2p_1$, qual a probabilidade do evento $A = \{a_1, a_4\}$?

Temos:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$
$$p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 = 1$$
$$10p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{10}$$

Logo: $p_2 = \frac{2}{10}$, $p_3 = \frac{3}{10}$ e $p_4 = \frac{4}{10}$.

Portanto, $P(A) = p_1 + p_4 = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{1}{2}$.

VII. Teoremas sobre probabilidades em espaço amostral finito

91. Teorema 1

"A probabilidade do evento certo é 1."

Demonstração:

De fato, o evento certo é $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ e por definição:

$$P(\Omega) = p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$$

92. Teorema 2

"Se $A \subset B$, então $P(A) \leqslant P(B)$."

Demonstração:

1) Se $A = B$, por definição $P(A) = P(B)$ e portanto $P(A) \leqslant P(B)$.

2) Se $A \subset B$.

Sejam $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ e $B = \{a_1, a_2, ..., a_r, a_{r+1}, ..., a_{r+q}\}$.

Então:

$P(A) = p_1 + p_2 + ... + p_r$

$P(B) = p_1 + p_2 + ... + p_r + p_{r+1} + ... + p_{r+q}$

Como:

$p_1, p_2, ..., p_r, ..., p_{r+q}$ são todos não negativos, decorre que:

$P(A) \leqslant P(B)$

No caso particular de $A = \varnothing$, temos $P(A) = 0$ e $P(B) \geqslant 0$, e portanto $P(A) \leqslant P(B)$.

93. Teorema 3

"Se A é um evento, então $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$."

Demonstração:

$\varnothing \subset A \subset \Omega$

Logo, pelo teorema 2:

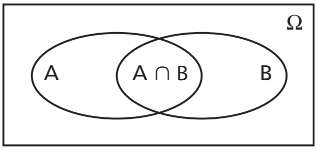
$P(\varnothing) \leqslant P(A) \leqslant P(\Omega)$ e portanto $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

94. Teorema 4

"Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$."

Demonstração:

$$P(A \cup B) = \sum_{a_j \in A \cup B} p_j$$



Por outro lado, $P(A) = \sum_{a_j \in A} p_j$ e $P(B) = \sum_{a_j \in B} p_j$.

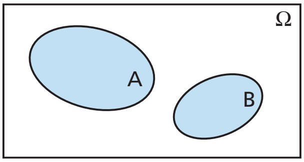
Ora, quando somamos $P(A) + P(B)$ as probabilidades dos eventos elementares contidos em $A \cap B$ são computadas duas vezes (uma, por estarem em A e outra, por estarem em B).

Portanto $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ é a soma das probabilidades dos eventos elementares contidos em $A \cup B$, logo:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

95. Observações:

a) Em particular, se A e B são mutuamente exclusivos ($A \cap B = \varnothing$), então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\varnothing) = P(A) + P(B)$.



b) O resultado anterior pode ser generalizado para n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mutuamente exclusivos dois a dois, da seguinte forma:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

96. Teorema 5

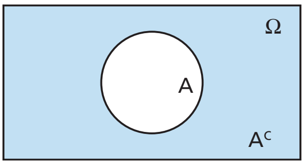
"Se A é um evento, então $P(A^C) = 1 - P(A)$."

Demonstração:

Como $A \cap A^C = \varnothing$ e $A \cup A^C = \Omega$ decorre pelo teorema 4 que $P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$.

Logo:

$1 = P(A) + P(A^C) \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$



97. Exemplo de aplicação dos teoremas

Uma urna contém 100 bolinhas numeradas, de 1 a 100. Uma bolinha é escolhida e observado seu número. Admitindo probabilidades iguais a $\frac{1}{100}$ para todos os eventos elementares, qual a probabilidade de:

a) observarmos um múltiplo de 6 e de 8 simultaneamente?

b) observarmos um múltiplo de 6 ou de 8?

c) observarmos um número não múltiplo de 5?

Temos:

$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}$

a) Um múltiplo de 6 e 8 simultaneamente terá que ser múltiplo de 24; portanto, o evento que nos interessa é: $A = \{24, 48, 72, 96\}$.

$$P(A) = \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

b) Sejam os eventos:

B: o número é múltiplo de 6. C: o número é múltiplo de 8.

O evento que nos interessa é $B \cup C$, então:

$B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96\}$

e $P(B) = \dfrac{16}{100} = \dfrac{4}{25}$.

$C = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$

e $P(C) = \dfrac{12}{100} = \dfrac{3}{25}$.

Portanto: $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

Ora, $B \cap C$ nada mais é do que o evento A (do item *a*).

Logo, $P(B \cap C) = \dfrac{1}{25}$.

Segue-se então que: $P(B \cup C) = \dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25} - \dfrac{1}{25} = \dfrac{6}{25}$.

c) Seja D o evento, o número é múltiplo de 5.

Temos:

$D = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}$

$$P(D) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

O evento que nos interessa é D^C. Logo, $P\left(D^C\right) = 1 - P(D) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$.

EXERCÍCIOS

355. Numa urna existem duas bolas vermelhas e seis brancas. Sorteando-se uma bola, qual a probabilidade de ela ser vermelha?

356. Numa cidade com 1 000 eleitores vai haver uma eleição com dois candidatos, A e B. É feita uma prévia em que os 1 000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Qual é a probabilidade de que A ganhe a eleição?

357. Considere o espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e a distribuição de probabilidades, tal que: $p_1 = p_2 = p_3$ e $p_4 = 0{,}1$. Calcule:

a) p_1, p_2 e p_3.

b) Seja A o evento $A = \{a_1, a_3\}$. Calcule P(A).

c) Calcule $P(A^C)$.

d) Seja B o evento $B = \{a_1, a_4\}$. Calcule P(B).

e) Calcule $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$.

f) Calcule $P[(A \cup B)^C]$ e $P[(A \cap B)^C]$.

358. Seja $\Omega = \{K, C\}$ o espaço amostral do lançamento de uma moeda. É correta a distribuição de probabilidades $P(K) = 0{,}1$, $P(C) = 0{,}9$?
(Lance uma moeda 100 vezes, calcule a frequência relativa do evento cara e verifique se essa distribuição é compatível com a realidade.)

359. Uma moeda é viciada de tal modo que sair cara é duas vezes mais provável do que sair coroa. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrer cara no lançamento dessa moeda;

b) ocorrer coroa no lançamento dessa moeda.

360. Temos duas moedas, das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomada ao acaso, é lançada. Qual é a probabilidade de se obter cara?

361. Um dado é viciado, de modo que a probabilidade de observarmos um número na face de cima é proporcional a esse número. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrer número par;

b) ocorrer número maior ou igual a 5.

Solução

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Temos:

$p_2 = 2p_1$

$p_3 = 3p_1$

$p_4 = 4p_1$

$p_5 = 5p_1$

$p_6 = 6p_1$

Porém, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

Logo, $p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 + 5p_1 + 6p_1 = 1 \Rightarrow 21p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{21}$.

a) O evento que nos interessa é $A = \{2, 4, 6\}$.

$$P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 2 \cdot \frac{1}{21} + 4 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

b) O evento que nos interessa é $B = \{5, 6\}$.

$$P(B) = p_5 + p_6 = 5 \cdot \frac{1}{21} + 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{11}{21}$$

362. Um dado é viciado de modo que a probabilidade de observarmos qualquer número par é a mesma, é a de observarmos qualquer número ímpar é também a mesma. Porém um número par é três vezes mais provável de ocorrer do que um número ímpar. Lançando-se esse dado, qual a probabilidade de:

a) ocorrer um número primo?

b) ocorrer um múltiplo de 3?

c) ocorrer um número menor ou igual a 3?

363. Seja o espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ e considere a distribuição de probabilidades:

$p_i = p(\{a_i\}) = K \cdot i \; \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

a) Calcule K.

b) Calcule p_3 e p_7.

c) Seja o evento $A = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$. Calcule P(A).

d) Calcule $P(A^C)$.

364. Seja o espaço amostral:

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

e considere a distribuição de probabilidades:

$$p_i = p(\{i\}) = \binom{10}{i}(0{,}6)^i \cdot (0{,}4)^{10-i} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

a) Mostre que $\sum_{i=0}^{10} p_i = 1$.

b) Calcule p_3.

c) Seja o evento $A = \{0, 1, 2\}$. Calcule $P(A)$ e $P(A^C)$.

365. Se A e B são eventos quaisquer Ω, prove que $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

366. Se A e B são eventos de Ω, prove que:

$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

367. Se A e B são eventos tais que: $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,1$, calcule:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(A^C)$ c) $P(B^C)$

368. Se A, B e C são eventos de Ω, prove que:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

369. Se A, B e C são eventos tais que:

$P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$, $P(C) = 0,6$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0,2$ e $P(A \cap B \cap C) = 0,1$

calcule:

a) $P(A \cup B)$

b) $P(A \cup C)$

c) $P(A \cup B \cup C)$

VIII. Espaços amostrais equiprováveis

98. Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Diremos que uma distribuição de probabilidades sobre Ω é **equiprovável**, se $p_1 = p_2 = ... = p_k$, isto é, se **todos os eventos elementares de Ω tiverem a mesma probabilidade.** Em geral, as características do experimento é que nos levam a supor uma distribuição equiprovável.

