

GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Conjuntos
Funções

1



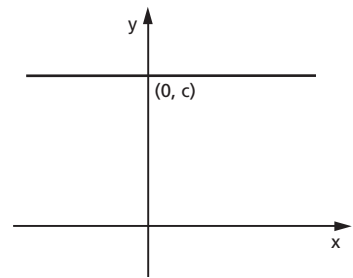
CAPÍTULO VI

Função constante Função afim

I. Função constante

80. Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de **função constante** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = c$$



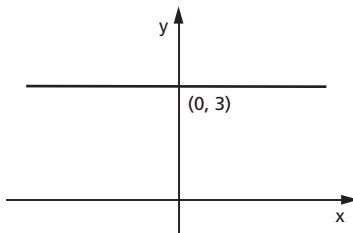
O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos x passando pelo ponto $(0, c)$.

A imagem é o conjunto $\text{Im} = \{c\}$.

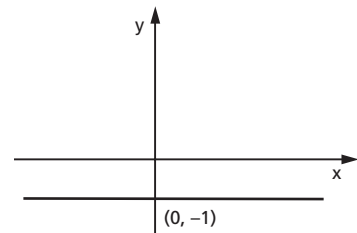
Exemplos:

Construir os gráficos das aplicações de \mathbb{R} em \mathbb{R} definidas por:

1) $y = 3$



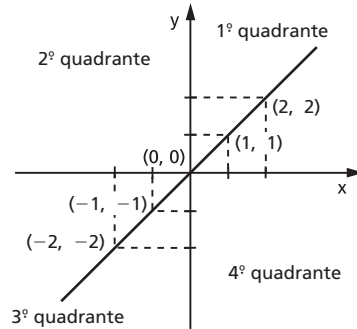
2) $y = -1$



II. Função identidade

81. Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de **função identidade** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x , isto é:

$$f(x) = x$$



O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

A imagem é o conjunto $\text{Im} = \mathbb{R}$.

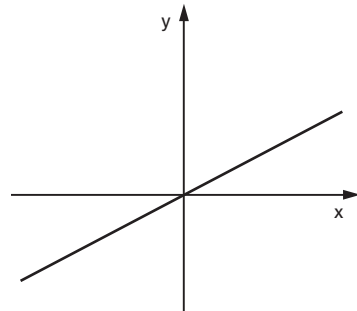
III. Função linear

82. Uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de **função linear** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

$$f(x) = ax \quad (a \neq 0)(*)$$

Demonstra-se que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem. (**)

A imagem é o conjunto $\text{Im} = \mathbb{R}$.



De fato, qualquer que seja o $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tal que:

$$f(x) = f\left(\frac{y}{a}\right) = a \cdot \frac{y}{a} = y$$

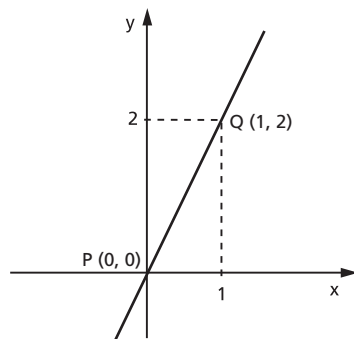
(*) Observe-se que, se $a = 0$, teremos a função constante $y = 0$.

(**) Essa demonstração será feita para um caso mais geral e se encontra nas páginas 100-101.

Exemplos:

1º) Construir o gráfico da função $y = 2x$.
Considerando que dois pontos distintos determinam uma reta e no caso da função linear um dos pontos é a origem, basta atribuir a x um valor não nulo e calcular o correspondente $y = 2x$.

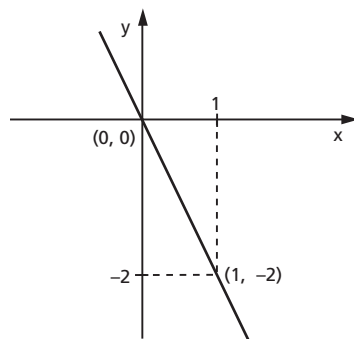
| x | $y = 2x$ |
|-----|----------|
| 1 | 2 |



Pelos pontos $P(0, 0)$ e $Q(1, 2)$ traçamos a reta \overleftrightarrow{PQ} , que é precisamente o gráfico da função dada.

2º) Construir o gráfico da função $y = -2x$.
Analogamente, temos:

| x | $y = -2x$ |
|-----|-----------|
| 1 | -2 |



EXERCÍCIOS

169. Construa o gráfico das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

a) $y = 2$

c) $y = -3$

b) $y = \sqrt{2}$

d) $y = 0$

170. Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$ d) $y = \frac{x}{2}$

171. Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

a) $y = -x$ b) $y = -2x$ c) $y = -3x$ d) $y = -\frac{x}{2}$

IV. Função afim

83. Uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de **função afim** quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ e b são números reais dados.

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

Exemplos:

1º) $y = 3x + 2$ em que $a = 3$ e $b = 2$

2º) $y = -2x + 1$ em que $a = -2$ e $b = 1$

3º) $y = x - 3$ em que $a = 1$ e $b = -3$

4º) $y = 4x$ em que $a = 4$ e $b = 0$

Notemos que, para $b = 0$, a função afim $y = ax + b$ se transforma na função linear $y = ax$; podemos, então, dizer que a função linear é uma particular função afim.

V. Gráfico

84. Teorema

“O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) é uma reta.”

Demonstração:

Sejam A, B e C três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = ax + b$ ($a \neq 0$) e (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos.

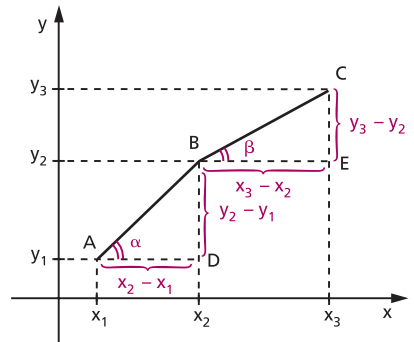
Para provarmos que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, mostremos, inicialmente, que os triângulos retângulos ABD e BCE são semelhantes.

De fato:

$$(x_1, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = ax_1 + b \quad (1)$$

$$(x_2, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = ax_2 + b \quad (2)$$

$$(x_3, y_3) \in f \Rightarrow y_3 = ax_3 + b \quad (3)$$



Subtraindo membro a membro, temos:

$$\left. \begin{array}{l} y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2) \\ y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

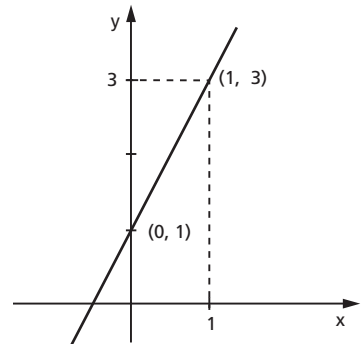
Os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que os pontos A, B e C estão alinhados.

85. Aplicações

1ª) Construir o gráfico da função $y = 2x + 1$.

Considerando que o gráfico da função afim é uma reta, vamos atribuir a x dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de y .

| x | $y = 2x + 1$ |
|-----|--------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |

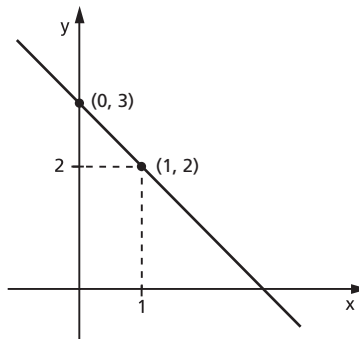


O gráfico procurado é a reta que passa pelos pontos (0, 1) e (1, 3).

2ª) Construir o gráfico da função $y = -x + 3$.

De modo análogo, temos:

| x | $y = -x + 3$ |
|---|--------------|
| 0 | 3 |
| 1 | 2 |



EXERCÍCIOS

172. Construa o gráfico cartesiano das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} :

a) $y = 2x - 1$

e) $y = -3x - 4$

b) $y = x + 2$

f) $y = -x + 1$

c) $y = 3x + 2$

g) $y = -2x + 3$

d) $y = \frac{2x - 3}{2}$

h) $y = \frac{4 - 3x}{2}$

173. Resolva analítica e graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solução analítica

Existem diversos processos analíticos pelos quais podemos resolver um sistema de equações. Vamos apresentar dois deles.

1º processo: Substituição

Este processo consiste em substituir o valor de uma das incógnitas, obtido a partir de uma das equações, na outra.

Resolvendo, por exemplo, a primeira equação na incógnita x , temos:

$$x - y = -3 \Leftrightarrow x = y - 3$$

e substituímos x por esse valor na segunda equação:

$$2(y - 3) + 3y = 4 \Leftrightarrow 2y - 6 + 3y = 4 \Leftrightarrow y = 2$$

que levamos à primeira equação, encontrando:

$$x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = -1$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

2º processo: Adição

Este processo baseia-se nas seguintes propriedades:

I. “Num sistema de equações, se multiplicamos todos os coeficientes de uma equação por número não nulo, o sistema que obtemos é equivalente ao anterior (*)”.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ka_1x + kb_1y = kc_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (k \neq 0)$$

II. “Num sistema de equações, se substituímos uma das equações pela sua soma com uma outra equação do sistema, o novo sistema é equivalente ao anterior”.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

O fundamento do processo da adição consiste no seguinte: aplicando a primeira propriedade, multiplicamos cada equação por números convenientes, de modo que os coeficientes de determinada incógnita sejam opostos e, aplicando a segunda propriedade, substituímos uma das equações pela soma das duas equações.

Assim, no sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

multiplicamos a primeira equação por 3

$$\begin{cases} 3x - 3y = -9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação pela soma das duas equações, temos:

$$\begin{cases} 5x = -5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

(*) Sistemas de equações são equivalentes quando apresentam as mesmas soluções.

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Substituindo $x = -1$ em $2x + 3y = 4$, encontramos:

$$2 \cdot (-1) + 3y = 4 \Rightarrow y = 2$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

Solução gráfica

O sistema proposto

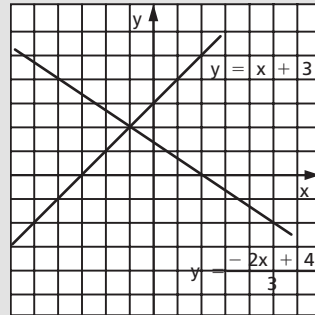
$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = \frac{-2x + 4}{3} \end{cases}$$

Construímos os gráficos de

$$y = x + 3 \text{ e } y = \frac{-2x + 4}{3}$$



A solução do sistema são as coordenadas do ponto de interseção das retas, portanto $(-1, 2)$.

174. Resolva analítica e graficamente os sistemas de equações.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

175. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{x+y+1} - \frac{2}{2x-y+3} = \frac{5}{12} \\ \frac{2}{x+y+1} + \frac{3}{2x-y+3} = 1 \end{cases}$

Sugestão:

Faça $\frac{1}{x-y} = a$ e $\frac{1}{x+y} = b$.

176. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, -2)$.

Solução

Seja $y = ax + b$ a equação procurada. O problema estará resolvido se determinarmos os valores de a e b .

Considerando que o ponto $(1, 2)$ pertence à reta de equação $y = ax + b$, ao substituirmos $x = 1$ e $y = 2$ em $y = ax + b$, temos a sentença verdadeira:

$$2 = a \cdot 1 + b, \quad \text{isto é:} \quad a + b = 2$$

Analogamente, para o ponto $(3, -2)$, obtemos:

$$-2 = a \cdot 3 + b, \quad \text{isto é:} \quad 3a + b = -2$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$

encontramos $a = -2$ e $b = 4$.

Assim, a equação da reta é $y = -2x + 4$.

177. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos:

a) $(2, 3)$ e $(3, 5)$

c) $(3, -2)$ e $(2, -3)$

b) $(1, -1)$ e $(-1, 2)$

d) $(1, 2)$ e $(2, 2)$

178. De uma caixa contendo bolas brancas e pretas, retiraram-se 15 brancas, ficando a relação de 1 branca para 2 pretas. Em seguida, retiraram-se 10 pretas, restando, na caixa, bolas na razão de 4 brancas para 3 pretas. Determine quantas bolas havia, inicialmente, na caixa.

179. A função f é definida por $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$. Determine o valor de $f(3)$.

VI. Imagem

86. Teorema

O conjunto imagem da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é \mathbb{R} .

De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y - b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f\left(\frac{y - b}{a}\right) = a \cdot \frac{y - b}{a} + b = y.$$

VII. Coeficientes da função afim

87. O coeficiente a da função $y = ax + b$ é denominado **coeficiente angular** ou **declividade** da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b da função $y = ax + b$ é denominado **coeficiente linear**.

Exemplo:

Na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1. Observe que, se $x = 0$, temos $y = 1$. Portanto, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y .

EXERCÍCIOS

180. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 3)$ e tem coeficiente angular igual a 2.

Solução

A equação procurada é da forma $y = ax + b$.

Se o coeficiente angular é 2, então $a = 2$.

Substituindo $x = 1$, $y = 3$ e $a = 2$ em $y = ax + b$, vem:

$$3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$$

A equação procurada é $y = 2x + 1$.

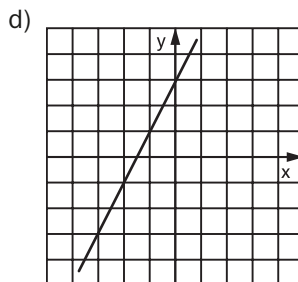
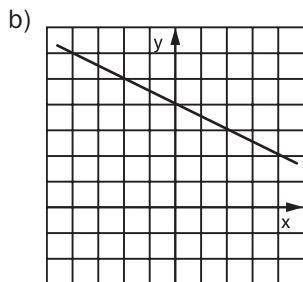
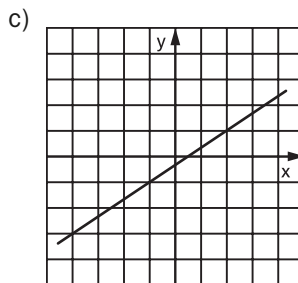
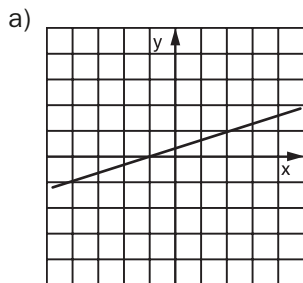
181. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 4)$ e tem coeficiente angular igual a -3 .

182. Obtenha a equação da reta com coeficiente angular igual a $-\frac{1}{2}$ e passando pelo ponto $(-3, 1)$.

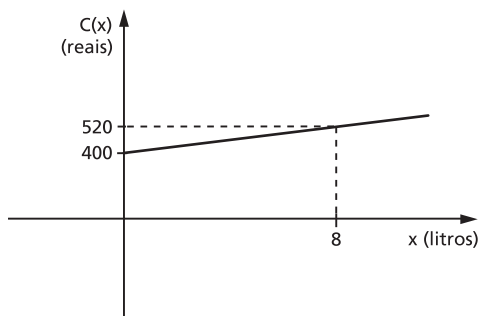
183. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e tem coeficiente linear igual a 4.

184. Obtenha a equação da reta com coeficiente linear igual a -3 e que passa pelo ponto $(-3, -2)$.

185. Dados os gráficos das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , obtenha a lei de correspondência dessas funções.



186. O custo C de produção de x litros de uma certa substância é dado por uma função linear de x , com $x \geq 0$, cujo gráfico está representado abaixo.



Nessas condições, o custo de R\$ 700,00 corresponde à produção de quantos litros?

187. Considere esta tabela para o cálculo do imposto de renda a ser pago pelos contribuintes em um certo mês de 2012.

| x | i | d |
|--------------------------|------------|------------------------------------|
| Renda bruta (R\$) | Alíquota % | Parcela a deduzir do imposto (R\$) |
| Até 1 637,11 | isento | – |
| De 1 637,12 até 2 453,50 | 7,5 | 122,78 |
| De 2 453,51 até 3 271,38 | 15,0 | 306,80 |
| De 3 271,39 até 4 087,65 | 22,5 | 552,15 |
| Acima de 4 087,65 | 27,5 | n |

Considerando x como a renda bruta de um contribuinte, o imposto a pagar é função f de x . O contribuinte deve multiplicar a sua renda bruta pelo valor da alíquota e subtrair do resultado a parcela a deduzir. Além disso, tal função deve ser **contínua**, para não prejudicar nem beneficiar contribuintes cuja renda se situe em faixas distintas da tabela. Note, por exemplo, que, ao passar da primeira faixa (isento) para a segunda (alíquota de 7,5%), a parcela a deduzir (122,78) não permite saltos no gráfico.

- Utilize os valores i e d da tabela e dê a expressão da função “imposto a pagar” relativa a uma renda x , em cada faixa da tabela.
- Determine o valor de n da tabela para tornar a função obtida no **item a** contínua.

VIII. Zero da função afim

88. Zero de uma função é todo número x cuja imagem é nula, isto é, $f(x) = 0$.

$$x \text{ é zero de } y = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Assim, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação de 1º grau:

$$ax + b = 0$$

que apresenta uma única solução $x = -\frac{b}{a}$.

De fato, resolvendo $ax + b = 0$, $a \neq 0$, temos:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Exemplo:

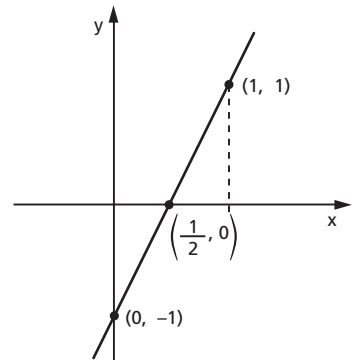
O zero da função $f(x) = 2x - 1$ é $x = \frac{1}{2}$, pois, fazendo $2x - 1 = 0$, vem $x = \frac{1}{2}$.

Podemos interpretar o zero da função afim como sendo abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos x .

Exemplo:

Fazendo o gráfico da função $y = 2x - 1$, podemos notar que a reta intercepta o eixo dos x em $x = \frac{1}{2}$, isto é, no ponto $(\frac{1}{2}, 0)$.

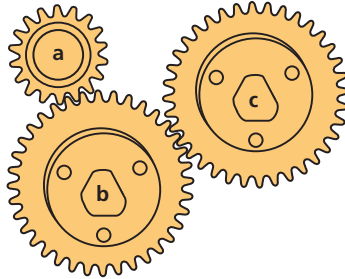
| x | y |
|---|----|
| 0 | -1 |
| 1 | 1 |



EXERCÍCIOS

- 188.** Na hora de fazer seu testamento, uma pessoa tomou a seguinte decisão: dividiria sua fortuna entre sua filha, que estava grávida, e a prole resultante dessa gravidez, dando a cada criança que fosse nascer o dobro daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo masculino, e o triplo daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo feminino. Nasceram trigêmeos, sendo dois meninos e uma menina. Como veio a ser repartida a herança legada?
- 189.** Um pequeno avião a jato gasta sete horas a menos do que um avião a hélice para ir de São Paulo até Boa Vista. O avião a jato voa a uma velocidade média de 660 km/h, enquanto o avião a hélice voa em média a 275 km/h. Qual é a distância entre São Paulo e Boa Vista?
- 190.** Uma fábrica só contrata trabalhadores com idade acima de 16 anos. O salário médio, por hora de trabalho, nessa fábrica de 110 trabalhadores é de R\$ 20,00. Calculando-se, no entanto, apenas com os 100 trabalhadores de idade igual ou maior que 18 anos, a média passa a ser R\$ 21,20. Qual o salário médio dos trabalhadores com menos de 18 anos, por hora de trabalho, em reais?

- 191.** Paulo e Joana recebem o mesmo salário por hora de trabalho. Após Paulo ter trabalhado 4 horas e Joana 3 horas e 20 minutos, Paulo tinha a receber R\$ 150,00 a mais que Joana. Calcule em reais um décimo do que Paulo recebeu.
- 192.** Qual o menor número inteiro de voltas que deve dar a roda c da engrenagem da figura, para que a roda a dê um número inteiro de voltas?



- 193.** Supondo que dois pilotos de Fórmula 1 largam juntos num determinado circuito e completam, respectivamente, cada volta em 72 e 75 segundos, responda: depois de quantas voltas do mais rápido, contadas a partir da largada, ele estará uma volta na frente do outro?

IX. Funções crescentes e decrescentes

89. Função crescente

A função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é **crescente** no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1 , com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

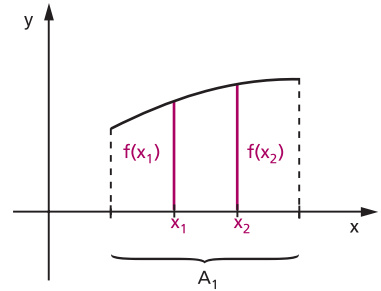
Em símbolos: f é crescente quando

$$(\forall x_1, x_2) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

e isso também pode ser posto assim:

$$(\forall x_1, x_2) (x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0).$$

Na linguagem prática (não matemática), isso significa que a função é crescente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a x , o valor de y também aumenta.



Exemplo:

A função $f(x) = 2x$ é crescente em \mathbb{R} , pois:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{2x_1}_{f(x_1)} < \underbrace{2x_2}_{f(x_2)} \text{ para todo } x_1 \in \mathbb{R} \text{ e todo } x_2 \in \mathbb{R}.$$

90. Função decrescente

A função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é **decrescente** no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1 , com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

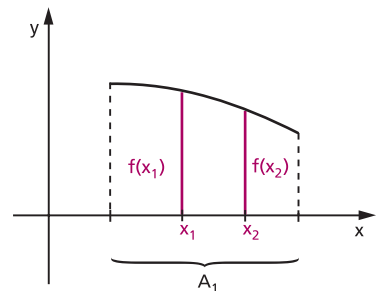
Em símbolos: f é decrescente quando

$$(\forall x_1, x_2) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

e isso também pode ser posto assim:

$$(\forall x_1, x_2) \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \right).$$

Na linguagem prática (não matemática), isso significa que a função é decrescente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a x , o valor de y diminui.

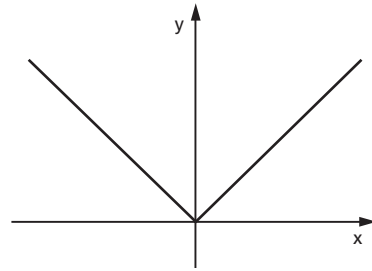


Exemplo:

A função $f(x) = -2x$ é decrescente em \mathbb{R} , pois $x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{-2x_1}_{f(x_1)} > \underbrace{-2x_2}_{f(x_2)}$ para todo $x_1 \in \mathbb{R}$ e todo $x_2 \in \mathbb{R}$.

Notemos que uma mesma função $y = f(x)$ pode não ter o mesmo comportamento (crescente ou decrescente) em todo o seu domínio.

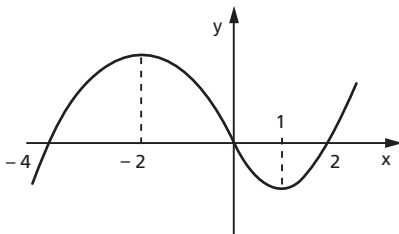
É bastante comum que uma função seja crescente em certos subconjuntos de D e decrescente em outros. O gráfico ao lado representa uma função crescente em \mathbb{R}_+ e decrescente em \mathbb{R}_- .



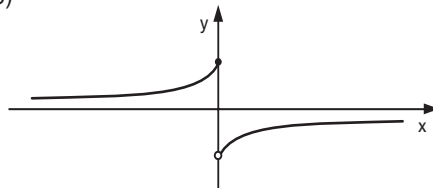
EXERCÍCIOS

194. Com base nos gráficos abaixo, de funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , especifique os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

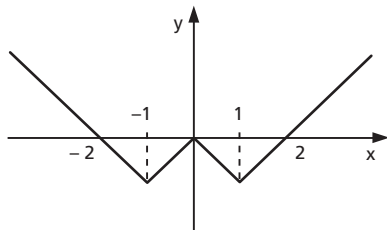
a)



c)



b)



X. Crescimento/decrescimento da função afim

91. Teoremas

I) A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

Demonstração:

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b \text{ é crescente} &\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0 \end{aligned}$$

II) A função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular a for negativo.

Demonstração:

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b \text{ é decrescente} &\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

195. Especifique, para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em \mathbb{R} :

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -4x + 3$

Solução

a) É crescente, pois o coeficiente angular é positivo ($a = 3$).

b) É decrescente, pois o coeficiente angular é negativo ($a = -4$).

196. Especifique, para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em \mathbb{R} :

a) $y = 1 + 5x$

c) $y = x + 2$

e) $y = -2x$

b) $y = -3 - 2x$

d) $y = 3 - x$

f) $y = 3x$

- 197.** Estude, segundo os valores do parâmetro m , a variação (crescente, decrescente ou constante) da função $y = (m - 1)x + 2$.

Solução

Se $m - 1 > 0$, isto é, $m > 1$, então a função terá coeficiente angular positivo e, portanto, será crescente em \mathbb{R} .

Se $m - 1 < 0$, isto é, $m < 1$, então a função terá coeficiente angular negativo e, portanto, será decrescente em \mathbb{R} .

Se $m - 1 = 0$, isto é, $m = 1$, então a função é $y = (1 - 1)x + 2$, ou seja, $y = 2$, que é constante em \mathbb{R} .

- 198.** Estude, segundo os valores do parâmetro m , a variação (crescente, decrescente ou constante) das funções abaixo.

a) $y = (m + 2)x - 3$

c) $y = 4 - (m + 3)x$

b) $y = (4 - m)x + 2$

d) $y = m(x - 1) + 3 - x$

XI. Sinal de uma função

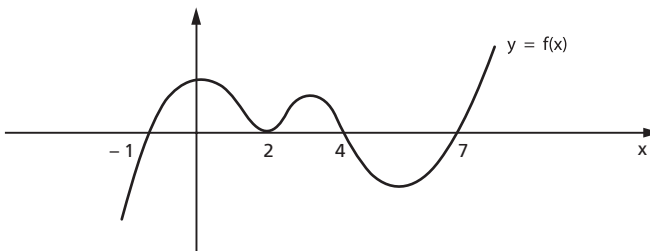
- 92.** Seja a função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$. Vamos resolver o problema “para que valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$?”.

Resolver este problema significa estudar o sinal da função $y = f(x)$ para cada x pertencente a seu domínio.

Para se estudar o sinal de uma função, quando ela está representada no plano cartesiano, basta examinar se a ordenada de cada ponto da curva é positiva, nula ou negativa.

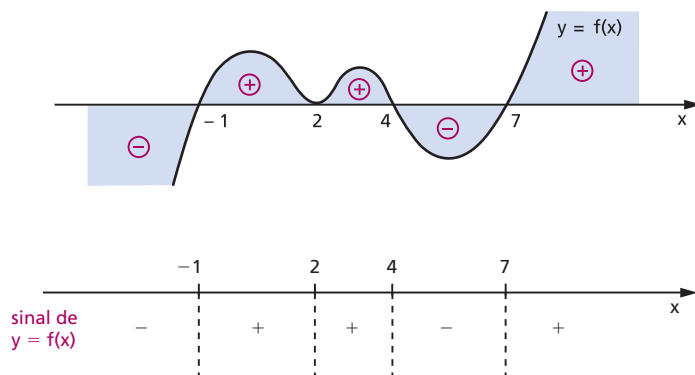
Exemplo:

Estudar o sinal da função $y = f(x)$ cujo gráfico está representado abaixo.



Observemos, inicialmente, que interessa o comportamento da curva $y = f(x)$ em relação ao eixo dos x , não importando a posição do eixo dos y .