99. Exemplo:

De um baralho de 52 cartas, uma delas é escolhida.
Seja: $\Omega = \{2c, 2o, 2e, 2p, 3c, 3o, 3e, 3p, ..., Ac, Ao, Ae, Ap\}$
Os índices *c*, *o*, *e*, *p* indicam, respectivamente, naipe de copas, ouros, espadas e paus.

É razoável supor que cada evento elementar tenha a mesma probabilidade. Como temos 52 elementos em Ω, então a probabilidade de qualquer evento elementar é:

$$p = \frac{1}{52}$$

Seja o evento A: a carta é de copas.

Então: $A = \{2c, 3c, 4c, ..., Kc, Ac\}$.

Como $\#A = 13$ $\quad P(A) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + ... + \frac{1}{52} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Seja o evento B: a carta é um rei.

Então: $B = \{Kc, Ko, Ke, Kp\}$

$$P(B) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Seja o evento C: a carta é um rei de copas.

Então: $C = \{K_c\}$

$$P(C) = \frac{1}{52}.$$

IX. Probabilidade de um evento num espaço equiprovável

100. Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ é uma distribuição equiprovável $p_i = \frac{1}{K}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., K\}$.

Seja A um evento, tal que:

$A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$

$$P(A) = p_1 + p_2 + ... + p_r = \underbrace{\frac{1}{K} + \frac{1}{K} + ... + \frac{1}{K}}_{r \text{ vezes}}$$

$P(A) = \frac{r}{K}$, isto é, num espaço Ω, com distribuição equiprovável.

$$\boxed{P(A) = \frac{r}{K} = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

101. Observação:

Dado um conjunto com N elementos, *escolher ao acaso n* elementos desse conjunto significa que cada subconjunto (ordenado ou não) de *n* elementos tem a mesma probabilidade de ser escolhido.

102. Exemplo:

De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem de copas?

Temos:

Cada par de cartas possíveis de serem extraídas pode ser considerado como uma combinação das 52 cartas tomadas duas a duas. Isto é,

$$\Omega = \{(2_c, 2_e), (2_c, 2_p), \ldots, (5_c, 7_e), \ldots, (A_e, A_p)\}$$

e nesse caso $\#\Omega = \binom{52}{2} = \dfrac{52 \cdot 51}{2} = 1326.$

A é o evento (subconjunto) formado pelas combinações de cartas de copas, isto é:

$$A = \{(2_c, 3_c), (2_c, 4_c), \ldots, (K_c, A_c)\}$$

e nesse caso $\#A = \binom{13}{2} = \dfrac{13 \cdot 12}{2} = 78.$

Logo, $P(A) = \dfrac{78}{1\,326} = \dfrac{39}{663} = \dfrac{1}{17}.$

Poderíamos ter resolvido o problema, considerando Ω como sendo formado por arranjos, ao invés de combinações, isto é:

$$\Omega = \{(2_c, 2_p); (2_p, 2_c); \ldots; (6_p, 3_c); (3_c, 6_p); \ldots; (A_c, A_p)\}$$

e $\#\Omega = A_{52,\,2} = 52 \cdot 51 = 2652$

e o evento A seria formado pelos arranjos de duas cartas de copas, isto é:

$$A = \{(2_c, 3_c), (3_c, 2_c), \ldots, (K_c, A_c), (A_c, K_c)\}$$

e $\#A = A_{13,\,2} = 13 \cdot 12 = 156.$

Portanto:

$$P(A) = \frac{156}{2\,652} = \frac{1}{17}.$$

Isto é, Ω pode ser descrito como conjunto de arranjos ou de combinações, que a probabilidade do evento será a mesma. No entanto, é importante observar que, se o for formado por combinações, A também terá que ser (pois $A \subset \Omega$), bem como, se for o formado por arranjos, A também o será.

Em muitos problemas de probabilidades ocorre esse fato, isto é, a escolha do espaço amostral é facultativa. Entretanto, em outros problemas, como veremos, isso não será possível.

EXERCÍCIOS

370. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de cada um dos eventos abaixo?

a) Ocorrer dama de copas.

b) Ocorrer dama.

c) Ocorrer carta de naipe paus.

d) Ocorrer dama ou rei ou valete.

e) Ocorrer uma carta que não é um rei.

371. Um número é escolhido ao acaso entre os 20 inteiros, de 1 a 20. Qual a probabilidade de o número escolhido:

a) ser par?

b) ser ímpar?

c) ser primo?

d) ser quadrado perfeito?

372. Um número é escolhido ao acaso entre os 100 inteiros, de 1 a 100. Qual a probabilidade de o número:

a) ser múltiplo de 9?

b) ser múltiplo de 3 e de 4?

c) ser múltiplo de 3 ou de 4?

373. Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Seja o experimento a retirada de uma bola, e considere os eventos:

$A = \{$a bola retirada possui um número múltiplo de 2$\}$

$B = \{$a bola retirada possui um número múltiplo de 5$\}$

Determine a probabilidade do evento $A \cup B$.

374. Os coeficientes *a* e *b* da equação $ax = b$ são escolhidos ao acaso entre os pares ordenados do produto cartesiano $A \times A$, sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sendo *a* o 1º elemento do par e *b* o 2º. Qual a probabilidade de a equação ter raízes inteiras?

375. Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso na urna. Qual a probabilidade de a bola escolhida ser:

a) branca? b) vermelha? c) azul?

Solução

Sejam:

B_1, B_2, B_3 as bolas brancas

V_1, V_2 as bolas vermelhas

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 as bolas azuis.

Um espaço amostral para o experimento é:

$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, V_1, V_2, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $\#\Omega = 10$

a) Seja o evento A: a bola extraída é branca. Então:

$A = \{B_1, B_2, B_3\}$, $\#A = 3$, logo

$P(A) = \frac{3}{10}$.

b) Seja o evento B: a bola extraída é vermelha. Então:

$B = \{V_1, V_2\}$, $\#B = 2$, logo

$P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

c) Seja o evento C: a bola extraída é azul. Então:

$C = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $\#C = 5$, logo

$P(C) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

376. Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) a bola não ser amarela?

b) a bola ser branca ou preta?

c) a bola não ser branca nem amarela?

377. Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados e observados os números das faces de cima.

a) Qual a probabilidade de ocorrerem números iguais?

b) Qual a probabilidade de ocorrerem números diferentes?

c) Qual a probabilidade de a soma dos números ser 7?

d) Qual a probabilidade de a soma dos números ser 12?

e) Qual a probabilidade de a soma dos números ser menor ou igual a 12?

f) Qual a probabilidade de aparecer número 3 em ao menos um dado?

378. Jogando 3 dados (ou um dado 3 vezes), qual a probabilidade de se obter soma menor ou igual a 4?

379. Um dado especial, em forma de icosaedro, tem suas faces numeradas da seguinte forma: duas das faces têm o número zero; as 18 restantes têm os números −9, −8, −7, ..., −1, 1, 2, ..., 9. Qual é a probabilidade de que, lançando dois destes dados, tenhamos uma soma do número de pontos igual a 2?

380. Dois indivíduos, A e B, vão jogar cara ou coroa com uma moeda "honesta". Eles combinam lançar a moeda 5 vezes, e ganha o jogo aquele que ganhar em 3 ou mais lançamentos. Cada um aposta R$ 2800,00. Feitos os dois primeiros lançamentos, em ambos os quais A vence, eles resolvem encerrar o jogo. Do ponto de vista probabilístico, de que forma devem ser repartidos os R$ 5600,00?

381. Um indivíduo retrógrado guarda seu dinheiro em um açucareiro. Este contém 2 notas de R$ 50,00, 3 de R$ 20,00, 4 de R$ 10,00, 5 de R$ 5,00 e 8 de R$ 2,00. Se o indivíduo retira do açucareiro duas notas simultaneamente e ao acaso, qual é a probabilidade de que ambas sejam de R$ 5,00?

382. Numa cidade, 30% dos homens são casados, 40% são solteiros, 20% são desquitados e 10% são viúvos. Um homem é escolhido ao acaso.

a) Qual a probabilidade de ele ser solteiro?
b) Qual a probabilidade de ele não ser casado?
c) Qual a probabilidade de ele ser solteiro ou desquitado?

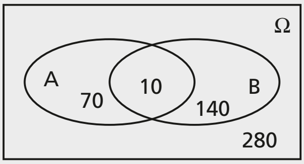
383. Em uma sala existem 5 crianças: uma brasileira, uma italiana, uma japonesa, uma inglesa e uma francesa. Em uma urna existem 5 bandeiras correspondentes aos países de origem dessas crianças: Brasil, Itália, Japão, Inglaterra e França. Uma criança e uma bandeira são selecionadas ao acaso, respectivamente, da sala e da urna. Determine a probabilidade de a criança sorteada não receber a sua bandeira.

384. Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam Engenharia, 150 estudam Economia e 10 estudam Engenharia e Economia. Se um aluno e escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que:

a) ele estude Economia e Engenharia?
b) ele estude somente Engenharia?
c) ele estude somente Economia?
d) ele não estude Engenharia nem Economia?
e) ele estude Engenharia ou Economia?