Preparando o gráfico com aspecto prático, temos:



Conclusão:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 4 \text{ ou } x = 7$$

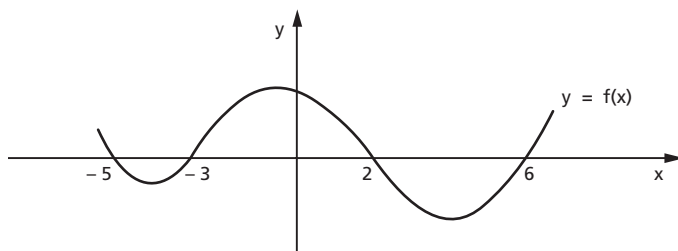
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 4 \text{ ou } x > 7$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } 4 < x < 7.$$

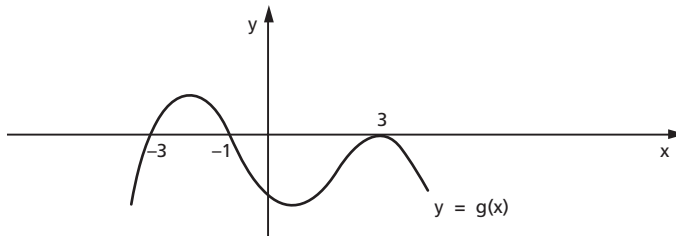
EXERCÍCIOS

199. Estude o sinal das funções cujos gráficos estão representados abaixo.

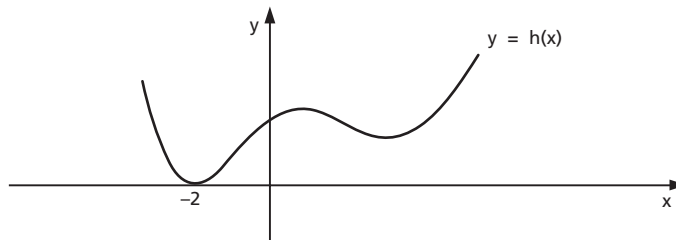
a)



b)



c)



XII. Sinal da função afim

93. Considerando que $x = -\frac{b}{a}$, zero da função afim $f(x) = ax + b$, é o valor de x para o qual $f(x) = 0$, examinemos, então, para que valores ocorre $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.

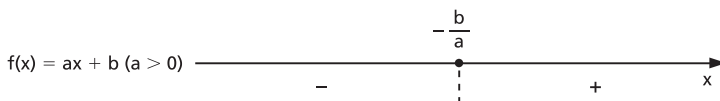
Devemos considerar dois casos.

1º caso: $a > 0$

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

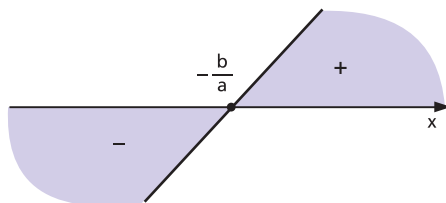
Colocando os valores de x sobre um eixo, o sinal da função $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, é:



Outro processo para analisarmos a variação do sinal da função afim é construir o gráfico cartesiano.

Lembremos que na função afim $f(x) = ax + b$ o gráfico cartesiano é uma reta e, se o coeficiente angular a é positivo, a função é crescente.

Construindo o gráfico de $f(x) = ax + b$ com $a > 0$, e lembrando que não importa a posição do eixo y , temos:

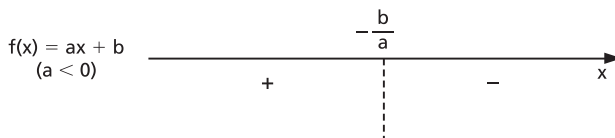


2º caso: $a < 0$

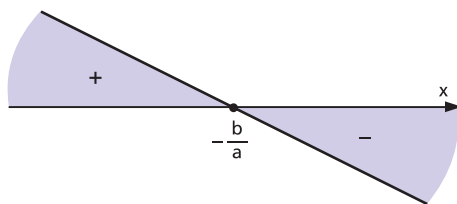
$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

Colocando os valores de x sobre um eixo, o sinal da função $f(x) = ax + b$, com $a < 0$, é:



Podemos analisar o sinal da função $f(x) = ax + b$, com $a < 0$, construindo o gráfico cartesiano. Lembremos que neste caso a função é decrescente.



Resumo

I) A função afim $f(x) = ax + b$ anula-se para $x = -\frac{b}{a}$.

II) Para $x > -\frac{b}{a}$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } a > 0 \text{ então } f(x) = ax + b > 0 \\ \text{se } a < 0 \text{ então } f(x) = ax + b < 0 \end{cases}$$

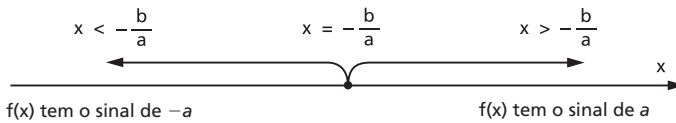
isto é, para $x > -\frac{b}{a}$ a função $f(x) = ax + b$ tem o sinal de a .

III) Para $x < -\frac{b}{a}$, temos:

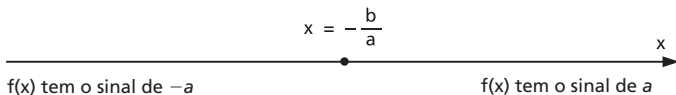
$$\begin{cases} \text{se } a > 0 \text{ então } f(x) = ax + b < 0 \\ \text{se } a < 0 \text{ então } f(x) = ax + b > 0 \end{cases}$$

isto é, para $x < -\frac{b}{a}$ a função $f(x) = ax + b$ tem o sinal de $-a$ (sinal contrário ao de a).

Se colocarmos os valores de x sobre um eixo, a regra dos sinais da função afim pode ser assim representada:



ou, simplesmente:



Exemplos:

1º) Estudar os sinais da função $f(x) = 2x - 1$.

Temos:

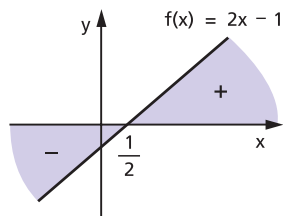
$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$a = 2 \Rightarrow a > 0 \text{ e } -a < 0.$$

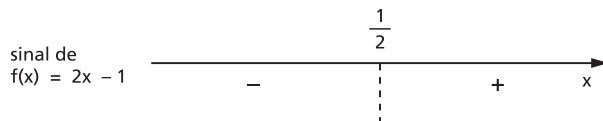
Logo:

para $x > \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > 0$ (sinal de a)

para $x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) < 0$ (sinal de $-a$)



Fazendo o esquema gráfico, temos:



2ª) Estudar os sinais da função $f(x) = -2x + 4$.

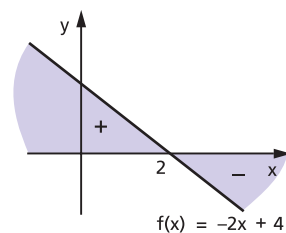
Temos:

$f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

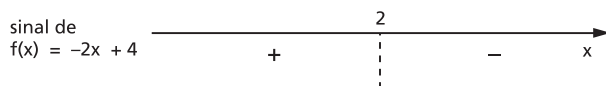
$a = -2 \Rightarrow a < 0$ e $-a > 0$.

Para $x > 2 \Rightarrow f(x) < 0$ (sinal de a)

Para $x < 2 \Rightarrow f(x) > 0$ (sinal de $-a$)



Fazendo o esquema gráfico, temos:



EXERCÍCIOS

200. Estude os sinais das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $y = 2x + 3$

b) $y = -3x + 2$

c) $y = 4 - x$

d) $y = 5 + x$

e) $y = 3 - \frac{x}{2}$

f) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{2}$

g) $y = 2x - \frac{4}{3}$

h) $y = -x$

201. Seja a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2.

Solução

Os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2 são os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$4x - 5 > 2$$

e, portanto,

$$x > \frac{7}{4}.$$

202. Para que valores do domínio da função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \frac{3x - 1}{2}$ a imagem é menor que 4?

203. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$ é negativa?

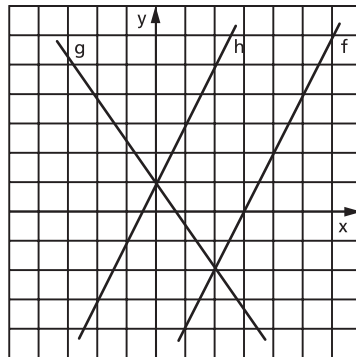
204. Sejam as funções $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \frac{4x - 1}{2}$ definidas em \mathbb{R} . Para que valores de $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

a) $f(x) \geq g(x)$?

b) $g(x) < h(x)$?

c) $f(x) \geq h(x)$?

205. Dados os gráficos das funções f , g e h definidas em \mathbb{R} , determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:



a) $f(x) > g(x)$

d) $g(x) > 4$

b) $g(x) \leq h(x)$

e) $f(x) \leq 0$

c) $f(x) \geq h(x)$

XIII. Inequações

94. Definição

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ cujos domínios são respectivamente $D_1 \subset \mathbb{R}$ e $D_2 \subset \mathbb{R}$. Chamamos **inequação** na incógnita x a qualquer uma das sentenças abertas abaixo:

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

Exemplos:

1º) $2x - 4 > x$ é uma inequação em que $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = x$.

2º) $3x - 5 < 2$ é uma inequação em que $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = 2$.

3º) $x^2 - 3 \geq \frac{1}{x}$ é uma inequação em que $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

4º) $\sqrt{x - 2} \leq \frac{1}{x - 3}$ é uma inequação em que $f(x) = \sqrt{x - 2}$ e $g(x) = \frac{1}{x - 3}$.

95. Domínio de validade

Chamamos de **domínio de validade** da inequação $f(x) < g(x)$ o conjunto $D = D_1 \cap D_2$, em que D_1 é o domínio da função f e D_2 é o domínio da função g . É evidente que, para todo $x_0 \in D$, estão definidos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, isto é:

$$x_0 \in D \Leftrightarrow (x_0 \in D_1 \text{ e } x_0 \in D_2) \Leftrightarrow (f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ e } g(x_0) \in \mathbb{R}).$$

Nos exemplos anteriores, temos:

1º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

2º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

3º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$

4º) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$

96. Solução

O número real x_0 é solução da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$.

Exemplo:

O número real 3 é solução da inequação $2x + 1 > x + 3$, pois

$$\underbrace{2 \cdot 3 + 1}_{f(3)} > \underbrace{3 + 3}_{g(3)}$$

é uma sentença verdadeira.

97. Conjunto solução

Ao conjunto S de todos os números reais x tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira chamamos de **conjunto solução** da inequação.

Exemplo:

A inequação $2x + 1 > x + 3$ tem o conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, isto é, para qualquer $x_0 \in S$ a sentença $2x_0 + 1 > x_0 + 3$ é verdadeira.

Se não existir o número real x tal que a sentença $f(x) > g(x)$ seja verdadeira, diremos que a inequação $f(x) > g(x)$ é impossível e indicaremos o conjunto solução por $S = \emptyset$.

Exemplo:

O conjunto solução da inequação $x + 1 > x + 2$ é $S = \emptyset$, pois não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que a sentença $x_0 + 1 > x_0 + 2$ seja verdadeira.

Resolver uma inequação significa determinar o seu conjunto solução. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$, então x_0 é tal que $f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $g(x_0) \in \mathbb{R}$, isto é, $x_0 \in D$ (domínio de validade da inequação). Assim sendo, temos:

$$x_0 \in S \Rightarrow x_0 \in D$$

ou seja, o conjunto solução é sempre subconjunto do domínio de validade da inequação.

98. Inequação equivalente

Duas inequações são **equivalentes em $D \subset \mathbb{R}$** se o conjunto solução da primeira é igual ao conjunto solução da segunda.

Exemplos:

1º) $3x + 6 > 0$ e $x + 2 > 0$ são equivalentes em \mathbb{R} , pois o conjunto solução de ambas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

2º) $x < 1$ e $x^2 < 1$ não são equivalentes em \mathbb{R} , pois $x_0 = -2$ é solução da primeira inequação mas não o é da segunda.

99. Princípios de equivalência

Na resolução de uma inequação procuramos sempre transformá-la em outra equivalente e mais “simples”, em que o conjunto solução possa ser obtido com maior facilidade. Surge, então, a pergunta: “Que transformações podem ser feitas em uma inequação para se obter uma inequação equivalente?”. A resposta a essa pergunta são os dois princípios seguintes:

P-1) Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em D_1 e D_2 , respectivamente. Se a função $h(x)$ é definida em $D_1 \cap D_2$, as inequações

$$f(x) < g(x) \quad \text{e} \quad f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos:

Seja a inequação

$$\underbrace{3x - 1}_{f(x)} > \underbrace{2x + 3}_{g(x)} \quad \mathbf{(1)}$$

adicionemos $h(x) = -2x + 1$ aos dois membros:

$$\underbrace{(3x - 1)}_{f(x)} + \underbrace{(-2x + 1)}_{h(x)} > \underbrace{(2x + 3)}_{g(x)} + \underbrace{(-2x + 1)}_{h(x)} \quad \mathbf{(2)}$$

façamos as simplificações possíveis:

$$\underbrace{x}_{f(x) + h(x)} > \underbrace{4}_{g(x) + h(x)}$$

portanto, como **(1)** é equivalente a **(2)** temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}.$$

Na prática, aplicamos a propriedade **P-1** com o seguinte enunciado: “Em uma inequação, podemos transpor um termo de um membro para outro trocando o sinal do termo considerado”:

$$f(x) + h(x) < g(x) \Rightarrow f(x) < g(x) - h(x).$$

Assim, no exemplo anterior, teríamos:

$$3x - 1 > 2x + 3 \Rightarrow 3x - 1 - 2x > 3 \Rightarrow x > 3 + 1 \Rightarrow x > 4$$

P-2) Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em D_1 e D_2 , respectivamente. Se a função $h(x)$ é definida em $D_1 \cap D_2$, e tem sinal constante, então:

- a) se $h(x) > 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.
- b) se $h(x) < 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos:

1º) $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} > \frac{1}{3}$ e $6x - 9 > 4$ são equivalentes em \mathbb{R} , pois a segunda inequação foi obtida a partir da primeira por meio de uma multiplicação por 12.

2º) $-2x^2 + 3x > 1$ e $2x^2 - 3x < -1$ são equivalentes em \mathbb{R} , pois a segunda foi obtida da primeira por meio de uma multiplicação por -1 e inversão do sentido da desigualdade.

3º) $\frac{4x - 3}{x^2 + 1} > 0$ e $4x - 3 > 0$ são equivalentes em \mathbb{R} . Notemos que a segunda foi obtida da primeira por meio da multiplicação por $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Na prática, aplicamos a propriedade **P-2** com o seguinte enunciado: “Em uma inequação, podemos multiplicar os dois membros pela mesma expressão, mantendo ou invertendo o sentido da desigualdade, conforme essa expressão seja positiva ou negativa, respectivamente”.

EXERCÍCIOS

206. Resolva as inequações, em \mathbb{R} :

- a) $4x + 5 > 2x - 3$
 b) $5(x + 3) - 2(x + 1) \leq 2x + 3$
 c) $3(x + 1) - 2 \geq 5(x - 1) - 3(2x - 1)$

207. Resolva, em \mathbb{R} , a inequação:

$$\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geq x$$

Solução

A inequação é equivalente àquela que se obtém multiplicando pelo mmc $(3, 2) = 6$.

$$2(x+2) - 3(x-1) \geq 6x$$

Efetuando as operações, temos:

$$-x + 7 \geq 6x$$

ou ainda:

$$-7x \geq -7$$

Dividindo ambos os membros por -7 e lembrando que devemos inverter a desigualdade, temos

$$x \leq 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$$

208. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} \geq 1$

b) $\frac{2x-3}{2} - \frac{5-3x}{3} < 3x - \frac{1}{6}$

c) $(3x+1)(2x+1) \leq (2x-1)(3x+2) - (4-5x)$

d) $(3x-2)^2 - (3x-1)^2 > (x+2)^2 - (x-1)^2$

e) $4(x-2) - (3x+2) > 5x-6 - 4(x-1)$

f) $6(x+2) - 2(3x+2) > 2(3x-1) - 3(2x+1)$

209. Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a da última prova é multiplicada por 3. Os resultados, após ser adicionados, são divididos por 6. Se a média obtida por esse critério for maior ou igual a 6,5, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno teria tirado 6,3 na primeira prova e 4,5 na segunda. Quanto precisará tirar na terceira para ser dispensado da recuperação?

210. Resolva, em \mathbb{R} , a inequação:

$$\frac{2x - 3}{x - 1} \leq 2$$

Solução

A inequação proposta é equivalente a $\frac{2x - 3}{x - 1} - 2 \leq 0$, que, reduzindo ao mesmo denominador, obtemos $\frac{-1}{x - 1} \leq 0$.

Notemos que a fração $\frac{-1}{x - 1}$ deverá ser não positiva; como o numerador -1 é negativo, então o denominador $x - 1$ deverá ser positivo.

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

211. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

a) $\frac{3x - 2}{1 - x} \leq -3$

b) $\frac{4x - 5}{2x - 1} \geq 2$

c) $\frac{-4 - 3x}{3x + 2} < -1$

XIV. Inequações simultâneas

100. A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x , separadas pelo conectivo e:

$$f(x) < g(x) < h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) & \text{(1)} \\ \text{e} \\ g(x) < h(x) & \text{(2)} \end{cases}$$

Indicando com S_1 o conjunto solução de **(1)** e S_2 o conjunto solução de **(2)**, o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo:

$$\text{Resolver } \underbrace{3x + 2 < -x + 3}_{(1)} \leq \underbrace{-x + 3}_{(2)} \leq x + 4.$$

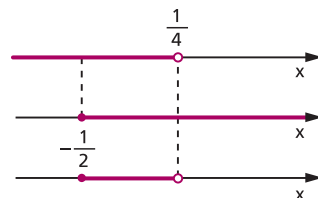
Temos que resolver duas inequações:

$$(1) \quad 3x + 2 < -x + 3 \Rightarrow 4x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad -x + 3 \leq x + 4 \Rightarrow -2x \leq 1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

A interseção desses dois conjuntos é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{4} \right\}.$$



EXERCÍCIOS

212. Resolva as inequações, em \mathbb{R} :

a) $-2 < 3x - 1 < 4$

b) $-4 < 4 - 2x \leq 3$

c) $-3 < 3x - 2 < x$

d) $x + 1 \leq 7 - 3x < \frac{x}{2} - 1$

e) $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$

f) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

213. Resolva, em \mathbb{R} , os sistemas de inequações:

a)
$$\begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x + 2 \geq 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leq 2x - 5 \end{cases}$$

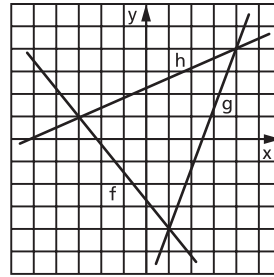
e)
$$\begin{cases} 3x + 2 < 7 - 2x \\ 48x < 3x + 10 \\ 11 - 2(x - 3) > 1 - 3(x - 5) \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 3x + 1 \geq 4x - 5 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \frac{2x - 5}{1 - x} \leq -2 \\ \frac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \end{cases}$$

214. Com base nos gráficos das funções f, g e h definidas em \mathbb{R} , determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

- a) $f(x) < g(x) \leq h(x)$
- b) $g(x) \leq f(x) < h(x)$
- c) $h(x) \leq f(x) < g(x)$



XV. Inequações-produto

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x , as inequações

$$f(x) \cdot g(x) > 0, f(x) \cdot g(x) < 0, f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ e } f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

são denominadas **inequações-produto**.

101. Vejamos, por exemplo, como determinamos o conjunto solução S da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$.

De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, um número x_0 é solução da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $g(x_0)$, não nulos, têm o mesmo sinal.

Assim, são possíveis dois casos:

$$1^\circ) f(x) > 0 \text{ e } g(x) > 0$$

Se S_1 e S_2 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_1 \cap S_2$ é o conjunto solução do sistema.

$$2^\circ) f(x) < 0 \text{ e } g(x) < 0$$

Se S_3 e S_4 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_3 \cap S_4$ é o conjunto solução do sistema.

Daí concluímos que o conjunto solução da inequação do produto $f(x) \cdot g(x) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$$

Raciocínio análogo seria feito para a inequação:

$$f(x) \cdot g(x) < 0.$$

Exemplo:

Resolver, em \mathbb{R} , a inequação $(x + 2)(2x - 1) > 0$.

Analisemos os dois casos possíveis:

1º caso

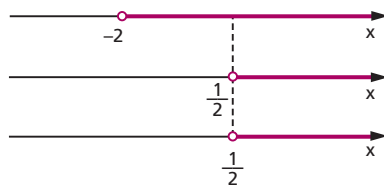
Cada um dos fatores é positivo, isto é:

$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$\text{e} \quad \quad \quad \text{e} \\ 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

A interseção das duas soluções é:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \right\}$$



2º caso

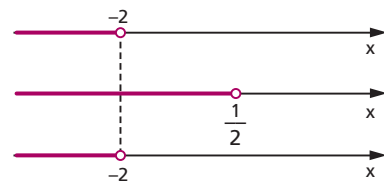
Cada um dos fatores é negativo, isto é:

$$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

$$\text{e} \quad \quad \quad \text{e} \\ 2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

A interseção das duas soluções é:

$$S_3 \cap S_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$



O conjunto solução da inequação

$(x + 2)(2x - 1) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \right\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

portanto:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\}$$

102. Quadro de sinais

Vejamos um outro processo, mais prático, para resolvermos a inequação $(x + 2)(2x - 1) > 0$ em \mathbb{R} .

Fazemos inicialmente o estudo dos sinais das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 2x - 1$.



Com o objetivo de evitar cálculos algébricos no estudo dos sinais do produto $f(x) \cdot g(x)$, usaremos o quadro abaixo, que denominamos **quadro-produto**, no qual figuram os sinais dos fatores e o sinal do produto.

| | | | | | |
|-------------------|---|----|---|---------------|---|
| | | -2 | | $\frac{1}{2}$ | |
| $f(x)$ | - | | + | | + |
| $g(x)$ | - | | - | | + |
| $f(x) \cdot g(x)$ | + | | - | | + |

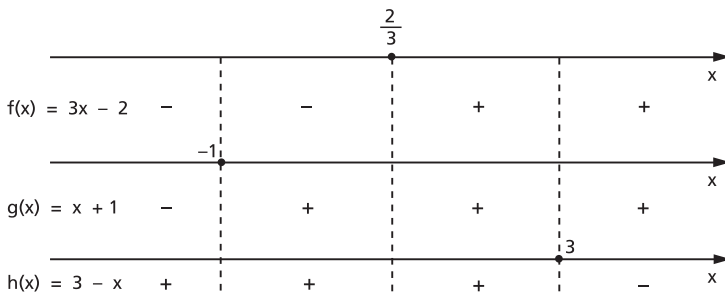
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\}$$

103. Podemos estender o raciocínio empregado no estudo dos sinais de um produto de dois fatores para um produto com mais de dois fatores.

Exemplo:

Resolver a inequação $(3x - 2)(x + 1)(3 - x) < 0$ em \mathbb{R} .

Analisando os sinais dos fatores, temos:



Vamos, agora, construir o quadro-produto:

| | | | | | | | | |
|--------------------|---|----|---|---------------|---|---|--|---|
| | | -1 | | $\frac{2}{3}$ | | 3 | | x |
| f(x) | - | - | - | + | + | + | | |
| g(x) | - | + | + | + | + | + | | |
| h(x) | + | + | + | + | + | - | | |
| f(x) · g(x) · h(x) | + | - | - | + | + | - | | |

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 3 \right\}$$

104. A inequação $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ tem por conjunto solução S a reunião do conjunto solução S_1 da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ com o conjunto solução S_2 da equação $f(x) \cdot g(x) = 0$, isto é:

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) > 0 \\ \text{ou} \\ f(x) \cdot g(x) = 0 \end{cases}$$

Exemplo:

Resolver a inequação $(3x + 1)(2x - 5) \geq 0$ em \mathbb{R} .

A inequação $(3x + 1)(2x - 5) \geq 0$ é equivalente a:

$$\begin{cases} (3x + 1) \cdot (2x - 5) > 0 & \mathbf{(1)} \\ \text{ou} \\ (3x + 1) \cdot (2x - 5) = 0 & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Resolvendo **(1)**, temos $S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{5}{2} \right\}$.

Resolvendo **(2)**, temos $S_2 = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{5}{2} \right\}$.

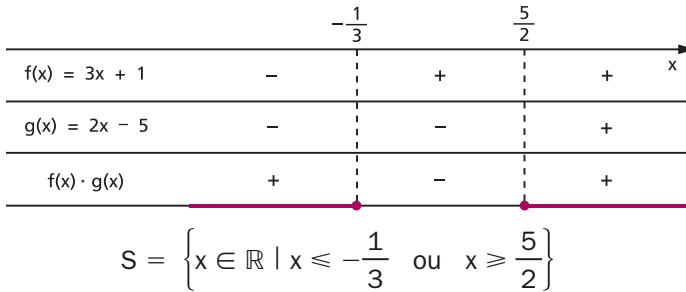
O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{5}{2} \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{5}{2} \right\}$$

ou seja:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{3} \text{ ou } x \geq \frac{5}{2} \right\}$$

Se recorrêssemos ao quadro-produto, teríamos:



105. Dentre as inequações-produto, são importantes as inequações:

$[f(x)]^n > 0$, $[f(x)]^n < 0$, $[f(x)]^n \geq 0$ e $[f(x)]^n \leq 0$, em que $n \in \mathbb{N}^*$.

Para resolvermos essas inequações, vamos lembrar duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro:

1ª) “Toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base”, isto é:

$$\begin{aligned} a^{2n+1} > 0 &\Leftrightarrow a > 0 \\ a^{2n+1} = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \\ a^{2n+1} < 0 &\Leftrightarrow a < 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

2ª) “Toda potência de base real e expoente par é um número não negativo”, isto é:

$$a^{2n} \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim sendo, temos as seguintes equivalências:

$$[f(x)]^n > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) \neq 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \exists x \in \mathbb{R} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \forall x \in D(f) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) = 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplos:

$$1^\circ) (3x - 2)^3 > 0 \Rightarrow 3x - 2 > 0 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3} \right\}$$

$$2^\circ) (4x - 3)^6 > 0 \Rightarrow 4x - 3 \neq 0 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{4} \right\}$$

$$3^\circ) (2x + 1)^5 < 0 \Rightarrow 2x + 1 < 0 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \right\}$$

$$4^\circ) (x - 2)^4 < 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$5^\circ) (3 - 5x)^7 \geq 0 \Rightarrow 3 - 5x \geq 0 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{5} \right\}$$

$$6^\circ) (4x - 5)^2 \geq 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$$

$$7^\circ) (8 - 2x)^4 \leq 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0 \Rightarrow S = \{4\}$$

EXERCÍCIOS

215. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

a) $(3x + 3)(5x - 3) > 0$

e) $(6x - 1)(2x + 7) \geq 0$

b) $(4 - 2x)(5 + 2x) < 0$

f) $(5 - 2x)(-7x - 2) \leq 0$

c) $(5x + 2)(2 - x)(4x + 3) > 0$

g) $(3 - 2x)(4x + 1)(5x + 3) \geq 0$

d) $(3x + 2)(-3x + 4)(x - 6) < 0$

h) $(5 - 3x)(7 - 2x)(1 - 4x) \leq 0$

216. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

a) $(x - 3)^4 > 0$

e) $(3x + 5)^2 \geq 0$

b) $(3x + 8)^3 < 0$

f) $(5x + 1)^3 \leq 0$

c) $(4 - 5x)^6 < 0$

g) $(4 + 3x)^4 \leq 0$

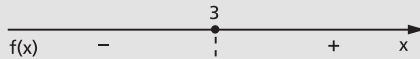
d) $(1 - 7x)^5 > 0$

h) $(3x - 8)^5 \geq 0$

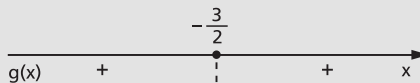
217. Resolva, em \mathbb{R} , a inequação $(x - 3)^5 \cdot (2x + 3)^6 < 0$.

Solução

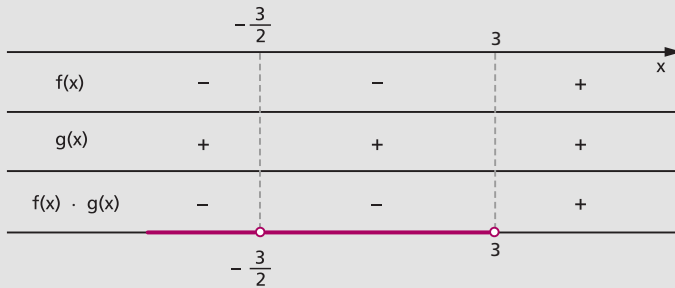
Estudemos separadamente os sinais das funções $f(x) = (x - 3)^5$ e $g(x) = (2x + 3)^6$. Lembrando que a potência de expoente ímpar e base real tem o sinal da base, então o sinal de $(x - 3)^5$ é igual ao sinal de $x - 3$, isto é:



A potência de expoente par e base real não nula é sempre positiva, então $(2x + 3)^6$ é positivo se $x \neq -\frac{3}{2}$ e $(2x + 3)^6$ é nulo se $x = -\frac{3}{2}$, isto é:



Fazendo o quadro-produto, temos:



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ e } x \neq -\frac{3}{2} \right\}$$

218. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

- a) $(5x + 4)^4 \cdot (7x - 2)^3 \geq 0$
- b) $(3x + 1)^3 \cdot (2 - 5x)^5 \cdot (x + 4)^8 > 0$
- c) $(x + 6)^7 \cdot (6x - 2)^4 \cdot (4x + 5)^{10} \leq 0$
- d) $(5x - 1) \cdot (2x + 6)^8 \cdot (4 - 6x)^6 \geq 0$

219. Determine, em \mathbb{R} , a solução da inequação $(3x - 2)^3 \cdot (x - 5)^2 \cdot (2 - x)x > 0$.

XVI. Inequações-quociente

106. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x , as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

são denominadas **inequações-quociente**.

Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas, podemos, então, construir o quadro-quociente de modo análogo ao quadro-produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

Exemplo:

Resolver, em \mathbb{R} , a inequação $\frac{3x + 4}{1 - x} \leq 2$. Temos:

$$\frac{3x + 4}{1 - x} \leq 2 \Rightarrow \frac{3x + 4}{1 - x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{3x + 4 - 2(1 - x)}{1 - x} \leq 0 \Rightarrow \frac{5x + 2}{1 - x} \leq 0$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

| | | | | |
|---------------------|----------------|--|---|---|
| | $-\frac{2}{5}$ | | 1 | |
| $f(x) = 5x + 2$ | - | | + | + |
| $g(x) = 1 - x$ | + | | + | - |
| $\frac{f(x)}{g(x)}$ | - | | + | - |

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1 \right\}$$

Podemos resolver a inequação $\frac{3x + 4}{1 - x} \leq 2$ multiplicando por $h(x) = 1 - x$ e examinando dois casos:

1º) $h(x) = 1 - x > 0$, isto é, $x < 1$

$$\frac{3x + 4}{1 - x} \leq 2 \Rightarrow 3x + 4 \leq 2(1 - x) \Rightarrow x \leq -\frac{2}{5}$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5}\right\}$$

2º) $h(x) = 1 - x < 0$, isto é, $x > 1$

$$\frac{3x + 4}{1 - x} \leq 2 \Rightarrow 3x + 4 \geq 2(1 - x) \Rightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{2}{5}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1 \right\}$$

Daremos sempre preferência ao método do quadro-quociente, por sua maior simplicidade.

EXERCÍCIOS

220. Resolva as inequações, em \mathbb{R} :

$$\text{a) } \frac{2x + 1}{x + 2} > 0 \quad \text{b) } \frac{3x - 2}{3 - 2x} < 0 \quad \text{c) } \frac{3 - 4x}{5x + 1} \geq 0 \quad \text{d) } \frac{-3 - 2x}{3x + 1} \leq 0$$

221. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{5x - 3}{3x - 4} > -1 & \text{c) } \frac{6x}{x + 3} < 5 & \text{e) } \frac{3x - 5}{2x - 4} \leq 1 \\ \text{b) } \frac{x - 1}{x + 1} \geq 3 & \text{d) } \frac{5x - 2}{3x + 4} < 2 & \text{f) } \frac{x + 1}{x - 2} \geq 4 \end{array}$$

222. Resolva as inequações, em \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{(1 - 2x)(3 + 4x)}{(4 - x)} > 0 & \text{c) } \frac{(5x + 4)(4x + 1)}{(5 - 4x)} \geq 0 \\ \text{b) } \frac{(3x + 1)}{(2x + 5)(5x + 3)} < 0 & \text{d) } \frac{(1 - 2x)}{(5 - x)(3 - x)} \leq 0 \end{array}$$

223. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{x - 4} < \frac{2}{x + 3} & \text{e) } \frac{5x + 2}{4x - 1} > \frac{5x - 1}{4x + 5} \\ \text{b) } \frac{1}{x - 1} < \frac{2}{x - 2} & \text{f) } \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2} - \frac{3}{x - 3} < 0 \\ \text{c) } \frac{x + 1}{x + 2} > \frac{x + 3}{x + 4} & \text{g) } \frac{2}{3x - 1} \geq \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \\ \text{d) } \frac{x + 5}{3x + 2} \leq \frac{x - 2}{3x + 5} & \end{array}$$

224. Ache os valores reais de x para os quais vale a desigualdade:

$$-\frac{4}{x} + \frac{3}{2} \geq -\frac{1}{x}.$$

CAPÍTULO VII

Funções quadráticas

I. Definição

107. Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de **função quadrática** ou **do 2º grau** quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que a , b e c são números reais dados e $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Exemplos de funções quadráticas:

- | | | | | |
|-----------------------------|--------|-----------|-----------|----------|
| 1º) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ | em que | $a = 1,$ | $b = -3,$ | $c = 2$ |
| 2º) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ | em que | $a = 2,$ | $b = 4,$ | $c = -3$ |
| 3º) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ | em que | $a = -3,$ | $b = 5,$ | $c = -1$ |
| 4º) $f(x) = x^2 - 4$ | em que | $a = 1,$ | $b = 0,$ | $c = -4$ |
| 5º) $f(x) = -2x^2 + 5x$ | em que | $a = -2,$ | $b = 5,$ | $c = 0$ |
| 6º) $f(x) = -3x^2$ | em que | $a = -3,$ | $b = 0,$ | $c = 0$ |

II. Gráfico

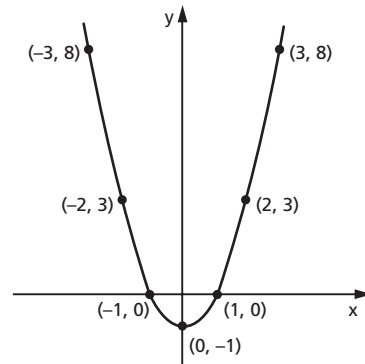
108. O gráfico da função quadrática é uma parábola. (*)

(*) Isso é provado no volume de Geometria Analítica desta coleção.

Exemplos:

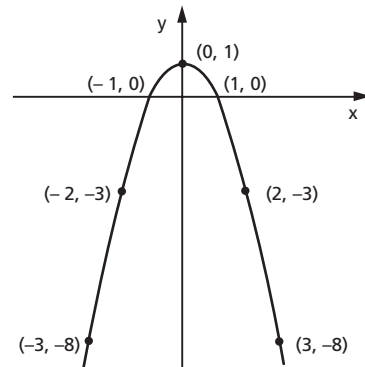
1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$.

| x | $y = x^2 - 1$ |
|----|---------------|
| -3 | 8 |
| -2 | 3 |
| -1 | 0 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 3 |
| 3 | 8 |



2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

| x | $y = -x^2 + 1$ |
|----|----------------|
| -3 | -8 |
| -2 | -3 |
| -1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | -3 |
| 3 | -8 |



EXERCÍCIOS

225. Construa os gráficos das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$

g) $y = -3x^2 - 3$

b) $y = -x^2$

e) $y = x^2 - 2x$

h) $y = x^2 - 2x + 4$

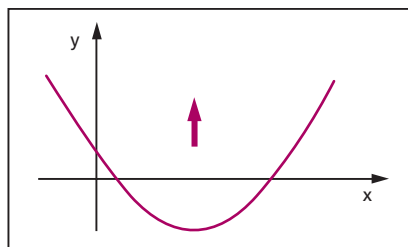
c) $y = 2x^2$

f) $y = -2x^2 - 4x$

- 226.** Em que condições a função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida?
- 227.** Determine uma função quadrática tal que $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$.
- 228.** Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$, determine o produto abc .

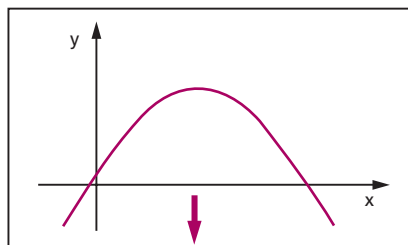
III. Concavidade

109. A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para “cima” ou voltada para “baixo”.



Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.



IV. Forma canônica

110. A construção do gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com o auxílio de uma tabela de valores x e y , como foi feito no item anterior, torna-se às vezes um trabalho impreciso, pois na tabela atribuímos a x alguns valores inteiros e pode acontecer que em determinada função quadrática os valores de abscissa (valores de x), em que a parábola intercepta o eixo dos x ou a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada, não são inteiros.

Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos primeiramente transformá-la em outra forma mais conveniente, chamada **forma canônica**.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = \\
 &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]
 \end{aligned}$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ , também chamado discriminante do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica.

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

V. Zeros

111. Os **zeros** ou **raízes** da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando a forma canônica, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

112. Número de raízes

Observe que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2º) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3º) $\Delta < 0$, sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

Resumo

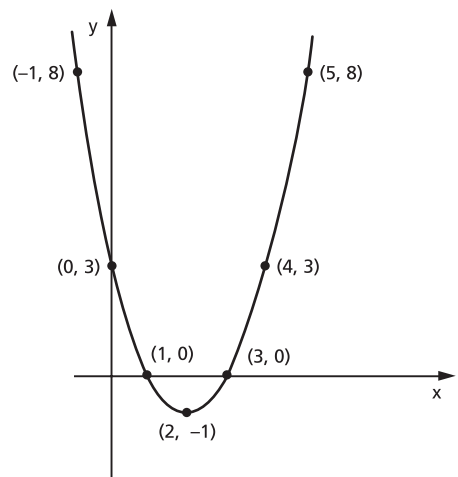
$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{não existem raízes reais.} \end{cases}$$

113. Significado geométrico das raízes

Interpretando geometricamente, diremos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x .

Exemplo:

Construindo o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos x nos pontos de abscissas 1 e 3, que são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.



EXERCÍCIOS

229. Determine os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

e) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

g) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

h) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$

i) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$

j) $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$

k) $f(x) = 2x^2 - 4x$

l) $f(x) = -3x^2 + 6$

m) $f(x) = 4x^2 + 3$

n) $f(x) = -5x^2$

230. Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, da seguinte forma: a um preço y ela consegue vender x unidades do produto, de acordo com a equação $y = 50 - \frac{x}{2}$. Sabendo que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de R\$ 1250,00, qual foi a quantidade vendida?

231. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

232. a) Resolva a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$.

b) Resolva o sistema
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + xy = -8 \end{cases}$$

233. Determine os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

Solução

Queremos determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Fazendo a substituição $z = x^2$, vem:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

cuja solução é $z = 4$ ou $z = -1$, mas $z = x^2$; então:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

e

$$x^2 = -1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

Logo, os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ são $x = 2$ e $x = -2$.

234. Determine os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2$

e) $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$

b) $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 36$

f) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 3$

c) $f(x) = x^4 - x^2 - 6$

g) $f(x) = 3x^4 - 12x^2$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

h) $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

235. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha dois zeros reais e distintos.

Solução

Na função $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$, temos:

$$a = m, \quad b = 2m - 1, \quad c = m - 2 \quad \text{e} \quad \Delta = 4m + 1$$

Considerando que a função é quadrática e os zeros são reais e distintos, então:

$$a = m \neq 0 \quad \text{e} \quad \Delta = 4m + 1 > 0$$

ou seja:

$$m \neq 0 \quad \text{e} \quad m > -\frac{1}{4}$$

236. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

237. Determine os valores de m para que a equação do 2º grau $(m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes reais.

238. Determine os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + (m + 1)$ tenha um zero real duplo.

239. Determine os valores de m para que a equação $x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha duas raízes reais iguais.

240. Determine os valores de m para que a função $f(x) = (m + 1)x^2 + (2m + 3)x + (m - 1)$ não tenha zeros reais.

241. Determine os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ não tenha raízes reais.

242. O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e distintas; α e β são dois números reais não nulos. O que se pode afirmar sobre as raízes do trinômio $\frac{a}{\alpha}x^2 + \beta bx + \alpha\beta^2c$?

243. Mostre que na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes reais x_1 e x_2 , temos para a soma S das raízes $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e para o produto P das raízes $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

244. Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x - 1 = 0$, de raízes x_1 e x_2 , calcule:

a) $x_1 + x_2$

d) $(x_1)^2 + (x_2)^2$

b) $x_1 \cdot x_2$

e) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

f) $(x_1)^3 + (x_2)^3$

245. As raízes da equação $2x^2 - 2mx + 3 = 0$ são positivas e uma é o triplo da outra. Calcule o valor de m .

246. As raízes da equação $x^2 + bx + 47 = 0$ são inteiras. Calcule o módulo da diferença entre essas raízes.

247. Se r e s são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$, qual é o valor de $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$?

248. Determine o parâmetro m na equação $x^2 + mx + m^2 - m - 12 = 0$, de modo que ela tenha uma raiz nula e a outra positiva.

249. Dadas as equações $x^2 - 5x + k = 0$ e $x^2 - 7x + 2k = 0$, sabe-se que uma das raízes da segunda equação é o dobro de uma das raízes da primeira equação. Sendo $k \neq 0$, determine k .

250. Mostre que uma equação do 2º grau de raízes x_1 e x_2 é a equação $x^2 - Sx + P = 0$ em que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

251. Obtenha uma equação do segundo grau de raízes:

a) 2 e -3

d) 1 e $-\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

c) 0,4 e 5

252. Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, admite as raízes reais não nulas x_1 e x_2 , obtenha a equação de raízes:

a) $(x_1)^2$ e $(x_2)^2$

c) $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{x_2}{x_1}$

b) $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$

d) $(x_1)^3$ e $(x_2)^3$

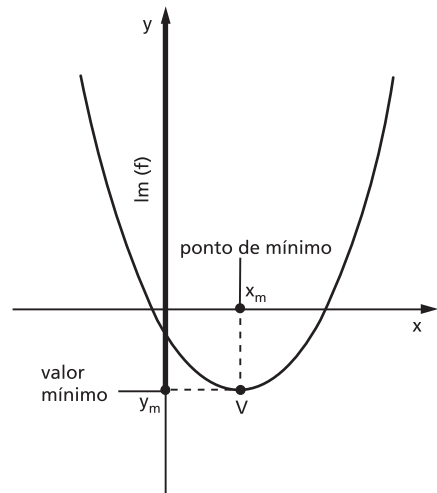
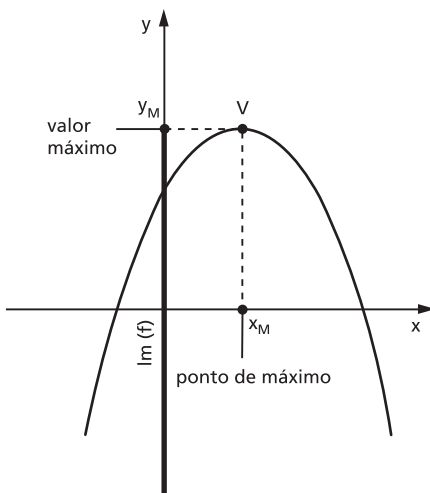
- 253.** Determine m na equação $mx^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ para que se tenha $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$, em que x_1 e x_2 são as raízes da equação.
- 254.** O trinômio $f(x) = x^2 - px + q$ tem por raízes a e b , $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Qual é o trinômio cujas raízes são $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$?
- 255.** Sejam m e n dois números inteiros positivos tais que m e n são ímpares consecutivos e $m \cdot n = 1599$. Indique o valor de $m + n$.

VI. Máximo e mínimo

114. Definições

Dizemos que o número $y_M \in \text{Im}(f)$ é o **valor máximo** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geq y$ para qualquer $y \in \text{Im}(f)$. O número $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado **ponto de máximo** da função.

Dizemos que o número $y_m \in \text{Im}(f)$ é o **valor mínimo** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in \text{Im}(f)$. O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado **ponto de mínimo** da função.



115. Teoremas

I) Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\frac{b}{2a}$.

II) Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Demonstração:

I) Consideremos a função quadrática na forma canônica:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad (1)$$

Se $a < 0$, o valor de y será tanto maior quanto menor for o valor da diferença

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Nessa diferença, $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de x ; só depende de a , b e c) e $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ para todo x real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Para $x = -\frac{b}{2a}$, temos na expressão (1):

$$y = a \left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

II) Prova-se de modo análogo.

116. Aplicações

1ª) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$, temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot 4}, \text{ isto é: } y_m = -9$$

em

$$x_m = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 4}, \text{ isto é: } x_m = \frac{1}{2}$$

2ª) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$, temos: $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$ e $\Delta = 4$.

Como $a = -1 < 0$, a função admite um valor máximo:

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-4}{4(-1)}, \text{ isto é: } y_M = 1$$

em

$$x_M = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2(-1)}, \text{ isto é: } x_M = \frac{1}{2}$$

VII. Vértice da parábola

117. O ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado **vértice** da parábola representativa da função quadrática.

EXERCÍCIOS

256. Determine os vértices das parábolas:

a) $y = x^2 - 4$

d) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b) $y = -x^2 + 3x$

e) $y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$

c) $y = 2x^2 - 5x + 2$

f) $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$

257. Determine o valor máximo ou o valor mínimo e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em \mathbb{R} .

a) $y = 2x^2 + 5x$

d) $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$

b) $y = -3x^2 + 12x$

e) $y = -x^2 + 5x - 7$

c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

f) $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

258. Determine o valor de m na função real $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$.

- 259.** Determine o valor de m na função real $f(x) = -3x^2 + 2(m - 1)x + (m + 1)$ para que o valor máximo seja 2.
- 260.** Determine o valor de m na função real $f(x) = mx^2 + (m - 1)x + (m + 2)$ para que o valor máximo seja 2.
- 261.** Determine o valor de m na função real $f(x) = (m - 1)x^2 + (m + 1)x - m$ para que o valor mínimo seja 1.
- 262.** Dentre todos os números reais de soma 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

Solução

Indicando por x e z esses números e por y o seu produto, temos:

$$x + z = 8 \quad y = x \cdot z$$

Como precisamos ficar com apenas uma das variáveis, x ou z , fazemos:

$$x + z = 8 \Rightarrow z = 8 - x$$

e portanto:

$$y = x \cdot z \Rightarrow y = x(8 - x) \Rightarrow y = -x^2 + 8x$$

Como $a = -1 < 0$, y é máximo quando:

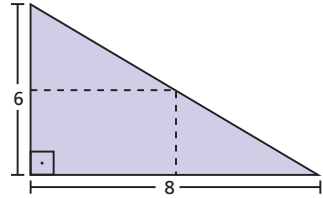
$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 4$$

Substituindo em $z = 8 - x$, vem $z = 4$.

Logo, os números procurados são 4 e 4.

- 263.** Seja $y = -x^2 + 5x - 1$. Dado que x varia no intervalo fechado $[0, 6]$, determine o maior (y_M) e o menor (y_m) valor que y assume.
- 264.** Dada $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$, para que valor de x a função atinge um máximo?
- 265.** A parábola de equação $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, v)$. Determine v .
- 266.** Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$, determine aqueles cujo produto é máximo.
- 267.** Dentre todos os retângulos de perímetro 20 cm, determine o de área máxima.
- 268.** Dentre todos os números x e z de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.
- 269.** Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta $y = -4x + 5$.

- 270.** É dada uma folha de cartolina como na figura ao lado. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determine esse retângulo, sabendo que a área é máxima.



- 271.** Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado 4 cm, estando a base do retângulo num lado do triângulo.
- 272.** Num triângulo isósceles de base 6 cm e altura 4 cm está inscrito um retângulo. Determine o retângulo de área máxima, sabendo que a base do retângulo está sobre a base do triângulo.
- 273.** Uma conta perfurada de um colar é enfiada em um arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 6$. Do ponto P de coordenadas (4, 10) deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto Q de ordenada -6 . Qual é a distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de P e Q)?
- 274.** Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar 400 metros de tela de arame, de modo a produzir área máxima. Qual é o quociente de um lado pelo outro?

VIII. Imagem

- 118.** Para determinarmos a imagem da função quadrática, tomemos inicialmente a função na forma canônica:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

ou seja, $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Obtemos que $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$; então temos que considerar dois casos:

1º caso

$$a > 0 \Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0 \text{ e, portanto:}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

2º caso

$a < 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

Resumindo:

$$a > 0 \Rightarrow y \geq -\frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \Rightarrow y \leq -\frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ou ainda:

$$a > 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Exemplos:

1º) Obter a imagem da função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Na função: $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$,

temos:

$$a = 2, b = -8 \text{ e } c = 6$$

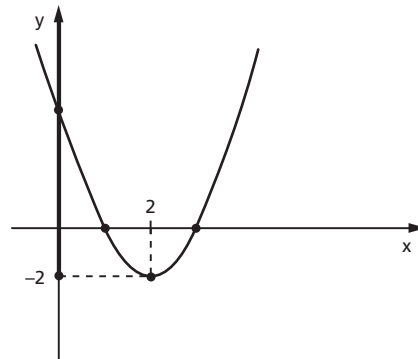
logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16$$

$$\text{e portanto: } -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 2} = -2.$$

Como $a = 2 > 0$, temos:

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2\}$$



2º) Obter a imagem da função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{5}{3}$.

Na função $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{5}{3}$,
temos:

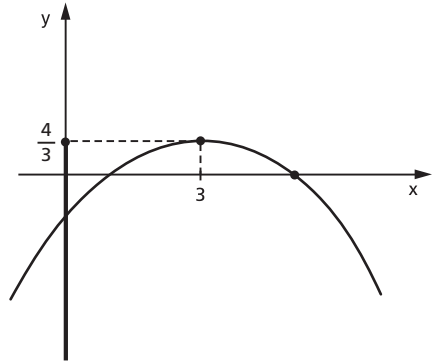
$$a = -\frac{1}{3}, b = 2 \text{ e } c = -\frac{5}{3}$$

logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{16}{9}$$

e portanto:

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-\frac{16}{9}}{4 \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{3}$$



Como $a = -\frac{1}{3} < 0$, temos:

$$\text{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{4}{3} \right\}$$

EXERCÍCIOS

275. Determine a imagem das funções definidas em \mathbb{R} .

a) $y = x^2 - 3x$

d) $y = -4x^2 + 8x + 12$

b) $y = -x^2 + 4$

e) $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

c) $y = 3x^2 - 9x + 6$

f) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

276. Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ definida em \mathbb{R} para que a imagem seja $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$.

277. Determine m na função $f(x) = -\frac{x^2}{3} + mx - \frac{1}{2}$ definida em \mathbb{R} para que a imagem seja $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 7\}$.

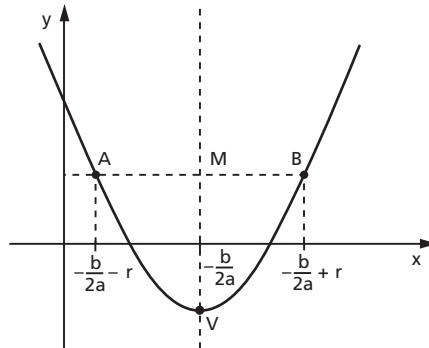
IX. Eixo de simetria

119. Teorema

“O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice.”

Os pontos da reta perpendicular ao eixo dos x que passa pelo vértice da parábola obedecem à equação $x = -\frac{b}{2a}$, pois todos os pontos dessa reta têm abscissa $-\frac{b}{2a}$.

Para provarmos que a parábola tem eixo de simetria na reta $x = -\frac{b}{2a}$, devemos mostrar que, dado um ponto $A\left(-\frac{b}{2a} - r, y\right)$, com $r \in \mathbb{R}$, pertencente ao gráfico da função, existe $B\left(-\frac{b}{2a} + r, y\right)$ também pertencente ao gráfico da função.



Tomando a função quadrática na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

e considerando que $A\left(-\frac{b}{2a} - r, y\right)$ pertence ao gráfico da função, temos:

$$\begin{aligned} y &= f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = \\ &= a\left[r^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right) \end{aligned}$$

provando que $B\left(-\frac{b}{2a} + r, y\right)$ também pertence ao gráfico da função.

X. Informações que auxiliam a construção do gráfico

120. Para fazermos o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, buscaremos, daqui para frente, informações preliminares, que são:

1ª) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = -\frac{b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x .

2ª) Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

3ª) Zeros da função:

Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos:

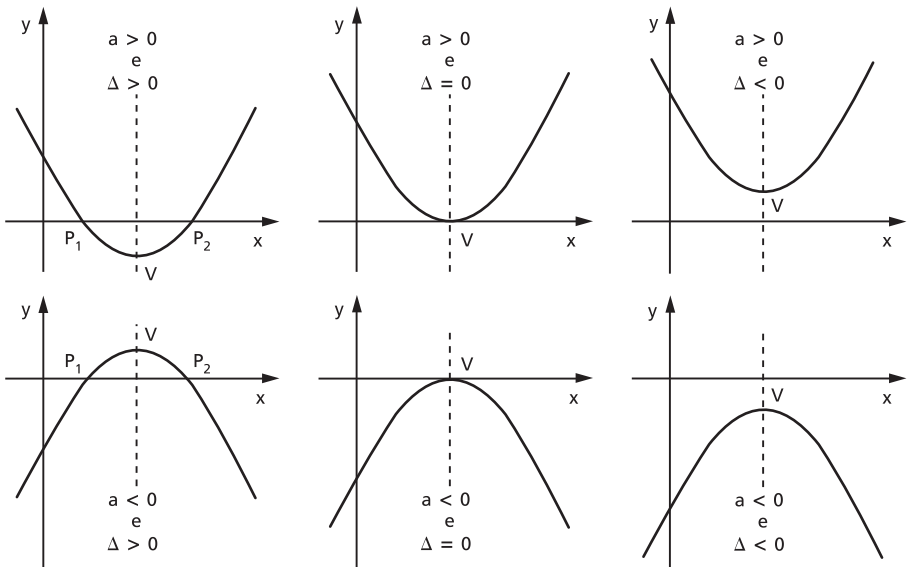
$$P_1\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right).$$

Se $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo dos x no ponto $P\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.

Se $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo dos x .

4ª) Vértice da parábola é o ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, que é máximo se $a < 0$ ou é mínimo se $a > 0$.

Seguem os tipos de gráfico que podemos obter:



EXERCÍCIOS

278. Faça o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução

Concavidade

Como $a = 1 > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Os pontos no eixo x são $P_1(1, 0)$ e $P_2(3, 0)$.