Solução

Sejam os eventos:
A: o aluno estuda Engenharia.
B: o aluno estuda Economia.
O diagrama ao lado permite responder facilmente às perguntas.



É fácil perceber que 280 alunos não estudam Engenharia nem Economia: $(500 - 70 - 10 - 140 = 280)$.

a) $\dfrac{10}{500} = \dfrac{1}{50}$

b) $\dfrac{70}{500} = \dfrac{7}{50}$

c) $\dfrac{140}{500} = \dfrac{7}{25}$

d) $\dfrac{280}{500} = \dfrac{14}{25}$

e) $\dfrac{220}{500} = \dfrac{11}{25}$

385. De um grupo de 200 pessoas, 160 têm fator Rh positivo, 100 têm sangue tipo O e 80 têm fator Rh positivo e sangue tipo O. Se uma dessas pessoas for selecionada ao acaso, qual a probabilidade de:

a) seu sangue ter fator Rh positivo?

b) seu sangue não ser tipo O?

c) seu sangue ter fator Rh positivo ou ser tipo O?

386. Uma cidade tem 50 000 habitantes e 3 jornais, A, B, C. Sabe-se que:

15 000 leem o jornal A
10 000 leem o jornal B
8 000 leem o jornal C
6 000 leem os jornais A e B
4 000 leem os jornais A e C
3 000 leem os jornais B e C
1 000 leem os três jornais.

Uma pessoa é selecionada ao acaso. Qual a probabilidade de que:

a) ela leia pelo menos um jornal?

b) ela leia só um jornal?

387. Um colégio tem 1 000 alunos. Destes:

200 estudam Matemática
180 estudam Física
200 estudam Química
20 estudam Matemática, Física e Química
50 estudam Física e Química
70 estudam somente Química
50 estudam Matemática e Física.

Um aluno do colégio é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) ele estudar só Matemática?

b) ele estudar só Física?

c) ele estudar Matemática e Química?

388. Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de:

a) observarmos três coroas?

b) observarmos exatamente uma coroa?

c) observarmos pelo menos uma cara?

d) não observarmos nenhuma coroa?

e) observarmos no máximo duas caras?

389. Lançando 4 vezes uma moeda "honesta", qual é a probabilidade de que ocorra cara exatamente 3 vezes?

390. Tirando, ao acaso, 5 cartas de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de saírem exatamente 3 valetes?

391. Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 são formados números de 4 algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ele ser:

a) par?

b) ímpar?

Solução

Seja Ω o conjunto dos números de 4 algarismos distintos formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5. Então:

$\#\Omega = A_{5,4} = \dfrac{5!}{1!} = 120.$

a) Seja B o evento, o número escolhido é par. Então:

$\_\ \_\ \_\ 2 \quad A_{4,3} = 24$

$\_\ \_\ \_\ 4 \quad A_{4,3} = 24$

$\#B = 24 + 24 = 48$. Logo: $P(B) = \dfrac{48}{120} = \dfrac{2}{5}.$

b) Seja C o evento, o número é ímpar. Como $C = B^C$, decorre que:

$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}.$

392. Em uma urna existem 6 bolinhas numeradas de 1 a 6. Uma a uma elas são extraídas, sem reposição. Qual a probabilidade de que a sequência de números observados seja crescente?

393. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. Qual é a probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior do que o da primeira?

394. Numa urna são depositadas n etiquetas numeradas de 1 a n. Três etiquetas são sorteadas (sem reposição). Qual a probabilidade de que os números sorteados sejam consecutivos?

395. Oito pessoas (entre elas Pedro e Sílvia) são dispostas ao acaso em uma fila. Qual a probabilidade de:

a) Pedro e Sílvia ficarem juntos? b) Pedro e Sílvia ficarem separados?

396. Nove livros são colocados ao caso numa estante. Qual a probabilidade de que *3* livros determinados fiquem juntos?

397. Uma loteria consta de 1 000 números de 1 a 1 000. Dez números são sorteados ao acaso, sem reposição, e ao 1º número sorteado corresponde o 1º prêmio, ao 2º número sorteado, o 2º prêmio, e assim por diante, até o 10º número sorteado. Se uma pessoa é portadora do bilhete nº 341, qual a probabilidade de ela ganhar:

a) o 1º prêmio? b) o 4º prêmio? c) o 10º prêmio?

398. Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observarmos 5 caras e 5 coroas?

399. Um adivinho diz ser capaz de ler o pensamento de outra pessoa. É feita a seguinte experiência: seis cartas (numeradas de 1 a 6) são dadas à pessoa, que concentra sua atenção em duas delas. O adivinho terá que descobrir essas duas cartas. Se o adivinho estiver apenas ”chutando”, qual a probabilidade de ele acertar as duas cartas nas quais a outra pessoa concentra a atenção?

400. (Problema clássico do aniversário.)
Em um grupo de *n* pessoas, qual a probabilidade de que pelo menos duas façam aniversário no mesmo dia? (Supondo que nenhuma tenha nascido em ano bissexto.)

Solução

Sejam os eventos:

A: pelo menos duas entre as *n* pessoas fazem aniversário no mesmo dia.

A^C: todas as *n* pessoas fazem aniversário em dias distintos.

Cada data de aniversário pode ser considerada como um número entre 1 e 365 (inclusive). Logo, o espaço amostral é constituído de todas as ênuplas ordenadas em que cada elemento pode ser um inteiro de 1 a 365 (inclusive).

Logo, pelo **princípio fundamental da contagem**:

$\#\Omega = 365^n$.

O evento A^C consiste em todas as ênuplas ordenadas, de **elementos distintos**, em que cada elemento pode ser inteiro de 1 a 365. Logo,

$\#A^C = A_{365,\,n} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$.

Logo, $P(AC) = \dfrac{\#A^C}{\#\Omega} = \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$.

Portanto, $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$.

Eis os valores de P(A) para alguns valores de *n*.

$n = 20, \quad P(A) = 0{,}41$

$n = 40, \quad P(A) = 0{,}89$

$n = 50, \quad P(A) = 0{,}97$ (quase certeza).

401. Uma urna contém seis bolinhas numeradas de 1 a 6. Quatro bolinhas são extraídas ao acaso sucessivamente, com reposição. Qual a probabilidade de que todas assinalem números diferentes?

402. Cinco algarismos são escolhidos ao acaso, com reposição, entre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Qual a probabilidade de os cinco algarismos serem difrentes?

403. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas. Duas bolas são extraídas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de:

a) ambas serem vermelhas?
b) ambas serem brancas?

404. Uma urna contém 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 2 pretas. Duas bolas são extraídas ao acaso, e com reposição. Qual a probabilidade de:

a) ambas serem vermelhas?
b) nenhuma ser branca?
c) nenhuma ser preta?

405. De um baralho de 52 cartas, três são extraídas sucessivamente ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que as cartas sejam de “paus”?

406. De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de observarmos:

a) dois ases?
b) um ás e um rei (sem levar em conta a ordem)?

407. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 7 brancas. Duas bolas são extraídas sucessivamente ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) ambas serem brancas?
b) ambas serem vermelhas?
c) uma vermelha, outra branca (sem levar em conta a ordem)?

408. De um lote de 200 peças, sendo 180 boas e 20 defeituosas, 10 peças são selecionadas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) as 10 peças serem boas?
b) as 10 peças serem defeituosas?
c) 5 peças serem boas e 5 serem defeituosas?

409. Um lote contém 60 lâmpadas, sendo 50 boas e 10 defeituosas. 5 lâmpadas são escolhidas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) todas serem boas?

b) todas serem defeituosas?

c) 2 serem boas e 3 defeituosas?

d) pelo menos uma ser defeituosa?

410. Numa gaveta há 10 pares distintos de meias, mas ambos os pés de um dos pares estão rasgados. Tirando da gaveta um pé de meia por vez, ao acaso, qual a probabilidade de sairem dois pés de meia do mesmo par, não rasgados, fazendo duas retiradas?

411. Em uma loja existem 100 camisas, sendo 80 da marca A. Se 5 camisas forem escolhidas ao acaso, sem reposição, qual a probabilidade de 4 serem da marca A?

412. De um baralho de 52 cartas, 5 são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de:

a) saírem os 4 reis?

b) não sair nenhum rei?

c) sair ao menos um rei?

413. De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que pelo menos uma seja de copas?

414. De um grupo de 10 pessoas, entre elas Regina, cinco são escolhidas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que Regina compareça entre as cinco?

415. De 100 000 declarações de imposto de renda (entre as quais a do sr. K) que chegam a um órgao fiscal, 10 000 são escolhidas ao acaso e analisadas detalhadamente. Qual a probabilidade de a declaração do sr. K ser analisada detalhadamente?

416. Entre 100 pessoas, uma única é portadora de uma moléstia. 10 pessoas entre as 100 são escolhidas ao acaso. Qual a probabilidade de a pessoa portadora da moléstia estar entre as 10?

417. Um grupo é constituído de 6 homens e 4 mulheres. Três pessoas são selecionadas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que ao menos duas sejam homens?

Solução

Consideremos o espaço amostral Ω constituído de todas as combinações das 10 pessoas, tomadas 3 a 3. Logo,

$$\#\Omega = \binom{10}{3} = 120.$$

O evento A que nos interessa é formado por todas as combinações de Ω, tais que em cada uma existem dois ou três homens. Isto é:

$$\#A = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 80$$

Logo $P(A) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$.