Vértice

Em $y = x^2 - 4x + 3$, temos:

$$a = 1, b = -4, c = 3 \text{ e } \Delta = 4$$

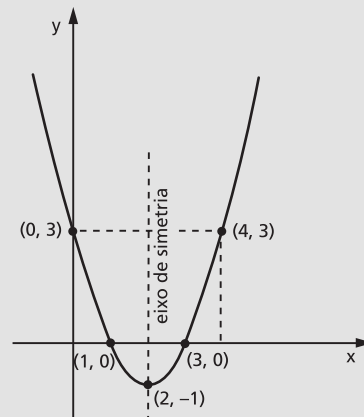
$$\text{Como } -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ e } -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-4}{4 \cdot 1} = -1,$$

o vértice é $V(2, -1)$.

Gráfico

Observe que a parábola sempre intercepta o eixo y . Para determinarmos onde o faz, basta lembrar que o ponto situado no eixo y tem abscissa nula, logo $y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$, isto é, o ponto no eixo y é $(0, 3)$.

Determinado o ponto onde a parábola corta o eixo y , podemos determinar outro ponto $(4, 3)$ da parábola, simétrico a $(0, 3)$ em relação à reta $x = 2$ (eixo de simetria da parábola).



279. Faça o esboço do gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 4$.

Solução

Concavidade

Como $a = -1 < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Zeros da função

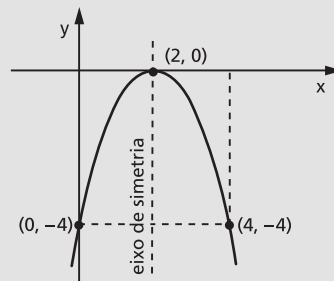
$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

A parábola admite um único ponto no eixo x , que é $P = (2, 0)$.

Vértice

Considerando que a parábola admite um único ponto no eixo x , então esse ponto é o vértice da parábola.

Gráfico



280. Faça o esboço do gráfico da função $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Solução

Concavidade

Como $a = \frac{1}{2} > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -1 < 0 \Rightarrow \cancel{\text{2}} \text{ raízes reais.}$$

A parábola não tem pontos no eixo dos x .

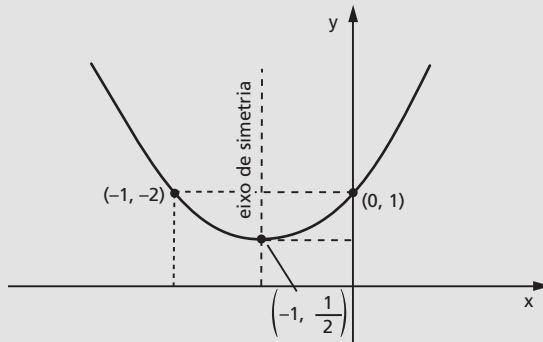
Vértice

Em $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, temos:

$$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 1 \text{ e } \Delta = -1.$$

Como $-\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$ e $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, o vértice é $V\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Gráfico



281. Construa o gráfico cartesiano das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $y = x^2 - 2x - 3$

e) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

b) $y = 4x^2 - 10x + 4$

f) $y = 3x^2 - 4x + 2$

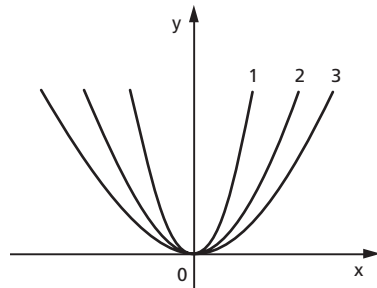
c) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

g) $y = -x^2 + x - 1$

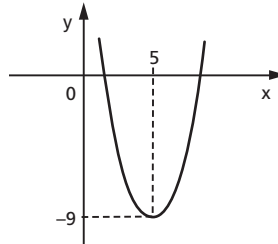
d) $y = -3x^2 + 6x - 3$

h) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

282. No gráfico ao lado estão representadas três parábolas, 1, 2 e 3, de equações, respectivamente, $y = ax^2$, $y = bx^2$ e $y = cx^2$. Qual é a relação entre a , b e c ?



283. O gráfico do trinômio do 2º grau $ax^2 - 10x + c$ é o da figura:



Determine a e c .

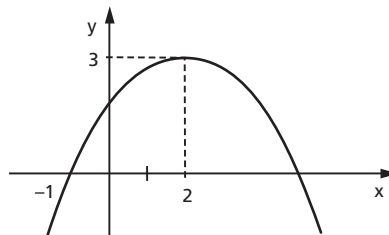
Solução

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{10}{2a} = 5 \Rightarrow a = 1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-100 + 4ac}{4a} = \frac{-100 + 4c}{4} = -9 \Rightarrow c = 16$$

Resposta: $a = 1$ e $c = 16$.

284. A figura abaixo é o gráfico de um trinômio do segundo grau.



Determine o trinômio.

Solução

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow -b = 4a \Rightarrow b^2 = 16a^2 \quad (1)$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 3 \Rightarrow -(16a^2 - 4ac) = 12a$$

$$16a - 4c = -12 \Rightarrow 4a - c = -3 \quad (2)$$

Como $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4$ (já utilizado em **(1)**)

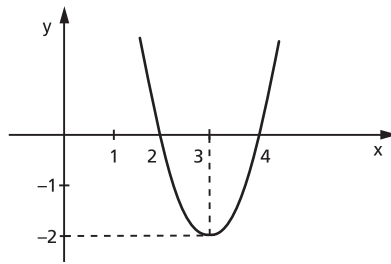
Temos, ainda: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -5 \Rightarrow c = -5a$ (por simetria, a outra raiz é 5). **(3)**

Substituindo **(3)** em **(2)**, vem: $4a + 5a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

Portanto: $b = \frac{4}{3}$ e $c = \frac{5}{3}$.

Então, o trinômio é: $y = \frac{-1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$.

- 285.** Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é dado abaixo, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine o valor de a .

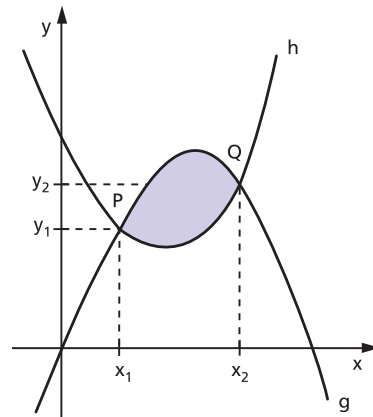


- 286.** Determine a função $g(x)$ cujo gráfico é o simétrico do gráfico da função $f(x) = 2x - x^2$ em relação à reta $y = 3$. Esboce o gráfico.

- 287.** Os gráficos de duas funções quadráticas g e h interceptam-se nos pontos $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$, com $x_2 > x_1$, como mostra a figura.

Se $g(x) = ax^2 + bx + c$ e $h(x) = dx^2 + ex + f$, a área da região sombreada, na figura, é dada por $f(x_2) - f(x_1)$, em que $f(x) = \frac{d-a}{3} \cdot x^3 + \frac{e-b}{2} \cdot x^2 + (f-c)x$.

Nessas condições, qual é a área A da região sombreada, no caso em que $g(x) = x^2 + x$ e $h(x) = -x^2 - x + 4$?



XI. Sinal da função quadrática

121. Consideremos a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

e vamos resolver o problema: “para que valores de $x \in \mathbb{R}$ temos:

- a) $f(x) > 0$; b) $f(x) < 0$; c) $f(x) = 0$?”

Resolver esse problema significa estudar o sinal da função quadrática para cada $x \in \mathbb{R}$.

Na determinação do sinal da função quadrática, devemos começar pelo cálculo do discriminante Δ , no qual três casos distintos podem aparecer:

- a) $\Delta < 0$; b) $\Delta = 0$; c) $\Delta > 0$.

Vejamos como prosseguir em cada caso.

1º caso: $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$.

Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{(não negativo)}} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{\text{positivo}} \right] \Rightarrow a \cdot f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

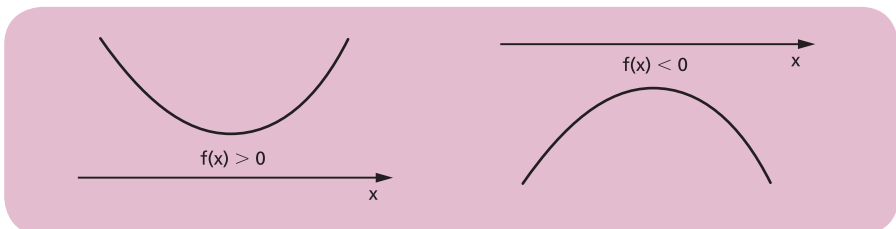
↙ positivo (não negativo) positivo

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R}$, ou melhor:

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

A representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos:

1º) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

2º) $f(x) = -x^2 + x - 1$ apresenta $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 < 0$ e, como $a = -1 < 0$, concluímos que:

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

2º caso: $\Delta = 0$

Da forma canônica, temos:

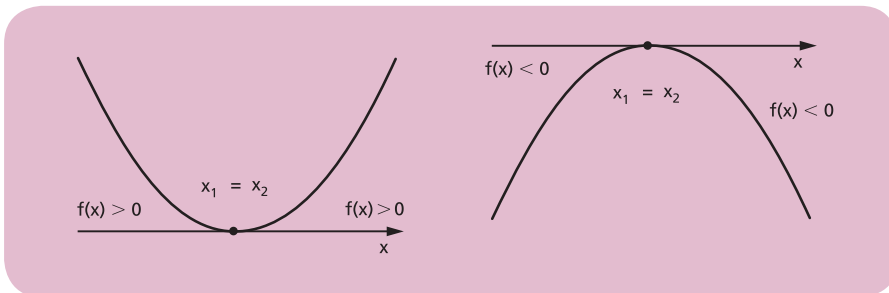
$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{positivo (não negativo)}} - \underbrace{\left(\frac{0}{4a^2}\right)}_{\text{positivo}} \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

então $a \cdot f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, sendo $x_1 = -\frac{b}{2a}$ zero duplo de $f(x)$, ou melhor:

$$\begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 &\Rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos:

1º) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$; então $f(x)$ tem um zero duplo $x_1 = -\frac{b}{2a} = 1$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$ apresenta $\Delta = 8^2 - 4(-2) \cdot (-8) = 0$, então $f(x)$ tem um zero duplo para $x_1 = -\frac{b}{2a} = 2$ e, como $a = -2 < 0$, concluímos:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = 0 \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

3º caso: $\Delta > 0$

Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right]$$

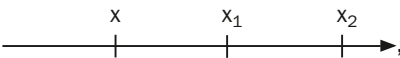
Lembramos que a fórmula que dá as raízes de uma equação do segundo grau é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ isto é, } \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

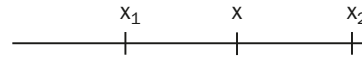
fica evidente que a forma canônica se transforma em:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] = a^2(x - x_1)(x - x_2)$$


O sinal de $a \cdot f(x)$ depende dos sinais dos fatores $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$. Admitindo $x_1 < x_2$, temos que:

1) se $x < x_1$ , temos:

$$x < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ \text{e} \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = a^2 \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{\oplus} \underbrace{(x - x_2)}_{\ominus} > 0$$

2) se $x_1 < x < x_2$  , temos:

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \text{e} \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = a^2 \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{\oplus} \underbrace{(x - x_2)}_{\ominus} < 0$$

3) se $x > x_2$  , temos:

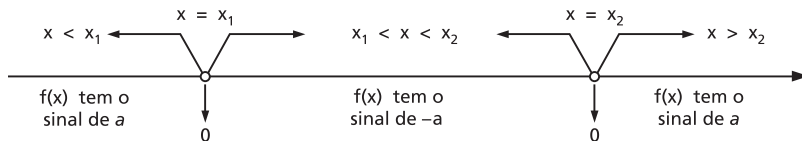
$$x > x_2 > x_1 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \text{e} \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = a^2 \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{\oplus} \underbrace{(x - x_2)}_{\oplus} > 0$$

Isso significa que:

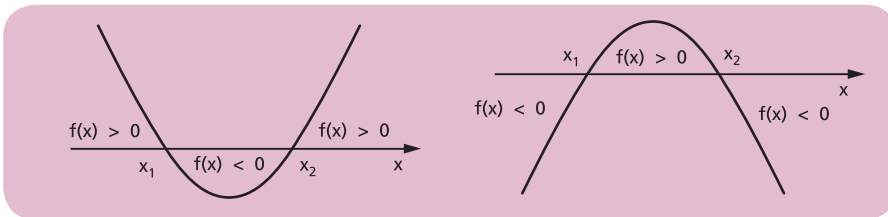
1º) O sinal de $f(x)$ é o sinal de a para todo x , tal que $x < x_1$ ou $x > x_2$;

2º) O sinal de $f(x)$ é o sinal de $-a$ para todo x , tal que $x_1 < x < x_2$.

Em resumo:



O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta > 0$, vem confirmar a dedução algébrica.



Exemplos:

1º) $f(x) = x^2 - x - 6$ apresenta $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$; então $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para } x < -2 \quad \text{ou } x > 3 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -2 \quad \text{ou } x = 3 \\ f(x) < 0 & \text{para } -2 < x < 3 \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ apresenta $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$; logo $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$$

e, como $a = -2 < 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -\frac{1}{2} \quad \text{ou } x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou } x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para } -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

288. Estude os sinais de cada uma das funções do exercício 281.

289. Quais as condições de x para que a expressão $ax^2 + bx + c$, em que $b^2 - 4ac > 0$ e $a < 0$, seja estritamente positiva?

290. Qual é a condição necessária e suficiente para que o trinômio do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenha sinal constante em \mathbb{R} ?

XII. Inequação do 2º grau

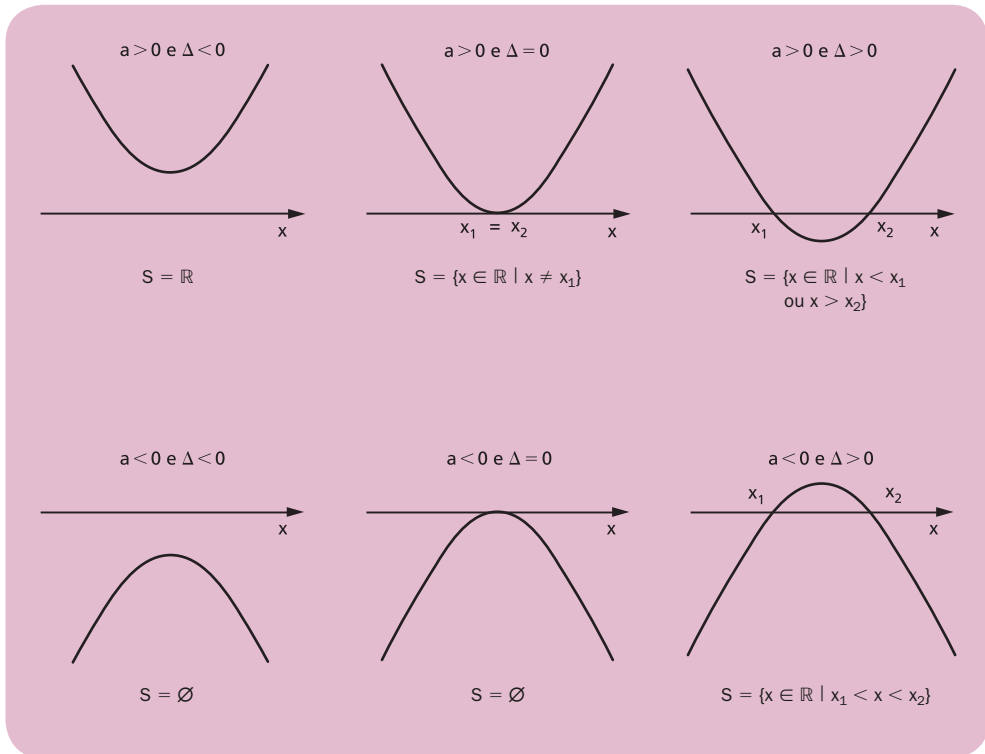
122. Se $a \neq 0$, as inequações $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ e $ax^2 + bx + c \leq 0$ são denominadas **inequações do 2º grau**.

Resolver, por exemplo, a inequação:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

é responder à pergunta: “existe x real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja positiva?”.

A resposta a essa pergunta se encontra no estudo do sinal de $f(x)$, que pode, inclusive, ser feito através do gráfico da função. Assim, no nosso exemplo, dependendo de a e de Δ , podemos ter uma das seis respostas seguintes:



EXERCÍCIOS

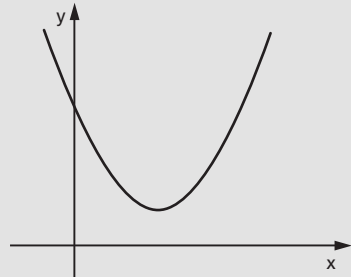
291. Resolva a inequação $x^2 - 2x + 2 > 0$.

Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 2$, temos $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$; então, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como a inequação é $f(x) > 0$, vem:

$$S = \mathbb{R}$$



292. Resolva a inequação $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.

Solução

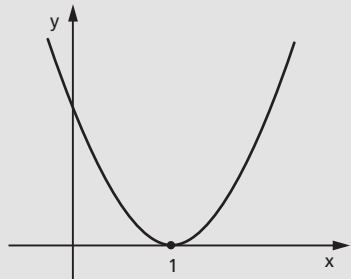
Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos $a = 1 > 0$, $\Delta = 0$ e o zero duplo

$$x = -\frac{b}{2a} = 1; \text{ então:}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Como a inequação é $f(x) \leq 0$, vem:

$$S = \{1\}$$

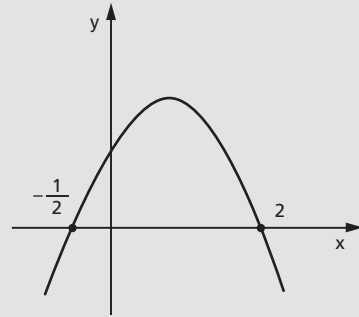


293. Resolva a inequação $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

Solução

Considerando $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$, temos $a = -2 < 0$, $\Delta = 25 > 0$ e os zeros $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$; então:

$$\begin{cases} f(x) // < 0 & \text{para } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para } -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$



Como a inequação é $f(x) \geq 0$, vem:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right\}$$

294. Resolva as inequações em \mathbb{R} :

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

g) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

b) $-x^2 + x + 6 > 0$

h) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

c) $-3x^2 - 8x + 3 \leq 0$

i) $x^2 + 3x + 7 > 0$

d) $-x^2 + \frac{3}{2}x + 10 \geq 0$

j) $-3x^2 + 3x - 3 < 0$

e) $8x^2 - 14x + 3 \leq 0$

k) $2x^2 - 4x + 5 < 0$

f) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

l) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} > 0$

295. Para que valores de x o trinômio $-x^2 + 3x - 4$ é negativo?

296. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, determine $A \cap B$.

297. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2x^2 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$, determine $(A \cup B) \cap C$.

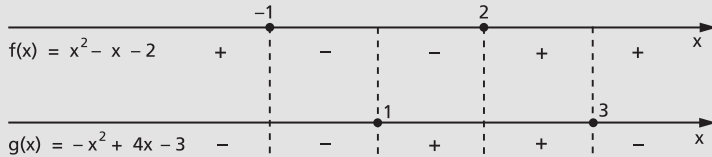
298. Sejam $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $q(x) = x^2 + 5x + 6$. Se a é um número real e $p(a) < 0$, qual é a condição que deve satisfazer $q(a)$?

299. Qual é uma condição suficiente para que a expressão $y = +\sqrt{x^2 - 4}$ represente uma função?

300. Resolva a inequação $(x^2 - x - 2) \cdot (-x^2 + 4x - 3) > 0$ em \mathbb{R} .

Solução

Analisando os sinais dos fatores, temos:



Fazendo o quadro-produto, vem:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$$

301. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

- $(1 - 4x^2) \cdot (2x^2 + 3x) > 0$
- $(2x^2 - 7x + 6) \cdot (2x^2 - 7x + 5) \leq 0$
- $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$
- $(x^2 + x - 6) \cdot (-x^2 - 2x + 3) \geq 0$
- $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$
- $2x^3 - 6x^2 + x - 3 \leq 0$

302. É dada a função $y = (2x^2 - 9x - 5) \cdot (x^2 - 2x + 2)$.

Determine:

- os pontos de interseção do gráfico da função com o eixo das abscissas;
- o conjunto dos valores de x para os quais $y \leq 0$.

303. Dentre os números inteiros que são soluções da inequação

$$(x^2 - 21x + 20) \cdot (3 - x) > 0, \text{ qual é o maior?}$$

304. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a inequação

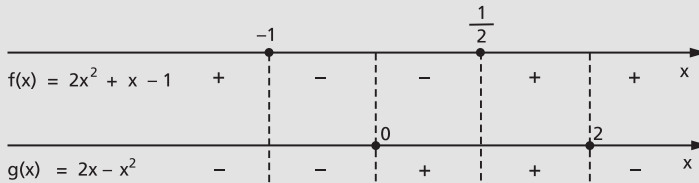
$$(x^2 - 2x + 8) \cdot (x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 - 16) < 0.$$

305. Seja A o conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $(x^2 - 5x) \cdot (x^2 - 8x + 12) < 0$. Determine A.

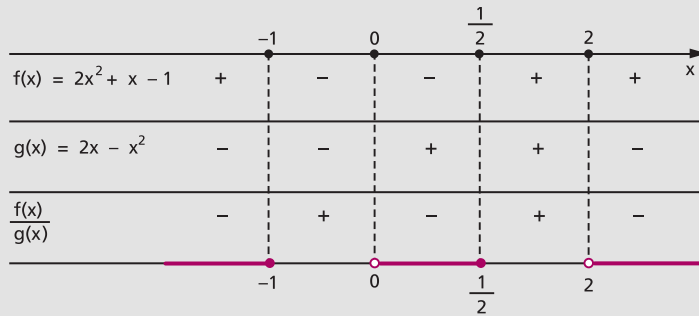
306. Resolva a inequação $\frac{2x^2 + x - 1}{2x - x^2} \leq 0$ em \mathbb{R} .

Solução

Analisando os sinais do numerador e do denominador, temos:



Fazendo o quadro-quociente, vem:



307. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

a) $\frac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} > 0$

e) $\frac{x^2 + 3x - 16}{-x^2 + 7x - 10} \geq 1$

b) $\frac{-9x^2 + 9x - 2}{3x^2 + 7x + 2} \leq 0$

f) $\frac{2x^2 + 4x + 5}{3x^2 + 7x + 2} < -2$

c) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$

g) $\frac{6x^2 + 12x + 17}{-2x^2 + 7x - 5} \geq -1$

d) $\frac{2 - 3x}{2x^2 + 3x - 2} < 0$

h) $\frac{(x + 1)^3 - 1}{(x - 1)^3 + 1} > 1$

308. Determine, em \mathbb{R} , o conjunto solução das inequações:

a) $\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$

d) $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \geq 0$

b) $\frac{x}{x^3-x^2+x-1} \geq 0$

e) $t + \frac{1}{t} \leq -2$

c) $\frac{x-3}{x-2} \leq x-1$

f) $\frac{x^2+2x-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{x+1}$

309. Tomando como conjunto universo o conjunto $U = \mathbb{R} - \{1\}$, resolva a inequação

$$\frac{x+1}{2} < \frac{x+2}{1-x}$$

310. Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2$, resolva a inequação:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} \leq f(-1)$$

311. Responda:

a) O que se pretende dizer quando se pede para achar o domínio de uma $f(x)$ igualada a uma expressão em x ?

b) Determine, em \mathbb{R} , o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+1}{x^2-2x-15}}$.

312. Ache o domínio da função $y = \sqrt{\frac{-x+5}{x^2+x-6}}$, em \mathbb{R} .

313. Determine o conjunto igual a $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x-1}} \geq 0\right\}$.

314. Qual é a condição para que $y = \sqrt{\frac{(x-3)(x^2+2x-8)}{x^2+4x+3}}$, y real, seja definida?

315. Resolva as inequações:

a) $4 < x^2 - 12 \leq 4x$

b) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leq -5x$

c) $0 \leq x^2 - 3x + 2 \leq 6$

d) $7x + 1 < x^2 + 3x - 4 \leq 2x + 2$

e) $0 < x^2 + x + 1 < 1$

f) $4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4$

316. Resolva os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 + 2x \geq 0 \\ -4x^2 + 8x - 3 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + x - 20 \leq 0 \\ x^2 - 4x - 21 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \leq 0 \end{cases}$

317. Considere as desigualdades:

$$4y + 3x \leq 12, \quad 0 \leq x \text{ e } 0 \leq y.$$

Classifique as proposições abaixo em verdadeiras (V) ou falsas (F):

- a) O conjunto de soluções das desigualdades é limitado no plano (x, y) .
- b) O valor máximo da variável x satisfazendo as desigualdades é 4.
- c) O conjunto de soluções das desigualdades não é limitado no plano (x, y) .
- d) O valor mínimo da variável y satisfazendo as desigualdades é 3.
- e) O valor máximo da variável y satisfazendo as desigualdades é 3.

318. Assinale as proposições verdadeiras (V) e as proposições falsas (F) nos itens abaixo.

O conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases} \text{ é:}$$

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\} \cup \{0 < x < 1\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
- d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq \frac{3}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 2\right\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

319. Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$, em \mathbb{R} .

Solução

Fazendo $z = x^2$, temos:

$$z^2 - 5z + 4 \geq 0 \Rightarrow z \leq 1 \text{ ou } z \geq 4$$

mas $z = x^2$; portanto:

$$(x^2 \leq 1 \text{ ou } x^2 \geq 4) \Rightarrow (x^2 - 1 \leq 0 \text{ ou } x^2 - 4 \geq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2)$$

$$\text{logo } S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}.$$

320. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações:

- a) $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$
- b) $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$
- c) $x^4 + 8x^2 - 9 < 0$
- d) $2x^4 - 3x^2 + 4 < 0$
- e) $x^6 - 7x^3 - 8 \geq 0$
- f) $3x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

321. Determine m de modo que a função quadrática

$f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m + 1)$ seja positiva para todo x real.

Solução

Devemos ter simultaneamente $\Delta < 0$ e $a > 0$; portanto:

$$1^\circ) \Delta = b^2 - 4ac = (2m - 1)^2 - 4 \cdot m \cdot (m + 1) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 4m = -8m + 1 < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{8}$$

$$2^\circ) a = m > 0 \Rightarrow m > 0$$

Como as condições são simultâneas, concluímos que:

$$(f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow m > \frac{1}{8}$$

322. Determine m para que se tenha para $\forall x \in \mathbb{R}$:

- | | |
|---|--|
| a) $x^2 + (2m - 1)x + (m^2 - 2) > 0$ | f) $(m - 1)x^2 + 4(m - 1)x + m > 0$ |
| b) $x^2 + (2m + 3)x + (m^2 + 3) \geq 0$ | g) $mx^2 + (m - 2)x + m \leq 0$ |
| c) $x^2 - mx + m > 0$ | h) $mx^2 + (m + 3)x + m \geq 0$ |
| d) $x^2 + (m + 1)x + m > 0$ | i) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 1) < 0$ |
| e) $-x^2 + (m + 2)x - (m + 3) \geq 0$ | j) $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 > 0$ |

323. Determine m para que se tenha $\frac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução

Considerando que $x^2 + x + 1$ é positivo para qualquer x real, multiplicamos ambos os membros de $\frac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ por $(x^2 + x + 1)$,

mantendo a desigualdade.

Então:

$$\frac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m + 1)x + 1 < 2(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + (m - 1)x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Devemos ter $\Delta < 0$, portanto:

$$\Delta = (m - 1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = m^2 - 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Resposta: $-1 < m < 3$.

324. Determine m para que se tenha para $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1} < 2$

b) $\frac{x^2 - mx + 2}{x^2 - x + 2} > m$

c) $\frac{x}{x^2 + 4} > \frac{x + m}{x^2 + 1}$

d) $-3 < \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$

325. Qual é o conjunto de valores de p para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer x pertencente a \mathbb{R} ?

326. Qual é a condição para que a desigualdade $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 > 0$ seja verificada para todo número real x ?

327. Se $\frac{x - a}{x^2 + 1} < \frac{x + a}{x^2}$, para todo $x \neq 0$, qual é a condição que a satisfaz?

328. Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais o domínio da função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - mx + m}}$$

é o conjunto dos reais.

329. Para que a função real $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + k}$, em que x e k são reais, seja definida para qualquer valor de x , qual deve ser o valor de k ?

XIII. Comparação de um número real com as raízes da equação do 2º grau

123. Comparar o número real α às raízes reais $x_1 \leq x_2$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é verificar se:

1º) α está à esquerda de x_1 ($\alpha < x_1 \leq x_2$);

2º) α está entre as raízes ($x_1 < \alpha < x_2$);

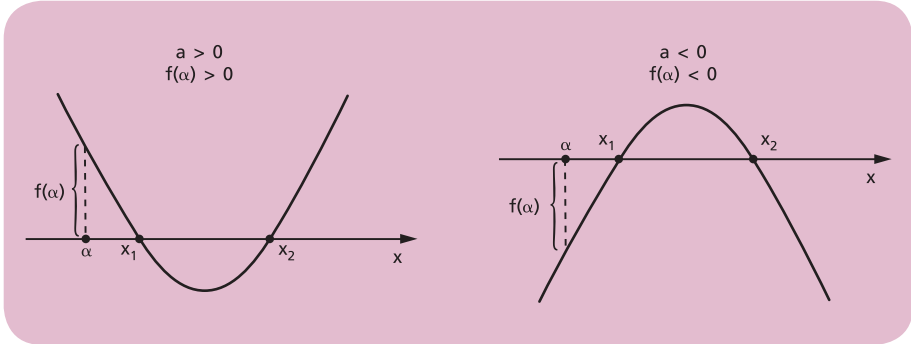
3º) α está à direita de x_2 ($x_1 \leq x_2 < \alpha$);

4º) α é uma das raízes ($\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$);

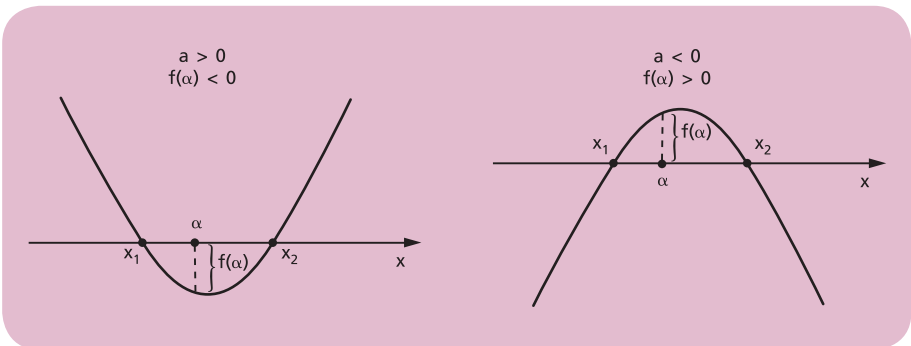
sem calcular as raízes.

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, cuja regra de sinal já discutimos neste capítulo, temos que:

a) se α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 , o produto $a \cdot f(\alpha)$ é positivo, isto é: a (coeficiente de x^2) e $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ têm o mesmo sinal.



b) se α estiver entre as raízes x_1 e x_2 ($x_1 \neq x_2$), o produto $a \cdot f(\alpha)$ é negativo, isto é: a e $f(\alpha)$ têm sinais opostos.



c) se α é zero de $f(x)$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, pois $f(\alpha) = 0$.

Resumo

Conhecendo a posição de α em relação às raízes reais x_1 e x_2 de $f(x) = 0$, temos que:

- I) $\alpha < x_1 \leq x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$
- II) $x_1 < \alpha < x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$
- III) $x_1 \leq x_2 < \alpha \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$
- IV) $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) = 0$

Observemos que nos casos I, III e IV o discriminante é $\Delta \geq 0$, enquanto no caso II temos $\Delta > 0$.

Inversamente, conhecendo o sinal do produto $a \cdot f(\alpha)$, que conclusão podemos tirar da existência de raízes reais da equação $f(x) = 0$ e qual a posição de α em relação às mesmas raízes?

É o que veremos em seguida.

124. Teorema 1

Se $a \cdot f(\alpha) < 0$, o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem zeros reais e distintos e α está compreendido entre eles.

Hipótese: $a \cdot f(\alpha) < 0$ Tese: $\Delta > 0$ e $x_1 < \alpha < x_2$

Demonstração:

1º) Se fosse $\Delta \leq 0$, teríamos: $a \cdot f(\alpha) \geq 0, \forall \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluimos, então, que $\Delta > 0$, isto é, $f(x)$ tem dois zeros, x_1 e x_2 , reais e distintos.

2º) Se o real α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 ou for um zero de $f(x)$, teremos $a \cdot f(\alpha) \geq 0$, o que contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluimos, então, que α está compreendido entre x_1 e x_2 .

Exemplo:

Comparar o número 1 às raízes da equação $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Temos $a = 3, \alpha = 1$ e $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; então:

$$a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1) = -3 < 0$$

Conclusão: $\Delta > 0$ e $x_1 < 1 < x_2$.

125. Teorema 2

Se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$, então α está à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 .

$$\text{Hipótese} \begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ e \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \quad \text{Tese} \begin{cases} \alpha < x_1 \leq x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 \leq x_2 < \alpha \end{cases}$$

Demonstração:

Se $\Delta > 0$ e $x_1 \leq \alpha \leq x_2$, então $a \cdot f(\alpha) \leq 0$, o que contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Se $\Delta = 0$ e $\alpha = x_1 = x_2$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, o que também contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Concluimos que $\alpha < x_1 \leq x_2$ ou $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Observação:

Notemos que, se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$, o teorema 2 garante que $\alpha \notin [x_1, x_2]$, mas não indica se α está à esquerda desse intervalo ($\alpha < x_1 \leq x_2$) ou à direita dele ($x_1 \leq x_2 < \alpha$). Para verificarmos qual dessas duas situações está ocorrendo, devemos comparar α com um número qualquer que esteja entre as raízes. Para facilitar os cálculos, vamos utilizar o número $\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, que é a média aritmética das raízes x_1 e x_2 , pois:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1 \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq x_2 \Rightarrow x_1 \leq \frac{S}{2} \leq x_2$$

Calculando $\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a}$, temos duas possibilidades a examinar:

1ª) se $\alpha < \frac{S}{2}$, então α está à esquerda de $\frac{S}{2}$ e, conseqüentemente, à esquerda de x_1 :



2ª) se $\alpha > \frac{S}{2}$, então α está à direita de $\frac{S}{2}$ e, conseqüentemente, à direita de x_2 :



Exemplos:

1º) Comparar o número 1 às raízes da equação $3x^2 + 4x - 3 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 52 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 + 4 - 3) = 12 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 < x_2 < 1$$

$$\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{3} < 1 = \alpha$$

2º) Comparar o número 0 às raízes da equação $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= (-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 20 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) &= 4 \cdot f(0) = 4 \cdot 1 = 4 > 0 \\ \frac{S}{2} &= \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$$

126. Resumo

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ apresenta zeros reais $x_1 \leq x_2$ e α é um número real que vai ser comparado a x_1 e x_2 , temos:

a) $a \cdot f(\alpha) < 0 \xrightarrow{T-1} x_1 < \alpha < x_2$

b) $a \cdot f(\alpha) = 0 \implies \alpha$ é uma das raízes

c) $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0 \implies \begin{cases} \alpha < x_1 \leq x_2 & \text{se } \alpha < \frac{S}{2} \\ x_1 \leq x_2 < \alpha & \text{se } \alpha > \frac{S}{2} \end{cases}$

EXERCÍCIOS

330. Determine m de modo que o número 1 esteja compreendido entre as raízes da equação: $mx^2 + (m - 1)x - m = 0$.

Solução

Considerando $f(x) = mx^2 + (m - 1)x - m$.

Para que aconteça $x_1 < 1 < x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes de $mx^2 + (m - 1)x - m = 0$, devemos ter:

$$a \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \underbrace{m}_{\tilde{a}} \underbrace{[m \cdot 1^2 + (m - 1) \cdot 1 - m]}_{f(1)} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot (m - 1) < 0 \Rightarrow 0 < m < 1$$

Resposta: $0 < m < 1$.

- 331.** Determine m de modo que o número α esteja compreendido entre as raízes da equação:
- $mx^2 + (2m - 3)x + m - 1 = 0$ e $\alpha = 2$
 - $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$ e $\alpha = -1$
 - $mx^2 + (m - 1)x + (m + 2) = 0$ e $\alpha = 0$
 - $(m^2 - 1)x^2 + (m - 3)x + m + 1 = 0$ e $\alpha = 1$
- 332.** Determine os valores de m na equação $x^2 + (m - 2)x + 1 - m = 0$ de modo que o número real 2 esteja compreendido entre as raízes.
- 333.** Determine m para que a equação $(m - 2)x^2 - 3mx + (m + 2) = 0$ tenha uma raiz positiva e outra negativa.
- 334.** Determine o menor valor inteiro de k para que a equação $2x^2 + kx + k - 5 = 0$ tenha duas raízes de sinais opostos, sendo a negativa a de maior valor absoluto.
- 335.** Determine m de modo que a equação $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

Solução

Considerando $f(x) = mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m$.

Para que aconteça $-1 < x_1 < x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes reais de $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$, devemos ter:

$$a \cdot f(-1) > 0, \quad \Delta \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > -1$$

Analisando separadamente cada condição:

$$1^a) \quad a \cdot f(-1) > 0 \Rightarrow \underbrace{m}_{a} \cdot \underbrace{[m(-1)^2 - (2m + 1) \cdot (-1) + 2 + m]}_{f(-1)} > 0 \Rightarrow$$

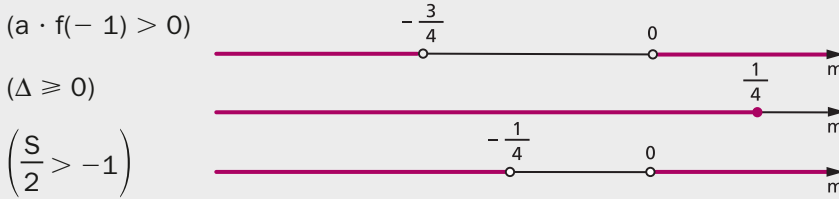
$$\Rightarrow m \cdot (4m + 3) > 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad m > 0$$

$$2^a) \quad \Delta \geq 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4 \cdot m(2 + m) \geq 0 \Rightarrow -4m + 1 \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{4}$$

$$3^a) \quad \frac{S}{2} > -1 \Rightarrow \frac{2m + 1}{2m} > -1 \Rightarrow \frac{2m + 1}{2m} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4m + 1}{2m} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m < -\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad m > 0$$

Representando os valores encontrados sobre um eixo.



Como as três condições são simultâneas, fazendo a interseção dos intervalos acima, vamos encontrar:

$$m < -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad 0 < m \leq \frac{1}{4}, \text{ que é a resposta.}$$

- 336.** Determine m de modo que a equação $(m - 3)x^2 + 2(m - 2)x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < x_2 < 1$.
- 337.** Determine m de modo que a equação $(m - 1)x^2 - mx - 2m - 2 = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.
- 338.** Determine m de modo que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 2$.
- 339.** Determine m para que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 0 < x_2 < 2$.
- 340.** Determine m para que a equação do 2º grau $3x^2 - 2(m + 2)x + m^2 - 6m + 8 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 1 < x_2 < 4$.
- 341.** Determine m para que a equação do 2º grau $(2m + 1)x^2 + 2x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 4$.
- 342.** Determine m para que a equação do 2º grau $(3m - 2)x^2 + 2mx + 3m = 0$ tenha uma única raiz entre -1 e 0 .
- 343.** Determine m para que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m - 1)x - m - 1 = 0$ tenha uma única raiz entre -1 e 2 .

XIV. Sinais das raízes da equação do 2º grau

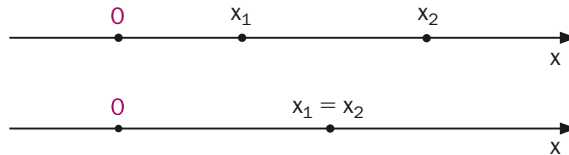
127. Estudar os sinais das raízes de uma equação do 2º grau é comparar o número zero às raízes x_1 e x_2 da equação dada.

Podem ocorrer três situações:

1ª) as raízes são positivas

Neste caso, temos:

$$0 < x_1 < x_2 \quad \text{ou} \quad 0 < x_1 = x_2$$



De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geq 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > 0$$

Notemos que, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$\text{a) } a \cdot f(0) = a \cdot c > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow P > 0$$

em que $P = \frac{c}{a}$ é o produto das raízes da equação do 2º grau.

$$\text{b) } \frac{S}{2} > 0 \Rightarrow S > 0$$

em que $S = -\frac{b}{a}$ é a soma das raízes da equação do 2º grau.

Assim sendo, uma equação do 2º grau tem raízes positivas somente se:

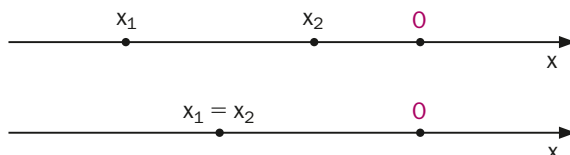
$$\Delta \geq 0 \quad \text{e} \quad P > 0 \quad \text{e} \quad S > 0$$

isto é, se as raízes forem reais, com produto positivo e soma positiva.

2ª) as raízes são negativas

Neste caso, temos:

$$x_1 < x_2 < 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = x_2 < 0$$



De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geq 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} < 0$$

Isso também pode ser escrito assim:

$$\Delta \geq 0 \quad \text{e} \quad P > 0 \quad \text{e} \quad S < 0$$

3ª) as raízes têm sinais opostos

Neste caso, temos:

$$x_1 < 0 < x_2$$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$a \cdot f(0) < 0 \quad \text{ou} \quad P < 0$$

128. Aplicação

Determinar os valores de m na equação do 2º grau:

$$(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$$

para que as raízes reais sejam distintas e positivas.

Como a equação é do 2º grau, devemos ter, inicialmente,

$$m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$$

e, se as raízes são distintas e positivas ($0 < x_1 < x_2$), então:

$\Delta > 0$ (pelo fato de as raízes serem reais e distintas) e $S > 0$ e $P > 0$ (pelo fato de as raízes serem positivas).

Analisando cada condição:

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m - 1) \cdot m =$$

$$= 8m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{8}$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-(2m + 1)}{m - 1} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < m < 1$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{m - 1} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m < 0 \quad \text{ou} \quad m > 1$$



Fazendo a interseção das três condições, vem $-\frac{1}{8} < m < 0$, que é a resposta.

EXERCÍCIOS

- 344.** Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1 = 0$ tenha raízes negativas.
- 345.** Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m + 1)x^2 + 2x + m - 1 = 0$ tenha raízes positivas.
- 346.** Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m - 2)x^2 + (3m - 1)x + (m + 1) = 0$ tenha raízes de sinais opostos.
- 347.** Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m = 0$ admita raízes negativas.
- 348.** Determine m de modo que a equação do 2º grau $(m^2 - 4)x^2 + mx + m - 3 = 0$ admita raízes de sinais opostos.
- 349.** Determine m de modo que a equação do 2º grau $mx^2 - (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ admita raízes positivas.
- 350.** Determine o menor valor inteiro de k para que a equação $2x^2 + kx + k - 5 = 0$ tenha duas raízes de sinais opostos, sendo a negativa a de maior valor absoluto.
- 351.** Considere o conjunto $A = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tal que } |y| < 4\}$. Responda:
- Qual o número de equações do tipo $x^2 + 2mx + n = 0$, com $m \in A$ e $n \in A$?
 - Dentre as equações obtidas no item a, quantas têm raízes reais e distintas?
 - Dentre as equações com raízes reais e distintas, quantas têm raízes positivas?
- 352.** A equação $(m^2 + 1)x - 2m + 5 = 0$ admite raiz negativa para qual condição sobre m ?
- 353.** Sejam p e q reais; se a equação do segundo grau em x :
- $$x^2 + p^2x + q^2 + 1 = 0$$
- tem duas raízes reais, x_1 e x_2 , qual é o sinal dessas raízes?



LEITURA

Dedekind e os números reais

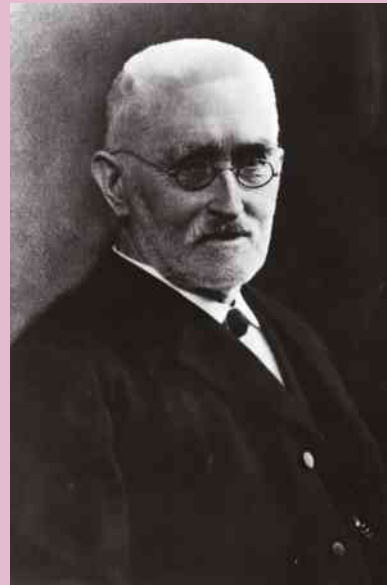
Hygino H. Domingues

A escola pitagórica provou que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Mas nem por isso descobriu os números irracionais. E como os gregos de então, ao contrário de babilônios e egípcios, não eram de se contentar com aproximações, desprovidas de significado teórico, enveredaram pela geometria para superar esse impasse (ver pág. 62). Assim, os gregos do período clássico, ao resolverem a equação $x^2 = 2$, por exemplo, faziam-no geometricamente, fornecendo a raiz positiva como um segmento de reta. E se hoje dizemos “ x ao quadrado” para indicar x^2 , isso se deve a que os gregos associavam um produto de fatores iguais à figura de um quadrado. Coisa análoga vale para x^3 .

Mas a ciência aplicada não pode prescindir da matemática numérica. De modo que já no período alexandrino, quando a matemática grega se abriu para as aplicações, não lhe restou senão imitar a atitude de egípcios e babilônios com relação aos números irracionais — pois ainda demoraria muito até que a natureza destes fosse decifrada.

Assim é que até a primeira metade do século XIX o conceito de número irracional não havia ainda sido elucidado e o conjunto dos números reais carecia de fundamentação lógica. A substituição da intuição geométrica pelos números, como base da análise matemática, foi a grande motivação, no século XIX, para as tentativas de pôr em pratos limpos a questão dos números reais. E entre os matemáticos com papel decisivo nessa empreitada figura Richard Dedekind (1831-1916).

Dedekind nasceu na Alemanha, em Brunswick, também cidade natal de Gauss. Mas, ao contrário deste, seu extraordinário gênio matemático não aflorou precocemente. Na Universidade de Göttingen, em que



Richard Dedekind (1831-1916).

MONDADORI/UiG/GRUPO KEYSTONE

ingressou aos 19 anos de idade, Dedekind iria ter a oportunidade de ser aluno de seu conterrâneo. E o mesmo Gauss, em 1852, teve ocasião de dar parecer favorável à tese de doutoramento de Dedekind.

Depois de trabalhar quatro anos em Göttingen como instrutor e seis anos como professor na Escola Politécnica de Zurique, Dedekind foi contratado pela Escola Técnica Superior de sua cidade natal, onde permaneceu até a morte.

São inúmeras as contribuições de Dedekind à Matemática. Mas seu nome provavelmente é mais lembrado por dois importantes conceitos: o de **ideal**, um dos mais fecundos hoje em dia em todos os campos da Matemática; e o de **corte**, através do qual caracterizou, num livro de 1872, os números reais.

Como professor de cálculo, já a partir de 1858, sentiu mais diretamente a falta de um embasamento teórico para o sistema dos números reais. Exemplificava dizendo não haver uma demonstração sequer para coisas corriqueiras como $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. E a questão central era como esclarecer a ideia de **continuidade**.

Depois de meditar muito, mas sem buscar inspiração em Eudócio, Dedekind abraçou a ideia de que se poderia chegar ao conceito de continuidade através de convenientes partições em \mathbb{Q} . E definiu um corte em \mathbb{Q} como uma partição deste conjunto num par (A, B) de subconjuntos não vazios tais que todo elemento do primeiro é menor que todo elemento do segundo. Por exemplo, para cada $a \in \mathbb{Q}$ está associado o **corte racional** (A, B) definido por a , em que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a\}$. Mas não vale a recíproca: há cortes não racionais.

Dedekind mostrou como operar com esses cortes e como compará-los. Desse modo cada corte passa a representar formalmente um número real e o conjunto desses cortes pode ser visto como o conjunto dos números reais. Por exemplo, o corte (A, B) do exemplo representa o número racional a ; os cortes não racionais são os números irracionais da teoria de Dedekind.

Os mais de 2000 anos decorridos desde o início até o fim desta história dão bem uma ideia da magnitude do passo dado por Dedekind.

CAPÍTULO VIII

Função modular

I. Função definida por várias sentenças abertas

Uma função f pode ser definida por várias sentenças abertas, cada uma das quais está ligada a um domínio D_i contido no domínio da f .

129. Exemplos preliminares

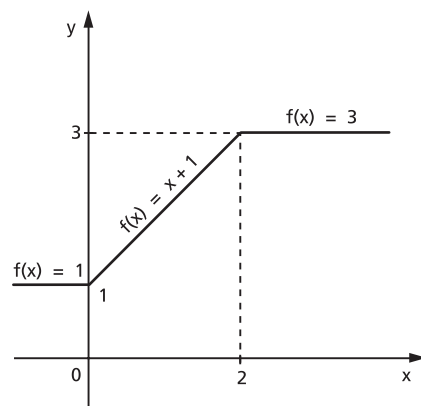
1º) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{para } x < 0 \\ f(x) = x + 1 & \text{para } 0 \leq x < 2 \\ f(x) = 3 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$$

que também pode ser indicada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

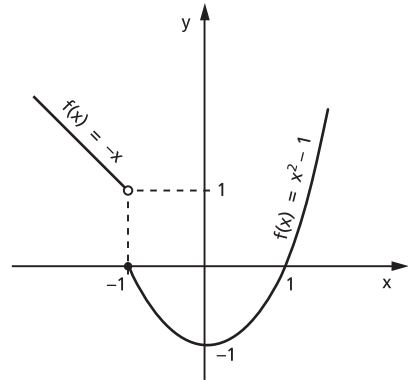
O seu gráfico está representado ao lado.



2º) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por
 $f(x) = -x$ para $x < -1$
 $f(x) = x^2 - 1$ para $x \geq -1$
 que também pode ser indicada por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

O seu gráfico está representado ao lado.



EXERCÍCIOS

354. Construa o gráfico das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2 + x & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x > -2 \\ 1 & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leq -2 \\ x & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geq 1 \\ x - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

355. Esboce o gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 - 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ |x| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

356. Construa o gráfico da função real dada por:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

- 357.** Na função real $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{se } x > -2 \\ -\frac{x}{2} + 1 & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$, determine os valores do domínio que têm imagem 4.

Solução

Para determinarmos o valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4$, resolvemos as equações

$$x^2 + x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (não convém)} \\ x = 2 \end{cases}$$

e

$$-\frac{x}{2} + 1 = 4 \Rightarrow x = -6$$

logo, os valores do domínio que têm imagem 4 são $x = 2$ ou $x = -6$.

- 358.** Na função real $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{5}{2}x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, determine os valores do domínio que têm imagem 7.

- 359.** Considere a função $y = f(x)$ definida por:

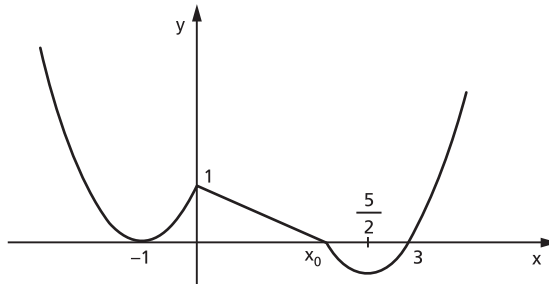
$$\begin{cases} y = 4x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ y = -x^2 + 6x & \text{se } 2 < x \leq 6 \end{cases}$$

- a) Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 6$.
 b) Para que valores de x temos $f(x) = 5$?

- 360.** Considerando a função real definida pela sentença

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{se } x \leq 0 \\ mx + n & \text{se } 0 < x < x_0 \\ x^2 + b_1x + c_1 & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$$

cujo gráfico é:



pode-se afirmar:

a) A equação $f(x) = \frac{3}{2}$ tem 4 soluções.

b) $f(-2) = 1$.

c) Se $0 < x < 1$, então $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$.

d) Se $x \geq 1$, então $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

e) O conjunto imagem da função é o intervalo $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right]$.

II. Módulo

130. Definição

Se $x \in \mathbb{R}$, define-se **módulo** ou **valor absoluto** de x , que se indica por $|x|$, por meio da relação:

$$\begin{cases} |x| = x & \text{se } x \geq 0 \\ \text{ou} \\ |x| = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Isso significa que:

1º) o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;

2º) o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

Assim, por exemplo, temos:

$$|+2| = +2, |-7| = +7, |0| = 0, \left|-\frac{3}{5}\right| = +\frac{3}{5}, |-\sqrt{2}| = +\sqrt{2}, |+\sqrt{3}| = +\sqrt{3}$$

131. Propriedades

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

1ª) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2ª) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3ª) $|x| \cdot |y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

4ª) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

- 5ª) $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
 6ª) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
 7ª) $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
 8ª) $|x| \leq a$ e $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
 9ª) $|x| \geq a$ e $a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

Demonstrações:

- 1ª) Se $x \geq 0$, então $|x| = x \geq 0$.
 Se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$.
- 2ª) Se $x = 0$, então $|x| = x = 0$.
 Se $|x| = 0$, então $x = 0$, pois, caso $x \neq 0$, resultaria $|x| > 0$.
- 3ª) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, então $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$, pois $x \cdot y \geq 0$.
 Se $x < 0$ e $y < 0$, então $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = xy = |x \cdot y|$,
 pois $x \cdot y > 0$.
 Se $x \geq 0$ e $y < 0$, então $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -x \cdot y = |x \cdot y|$,
 pois $x \cdot y \leq 0$.
 Se $x < 0$ e $y \geq 0$, analogamente.
- 4ª) Se $x \geq 0$, então $x = |x|$ e daí $x^2 = |x|^2$.
 Se $x < 0$, então $-x = |x|$ e daí $(-x)(-x) = |x| \cdot |x|$, isto é, $x^2 = |x|^2$.
- 5ª) Se $x \geq 0$, então $x = |x|$ e, se $x < 0$, então $x < 0 < |x|$; portanto, $x \leq |x|$
 para todo x real.
- 6ª) $|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| =$
 $= (|x| + |y|)^2$ e daí $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- 7ª) $|x - y|^2 = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq x^2 + y^2 - 2 \cdot |x| \cdot |y| =$
 $= |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| = (|x| - |y|)^2$ e daí $|x - y| \geq |x| - |y|$.
- 8ª) $|x| \leq a \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x + a)(x - a) \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
- 9ª) $|x| \geq a \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + a)(x - a) \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$.

III. Função modular

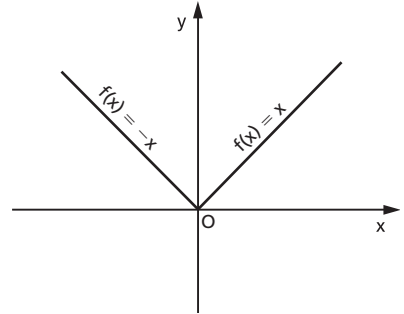
132. Uma aplicação de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de **função módulo** ou **modular** quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $|x| \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = |x|$$

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser definida também da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de origem 0, que são as bissetrizes do 1º e 2º quadrantes.



A imagem desta função é $\text{Im} = \mathbb{R}_+$, isto é, a função modular somente assume valores reais não negativos.