418. Entre 10 meninas, 4 têm olhos azuis. Três meninas são escolhidas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de pelo menos duas terem olhos azuis?

419. Uma urna contém 4 bolas brancas, 2 vermelhas e 3 azuis. Cinco bolas são selecionadas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que 2 sejam brancas, uma vermelha e 2 azuis?

420. De um baralho de 52 cartas, 3 são extraídas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que as 3 sejam do mesmo naipe?

Solução

Seja o espaço amostral Ω constituído das combinações 52 cartas tomadas 3 a 3. Então:

$$\#\Omega = \binom{52}{3} = 22\,100$$

O evento A que nos interessa é formado por todas as combinações de Ω, nas quais as 3 cartas são do mesmo naipe. Logo,

$$\#A = 4 \cdot \binom{13}{3} = 1\,144.$$

Portanto, $P(A) = \frac{1\,144}{22\,100} = \frac{22}{425}$.

421. De um baralho de 52 cartas, duas são selecionadas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que seus naipes sejam diferentes?

422. De um baralho de 52 cartas, duas são escolhidas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de observarmos dois reis ou duas cartas de copas?

423. Um grupo é constituído de 10 pessoas, entre elas Jonas e César. O grupo é disposto ao acaso em uma fila. Qual a probabilidade de que haja exatamente 4 pessoas entre Jonas e César?

424. Um homem encontra-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Ele só pode andar uma unidade de cada vez; para cima ou para a direita. Se ele andar 10 unidades, qual a probabilidade de chegar no ponto P(7, 3)?

X. Probabilidade condicional

103. Seja Ω um espaço amostral e consideremos dois eventos, A e B. Com o símbolo P(A|B) indicamos a probabiljdade do evento A, dado que o evento B ocorreu, isto é, P(A|B) é a **probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido**. Quando calculamos P(A|B), tudo se passa como se B fosse o novo espaço amostral “reduzido” dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A.

104. Exemplos:

1º) Consideremos o lançamento de um dado e observação da face de cima.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sejam os eventos:

A: Ocorre um número ímpar

B: ocorre um número maior ou igual a 2

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

P(A|B) será então a probabilidade de ocorrer número ímpar no novo espaço amostral reduzido.

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Atribuindo $\frac{1}{5}$ para a probabilidade de cada evento elementar de B, a probabilidade de ocorrer o evento número ímpar no espaço amostral “reduzido” será {3, 5} e portanto:

$P(A \mid B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

2º) Numa cidade, 400 pessoas foram classificadas, segundo sexo e estado civil, de acordo com a tabela:

sexo \ estado civil	solteiro (S)	casado (C)	desquitado (D)	viúvo (V)	total
masculino (M)	50	60	40	30	180
feminino (F)	150	40	10	20	220
total	200	100	50	50	400

Uma pessoa é escolhida ao acaso. Sejam os eventos:
S: a pessoa é solteira,
M: a pessoa é do sexo masculino.

$P(S|M)$ significa a probabilidade de a pessoa ser solteira, no novo espaço amostral reduzido das 180 pessoas do sexo masculino. Ora, como existem 50 solteiros nesse novo espaço amostral:

$$P(S|M) = \frac{50}{180} = \frac{5}{18}$$

Sejam ainda os eventos:
F: a pessoa escolhida é do sexo feminino
D: a pessoa escolhida é desquitada

então, $P(F|D)$ significa a probabilidade de a pessoa escolhida ser do sexo feminino, no novo espaço amostral reduzido das 50 pessoas desquitadas. Ora, como existem 10 pessoas do sexo feminino nesse novo espaço amostral,

$$P(F|D) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$$

Notemos que $P(F|D) \neq P(D|F)$, pois um cálculo simples nos mostra que:

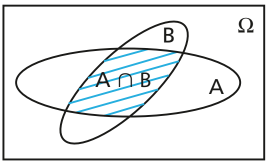
$$P(D|F) = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

105. Observação:

Para definirmos formalmente $P(A|B)$, vamos recorrer novamente ao conceito de frequência relativa.

Se um experimento aleatório for repetido N vezes, sejam n_A, n_B e $n_{A \cap B}$ o número de vezes que ocorrem A, B e $A \cap B$, respectivamente. Notemos que a frequência relativa de A, naqueles resultados em que B ocorre, é $\frac{n_{A \cap B}}{n_B}$, isto é, a frequência relativa de A condicionada a ocorrência de B

$$\frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{\frac{n_{A \cap B}}{N}}{\frac{n_B}{N}} = \frac{f_{A \cap B}}{f_B}$$



em que $f_{A \cap B}$ e f_B representam as frequências relativas da ocorrência de $A \cap B$ e de B, respectivamente. Quando N é grande, $f_{A \cap B}$ é "próxima" de $P(A \cap B)$ e f_B é próxima de $P(B)$. Isto sugere então a definição:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad P(B) > 0$$

Em resumo, temos dois modos de calcular $P(A|B)$:

1º) Considerando que a probabilidade do evento A será calculada em relação ao espaço amostral "reduzido" B.

2º) Empregando a fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

em que tanto $P(A \cap B)$ como $P(B)$ são calculadas em relação ao espaço amostral original Ω.

106. Exemplo:

Dois dados d_1 e d_2 são lançados. Consideremos o espaço amostral:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1, 1) & (2, 1) & (3, 1) & (4, 1) & (5, 1) & (6, 1) \\ (1, 2) & (2, 2) & (3, 2) & (4, 2) & (5, 2) & (6, 2) \\ (1, 3) & (2, 3) & (3, 3) & (4, 3) & (5, 3) & (6, 3) \\ (1, 4) & (2, 4) & (3, 4) & (4, 4) & (5, 4) & (6, 4) \\ (1, 5) & (2, 5) & (3, 5) & (4, 5) & (5, 5) & (6, 5) \\ (1, 6) & (2, 6) & (3, 6) & (4, 6) & (5, 6) & (6, 6) \end{matrix}\right\}$$

Sejam os eventos:

A: o dado d_1 apresenta resultado 2,

B: a soma dos pontos nos dois dados é 6.

Calculemos $P(A|B)$.

1º modo: o novo espaço amostral reduzido é:

$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

Nesse novo espaço amostral, a probabilidade de A (d_1 apresentar o resultado 2) é $\frac{1}{5}$. Logo:

$$P(A|B) = \frac{1}{5}$$

2º modo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Temos:

$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$ $\qquad P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ $\qquad P(B) = \frac{5}{36}$

$A \cap B = \{(2, 4)\}$ $\qquad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

Logo: $P(A|B) = \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$

EXERCÍCIOS

425. Um dado é lançado e o número da face de cima é observado.

a) Se o resultado obtido for par, qual a probabilidade de ele ser maior ou igual a 5?

b) Se o resultado obtido for maior ou igual a 5, qual a probabilidade de ele ser par?

c) Se o resultado obtido for ímpar, qual a probabilidade de ele ser menor que 3?

d) Se o resultado obtido for menor que 3, qual a probabilidade de ele ser ímpar?

426. Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100.

a) Qual a probabilidade de o número ser par?

b) Qual a probabilidade de o número ser par, dado que ele é menor que 50?

c) Qual a probabilidade de o número ser divisível por 5, dado que é par?

427. Dois dados d_1 e d_2 são lançados.

a) Qual a probabilidade de a soma dos pontos ser 6, se a face observada em d_1 foi 2?

b) Qual a probabilidade de o dado d_1 apresentar face 2, se a soma dos pontos foi 6?

c) Qual a probabilidade de a soma dos pontos ser menor que 7, sabendo que em ao menos um dado apareceu o resultado 2?

d) Qual a probabilidade de a soma dos pontos ser menor ou igual a 6, se a soma dos pontos nos dois dados foi menor ou igual a 4?

e) Qual a probabilidade de o máximo dos números observados ser 5, se a soma dos pontos foi menor ou igual a 9?

428. Considere um tetraedro, como um dado, com 4 faces numeradas de 1 a 4. Dois tetraedros t_1 e t_2 são lançados sobre um plano e observam-se os números das faces nas quais se apoiam os tetraedros. Se a soma dos pontos obtidos for maior que 5, qual a probabilidade de que o número observado em t_1 seja:

a) 4? b) 3?

429. Um grupo de 50 moças é classificado de acordo com a cor dos cabelos, e dos olhos de cada moça, segundo a tabela:

cabelos	olhos	
	azuis	castanhos
loira	17	9
morena	4	14
ruiva	3	3

a) Se você marca um encontro com uma dessas garotas, escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ela ser:

1) loira? 2) morena de olhos azuis? 3) morena ou ter olhos azuis?

b) Está chovendo quando você encontra a garota. Seus cabelos estão completamente cobertos, mas você percebe que ela tem olhos castanhos. Qual a probabilidade de que ela seja morena?

430. De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática, Física e Química, sabe-se que:

I. 30 destinam-se à Matemática e, destes, 20 são do sexo masculino.

II. O total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se à Química.

III. Existem 10 moças que se destinam ao curso de Química.

Nessas condições, sorteando um aluno ao acaso do grupo total e sabendo que é do sexo feminino, qual é a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática?

431. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída e observa-se que seu número está entre 4 e 10 (4 e 10 inclusive). Qual a probabilidade de que o número da carta seja 6?

432. Uma comissão de 3 pessoas é formada escolhendo-se ao acaso entre Antônio, Benedito, César, Denise e Elisabete. Se Denise não pertence à comissão, qual a probabilidade de César pertencer?

433. Um prédio de três andares, com dois apartamentos por andar, tem apenas três apartamentos ocupados. Qual é a probabilidade de que cada um dos três andares tenha exatamente um apartamento ocupado?

434. Se A e B são eventos e $P(A) > 0$, prove que:

a) $P(A|A) = 1$

b) $P(A^C|A) = 0$

c) Se A e B são mutuamente exclusivos, $P(B|A) = 0$.

d) $P(A \cup B|A) = 1$

e) Se A e B são mutuamente exclusivos, $P(A|A \cup B) = \dfrac{P(A)}{P(A) + P(B)}$.

XI. Teorema da multiplicação

107. Uma consequência importante da definição formal de probabilidade condicional é a seguinte:

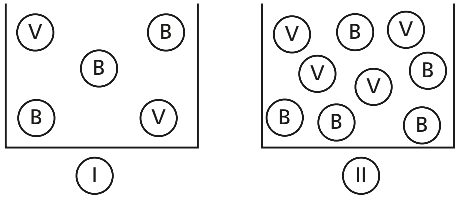
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)}$$

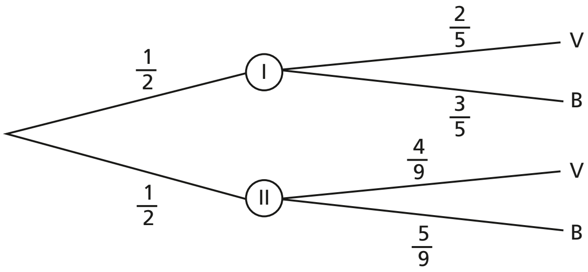
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

Isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos ($P(A \cap B)$) é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro.

108. Exemplo 1:

Uma urna I contém 2 bolas vermelhas e 3 bolas brancas, a urna II contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela uma bola é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha?





Os dados do problema podem ser colocados num diagrama de árvore. Como cada urna é selecionada ao acaso, a probabilidade é $\frac{1}{2}$ para cada urna I e II $\left(\text{escrevemos } \frac{1}{2} \text{ em cada ramo que parte do ponto inicial para a urna obtida}\right)$.

Dada a urna escolhida, escrevemos as probabilidades condicionais de extrairmos da mesma uma bola de determinada cor. Tais probabilidades são colocadas nos ramos que partem de cada urna para cada resultado do 2º experimento (extração da bola).

$$\text{Sejam} \begin{cases} U_I\text{, o evento escolher urna I} \\ U_{II}\text{, o evento escolher urna II} \\ V\text{, o evento escolher bola vermelha.} \\ B\text{, o evento escolher bola branca} \end{cases}$$

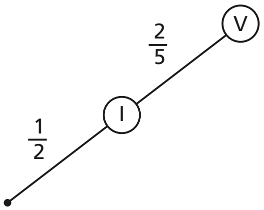
Estamos interessados no evento $U_I \cap V$. Logo, pelo teorema da multiplicação:

$$P(U_I \cap V) = P(U_I) \cdot P(V \mid U_I)$$

Ora, $P(U_I) = \frac{1}{2}$, $P(V \mid U_I) = \frac{2}{5}$.

Logo, $P(U_I \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de U_I e V é o produto das probabilidades que aparecem nos ramos da árvore onde estão situados I e V.



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

Analogamente, podemos calcular a probabilidade dos outros três eventos:

$$P(U_I \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

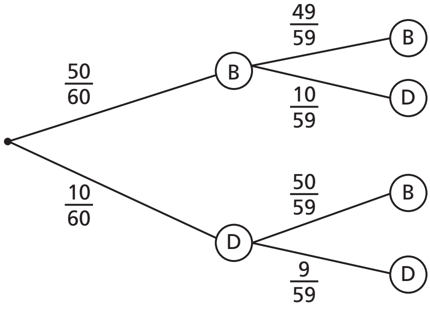
$$P(U_{II} \cap V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$P(U_{II} \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

109. Exemplo 2:

Um lote contém 50 peças boas (B) e 10 defeituosas (D). Uma peça é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra peça é escolhida ao acaso.

O diagrama de árvore correspondente é:



Pelo diagrama, concluímos que a probabilidade de ambas serem defeituosas é:

$$\frac{10}{60} \cdot \frac{9}{59} = \frac{90}{3540} = \frac{3}{118}$$

XII. Teorema da probabilidade total

110. Inicialmente, consideremos n eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Diremos que eles formam uma partição do espaço amostral Ω, quando:

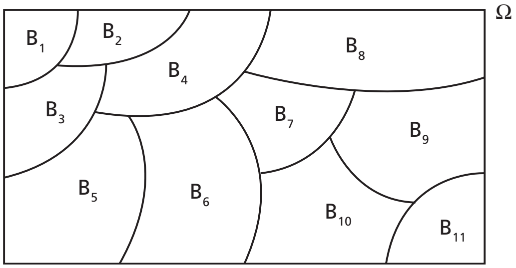
(1) $P(B_k) > 0 \quad \forall k$

(2) $B_i \cap B_j = \varnothing$ para $i \neq j$

(3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

Isto é, os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são dois a dois mutuamente exclusivos e exaustivos (sua união é Ω).

111. Ilustração para n = 11:

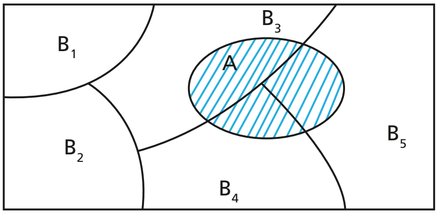


Seja Ω um espaço amostral, A um evento qualquer de Ω e $B_1, B_2, \ldots, B_n$ uma partição de Ω.

É válida a seguinte relação:

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A) \cup \ldots \cup (B_n \cap A)$$

112. A figura abaixo ilustra o fato para n = 5.



Nesse caso:

$$A = \underbrace{(B_1 \cap A)}_{\varnothing} \cup \underbrace{(B_2 \cap A)}_{\varnothing} \cup (B_3 \cap A) \cup (B_4 \cap A) \cup (B_5 \cap A)$$

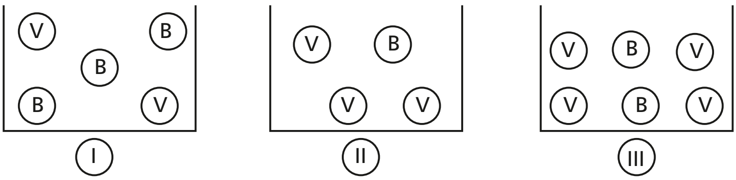
Notemos que $(B_1 \cap A); (B_2 \cap A); \ldots; (B_n \cap A)$ são dois a dois mutuamente exclusivos, portanto:

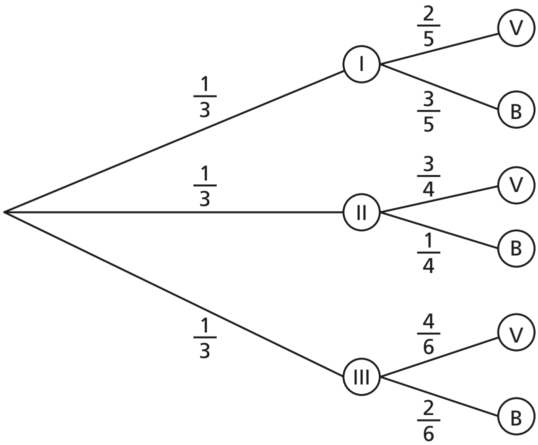
$$\boxed{P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_n \cap A).}$$

Este resultado é conhecido como **teorema da probabilidade total**. Ele é utilizado quando P(A) é difícil de ser calculada diretamente, porém simples se for usada a relação acima.

113. Exemplo 1:

Uma urna I tem 2 bolas vermelhas (V) e 3 brancas (B); outra urna II tem 3 bolas vermelhas e uma branca e a urna III tem 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola. Qual a probabilidade de a bola ser vermelha?





Notemos que os eventos, U_I (sair urna I), U_{II} (sair urna II) e U_{III} (sair urna III) determinam uma partição de Ω. Seja V o evento sair bola vermelha. Então, pelo **teorema da probabilidade total**, $P(V) = P(U_I \cap V) + P(U_{II} \cap V) + P(U_{III} \cap V)$.