EXERCÍCIOS

361. Construa os gráficos das funções definidas em \mathbb{R} :

a) $f(x) = |2x|$

b) $f(x) = |3x|$

362. Construa o gráfico da função real definida por $f(x) = |x + 1|$.

Solução

Podemos construir o gráfico de $f(x) = |x + 1|$ por dois processos:

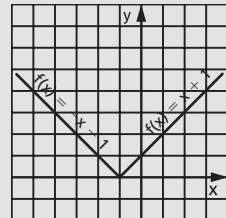
1º) processo:

$$\text{Notemos que } |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Então a função pode ser definida como uma função a duas sentenças, ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

cujo gráfico está representado ao lado.



2º) processo:

Para construirmos o gráfico de

$$f(x) = |x + 1|,$$

fazemos inicialmente o gráfico da função $g(x) = x + 1$, que está representado ao lado.

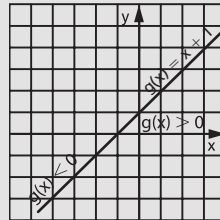
Para obtermos o gráfico de

$$f(x) = |g(x)| = |x + 1|$$

fazemos em duas etapas:

Primeira etapa:

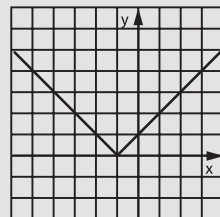
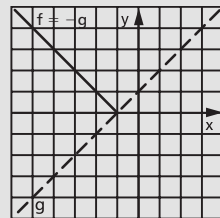
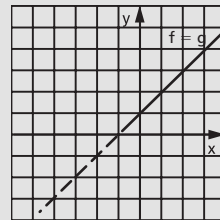
Se $g(x) \geq 0$, vamos ter $f(x) = |g(x)| = g(x)$, isto é, o gráfico da função f coincidirá com o gráfico da função g .



Segunda etapa:

Se $g(x) < 0$, vamos ter $f(x) = |g(x)| = -g(x)$, isto é, o gráfico da função f será simétrico do gráfico da função g , relativamente ao eixo das abscissas.

Construindo os gráficos obtidos, nas duas etapas, no mesmo plano cartesiano temos o gráfico da função $f(x) = |x + 1|$.



363. Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x - 1|$

b) $f(x) = |2x - 1|$

c) $f(x) = |2x + 3|$

d) $f(x) = |2 - 3x|$

e) $f(x) = |x^2 + 4x|$

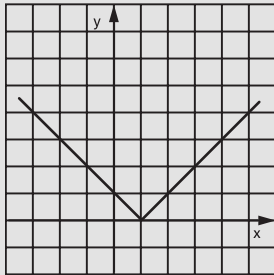
f) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

g) $f(x) = |4 - x^2|$

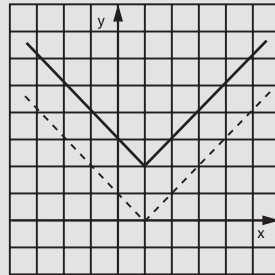
364. Construa o gráfico da função definida em \mathbb{R} por $f(x) = |x - 1| + 2$.

Solução

Construímos inicialmente o gráfico da função $g(x) = |x - 1|$.
Para obtermos o gráfico de $f(x) = g(x) + 2$, deslocamos cada ponto do gráfico da função g duas unidades “para cima”.



$g(x) = |x - 1|$



$f(x) = |x - 1| + 2$

365. Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x| - 3$

d) $f(x) = |x^2 - 1| - 2$

b) $f(x) = |2x - 1| - 2$

e) $f(x) = |x^2 - 4| + 3$

c) $f(x) = |3x - 4| + 1$

f) $f(x) = |x^2 + 4x + 3| - 1$

366. Construa o gráfico da função real:

a) $y = |x| - 1$

b) $y = -|x - a| + a$

367. Construa o gráfico da função definida em \mathbb{R} $f(x) = |x + 2| + x - 1$.

Solução

Notemos que

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

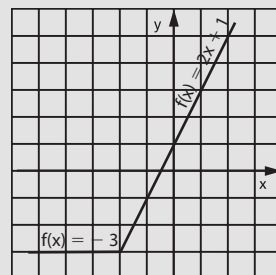
Devemos, então, considerar dois casos:

1º) quando $x \geq -2$, temos:

$$f(x) = |x + 2| + x - 1 = x + 2 + x - 1 = 2x + 1$$

2º) quando $x < -2$, temos:

$$f(x) = |x + 2| + x - 1 = -x - 2 + x - 1 = -3$$



Anotando a função f como uma função definida a duas sentenças, vem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq -2 \\ -3 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

cujo gráfico está na página anterior.

368. Construa os gráficos das funções reais abaixo.

a) $f(x) = |x| + x$

f) $f(x) = |3x + 2| - 2x + 3$

b) $f(x) = |x| - x$

g) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

c) $f(x) = |x - 3| + x + 2$

h) $f(x) = |x^2 - 2|x| - 3|$

d) $f(x) = |x + 1| - x + 3$

i) $f(x) = |x^2 - 2|x| + x + 2$

e) $f(x) = |2x - 1| + x - 2$

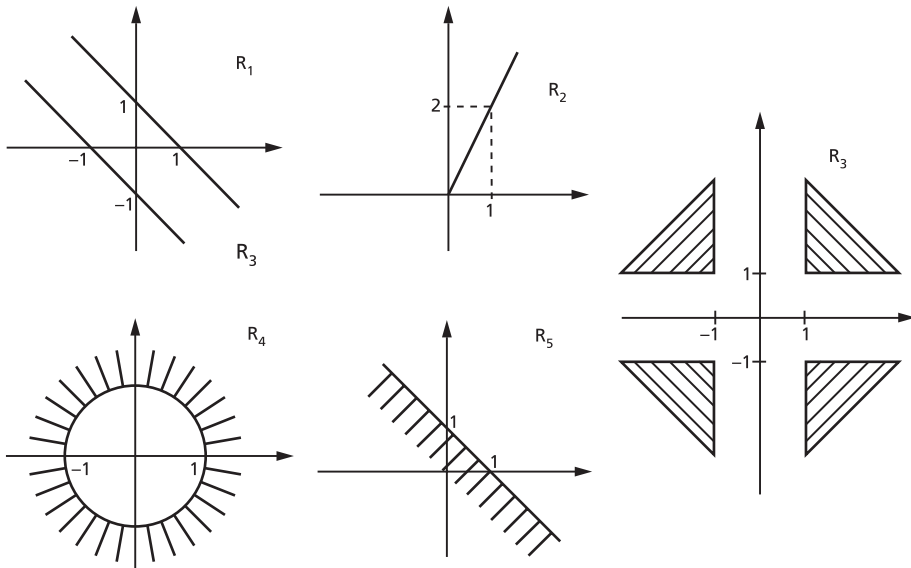
369. Trace o gráfico da função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = (x^2 - 1) + |x^2 - 1| + 1.$$

370. Determine o conjunto imagem da função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = 2|x - 3| + x - 1.$$

371. Os diagramas cartesianos abaixo representam relações em \mathbb{R} .



Analise os diagramas e indique as afirmativas verdadeiras.

a) $R_1 = R_1^{-1}$

d) $D(R_4) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = |x| + x\}$

e) $I(R_5) =]-\infty, 1]$

c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > 1 \text{ e } |y| \geq 1\}$

372. Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definida em \mathbb{R}^* .

373. Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{|x-1|}{1-x}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

374. Construa o gráfico da função definida em \mathbb{R} por:

$$f(x) = |2x + 1| + |x - 1|.$$

Solução

$$\text{Notemos que } |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{e } |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Devemos, então, considerar três casos:

1º) quando $x < -\frac{1}{2}$, temos:

$$f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = -2x - 1 - x + 1 = -3x$$

2º) quando $-\frac{1}{2} \leq x < 1$, temos:

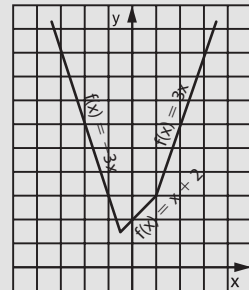
$$f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = 2x + 1 - x + 1 = x + 2$$

3º) quando $x \geq 1$, temos: $f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = 2x + 1 + x - 1 = 3x$.

Anotando a função f como uma função definida a várias sentenças, vem:

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ x + 2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

cujo gráfico está ao lado.



375. Construa o gráfico da função real definida por:

a) $f(x) = |x - 1| - |x|$

b) $y = -x \cdot |x|$

376. Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$

d) $f(x) = |3x + 3| - |2x - 3|$

b) $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$

e) $f(x) = |x^2 - 4| - |x - 2|$

c) $f(x) = |2x - 2| + |x + 3|$

f) $f(x) = \frac{|x^2 - 2x| - |x^2 - 4|}{2}$

377. Construa o gráfico da função definida em \mathbb{R} :

$$f(x) = ||2x - 2| - 4|$$

Solução

Construímos inicialmente o gráfico de $g(x) = |2x - 2| - 4$.

Analisemos as duas possibilidades:

1ª) Se $g(x) \geq 0$, temos:

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

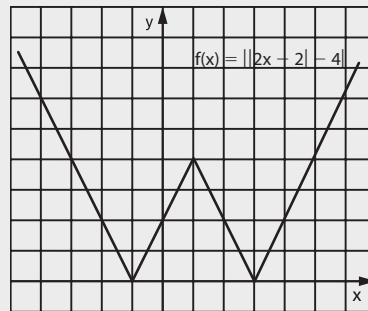
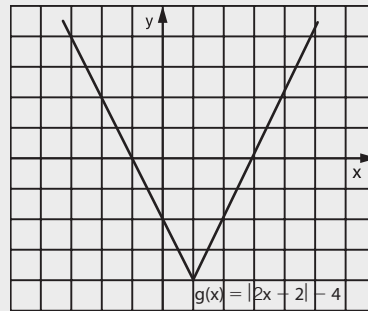
isto é, o gráfico da função f coincide com o gráfico da função g .

2ª) Se $g(x) < 0$, temos:

$$f(x) = |g(x)| = -g(x)$$

isto é, o gráfico da função f é o oposto do gráfico da função g .

Considerando as duas possibilidades e representando num mesmo plano cartesiano, temos:



378. Construa os gráficos das funções reais:

a) $f(x) = ||x| - 2|$

b) $f(x) = ||2x + 3| - 2|$

c) $f(x) = ||x^2 - 1| - 3|$

d) $f(x) = ||x - 1| + x - 3|$

e) $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$

f) $f(x) = ||x + 2| - |x - 2||$

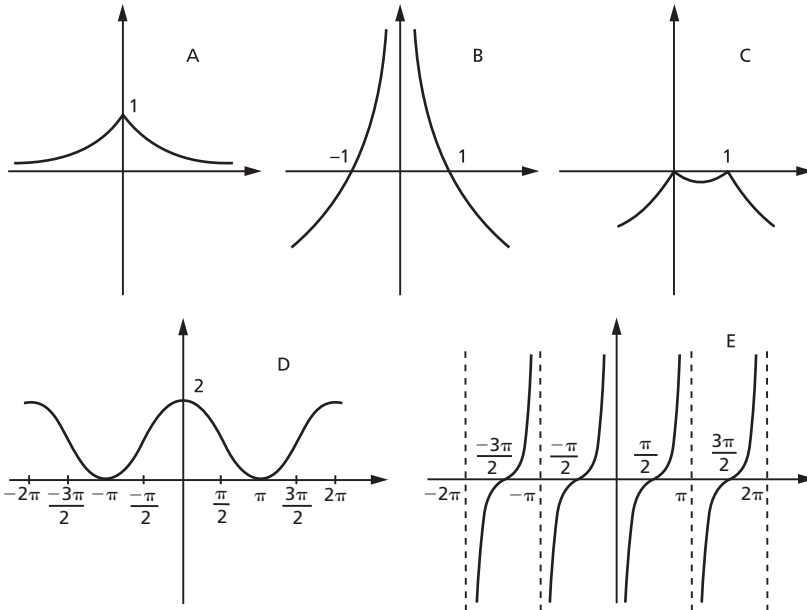
g) $f(x) = ||x - 3| - |2x + 1||$

379. Construa o gráfico da função real definida por:

a) $f(x) = |x^2 - 5|x| + 6|$
 b) $y = 2x + |x - 2|x||$

c) $f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{|x - 1|}{x - 1}$

380. Considerando os gráficos abaixo, indique as afirmativas verdadeiras.



- a) A representa a função $f(x) = \frac{1}{2|x|}$.
 b) B representa a função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$.
 c) C representa a função $f(x) = -|x^2 - x|$.
 d) D representa a função $f(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
 e) E representa a função $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

IV. Equações modulares

133. Lembremos a propriedade do módulo dos números reais, para $k > 0$:

$$|x| = k \Leftrightarrow x = k \quad \text{ou} \quad x = -k$$

e, utilizando essa propriedade, vamos resolver algumas equações modulares.

1º) Resolver $|2x - 1| = 3$.

Então:

$$|2x - 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$S = \{2, -1\}$$

2º) Resolver $|3x - 1| = |2x + 3|$.

Lembrando a propriedade

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$$

temos:

$$|3x - 1| = |2x + 3| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2x + 3 \Rightarrow x = 4 \\ \text{ou} \\ 3x - 1 = -2x - 3 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$S = \left\{4, -\frac{2}{5}\right\}$$

3º) Resolver $|x + 1| = 3x + 2$.

Devemos ter inicialmente:

$$3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

para que seja possível a igualdade.

Supondo $x \geq -\frac{2}{3}$, temos:

$$|x + 1| = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3x + 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x + 1 = -3x - 2 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

EXERCÍCIOS

381. Resolva as seguintes equações, em \mathbb{R} :

a) $|x + 2| = 3$

e) $|x^2 - 3x - 1| = 3$

b) $|3x - 1| = 2$

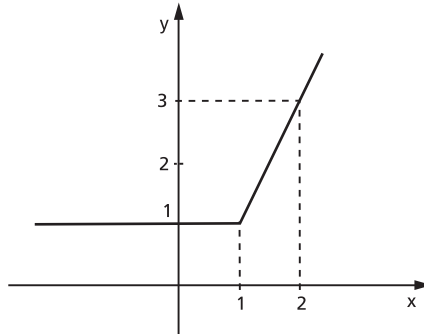
f) $\left| x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4} \right| = \frac{5}{4}$

c) $|4x - 5| = 0$

g) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

d) $|2x - 3| = -1$

382. Considere o gráfico abaixo:



a) Mostre que esse gráfico representa a função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = x + |x - 1|$.

b) Dada a função constante $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = k$, para que valores de k a equação $f(x) = g(x)$ tem uma única solução?

383. Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes equações:

a) $|3x + 2| = |x - 1|$

c) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

b) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$

d) $|x^2 + 2x - 2| = |x^2 - x - 1|$

384. Resolva as seguintes equações, em \mathbb{R} :

a) $|x - 2| = 2x + 1$

d) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

b) $|3x + 2| = 2x - 3$

e) $|3x - 2| = 3x - 2$

c) $|2x - 5| = x - 1$

f) $|4 - 3x| = 3x - 4$

385. Resolva, em \mathbb{R} , a equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$.

Sugestão: Faça $|x| = y$.

386. Resolva, em \mathbb{R} , a equação $|2x - 3| + |x + 2| = 4$.

Solução

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \\ -2x + 3 & \text{se } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

| | | | |
|----------------------|-----------|---------------|----------|
| | -2 | $\frac{3}{2}$ | x |
| $ 2x - 3 $ | $-2x + 3$ | $-2x + 3$ | $2x - 3$ |
| $ x + 2 $ | $-x - 2$ | $x + 2$ | $x + 2$ |
| $ 2x - 3 + x + 2 $ | $-3x + 1$ | $-x + 5$ | $3x - 1$ |

Temos, então:

$$|2x - 3| + |x + 2| = \begin{cases} -3x + 1 & \text{se } x < -2 \\ -x + 5 & \text{se } -2 \leq x < \frac{3}{2} \\ 3x - 1 & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Resolvendo cada parte, vem:

$$-3x + 1 = 4 \Rightarrow x = -1 \text{ (Não serve, porque } x \text{ deve ser menor que } -2.)$$

$$-x + 5 = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$3x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\text{Resposta: } S = \left\{ 1, \frac{5}{3} \right\}$$

387. Determine o conjunto solução, em \mathbb{R} , das equações:

a) $|x + 1| - |x| = 2x + 1$

b) $\frac{|x|}{x} = \frac{|x - 1|}{x - 1}$

V. Inequações modulares

134. Lembrando as propriedades de módulo dos números reais, para $k > 0$:

$$1^a) |x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$$

$$2^a) |x| > k \Leftrightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

e, utilizando essas propriedades, podemos resolver algumas inequações modulares.

1º) Resolver em \mathbb{R} : $|2x + 1| < 3$.

Então:

$$|2x + 1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x + 1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}.$$

2º) Resolver em \mathbb{R} : $|4x - 3| > 5$.

Então:

$$|4x - 3| > 5 \Rightarrow (4x - 3 < -5 \text{ ou } 4x - 3 > 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \right)$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \right\}.$$

EXERCÍCIOS

388. Resolva, em \mathbb{R} , as inequações abaixo.

a) $|3x - 2| < 4$

g) $|5x + 4| \geq 4$

b) $|2x - 3| \leq 1$

h) $|2 - 3x| \geq 1$

c) $|4 - 3x| \leq 5$

i) $|3x - 5| > 0$

d) $|3x + 4| \leq 0$

j) $|4x - 7| \geq -1$

e) $|2x + 4| < -3$

k) $1 < |x - 1| \leq 3$

f) $|2x - 1| > 3$

389. Resolva as inequações seguintes, em \mathbb{R} .

a) $|x^2 - 5x + 5| < 1$

f) $\frac{x+1}{|2x-1|} \leq 2$

b) $|x^2 - x - 4| > 2$

g) $||x| - 2| > 1$

c) $|x^2 - 5x| \geq 6$

h) $||2x + 1| - 3| \geq 2$

d) $|x^2 - 3x - 4| \leq 6$

i) $||2x - 1| - 4| \leq 3$

e) $\frac{2x-3}{|3x-1|} > 2$

390. Seja a inequação $\left|2 - \frac{1}{x}\right| \leq 5$. Quantas de suas soluções são números inteiros positivos e menores que 30?

391. Julgue os itens abaixo.

- a) A equação $|2x - 1| = 3$ possui duas raízes reais.
 b) Os valores reais de x para os quais $(3x - 2) \cdot (1 - x) \cdot (1 + x^2) \geq 0$ são $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1\right\}$.
 c) Os valores reais de x tais que $\frac{x + 2}{3} - \frac{x - 1}{2} \geq x$ são $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$.
 d) Não existe número real x que satisfaça a inequação $|\cos x| \geq 1$.
 e) O polinômio $5x^6 - 6x^5 + x$ é divisível por $(x - 1)^2$.

392. Qual é o comprimento do intervalo que representa a interseção dos conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 7| < 2\}$?

393. Determine o conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $1 < |x - 3| < 4$.

394. Para que valores de x , reais, a função $P(x) = |x^2 + x - 1|$ é menor do que 1?

395. Se $|x^2 - 4| < N$ para todo x real, tal que $|x - 2| < 1$, qual é o menor valor possível para N ?

396. Julgue os itens abaixo.

- a) As inequações $(x - 5)^2 \cdot (x + 10) < 0$ e $x^2 \cdot (x + 10) < 0$ têm o mesmo conjunto solução.
 b) $|x| - |y| \leq |x - y|$, $\forall x, y$ números reais.
 c) Se $f(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$, $z \neq \pm 1$, então

$$\frac{f(z) - f(-z)}{1 + f(z) \cdot f(-z)} = \frac{4z}{1 - z^2}$$
.
 d) O domínio máximo de definição da função
 $f(x) = (|5 - 2x| - 7)^{\frac{1}{2}}$ é $-1 \leq x \leq 6$.
 e) A função $f(x) = \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{(x - 2)^2}$ está definida para todo número real $x \neq 2$.
 f) A imagem da função $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$ é somente o zero.

397. Quais os números inteiros que satisfazem a sentença $3 \leq |2x - 3| < 6$?

398. Resolva, em \mathbb{R} , a inequação $2x - 7 + |x + 1| \geq 0$.

Solução

Notando que $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$
devemos, então, considerar dois casos:

1º) Se $x \geq -1$, temos:

$$2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \Rightarrow 2x - 7 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

A solução S_1 é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

2º) Se $x < -1$, temos:

$$2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \Rightarrow 2x - 7 - x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 8$$

A solução S_2 é:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\} = \emptyset$$

A solução da inequação proposta é

$$S = S_1 \cup S_2$$

e portanto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

399. Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes inequações:

a) $|x + 1| - 3x + 7 \leq 0$

e) $|3x - 4| + 2x + 1 < 0$

b) $|2x + 1| + 4 - 3x > 0$

f) $|x^2 - 4x| - 3x + 6 \leq 0$

c) $|3x - 2| + 2x - 3 \leq 0$

g) $|x^2 - 6x + 5| + 1 < x$

d) $|x + 1| - x + 2 \geq 0$

400. Resolva a inequação $|x^2 - 4| < 3x$.

401. Indique as afirmativas verdadeiras.

a) $\forall x \in [-1, 0], |x| = -x$.

b) O complementar do conjunto solução da inequação $|x - 1| \geq 2$ é o intervalo $] -1, 3[$.

c) A equação $|x - 1| = 2x$ tem duas soluções.

d) Todas as raízes da equação $2^{|x^2 - 3|} = 8$ são números irracionais.

e) O conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4) < 2$ está contido no conjunto $] -\infty, -2[\cup] 2, +\infty[$.

402. Qual é o conjunto solução, em \mathbb{R} , de $|x - 3| < x + 3$?

403. Resolva a inequação $|2x - 6| - |x| \leq 4 - x$ em \mathbb{R} .

Solução

Notando que:

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

construímos a tabela:

| | 0 | 3 | x |
|--------------------|-----------|-----------|----------|
| $ 2x - 6 =$ | $-2x + 6$ | $-2x + 6$ | $2x - 6$ |
| $ x =$ | $-x$ | x | x |
| $ 2x - 6 - x =$ | $-x + 6$ | $-3x + 6$ | $x - 6$ |

Temos:

$$|2x - 6| - |x| = \begin{cases} x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -3x + 6 & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ -x + 6 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Devemos considerar três casos:

1º) Se $x \geq 3$, a inequação proposta é equivalente a:

$$x - 6 \leq 4 - x \Rightarrow 2x \leq 10 \Rightarrow x \leq 5$$

A solução S_1 é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$

2º) Se $0 \leq x < 3$, a inequação proposta é equivalente a:

$$-3x + 6 \leq 4 - x \Rightarrow -2x \leq -2 \Rightarrow x \geq 1$$

A solução S_2 é:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$$

3º) Se $x < 0$, a inequação proposta é equivalente a:

$$-x + 6 \leq 4 - x \Rightarrow 6 \leq 4, \text{ que é absurdo. Logo a solução } S_3 \text{ é:}$$

$$S_3 = \emptyset$$

A solução da inequação $|2x - 6| - |x| \leq 4 - x$ é:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\} \cup \emptyset$$

e portanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$$

404. Resolva as seguintes inequações, em \mathbb{R} :

a) $|x + 2| - |x - 3| > x$

e) $|x + 2| + |2x - 2| > x + 8$

b) $|3x + 2| - |2x - 1| > x + 1$

f) $3\{|x + 1| - |x - 1|\} \leq 2x^2 - 4x$

c) $|x - 2| - |x + 4| \leq 1 - x$

g) $|x - 2| - |x + 3| > x^2 - 4x + 3$

d) $|x + 2| + |2x - 3| < 10$

405. Resolva a desigualdade $|x - 2| + |x - 4| \geq 6$.

406. Qual é, em \mathbb{R} , o conjunto solução da desigualdade $|x + 1| - |x| \leq x + 2$?

LEITURA

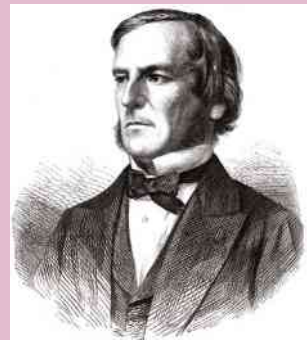
Boole e a álgebra do pensamento

Hygino H. Domingues

A lógica como ciência remonta a Aristóteles (384-322 a.C.), seu criador. No século XVII Descartes (1596-1650) e Leibniz (1646-1716) tencionaram dotá-la de padrões matemáticos, o que pressupõe uma simbologia e um cálculo formal próprios. O alcance dessa lógica seria universal, aplicável a todos os campos do conhecimento. Mas nenhum dos dois deixou sobre o assunto senão alguns escritos fragmentados. Inclusive a contribuição de Leibniz, embora específica, somente em 1901 se tornou conhecida.

Assim é que o marco inicial da lógica simbólica, embora Leibniz seja considerado seu fundador, está fincado no ano de 1847, com a publicação das obras *Mathematical analysis of Logic*, de George Boole (1815-1864), e *Formal Logic*, de Augustus de Morgan (1806-1871).

De família modesta, Boole nasceu em Lincoln, na Inglaterra. Sua instrução formal não passou dos graus básicos, mas, dotado de grande inteligência, e vendo no conhecimento o caminho de seu gosto para ascender socialmente, enveredou pelo autodidatismo. De início aprendeu por si só latim e grego. Depois, como professor de uma escola elementar, resolveu ampliar seus conhecimentos de matemática, pondo-se a estudar, entre outras, as obras clássicas de Laplace e Lagrange. O interesse pela lógica certamente derivou de seu



George Boole (1815-1864).

relacionamento com De Morgan, de quem ficara amigo. Sua obra citada, embora não lhe trouxesse grande fama, propiciou-lhe, dois anos depois de publicada, uma nomeação de professor no recém-criado Queens College, em Cork, Irlanda.

Em 1854 Boole lança sua obra-prima, *Investigation of the laws of thought* (*As leis do pensamento* — como usualmente é conhecida), na qual elucida e amplia as ideias de 1847. A finalidade era ainda expressar simbolicamente as leis do pensamento, visando poder usar de maneira mais direta e precisa a dedução lógica.

Boole procurava transformar certos processos elementares do raciocínio em axiomas da lógica. A chamada álgebra dos conjuntos ou álgebra de Boole, introduzida por ele em *As leis do pensamento*, dá bem uma ideia disso. Boole usava as letras x, y, z, \dots para indicar partes (subconjuntos) de um conjunto tomado como universo. Se x e y denotavam duas dessas partes, o que hoje chamamos de **interseção** e **união**, Boole indicava por xy e $x + y$, respectivamente. (Os símbolos atuais \cap e \cup são devidos a Giuseppe Peano (1858-1932).) Na verdade, as uniões consideradas por Boole pressupunham partes disjuntas; a generalização, para o conceito atual, é devida a W. S. Jevons (1835-1882).

Assim, sendo óbvio para o espírito que $xy = yx$ e $x + y = y + x$, $(xy)z = x(yz)$ e $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(y + z) = xy + xz$, essas leis foram tomadas como axiomas de sua álgebra. Até aí não há diferença entre as álgebras usuais e a de Boole, sob o aspecto estrutural. Mas nesta última há leis particulares, como $x^2 = xx = x$ e $x + x = x$. Ou ainda, simbolizando por 1 o conjunto universo (notação de Boole): $1 + 1 = 1$.

Um exemplo menos imediato envolve a lei do terceiro excluído. Por exemplo, se 1 indica o conjunto de todos os seres vivos e x o conjunto dos gatos, como $1 - x$ era para Boole o complemento de x , então $x + (1 - x) = 1$ traduz a lei referida: todo ser vivo ou é gato ou não é gato.