Porém, pelo teorema da multiplicação:

$$P(U_I \cap V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P(U_{II} \cap V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

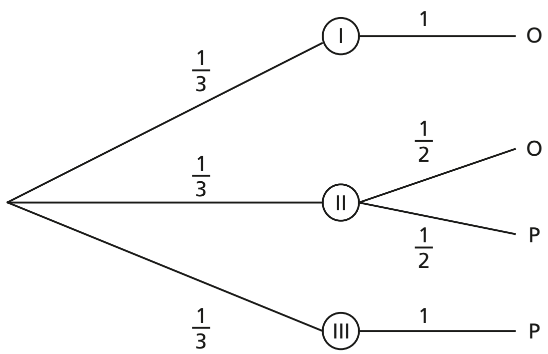
$$P(U_{III} \cap V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$$

Decorre então que:

$$P(V) = \frac{2}{15} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{109}{180}$$

114. Exemplo 2: (**Problema da moeda de Bertrand**)

Existem três caixas idênticas. A 1ª contém duas moedas de ouro, a 2ª contém uma moeda de ouro e outra de prata, e a 3ª, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda escolhida for de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?



É claro que o problema pode ser formulado da seguinte forma: "Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa I (pois a caixa I é a única que contém duas moedas de ouro).

Sejam os eventos:

C_I : a caixa sorteada é a 1ª

C_{II}: a caixa sorteada é a 2ª

C_{III}: a caixa sorteada é a 3ª

O: a moeda sorteada é de ouro

Temos:

$$P(C_I \cap O) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(O) = P(C_I \cap O) + P(C_{II} \cap O) + P(C_{III} \cap O)$$

$$P(O) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$P(C_I | O) = \frac{P(C_I \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Isto é, a probabilidade buscada é $\frac{2}{3}$.

EXERCÍCIOS

435. Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e o mostra a um jogador. Determine a probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha e de a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela.

436. Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 pretas. Outra urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é escolhida uma bola também ao acaso. Qual a probabilidade de observarmos:

a) urna I e bola vermelha?

b) urna I e bola preta?

c) urna II e bola vermelha?

d) urna II e bola preta?

437. Uma urna tem 8 bolas vermelhas, 3 brancas e 4 pretas. Uma bola é escolhida ao acaso e, sem reposição desta, outra é escolhida, também ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) a 1ª bola ser vermelha e a 2ª branca?

b) a 1ª bola ser branca e a 2ª vermelha?

c) a 1ª e a 2ª serem vermelhas?

438. O mês de outubro tem 31 dias. Numa certa localidade, chove 5 dias no mês de outubro. Qual a probabilidade de não chover nos dias 1º e 2 de outubro?

439. Seja P_x a probabilidade de que uma pessoa com X anos sobreviva mais um ano e nP_x a probabilidade de que uma pessoa com *x* anos sobreviva mais *n* anos (*n* inteiro positivo).

a) O que significa P_{40}?

b) O que significa $2P_{40}$?

c) Mostre que $2P_{40} = P_{40} \cdot P_{41}$.

440. A urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 brancas, a urna II tem 2 bolas vermelhas e 6 brancas e a urna III tem 5 bolas vermelhas, 2 brancas e 3 amarelas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola, também ao acaso. Qual a probabilidade de a bola ser:

a) vermelha?

b) branca?

c) amarela?

441. Uma urna contém 1 bola preta e 9 brancas. Uma segunda urna contém *x* bolas pretas e as restantes brancas num total de 10 bolas. Um primeiro experimento consiste em retirar, ao acaso, uma bola de cada urna. Num segundo experimento, as bolas das duas urnas são reunidas e destas, duas bolas são retiradas ao acaso. Qual é o valor mínimo de *x* a fim de que a probabilidade de saírem duas bolas pretas seja maior no segundo do que no primeiro experimento?

442. Em um lote da fábrica A existem 18 peças boas e 2 defeituosas. Em outro lote da fábrica B, existem 24 peças boas e 6 defeituosas, e em outro lote da fábrica C, existem 38 peças boas e 2 defeituosas. Um dos 3 lotes é sorteado ao acaso e dele é extraída uma peça ao acaso. Qual a probabilidade de a peça ser:

a) boa?

b) defeituosa?

443. Em um jogo de cara ou coroa, em cada tentativa a moeda é lançada 3 vezes consecutivas. Uma tentativa é considerada um sucesso se o número de vezes que se obtém cara supera estritamente o número de vezes que se obtém coroa. Qual é a probabilidade de serem obtidos 2 sucessos nas 2 primeiras tentativas?

444. A urna I tem 2 bolas vermelhas e 3 amarelas e a uma II tem 4 bolas vermelhas, 5 amarelas e 2 brancas. Uma bola é escolhida ao acaso na urna I e colocada na urna II, em seguida uma bola é escolhida na urna II ao acaso. Qual a probabilidade de essa segunda bola ser:

a) vermelha?

b) amarela?

c) branca?

445. Sejam A e B dois eventos tais que: $P(A \cap B) = 0{,}8$ e $P(A \cap B^C) = 0{,}1$. Calcule $P(A)$.

446. Uma urna I tem 3 bolas vermelhas e 4 brancas, a urna II tem 6 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é escolhida ao acaso e nela é escolhida uma bola, também ao acaso.

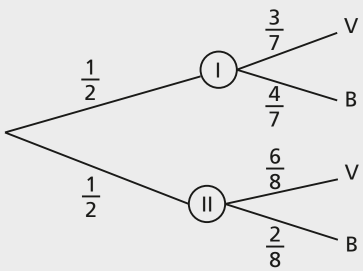
a) Qual a probabilidade de observarmos urna I e bola vermelha?

b) Qual a probabilidade de observarmos bola vermelha?

c) Se a bola observada foi vermelha, qual a probabilidade que tenha vindo da urna I?

Solução (diagrama de árvore)

a) $P(U_I \cap V) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14}$



b) $P(V) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{8} = \dfrac{33}{56}$

c) Estamos interessados em $P(U_I|V)$. Por definição

$$P(U_I|V) = \frac{P(U_I \cap V)}{P(V)}.$$

Usando os resultados dos itens *a* e *b*, $P(U_I|V) = \dfrac{\frac{3}{14}}{\frac{33}{56}} = \dfrac{4}{11}$.

447. Uma caixa contém 3 moedas M_I, M_{II} e M_{III}. A M_I é "honesta", a M_{II} tem duas caras e a M_{III} é viciada de tal modo que caras são duas vezes mais prováveis que coroas. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada.

a) Qual a probabilidade de observarmos moeda M_I e cara?

b) Qual a probabilidade de observarmos cara?

c) Se o resultado final foi cara, qual a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido M_I?

448. Duas máquinas A e B produzem peças idênticas, sendo que a produção da máquina A é o triplo da produção da máquina B. A máquina A produz 80% de peças boas e a máquina B produz 90%. Uma peça é selecionada ao acaso no estoque e verifica-se que é boa. Qual a probabilidade de que tenha sido fabricada pela máquina A?

449. Uma clínica especializada trata de 3 tipos de moléstias: X, Y e Z. 50% dos que procuram a clínica são portadores de X, 40% são portadores de Y e 10% de Z. As probabilidades de cura, nessa clínica, são:

moléstia X: 0,8

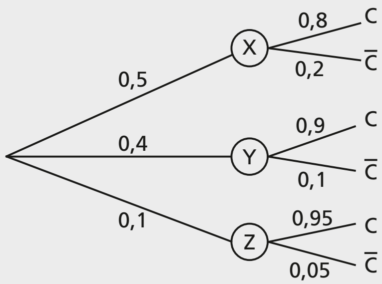
moléstia Y: 0,9

moléstia Z: 0,95

Um enfermo saiu curado da clínica. Qual a probabilidade de que ele sofresse da moléstia Y?

Solução

Façamos um diagrama de árvore:



em que:

C: indica o evento "o enfermo fica curado"

$\overline{C}$: indica o evento "o enfermo não fica curado"

1ª etapa: P(Y e C) = 0,4 · 0,9 = 0,36

2ª etapa: P(C) = 0,5 · 0,8 + 0,4 · 0,9 + 0,1 · 0,95 = 0,855

3ª etapa: $P(Y|C) = \dfrac{P(Y \text{ e } C)}{P(C)}$

Logo, $P(Y|C) = \dfrac{0{,}36}{0{,}855} = 0{,}421 = 42{,}1\%$, que é a probabilidade procurada.

450. No exercício anterior, se o enfermo saiu curado, qual a probabilidade de que ele sofresse:

a) da moléstia X?

b) da moléstia Z?

451. Uma certa moléstia A é detectada através de um exame de sangue. Entre as pessoas que efetivamente possuem a moléstia A, 80% delas têm a moléstia detectada pelo exame de sangue. Entre as pessoas que não possuem a moléstia A, 5% delas têm a moléstia detectada (erroneamente) pelo exame de sangue. Numa cidade, 2% das pessoas têm a moléstia A. Uma pessoa da cidade foi submetida ao citado exame de sangue que a acusou como portadora da moléstia A. Qual a probabilidade de essa pessoa estar efetivamente atacada pela moléstia?

452. Em uma população, o número de homens é igual ao de mulheres. 5% dos homens são daltônicos e 0,25% das mulheres são daltônicas. Uma pessoa é selecionada ao acaso e verifica-se que é daltônica. Qual a probabilidade de que ela seja mulher?