Não passou despercebida a Boole a semelhança entre a álgebra dos conjuntos e a das proposições. Assim é que para duas proposições p e q indicava por pq a conjunção “ p e q ” e por $p + q$ a disjunção “ p ou q ”. A afirmação $x = 1$ significa, nesse contexto, que x é verdadeira, e $x = 0$ significa que x é falsa. Mas Boole não foi longe com esse assunto.

Porém já tinha feito o bastante para ser considerado pelo grande matemático e filósofo galês do século XX, Bertrand Russel (1872-1970) (ver páginas 247 e 248), como o descobridor da matemática pura.

CAPÍTULO IX

Outras funções elementares

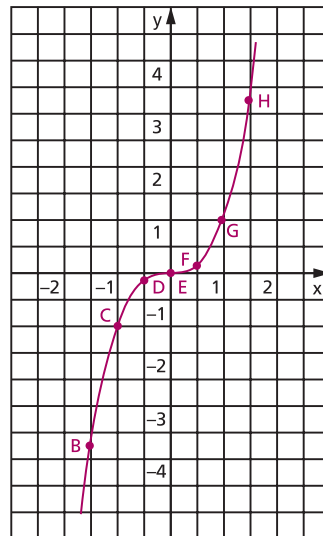
I. Função $f(x) = x^3$

135. Fazemos um estudo da função f , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $x^3 \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3$$

Vamos inicialmente construir a tabela:

| x | x^3 | ponto |
|----------------|-----------------|-------|
| -2 | -8 | A |
| $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{27}{8}$ | B |
| -1 | -1 | C |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{8}$ | D |
| 0 | 0 | E |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | F |
| 1 | 1 | G |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{8}$ | H |
| 2 | 8 | I |
| $\frac{5}{2}$ | $\frac{125}{8}$ | J |
| 3 | 27 | K |



Observemos que a função $f(x) = x^3$:

a) é uma função crescente em \mathbb{R} , isto é:

$$(\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}) (x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3)$$

b) tem imagem $\text{Im} = \mathbb{R}$, pois, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^3$, isto é, $x = \sqrt[3]{y}$.

EXERCÍCIO

407. Faça o esboço dos gráficos das seguintes funções definidas em \mathbb{R} :

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = -x^3$

c) $f(x) = 2 - x^3$

d) $f(x) = (x + 1)^3$

e) $f(x) = (2 - x)^3$

f) $f(x) = (x - 1)^3 - 1$

g) $f(x) = 2 + (1 - x)^3$

h) $f(x) = |x^3|$

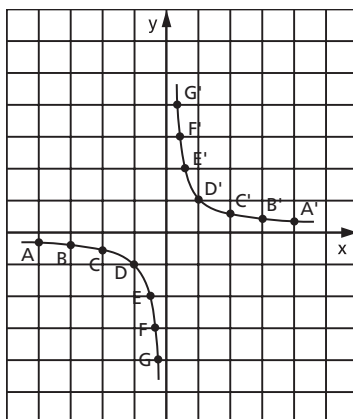
II. Função recíproca

136. Uma aplicação f de \mathbb{R}^* em \mathbb{R} recebe o nome de **função recíproca** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}^*$ associa o elemento $\frac{1}{x}$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Vamos inicialmente construir a tabela:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|----|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|----|---------------|---------------|---------------|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y = \frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2 | -3 | -4 | 4 | 3 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ |
| ponto | A | B | C | D | E | F | G | G' | F' | E' | D' | C' | B' | A' |



Observemos que a função recíproca $y = \frac{1}{x}$:

- não é definida para $x = 0$;
- tem imagem $\text{Im} = \mathbb{R}^*$, pois, dado um numeral real $y \neq 0$, sempre existe um x também real tal que $y = \frac{1}{x}$;
- tem por gráfico uma hipérbole equilátera(*).

EXERCÍCIOS

408. Faça o esboço do gráfico das funções:

- $f(x) = -\frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{1}{2x}$
- $f(x) = -\frac{1}{2x}$
- $f(x) = \frac{1}{|x|}$

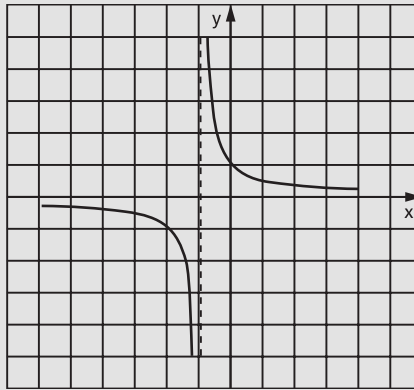
(*) Isso está provado no livro de Geometria Analítica desta coleção.

409. Faça o esboço do gráfico $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Solução

Vamos construir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $x + 1$, calculamos $\frac{1}{x+1}$ e finalmente calculamos x :

| x | $x + 1$ | $y = \frac{1}{x+1}$ |
|----------------|----------------|---------------------|
| -4 | -3 | $-\frac{1}{3}$ |
| -3 | -2 | $-\frac{1}{2}$ |
| -2 | -1 | -1 |
| $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | -2 |
| $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | -3 |
| $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 3 |
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 2 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | 3 | $\frac{1}{3}$ |



410. Faça o esboço gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

c) $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$

411. Faça o esboço gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

d) $f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right|$

412. Faça o esboço gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

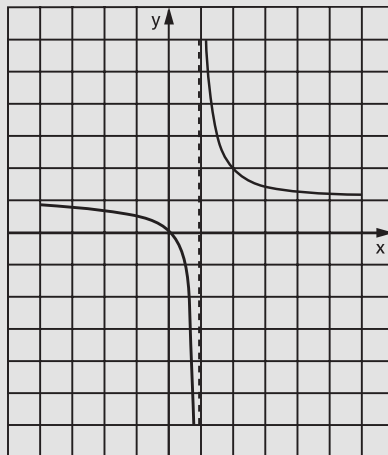
Solução

Observemos que:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Vamos construir a tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $x-1$, calculamos $1 + \frac{1}{x-1}$ e finalmente x .

| x | x - 1 | $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ |
|---------------|----------------|-------------------------|
| -2 | -3 | $\frac{2}{3}$ |
| -1 | -2 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | -1 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 |
| $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | -2 |
| $\frac{4}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 4 |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 3 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | $\frac{3}{2}$ |
| 4 | 3 | $\frac{4}{3}$ |



413. Calcule o valor aproximado da área limitada pela curva $y = \frac{2}{x}$, pelo eixo Ox e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$. Use no cálculo três trapézios de bases contidas nas retas $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$.

414. Represente, graficamente, a função definida por:

a) $f(x) = \frac{1}{4x - x^2 - 4}$

c) $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

b) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$

415. Determine os pontos de interseção das curvas $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = x^2$ algébrica e graficamente.

416. Chama-se **ponto fixo** de uma função f um número real x tal que $f(x) = x$. Calcule os pontos fixos da função $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

417. Esboce um gráfico e indique por meio de hachuras o conjunto dos pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem o seguinte sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \leq xy \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$$

III. Função máximo inteiro

137. Uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de **função máximo inteiro** quando associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $[x]$, que é o maior inteiro que não supera x .

$$f(x) = [x]$$

Assim, por exemplo:

$$[3,9] = \left[\frac{39}{10} \right] = 3, [-0,7] = \left[-\frac{7}{10} \right] = -1 \quad \text{e} \quad [4] = 4$$

Para construirmos o gráfico, notemos que:

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow y = [x] = -3$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y = [x] = -2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = [x] = -1$$

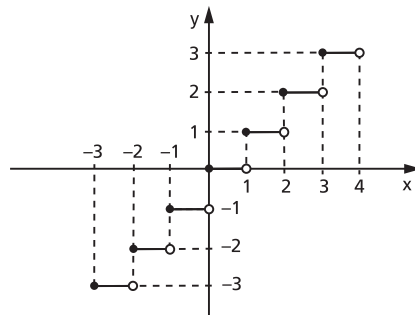
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = [x] = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = [x] = 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow y = [x] = 2$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow y = [x] = 3$$

etc.



A imagem da função máximo inteiro é o conjunto $\text{Im} = \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIOS

418. Construa o gráfico das seguintes funções definidas em \mathbb{R} :

a) $f(x) = 2[x]$

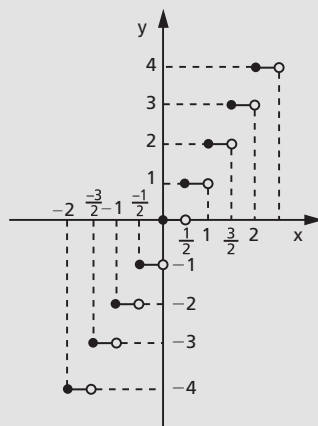
b) $f(x) = -[x]$

419. Construa o gráfico da função real definida por $f(x) = [2x]$.

Solução

Vamos construir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $2x$, calculamos $[2x]$ e finalmente x .

| x | $2x$ | $y = [2x]$ |
|--------------------|-------------------|------------|
| $-2 \leq x < -1,5$ | $-4 \leq 2x < -3$ | -4 |
| $-1,5 \leq x < -1$ | $-3 \leq 2x < -2$ | -3 |
| $-1 \leq x < -0,5$ | $-2 \leq 2x < -1$ | -2 |
| $-0,5 \leq x < 0$ | $-1 \leq 2x < 0$ | -1 |
| $0 \leq x < 0,5$ | $0 \leq 2x < 1$ | 0 |
| $0,5 \leq x < 1$ | $1 \leq 2x < 2$ | 1 |
| $1 \leq x < 1,5$ | $2 \leq 2x < 3$ | 2 |
| $1,5 \leq x < 2$ | $3 \leq 2x < 4$ | 3 |
| $2 \leq x < 2,5$ | $4 \leq 2x < 5$ | 4 |



420. Construa os gráficos das seguintes funções definidas em \mathbb{R} :

a) $f(x) = \left[\frac{x}{2} \right]$

b) $f(x) = [-x]$

c) $f(x) = [x - 1]$

d) $f(x) = [x]$

e) $f(x) = |[x]|$

f) $f(x) = [x]^2$

g) $f(x) = x - [x]$

h) $f(x) = x + [x]$

CAPÍTULO X

Função composta Função inversa

I. Função composta

138. Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C . Chama-se **função composta** de g e f à função h de A em C em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

- 1º) aplica-se a x a função f , obtendo-se $f(x)$;
- 2º) aplica-se a $f(x)$ a função g , obtendo-se $g(f(x))$.

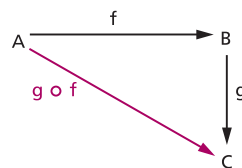
Indica-se $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Pode-se indicar a composta por $g \circ f$ (lê-se: “ g composta com f ” ou “ g círculo f ”); portanto:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para todo $x \in A$.

Podemos representar também a composta $g \circ f$ pelo diagrama ao lado.

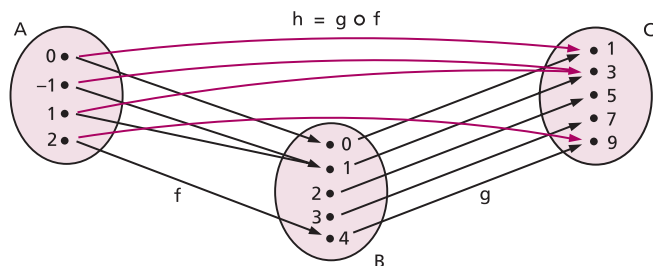


Exemplos:

1º) Sejam os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e as funções:

f , de A em B , definida por $f(x) = x^2$;

g , de B em C , definida por $g(x) = 2x + 1$.



Observemos, por exemplo, que: $f(2) = 4$, $g(4) = 9$ e $h(2) = 9$, isto é, $h(2) = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$.

Para obtermos a lei de correspondência da função composta $h = g \circ f$, fazemos assim: $g(f(x))$ é obtida a partir de $g(x)$ trocando-se x por $f(x)$.

No exemplo dado, temos:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2x^2 + 1$$

Se vamos calcular $h(2)$, fazemos deste modo:

$$h(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$$

2ª) Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$.

Notemos que a função composta $h = g \circ f$ é definida por:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = x^2 + 3x + 3$$

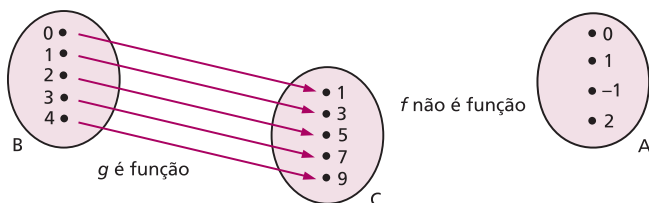
Observações:

1ª) A composta $g \circ f$ só está definida quando o contradomínio da f é igual ao domínio da g . Em particular, se as funções f e g são de A em A , então as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas e são funções de A em A .

2ª) Notemos que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$, isto é, a composição de funções não é comutativa.

Pode acontecer que somente uma das funções $f \circ g$ ou $g \circ f$ esteja definida.

Assim, no primeiro exemplo, se tentarmos obter $f \circ g$, verificaremos que é impossível, pois: g é função de B em C , mas f não é função de C em A .



3ª) As duas composições, $f \circ g$ e $g \circ f$, estão definidas, mas $f \circ g \neq g \circ f$, como nos mostra o segundo exemplo:

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 3x + 3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2$$

139. Associatividade da composição de funções

Teorema

Quaisquer que sejam as funções

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

tem-se:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Demonstração:

Consideremos um elemento qualquer x de A e coloquemos $f(x) = y$, $g(y) = w$ e $h(w) = z$; temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(w) = z$$

e notemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = w$$

portanto,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(w) = z$$

então, temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x),$$

para todo x de A .

EXERCÍCIOS

- 421.** Sejam as funções reais f e g , definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.
- Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.
 - Calcule $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$.
 - Determine os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 16.

Solução

a) A lei que define $f \circ g$ é obtida a partir da lei de f , trocando-se x por $g(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 4[g(x)] - 5 = (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

A lei que define $g \circ f$ é obtida a partir da lei de g , trocando-se x por $f(x)$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 3 = 2(x^2 + 4x - 5) - 3$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 8x - 13$$

b) Calculemos $f \circ g$ para $x = 2$:

$$(f \circ g)(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 = 0$$

Calculemos $g \circ f$ para $x = 2$:

$$(g \circ f)(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 11$$

c) O problema em questão resume-se em resolver a equação

$$(f \circ g)(x) = 16$$

ou seja:

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \Rightarrow 4(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$$

422. Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$.

a) Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

b) Calcule $(f \circ g)(-2)$ e $(g \circ f)(-2)$.

c) Determine os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 10.

423. Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

424. Sejam as funções reais f e g , definidas por $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x - 1$. Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

425. Nas funções reais f e g , definidas por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, obtenha as leis que definem:

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

c) $f \circ f$

d) $g \circ g$

426. Considere a função em \mathbb{R} definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Qual é a lei que define $f(-x)$? E $f\left(\frac{1}{x}\right)$? E $f(x - 1)$?

427. Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + a$, determine o valor de a de modo que se tenha $f \circ g = g \circ f$.

428. Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$, mostre que $f \circ g = g \circ f$.

- 429.** Sejam as funções $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + ax + b$. Mostre que, se $f \circ g = g \circ f$, então $f = g$.
- 430.** Sejam as funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 3x - 4$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Solução

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

Para que exista $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2 - 3x - 4 \geq 0$, isto é:
 $x \leq -1$ ou $x \geq 4$. Então:

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 4\}$$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 - 3 \cdot f(x) - 4 = |x| - 3\sqrt{x} - 4$

Para que exista $(g \circ f)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x \geq 0$. Então:

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

- 431.** Sejam $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.
- 432.** Sejam as funções $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$, definida para todo x real e $x \neq 2$, e $g(x) = 2x + 3$, definida para todo x real. Forneça:
 a) o domínio e a lei que define $f \circ g$;
 b) o domínio e a lei que define $g \circ f$.
- 433.** Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 3x + 2$. Obtenha a lei que define $(h \circ g) \circ f$.
- 434.** Sejam as funções reais $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 2x + 3$. Obtenha a lei que define $h \circ (g \circ f)$.
- 435.** Sendo $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ e $g(\theta) = \sin 2\theta$, encontre os valores de θ para os quais $f \circ g$ se anula.
- 436.** Considere as funções:

$$f(x) = 2x + 3$$

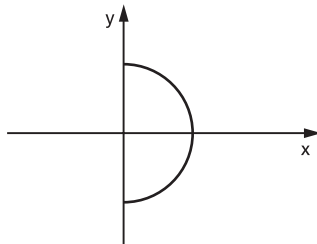
$$g(x) = ax + b$$

Determine o conjunto C dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f \circ g = g \circ f$.

- 437.** Dadas as funções $f(x) = 2x + m$ e $g(x) = ax + 2$, qual é a relação que a e m devem satisfazer para que se tenha $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

438. Julgue os itens a seguir em verdadeiro ou falso.

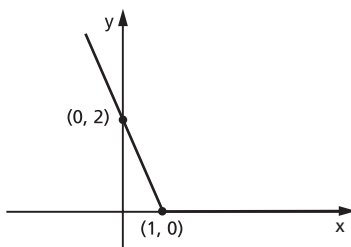
a) A figura abaixo é gráfico de uma função definida para $y = f(x)$.



b) Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então $f(a + 1) = f(1 - a)$.

c) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 4, 7\}$, pode-se afirmar que o número de funções de A para B é igual a 3.

d) A representação gráfica de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 1| - (x - 1)$ é o gráfico abaixo.



e) Para todo $x > 0$ temos que, se $f(x) = \frac{1}{x}$, então $f(x) < 1$.

f) Se f é uma função definida para todo inteiro tal que $f(0) = 1$, $f(n + 1) = f(n) + 3$, então $f(300) = 901$.

439. Dadas $f(x) = 3$ e $g(x) = x^2$, determine $f(g(x))$.

440. Se $f(x) = \frac{1}{1-x}$, determine $(f \circ [f \circ f])(x)$.

441. Dadas as funções f , g e h , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$ e $h(x) = x + 2$, obtenha $((h \circ f) \circ g)(2)$.

442. Dada a aplicação $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$, qual é o valor de x tal que $f(x) = f(x + 1)$?

443. Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} tais que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Determine a relação entre a , b , c e d , de modo que $f \circ g = g \circ f$.

444. Sejam as funções reais $f(x) = 3x - 5$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determine a lei da função g .

Solução

Se $f(x) = 3x - 5$, então, trocando x por $g(x)$, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 5$$

mas é dado que: $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$, então

$$3 \cdot g(x) - 5 = x^2 - 3$$

ou seja:

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$$

445. Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$. Determine a lei da função g .

446. Sejam as funções reais $g(x) = 3x - 2$ e $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determine a lei da função f .

Solução

Se $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$, então $f(g(x)) = 9x^2 - 3x + 1$.

Como $g(x) = 3x - 2$, decorre $x = \frac{g(x) + 2}{3}$ e então:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 9 \left[\frac{g(x) + 2}{3} \right]^2 - 3 \cdot \left[\frac{g(x) + 2}{3} \right] + 1 = \\ &= [g(x)]^2 + 4g(x) + 4 - g(x) - 2 + 1 = [g(x)]^2 + 3 \cdot g(x) + 3; \\ \text{logo, } f(x) &= x^2 + 3x + 3. \end{aligned}$$

447. Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Determine a lei da função f .

448. Sejam as funções reais $g(x) = 2x + 3$ e $(f \circ g)(x) = \frac{2x + 5}{x + 1}$ definidas para todo x real. Determine a lei da função f .

449. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f(f(x)) = x + 1$ para todo x real, calcule os valores de a e b .

450. Considere as funções

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x + b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

em que b é uma constante. Conhecendo a composta

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(f(x)) = 4x^2 - 12x + 9$$

calcule o valor de b .

451. Se $f(x + 1) = \frac{3x + 5}{2x + 1} \left(x \neq -\frac{1}{2} \right)$, qual é o domínio da função $f(x)$ no conjunto dos números reais?

452. Sejam as funções reais $g(x) = 2x + 3$, definida para todo x real, e $g(f(x)) = \frac{2x + 5}{x + 1}$, definida para todo x real e $x \neq -1$. Calcule $f\left(-\frac{12}{15}\right)$.

453. Se $g(f(x)) = x^2 + 13x + 42$ e $g(x) = x^2 - x$, determine o termo independente de x na expressão de $f(x)$, sabendo que $f(x)$ é um polinômio com coeficientes positivos.

454. Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 2x + k$ e $g(x) = -x + t$. Sabendo que $f(f(x)) = 4x - 3$ e $f(g(x)) = g(f(x))$, determine:

- a) os valores de k e t ;
- b) os números reais x , tais que $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

455. Sejam f e g funções reais definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x + 4 & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 3$$

Obtenha a lei que define $f \circ g$.

Solução

Fazendo $g(x) = y$, temos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y)$.

Temos de examinar dois casos:

1º) $y \geq 1$

$$y \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4$$

$$y \geq 1 \quad \Rightarrow \quad f(y) = y^2 + 2y + 4 \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 \cdot g(x) + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (f \circ g)(x) = (x - 3)^2 + 2(x - 3) + 4 = x^2 - 4x + 7$$

2º) $y < 1$

$$y < 1 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 4$$

$$y < 1 \quad \Rightarrow \quad f(y) = 3y + 4 \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (f \circ g)(x) = 3(x - 3) + 4 = 3x - 5$$

Conclusão: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{se } x \geq 4 \\ 3x - 5 & \text{se } x < 4 \end{cases}$

456. Sejam f e g as funções reais definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geq 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = 2x + 3.$$

Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$

457. Sejam as funções reais f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 4 - x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e $g(x) = 2 - 3x$.

Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

458. Sejam as funções reais f e g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}.$$

Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

459. Sejam as funções reais g e $f \circ g$ definidas por $g(x) = 2x - 3$ e

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 4x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Obtenha a lei que define f .

II. Função sobrejetora

140. Uma função f de A em B é **sobrejetora** se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que:

$$f(x) = y$$

Em símbolos:

$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists x, x \in A \mid f(x) = y$$

Notemos que $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $\text{Im}(f) = B$.

$$f: A \rightarrow B$$

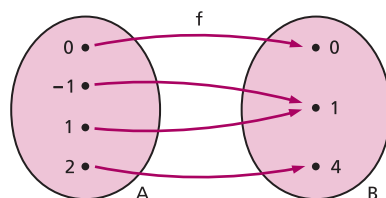
$$f \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = B$$

Em lugar de dizermos “ f é uma função sobrejetora de A em B ”, poderemos dizer “ f é uma **sobrejeção** de A em B ”.

Exemplos:

1º) A função f de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{0, 1, 4\}$ definida pela lei $f(x) = x^2$ é sobrejetora, pois, para todo elemento $y \in B$, existe o elemento $x \in A$ tal que $y = x^2$.

Observemos que para todo elemento de B converge pelo menos uma flecha.



2º) A função f de $A = \mathbb{R}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetora, pois, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = x^2 + 1$, bastando para isso tomar $x = \sqrt{y - 1}$ ou $x = -\sqrt{y - 1}$.

III. Função injetora

141. Uma função f de A em B é **injetora** se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em símbolos:

$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Notemos que a definição proposta é equivalente a: uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

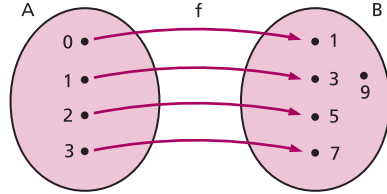
$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Em lugar de dizermos “ f é uma função injetora de A em B ”, poderemos dizer “ f é uma **injeção** de A em B ”.

Exemplos:

1º) A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ definida pela lei $f(x) = 2x + 1$ é injetora, pois dois elementos distintos de A têm como imagem dois elementos distintos de B . Observemos que não existem duas ou mais flechas convergindo para um mesmo elemento de B .



2º) A função de $A = \mathbb{N}$ em $B = \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2x$ é injetora, pois, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de \mathbb{N} , se $x_1 \neq x_2$, então $2x_1 \neq 2x_2$.

3º) A função de $A = \mathbb{R}^*$ em $B = \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é injetora, pois, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de \mathbb{R}^* , se $x_1 \neq x_2$, então $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$.

IV. Função bijetora

142. Uma função f de A em B é **bijetora** se, e somente se, f é sobrejetora e injetora.

Em símbolos:

$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow f \text{ é sobrejetora e injetora}$$

A definição acima é equivalente a: uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento y pertencente a B , existe um único elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

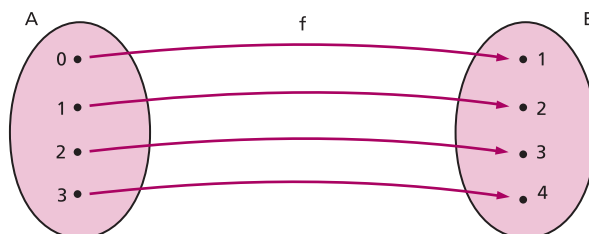
$$f: A \rightarrow B$$

$$f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists x, x \in A \mid f(x) = y$$

Em lugar de dizermos “ f é uma função bijetora de A em B ”, poderemos dizer “ f é uma **bijeção** de A em B ”.

Exemplos:

1º) A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $f(x) = x + 1$ é bijetora



pois f é sobrejetora e injetora, isto é, para todo elemento $y \in B$, existe um único elemento $x \in A$, tal que $y = x + 1$. Observemos que para cada elemento de B converge uma só flecha.

2º) A função f de $A = \mathbb{R}$ em $B = \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ é bijetora, pois:

- qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 3x + 2$, basta tomarmos $x = \frac{y - 2}{3}$. Logo, f é sobrejetora;
- quaisquer que sejam x_1 e x_2 de \mathbb{R} , se $x_1 \neq x_2$, então $3x_1 + 2 \neq 3x_2 + 2$, isto é, f é injetora.

Observação:

Observemos que existem funções que não são sobrejetoras nem injetoras.

Por exemplo, na função de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = |x|$:

- dado $y \in \mathbb{R}_-$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = |x|$, portanto f não é sobrejetora;
- existem x_1 e x_2 em \mathbb{R} , x_1 e x_2 opostos (portanto $x_1 \neq x_2$) tais que $|x_1| = |x_2|$, isto é, f não é injetora.

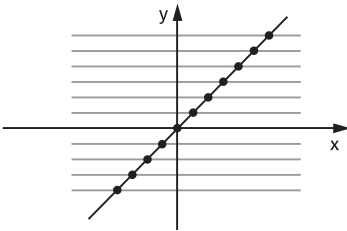
143. Reconhecimento através do gráfico

Pela representação cartesiana de uma função f , podemos verificar se f é injetora, sobrejetora ou bijetora. Para isso, basta analisarmos o número de pontos de interseção das retas paralelas ao eixo x , conduzidas por cada ponto $(0, y)$ em que $y \in B$ (contradomínio de f).

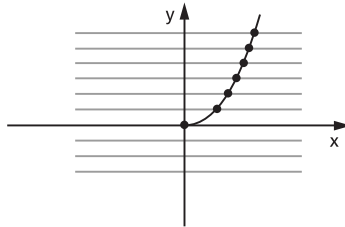
1º) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então a função é **injetora**.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$



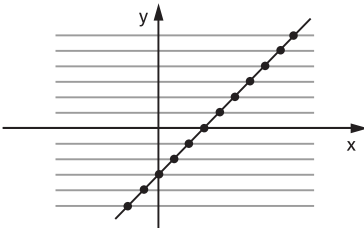
b) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$



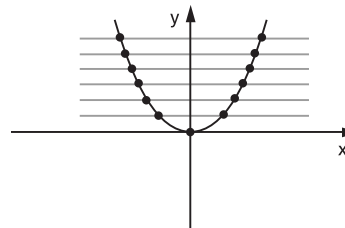
2º) Se cada uma das retas cortar o gráfico em um ou mais pontos, então a função é **sobrejetora**.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x - 1$



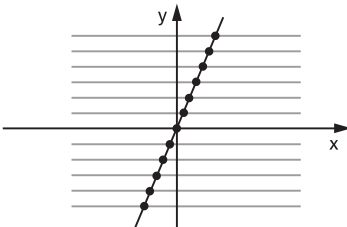
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f(x) = x^2$



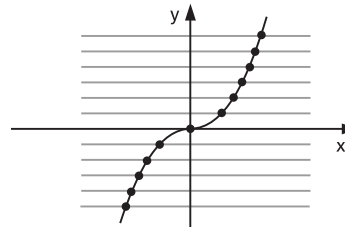
3º) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto, então a função é **bijetora**.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x$



b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x \cdot |x|$



Resumo

Dada a função f de A em B , consideram-se as retas horizontais por $(0, y)$ com $y \in B$:

- I) se nenhuma reta corta o gráfico mais de uma vez, então f é **injetora**.
- II) se toda reta corta o gráfico, então f é **sobrejetora**.
- III) se toda reta corta o gráfico em um só ponto, então f é **bijetora**.