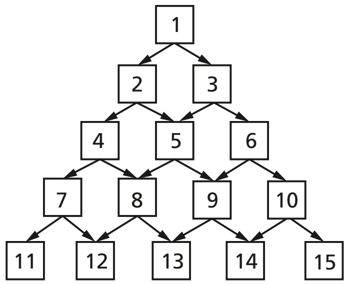
453. Dispõe-se de um mapa. Dispõe-se também de um dado com 3 faces vermelhas e 3 faces azuis. Considerando as regras:

I. partindo do quadro 1, pode-se caminhar, no sentido indicado pelas setas, para os demais quadros, a cada lançamento do dado;

II. lançando-se o dado, se sair face azul, segue-se pela seta da direita até o quadro seguinte;

III. lançando-se o dado, se sair face vermelha, segue-se pela seta da esquerda até o quadro seguinte.

Determine a probabilidade de chegar ao quadro 13 partindo do 1.



XIII. Independência de dois eventos

115. Dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω, diremos que **A independe de B** se:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

isto é, A independe de B se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A.

Observemos que, se **A independe de B** ($P(A) > 0$), então **B independe de A**, pois:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$$

116. Em resumo, se A independe de B, então B independe de A e além disso:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \underbrace{P(B \mid A)}_{P(B)} = P(A) \cdot P(B)$$

Isso sugere a definição:

Dois eventos A e B são chamados independentes se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

117. Exemplo 1:

Uma moeda é lançada 3 vezes. Sejam os eventos:

A: ocorrem pelo menos duas caras.
B: ocorrem resultados iguais nos três lançamentos.

Temos:

$$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$$

$$A = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}, \ P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(K, K, K), (C, C, C)\}, \ P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \{(K, K, K)\}, \ P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Logo, $\underset{\frac{1}{8}}{\underset{\uparrow}{P(A \cap B)}} = \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\uparrow}{P(A)}} \cdot \underset{\frac{1}{4}}{\underset{\uparrow}{P(B)}}$

Portanto A e B são independentes.

118. Observação:

a) Se A e B **não são independentes**, eles são chamados **dependentes**.

b) Prova-se que (ver exercícios), se A e B são independentes, então:

A e B^C são independentes.

A^C e B são independentes.

A^C e B^C são independentes.

119. Exemplo 2:

Duas pessoas praticam tiro ao alvo. A probabilidade de a 1ª atingir o alvo é $P(A) = \frac{1}{3}$ e a probabilidade de a 2ª atingir o alvo é $P(B) = \frac{2}{3}$.

Admitindo A e B independentes, se os dois atiram, qual a probabilidade de:

a) ambos atingirem o alvo?

b) ao menos um atingir o alvo?

Temos:

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

XIV. Independência de três ou mais eventos

120. Consideremos 3 eventos A, B e C do mesmo espaço amostral Ω. Diremos que A, B e C **são independentes**, se:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Generalizando, diremos que *n* eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se:

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i, j \quad i \neq j$

$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \ \forall i, j, k, i \neq j, i \neq k, j \neq k$

....

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$

121. Observação:

Em geral, para mais do que 2 eventos não precisamos verificar todas essas condições, pois do ponto de vista prático nós **admitimos a independência** (baseados nas particularidades do experimento) e usamos esse fato para calcularmos, por exemplo, $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$ como $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

122. Exemplo 1:

Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observarmos cara nos 10 lançamentos?

Sejam os eventos:

A_1: ocorre cara no 1º lançamento
A_2: ocorre cara no 2º lançamento
$\vdots$
A_{10}: ocorre cara no 10º lançamento

Como o resultado de cada lançamento não é afetado pelos outros, podemos admitir $A_1, A_2, ..., A_{10}$ como eventos independentes. Portanto,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_{10}).$$

Como:
$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_{10}) = \frac{1}{2}$ $\left(\text{a probabilidade de ocorrer cara em qualquer lançamento é } \frac{1}{2}\right)$

decorre que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{10}) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot ... \cdot \frac{1}{2}}_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

123. Exemplo 2:

Um dado é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de que a face "2" apareça pelo menos uma vez nos 5 lançamentos?

Sejam os eventos:
A_1: ocorre um número diferente de 2 no 1º lançamento.
A_2: ocorre um número diferente de 2 no 2º lançamento.
$\vdots$
A_5: ocorre um número diferente de 2 no 5º lançamento.

Admitindo $A_1, A_2, ..., A_5$ independentes e tendo em conta que

$$P(A_i) = \frac{5}{6} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \text{ resulta que:}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Então $\left(\frac{5}{6}\right)^5$ é a probabilidade de **não observarmos** o “2” em **nenhum lançamento.** Ora, aparecer o “2” pelo menos uma vez é o evento complementar do evento não comparecer nenhuma vez. Logo, a probabilidade desejada é:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

EXERCÍCIOS

454. Se A e B são eventos independentes, prove que A^C e B também o são. Isto é, prove que a implicação abaixo é verdadeira:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A^C \cap B) = P(A^C) \cdot P(B)$

Demonstração

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$ (teorema da probabilidade total)

Logo:

$P(B) = P(A) \cdot P(B) + P(A^C \cap B)$

$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$P(A^C \cap B) = P(B)\,[1 - P(A)]$

$P(A^C \cap B) = P(B) \cdot P(A^C)$

455. Prove (usando o exercício 454) que, se A e B são independentes:

a) A e B^C são independentes

b) A^C e B^C são independentes.

456. Prove que, se A e B são mutuamente exclusivos, $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, então A e B são dependentes.

457. Numa sala existem 4 homens e 6 mulheres. Uma mosca entra na sala e pousa numa pessoa, ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que ela pouse num homem (P(H))?

b) Qual a probabilidade de que ela pouse numa mulher (P(M))?

c) Os eventos H e M são independentes?

458. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Sejam os eventos:

A: a carta é de copas

B: a carta é um rei.

C: a carta é um rei ou uma dama.

Quais dos pares de eventos são independentes?

a) A e B b) A e C c) B e C

459. As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são: $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{3}{5}$. Qual a probabilidade de que:

a) ambos resolvam o problema?

b) ao menos um resolva o problema?

c) nenhum resolva o problema?

d) A resolva o problema mas B não?

e) B resolva o problema mas A não?

460. A probabilidade de um certo homem sobreviver mais 10 anos, a partir de uma certa data, é 0,4, e de que sua esposa sobreviva mais 10 anos a partir da mesma data é 0,5. Qual a probabilidade de:

a) ambos sobreviverem mais 10 anos a partir daquela data?

b) ao menos um deles sobreviver mais 10 anos a partir daquela data?

461. A probabilidade de que um aluno A resolva certo problema é $P(A) = \frac{1}{2}$, a de que outro aluno B o resolva é $P(B) = \frac{1}{3}$ e a de que um terceiro aluno C o resolva é $P(C) = \frac{1}{4}$. Qual a probabilidade de que:

a) os três resolvam o problema?

b) ao menos um resolva o problema?

Solução

Assumindo que A, B e C são eventos independentes, temos:

A) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

b) Queremos calcular $P(A \cup B \cup C)$.

Temos:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$
$+ P(A \cap B \cap C)$

Logo:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) +$
$+ P(A \cap B \cap C)$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

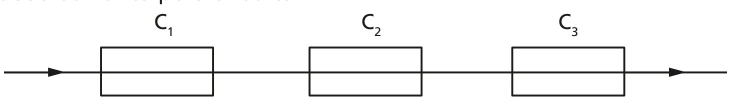
462. Luís tem probabilidade $\frac{1}{4}$ de convidar Alice para um passeio num domingo. A probabilidade de que César a convide é $\frac{2}{5}$ e a de Olavo é $\frac{1}{2}$. Qual a probabilidade de que:

a) os três a convidem para o passeio?

b) ao menos um a convide para o passeio?

c) nenhum a convide para o passeio?

463. Em um circuito elétrico, 3 componentes são ligados em série e trabalham independentemente um do outro. As probabilidades de falharem o 1º, 2º e 3º componentes valem respectivamente $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}1$ e $p_3 = 0{,}2$. Qual a probabilidade de que não passe corrente pelo circuito?



464. (Problema proposto por Chevalier De Meré a Pascal)

O que é mais provável:

a) obter pelo menos um "6" jogando um dado 4 vezes ou

b) obter um par de 6 pelo menos uma vez jogando dois dados simultaneamente 24 vezes?

465. Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de:

a) observarmos 10 caras?

b) observarmos 10 coroas?

c) observarmos 4 caras e 6 coroas?

XV. Lei binomial da probabilidade

124. Ensaios de Bernoulli

Consideremos um experimento que consiste em uma sequência de ensaios ou tentativas independentes, isto é, ensaios nos quais a **probabilidade de um resultado em cada**

ensaio não depende dos resultados ocorridos nos ensaios anteriores, nem dos resultados nos ensaios posteriores. Em cada ensaio, podem ocorrer apenas dois resultados, um deles que chamaremos de **sucesso** (S) e outro que chamaremos de **fracasso** (F). A probabilidade de ocorrer **sucesso** em cada ensaio é sempre *p*, e consequentemente, a de **fracasso** é $q = 1 - p$. Tal tipo de experimento recebe o nome de **ensaio de Bernoulli** (pois os primeiros estudos a esse respeito devem-se a Jacques Bernoulli, matemático do século XVII).

125. Exemplos de ensaio de Bernoulli

1) Uma moeda é lançada 5 vezes. Cada lançamento é um ensaio, em que dois resultados podem ocorrer: cara ou coroa. Chamemos de **sucesso** o resultado **cara** e de **fracasso** o resultado **coroa**. Em cada ensaio, $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

2) Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 6 brancas. Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna; este procedimento é repetido 8 vezes. Cada extração é um ensaio, em que dois resultados podem ocorrer: bola vermelha ou bola branca. Chamemos de **sucesso** o resultado **bola vermelha** e **fracasso** o resultado **bola branca**. Em cada caso, $p = \frac{4}{10}$ e $q = \frac{6}{10}$.

3) Um dado é lançado 100 vezes. Consideremos os dois resultados: sair o número "5" ou sair um número diferente de "5". Cada lançamento é um ensaio de Bernoulli. Chamemos de **sucesso** o resultado **sair o "5"** e de **fracasso** o resultado **não sair o "5"**. Em cada ensaio, $p = \frac{1}{6}$ e $q = \frac{5}{6}$.

126. Observação:

Os nomes **sucesso** e **fracasso** não têm aqui o significado que lhes damos na linguagem cotidiana. São nomes que servem apenas para designar os dois resultados de cada ensaio. Assim, no exemplo 1, poderíamos chamar de **sucesso** o resultado **coroa** e de **fracasso** o resultado **cara**.

No exemplo 1, sejam os eventos:

A_1: ocorre cara no 1º lançamento, $P(A_1) = \frac{1}{2}$.

A_2: ocorre cara no 2º lançamento, $P(A_2) = \frac{1}{2}$.

⋮

A_5: ocorre cara no 5º lançamento, $P(A_5) = \frac{1}{2}$.

Então, o evento $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5$ corresponde ao evento **sair cara nos 5 lançamentos**, que é:

{(K, K, K, K, K)}

Como os 5 eventos são independentes,

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

Se quisermos a probabilidade de obter duas caras e em seguida três coroas, então o evento que nos interessa é:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C$ que é {(K, K, C, C, C)}

Logo,

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

É fácil perceber neste exemplo que a probabilidade de qualquer quíntupla ordenada de caras e coroas é $\frac{1}{32}$, pois em qualquer quíntupla ordenada (_, _, _, _, _) a probabilidade P {(_, _, _, _, _)} será:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

Suponhamos, agora, o evento sair exatamente uma cara. Isto é:

{(K, C, C, C, C), (C, K, C, C, C), (C, C, K, C, C), (C, C, C, K, C), (C, C, C, C, K)}

Portanto, a probabilidade deste evento é:

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

Se quisermos a probabilidade de o evento revelar exatamente duas caras, teremos que calcular o **número** de quíntuplas ordenadas em que existem duas caras (K) e três coroas (C). Ora, a Análise Combinatória nos ensina que este **número** é o número de permutações de 5 elementos, com dois repetidos (iguais a K) e três repetidos (iguais a C), isto é:

$$P_5^{2,\,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

Logo, a probabilidade desejada é $\frac{10}{32}$.

127. Distribuição binomial

Os exemplos anteriores podem ser generalizados, segundo o que se conhece por **distribuição binomial.**

Consideremos então uma sequência de *n* ensaios de Bernoulli. Seja *p* a probabilidade de **sucesso** em cada ensaio e *q* a probabilidade de **fracasso.**

Queremos calcular a **probabilidade P_k, da ocorrência de exatamente K sucessos, nos *n* ensaios.** É evidente que $K \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Sejam os eventos:

A_i : ocorre sucesso no i-ésimo ensaio, $P(A_i) = p$.

A_i^C: ocorre fracasso no i-ésimo ensaio, $P(A_i^C) = q$.

O evento "ocorrem exatamente K sucessos nos *n* ensaios" é formado por **todas as ênuplas ordenadas em que existem K sucessos (S) e n − K fracassos (F).** O número de ênuplas ordenadas nessas condições é:

$$P_n^{K,\, n-K} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!} = \binom{n}{K}$$

A probabilidade de cada ênupla ordenada de K sucessos (S) e (n − K) fracassos (F) é dada por:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot ... \cdot p}_{K \text{ vezes}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot ... \cdot q}_{(n-K) \text{ vezes}} = p^K \cdot q^{n-K}$$

pois qualquer ênupla ordenada deste tipo é a **interseção** de K eventos do tipo A_i e (n − K) eventos do tipo A_j^C, e, como esses eventos são independentes, a probabilidade da **interseção** dos mesmos é o **produto** das probabilidades de cada um, isto é, $p^K \cdot q^{n-K}$. Por exemplo, a ênupla $(\underbrace{S, S, S, ..., S}_{K}, \underbrace{F, F, ..., F}_{n-K})$ é igual à interseção

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_K \cap A_{K+1}^C \cap ... \cap A_n^C$$

cuja probabilidade é $p^K \cdot q^{n-K}$.

Logo, se cada ênupla ordenada com exatamente K sucessos tem probabilidade $p^K \cdot q^{n-K}$ e existem $\binom{n}{K}$ ênuplas desse tipo, a probabilidade **P_K de exatamente K sucessos nos *n* ensaios** será:

$$\boxed{P_K = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K}}$$

128. Exemplo 1:

Uma urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. O experimento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

Em cada ensaio, consideremos como **sucesso** o resultado “bola vermelha”, e **fracasso** “bola branca”. Então:

$$P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},\ q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},\ n = 5$$

Estamos interessados na probabilidade P_3. Temos:

$$P_3 = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3!\ 2!} \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{9}{25} = \frac{720}{3125}$$

129. Exemplo 2:

Numa cidade, 10% das pessoas possuem carro de marca A. Se 30 pessoas são selecionadas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas possuírem carro da marca A?

Em cada escolha de uma pessoa, consideremos os resultados:

Sucesso: a pessoa tem carro marca A.
Fracasso: a pessoa não tem carro marca A.

Então: $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 30$. Estamos interessados em P_5. Temos:

$$P_5 = \binom{30}{5} (0{,}1)^5 \cdot (0{,}9)^{25} \cong 0{,}102$$

130. Observação:

O problema de obter K sucessos em *n* ensaios de Bernoulli pode ser encarado como um problema cujo espaço amostral é $\Omega = \{0, 1, 2, ..., n\}$, isto é, cada elemento de Ω é o número de sucessos em *n* ensaios de Bernoulli e a distribuição de probabilidade é dada por:

$$P_K = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot q^{n-K}$$

Tal distribuição é chamada **binomial**, pois cada probabilidade P_K é dada pelo **termo geral do binômio de Newton $(p + q)^n$.**

EXERCÍCIOS

466. Considere uma distribuição binomial com $n = 10$ e $p = 0{,}4$. Calcule:

a) P_0 b) P_4 c) P_6 d) P_8

467. Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente duas caras?

468. Um dado é lançado 5 vezes. Qual a probabilidade de que o "4" apareça exatamente 3 vezes?

469. Um estudante tem probabilidade $p = 0{,}8$ de acertar cada problema que tenta resolver. Numa prova de 8 problemas, qual a probabilidade de que ele acerte exatamente 6?

470. Uma pessoa tem probabilidade 0,2 de acertar num alvo toda vez que atira. Supondo que as vezes que ela atira são ensaios independentes, qual a probabilidade de ela acertar no alvo exatamente 4 vezes, se ela dá 8 tiros?

471. A probabilidade de que um homem de 45 anos sobreviva mais 20 anos é 0,6. De um grupo de 5 homens com 45 anos, qual a probabilidade de que exatamente 4 cheguem aos 65 anos?

472. Um exame consta de 20 questões tipo certo ou errado. Se o aluno "chutar" todas as respostas, qual a probabilidade de ele acertar exatamente 10 questões? (Indique somente os cálculos.)

473. Uma moeda é lançada 2n vezes. Qual a probabilidade de observarmos *n* caras e *n* coroas?

474. Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual a probabilidade de observarmos ao menos uma cara?

Solução

Temos: $n = 6,\ p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$

Estamos interessados em calcular: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$

Como:

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 - P_0$

logo, basta calcularmos P_0.

Temos:

$$P_0 = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Logo, a probabilidade desejada é: $1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

475. Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de observarmos pelo menos 8 caras?

476. Um time de futebol tem probabilidade $p = \frac{3}{5}$ de vencer todas as vezes que joga. Se disputar 5 partidas, qual a probabilidade de que vença ao menos uma?

477. Uma moeda é lançada 9 vezes. Qual a probabilidade de observarmos no máximo 3 caras?

Solução

Temos: $n = 9$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

Estamos interessados em calcular: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$. Então:

$$P_0 = \binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

$$P_1 = \binom{9}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{512}$$

$$P_2 = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{36}{512}$$

$$P_3 = \binom{9}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{84}{512}$$

Logo, $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{130}{512} = 0{,}254$.

478. Em 4 ensaios de Bernoulli, a probabilidade de sucesso em cada um é $p = 0{,}4$. Qual a probabilidade de observarmos no mínimo 3 sucessos?

479. Um teste tipo certo ou errado consta de 6 questões. Se um aluno “chutar” as respostas ao acaso, qual a probabilidade de que ele acerte mais do que 2 testes?

480. Numa cidade, 30% da população é favorável ao candidato A. Se 10 eleitores forem selecionados ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de que mais da metade deles seja favorável ao candidato A? (Indique os cálculos.)