144. Composta de sobrejetoras**Teorema**

Se duas funções, f de A em B e g de B em C , são sobrejetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é também sobrejetora.

Demonstração:

A função g é sobrejetora; então, para todo z de C , existe y em B tal que $g(y) = z$. A função f é sobrejetora, isto é, dado y em B , existe x em A tal que $f(x) = y$.

Logo, para todo z em C , existe x em A tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

o que prova que $g \circ f$ é sobrejetora.

145. Composta de injetoras**Teorema**

Se duas funções, f de A em B e g de B em C , são injetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é também injetora.

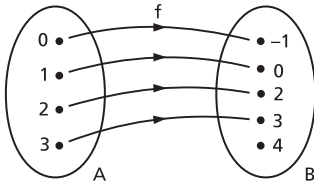
Demonstração:

Consideremos x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de A e suponhamos que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, isto é, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g é injetora, da última igualdade resulta que $f(x_1) = f(x_2)$; como f é também injetora, vem $x_1 = x_2$; portanto, $g \circ f$ é injetora.

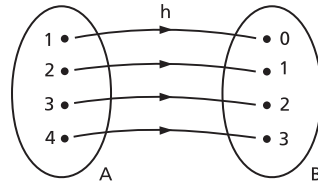
EXERCÍCIOS

460. Indique qual das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora.

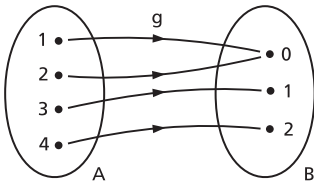
a)



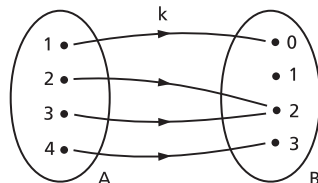
c)



b)

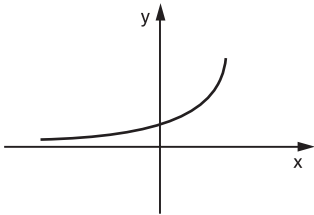


d)

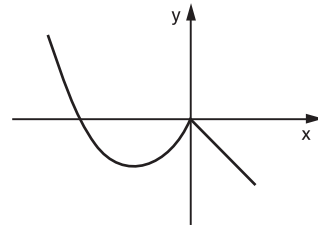


461. Entre as funções em \mathbb{R} abaixo representadas, qual é injetora? E sobrejetora? E bijetora?

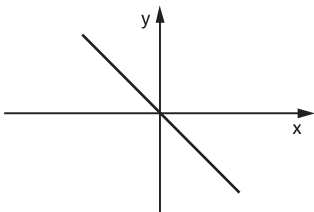
a)



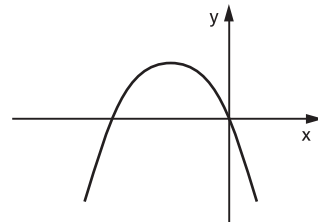
c)



b)



d)



462. Classifique as funções seguintes em:

- | | |
|---|------------------------------------|
| I) injetora | III) bijetora |
| II) sobrejetora | IV) não é sobrejetora nem injetora |
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que | $f(x) = 2x + 1$ |
| b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que | $g(x) = 1 - x^2$ |
| c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que | $h(x) = x - 1 $ |
| d) $m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que | $m(x) = 3x + 2$ |
| e) $n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que | $n(x) = [x]$ |
| f) $p: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que | $p(x) = \frac{1}{x}$ |
| g) $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que | $q(x) = x^3$ |
| h) $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que | $r(x) = x \cdot (x - 1)$ |

463. Determine o valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq b\}$ de modo que a função f de \mathbb{R} em B , definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$, seja sobrejetora.

464. Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ de modo que a função f de A em \mathbb{R} , definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, seja injetora.

465. Seja a função de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 2\}$ em $B \subset \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 3| - 2$. Se f é sobrejetora, determine B .

466. Determine o conjunto B de modo que a função $f: [-1, 2] \rightarrow B$, definida por $f(x) = |2x - 3|$, seja sobrejetiva. Essa função é injetiva? Justifique.

467. Dada as funções seguintes, classifique-as em:

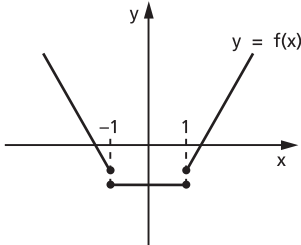
- | | |
|---|---|
| I) injetora | III) bijetora |
| II) sobrejetora | IV) não é injetora nem sobrejetora |
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | d) $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ | $m(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ |
| b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | e) $n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ |
| $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$ | $n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x + 1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$ |
| c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | f) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ |
| $h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ | $p(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ [x] & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$ |

468. Classifique em injetora, sobrejetora ou bijetora a aplicação $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

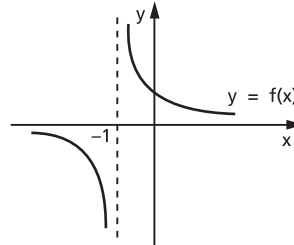
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n + 1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

469. Observando os gráficos, julgue os itens seguintes.

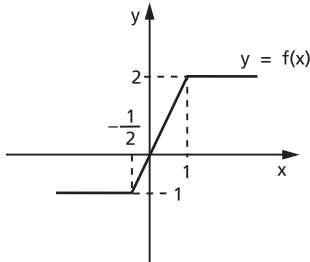
(I)



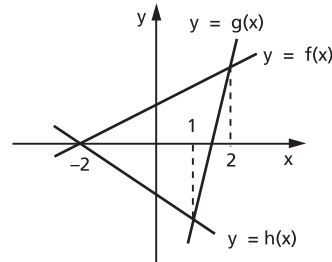
(III)



(II)

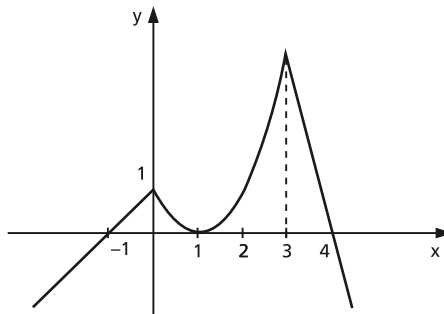


(IV)



- O domínio da função em (I) é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ ou } x \neq 1\}$.
- A imagem da função em (II) é $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 < y < 2\}$.
- A função em (III) é decrescente no intervalo $(-1, +\infty)$.
- Com relação a (IV), podemos dizer que $h(x) < g(x) \leq f(x)$ para $1 < x \leq 2$.
- A função em (I) é injetora.
- Em (II) $f(0) = 0$ e $f(-1) = -\frac{1}{2}$.
- Em (III) a função é negativa para $x < -1$ e positiva para $x > -1$.

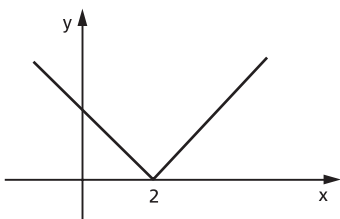
470. Com relação ao gráfico de uma função $y = f(x)$, representado abaixo, pode-se afirmar que:



- a) o domínio da função é o conjunto dos números reais;
- b) a imagem da função é o conjunto dos números reais;
- c) a função é crescente no intervalo $(-\infty, 0]$;
- d) a função é injetora em todo o seu domínio;
- e) $f(1) = 0$ e $f(5) < 0$;
- f) $f\left(\frac{1}{2}\right) < 1$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) < 1$;
- g) sabendo que no intervalo $[0, 3]$ a curva representa um arco de parábola, podemos concluir que a equação dessa parábola é $y = x^2 - 2x + 1$;
- h) a semirreta correspondente a $x \leq 0$ tem inclinação -1 .

471. Sendo a função real $f(x) = |x - 2| + |x|$, pode-se afirmar:

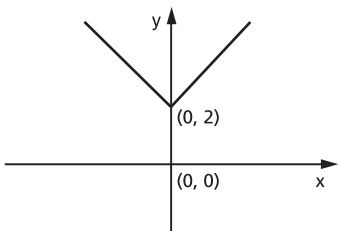
- a) o gráfico da função é:



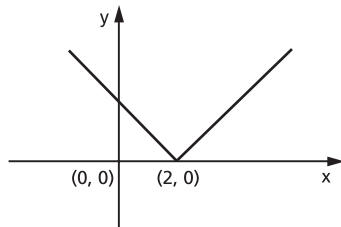
- b) a função cresce no intervalo $[2, +\infty[$;
- c) $f(x) = 2x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$;
- d) o conjunto imagem da função é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$;
- e) a função não é injetora;
- f) o conjunto domínio da função é \mathbb{R} .

472. Considere a função definida por $y = f(x) = 2 - |x|, x \in \mathbb{R}$. Indique por V as proposições verdadeiras e F as proposições falsas:

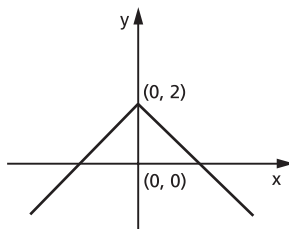
- a) f é sobrejetiva.
- b) f não é injetiva.
- c) A função pode ser representada pelo gráfico:



d) A função pode ser representada pelo gráfico:



e) A função pode ser representada pelo gráfico:

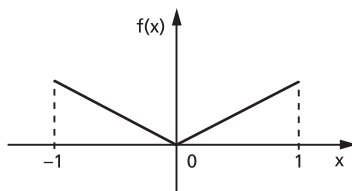


473. A função $f: A \rightarrow B$ é dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

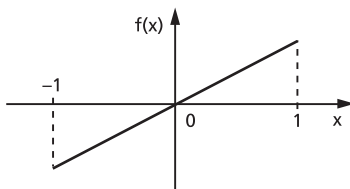
- Determine o domínio de f , isto é, $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que existe } f(x)\}$.
- Determine a imagem de f , isto é, $B = f(A)$.
- A função f é injetora? Por quê?
- Trace o gráfico da função f .

474. Existem funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a propriedade (I) $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assinale com V as proposições verdadeiras e F as proposições falsas:

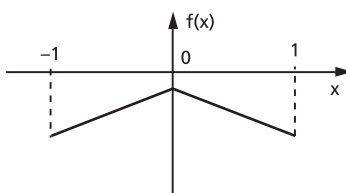
- Se uma função f verifica (I), então f é injetora.
- A condição (I) é válida para a função $f(x) = 3x^5$, $x \in \mathbb{R}$.
- O gráfico abaixo representa, no intervalo $[-1, 1]$, uma função que verifica (I).



- d) O gráfico abaixo representa, no intervalo $[-1, 1]$, uma função para a qual vale (I).



- e) O gráfico abaixo representa uma função que satisfaz a propriedade (I).



475. Faça o que se pede em cada item.

- Defina função bijetora.
- Demonstre que f , definida no intervalo $0 < x < s$ ($s > 0$) do seguinte modo:

$$f(x) = \frac{2x - s}{x(s - x)}, \text{ é uma função bijetora desse intervalo nos reais.}$$

476. Sejam \mathbb{N} o conjunto dos números naturais e $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função que satisfaz as propriedades:

- dado qualquer $m \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geq m$;
- $A_r = \{s \in \mathbb{N}; s \leq f(r)\}$ está contido no conjunto imagem de f , para todo $r \in \mathbb{N}$.

Mostre que f é sobrejetora.

477. Sejam as funções: f de A em B , definida por $y = f(x)$; identidade em A , anotada por I_A , de A em A e definida por $I_A(x) = x$; identidade em B , anotada por I_B , de B em B e definida por $I_B(x) = x$. Prove que:

$$f \circ I_A = f \quad \text{e} \quad I_B \circ f = f$$

478. As funções I_A e I_B do exercício anterior são iguais? Justifique.

479. Os conjuntos A e B têm, respectivamente, m e n elementos. Considera-se uma função $f: A \rightarrow B$. Qual a condição sobre m e n para que f possa ser injetora? E para f ser sobrejetora? E bijetora?

- 480.** Quantas são as injeções de $A = \{a, b\}$ em $B = \{c, d, e, f\}$?
- 481.** Quantas são as sobrejeções de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{d, e\}$?
- 482.** Mostre com um exemplo que a composta de uma injeção com uma sobrejeção pode não ser nem injetora nem sobrejetora.
- 483.** Sejam f e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que:
- $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora. Prove que f é injetora.
 - $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetora. Prove que g é sobrejetora.

V. Função inversa

146. Exemplo preliminar

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, consideremos a função f de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.

Notemos que a função f é bijetora formada pelos pares ordenados

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$$

em que $D(f) = A$ e $\text{Im}(f) = B$.

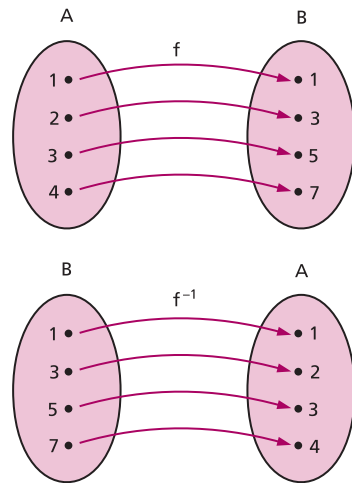
A relação $f^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f\}$, inversa de f , é também uma função, pois f é uma bijeção de A em B , isto é, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$.

A função f^{-1} é formada pelos pares ordenados $f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$ em que $D(f^{-1}) = B$ e $\text{Im}(f^{-1}) = A$.

Observemos que a função f é definida pela sentença $y = 2x - 1$, e f^{-1} é definida pela sentença $x = \frac{y + 1}{2}$, isto é:

1º) f leva cada elemento $x \in A$ até o $y \in B$ tal que $y = 2x - 1$;

2º) f^{-1} leva cada elemento $y \in B$ até o $x \in A$ tal que $x = \frac{y + 1}{2}$.



147. Teorema

Seja $f: A \rightarrow B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.

Demonstração:

1ª parte: Se f^{-1} é uma função de B em A , então f é bijetora.

a) Para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$, ou, ainda, $(x, y) \in f$. Assim, f é sobrejetora.

b) Dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, se tivermos $f(x_1) = f(x_2) = y$ resultará $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$, o que é absurdo, pois y só tem uma imagem em f^{-1} . Assim, $f(x_1) \neq f(x_2)$ e f é injetora.

2ª parte: Se f é bijetora, então f^{-1} é uma função de B em A .

a) Como f é sobrejetora, para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto, $(y, x) \in f^{-1}$.

b) Se $y \in B$, para duas imagens x_1 e x_2 em f^{-1} , vem:

$$(y, x_1) \in f^{-1} \quad \text{e} \quad (y, x_2) \in f^{-1}$$

portanto:

$$(x_1, y) \in f \quad \text{e} \quad (x_2, y) \in f$$

Como f é injetora, resulta $x_1 = x_2$.

148. Definição

Se f é uma função bijetora de A em B , a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos **função inversa** de f e indicamos por f^{-1} .

Observações:

1ª) Os pares ordenados que formam f^{-1} podem ser obtidos dos pares ordenados de f , permutando-se os elementos de cada par, isto é:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

2ª) Pela observação anterior, temos:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

Agora, se considerarmos a função inversa de f^{-1} , teremos:

$$(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in (f^{-1})^{-1}$$

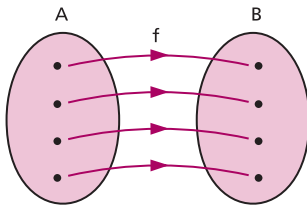
isto é, a inversa de f^{-1} é a própria função f :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Podemos assim afirmar que f e f^{-1} são **inversas entre si**, ou melhor, **uma é inversa da outra**.

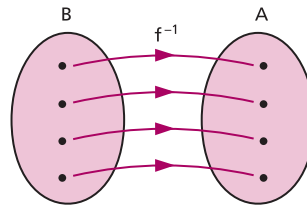
3ª) O domínio da função f^{-1} é B , que é a imagem da função f .

A imagem da função f^{-1} é A , que é o domínio da função f .



$$D(f^{-1}) = B = \text{Im}(f)$$

e



$$\text{Im}(f^{-1}) = A = D(f)$$

149. Determinação da função inversa

Vimos no exemplo preliminar que, se a função f é definida pela sentença aberta $y = 2x - 1$, então a função inversa f^{-1} é definida pela sentença $x = \frac{y + 1}{2}$.

Observemos, por exemplo, que $x = 2$ e $y = 3$ satisfazem a condição $y = 2x - 1$ e também $x = \frac{y + 1}{2}$. Isso não quer dizer que o par ordenado $(2, 3)$ pertença a f e a f^{-1} . De fato:

$$(2, 3) \in f \quad \text{e} \quad (3, 2) \in f^{-1}$$

As sentenças abertas $y = 2x - 1$ e $x = \frac{y + 1}{2}$ não especificam qual ($x?$ ou $y?$) é o primeiro termo do par ordenado.

Ao construirmos o gráfico cartesiano da função f , colocamos x em abscissas e y em ordenadas, isto é:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

Ao representarmos no mesmo plano cartesiano o gráfico de f^{-1} , como o conjunto

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid x = \frac{y + 1}{2}\}$$

devemos ter y em abscissa e x em ordenada.

A fim de que possamos convencionar que:

1º) dada uma sentença aberta que define uma função, x representa sempre o primeiro termo dos pares ordenados e;

2º) dois gráficos de funções distintas podem ser construídos no mesmo plano cartesiano com x em abscissas e y em ordenadas;

justifica-se a regra prática seguinte.

Regra prática

Dada a função bijetora f de A em B , definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1} , procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x , obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Exemplos:

1º) Qual é a função inversa da função f , bijetora em \mathbb{R} , definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutamos as variáveis: $x = 3y + 2$

II) expressamos y em função de x :

$$x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{x - 2}{3}$$

Resposta: É a função f^{-1} em \mathbb{R} definida por $f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$.

2º) Qual é a função inversa da função f , bijetora em \mathbb{R} , definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática, temos: $x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$.

Resposta: É a função f^{-1} em \mathbb{R} definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

150. Propriedade dos gráficos de f e f^{-1}

Os gráficos cartesianos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano.

Observemos inicialmente que, se $(a, b) \in f$, então $(b, a) \in f^{-1}$.

Para provarmos que os pontos $P(a, b)$ e $Q(b, a)$ são simétricos em relação à reta r de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes 1 e 3), devemos provar que a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta r e que as distâncias dos pontos P e Q à reta r são iguais.

O ponto M , médio do segmento \overline{PQ} , tem coordenadas $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, portanto M pertence à reta r . Como M é ponto médio do segmento \overline{PQ} , isto é, $MP = MQ$, $M \in r$, está então provado que os pontos P e Q equidistam da reta r .

Para provarmos que a reta \overleftrightarrow{PQ} é perpendicular à reta r , consideremos o ponto $R(c, c)$ da reta r , distinto de M , e provemos que o triângulo PMR é retângulo em M .

Calculando a medida dos lados do triângulo PMR , encontramos:

$$PM^2 = \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$MR^2 = \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 = 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2$$

$$PR^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2$$

e observemos que:

$$\begin{aligned} PM^2 + MR^2 &= 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} - \\ &- 2(a+b) \cdot c + 2c^2 = a^2 + b^2 - 2ac - 2bc + 2c^2 = (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = \\ &= (a - c)^2 + (b - c)^2 = PR^2 \end{aligned}$$

Exemplos:

Vamos construir no mesmo diagrama os gráficos de duas funções inversas entre si:

$$1^\circ) \quad f(x) = 2x - 4 \quad \text{e} \quad f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{2}$$

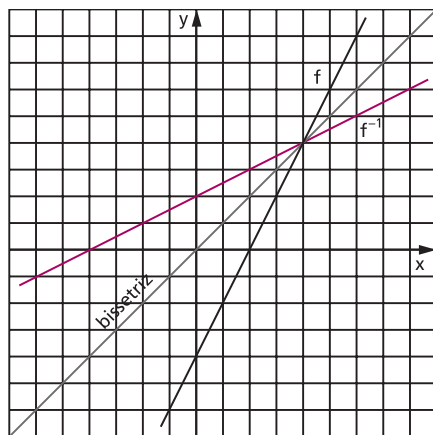
$$2^\circ) \quad f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$3^\circ) \quad f(x) = x^3 \quad \text{e} \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

1º) $y = 2x - 4$ $y = \frac{x + 4}{2}$

| x | y |
|----|-----|
| -4 | -12 |
| -3 | -10 |
| -2 | -8 |
| -1 | -6 |
| 0 | -4 |
| 1 | -2 |
| 2 | 0 |
| 3 | 2 |
| 4 | 4 |

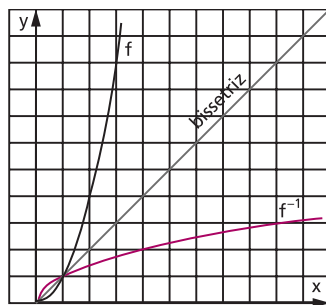
| x | y |
|-----|----|
| -12 | -4 |
| -10 | -3 |
| -8 | -2 |
| -6 | -1 |
| -4 | 0 |
| -2 | 1 |
| 0 | 2 |
| 2 | 3 |
| 4 | 4 |



2º) $y = x^2$ $y = \sqrt{x}$

| x | y |
|---|----|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 6 | 36 |

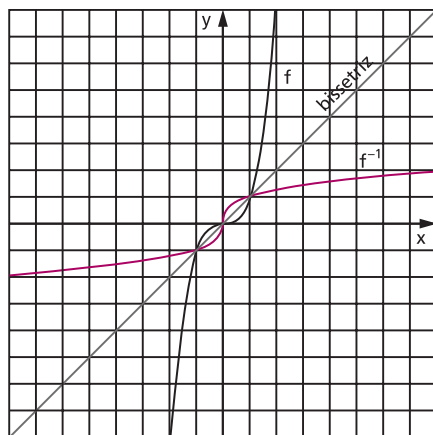
| x | y |
|----|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 4 | 2 |
| 9 | 3 |
| 16 | 4 |
| 25 | 5 |
| 36 | 6 |



3º) $y = x^3$ $y = \sqrt[3]{x}$

| x | y |
|----|-----|
| -3 | -27 |
| -2 | -8 |
| -1 | -1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |
| 3 | 27 |

| x | y |
|-----|----|
| -27 | -3 |
| -8 | -2 |
| -1 | -1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 8 | 2 |
| 27 | 3 |



151. A composta de funções inversas entre si**Teorema**

Seja f uma função bijetora de A em B . Se f^{-1} é a função inversa de f , então:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

Demonstração:

$$\forall x \in A, (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

$$\forall y \in B, (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

152. A inversa da composta**Teorema**

Se as funções f de A em B e g de B em C são bijetoras, então:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Demonstração:

Observemos inicialmente: se as funções f de A em B e g de B em C são bijetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é bijetora; logo, existe a função inversa $(g \circ f)^{-1}$ de C em A .

Queremos provar que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$; então basta provar que:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_A \quad \text{e} \quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_C$$

Notemos que:

$$f^{-1} \circ f = I_A, \quad f \circ f^{-1} = I_B, \quad g^{-1} \circ g = I_B \quad \text{e} \quad g \circ g^{-1} = I_C$$

Então:

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= [(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g] \circ f = [f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)] \circ f = [f^{-1} \circ I_B] \circ f = f^{-1} \circ f = I_A \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= [(g \circ f) \circ f^{-1}] \circ g^{-1} = [g \circ (f \circ f^{-1})] \circ g^{-1} = (g \circ I_B) \circ g^{-1} = \\ &= g \circ g^{-1} = I_C \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

484. Prove que cada função abaixo é bijetora e determine sua inversa:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 5$

b) $g: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $g(x) = \frac{x + 1}{x - 4}$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^5$

485. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 1|$.

Calcule a soma dos números associados à(s) alternativa(s) correta(s).

01) A função f não é sobrejetiva.

02) A função f é injetiva.

04) A função f possui uma inversa.

08) $f(x) \leq 1$ se, e somente se, $0 \leq x \leq 2$.

16) f é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$.

32) f é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(-x)$.

64) f é uma função periódica de período 1.

486. Nas funções bijetoras abaixo, de \mathbb{R} em \mathbb{R} , obtenha a lei de correspondência que define a função inversa.

a) $f(x) = 2x + 3$

e) $q(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

b) $g(x) = \frac{4x - 1}{3}$

f) $r(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

c) $h(x) = x^3 + 2$

g) $s(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

d) $p(x) = (x - 1)^3 + 2$

487. O gráfico de uma função f é o segmento de reta que une os pontos $(-3, 4)$ e $(3, 0)$. Se f^{-1} é a função de f , determine $f^{-1}(2)$.

488. Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, bijetora, definida por $f(x) = x^3 + 1$, determine sua inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

489. A função f em \mathbb{R} , definida por $f(x) = x^2$, admite função inversa? Justifique.

490. Julgue os itens abaixo.

a) Sendo $y = f(x)$ uma função real, se $f(x) = x$ para algum x , dizemos que x é um ponto fixo de f .

Com base nessa definição, pode-se concluir que a função $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ possui um único ponto fixo.

- b) Os zeros da função $f(x) = 5^{x^2} - 5^{3x}$ são $x = 0$ e $x = 3$.
- c) O domínio da função real $h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\log x}$ é o conjunto dos números reais com exceção do zero.
- d) Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções injetoras, então a composta $g \circ f: A \rightarrow C$ também é uma função injetora.
- e) Toda função real é inversível.

491. Seja a função f de \mathbb{R}_- em \mathbb{R}_+ , definida por $f(x) = x^2$. Qual é a função inversa de f ?

Solução

A função dada é $f(x) = y = x^2$, com $x \leq 0$ e $y \geq 0$.

Aplicando a regra prática, temos:

I) permutando as variáveis:

$$x = y^2 \quad \text{com} \quad y \leq 0 \quad \text{e} \quad x \geq 0$$

II) expressando y em função de x :

$$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{x}$$

Considerando que na função inversa f^{-1} devemos ter $y \leq 0$ e $x \geq 0$, a lei de correspondência da função inversa será $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Resposta: É a função f^{-1} de \mathbb{R}_+ em \mathbb{R}_- , definida por $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

492. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

- a) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f(x) = x^2$
- b) $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
 $f(x) = (x - 1)^2$
- c) $f: A \rightarrow \mathbb{R}_-$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
 $f(x) = -(x - 2)^2$
- d) $f: A \rightarrow \mathbb{R}_-$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$
 $f(x) = -(x + 1)^2$
- e) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$
 $f(x) = x^2 + 1$
- f) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$
 $f(x) = 4 - x^2$
- g) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$
 $f(x) = x^2 - 1$

493. Considere a função $f: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = 2 - \frac{2}{\pi}x$.

Esboce o gráfico correspondente e decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas.

- f é crescente.
- f é sobrejetora.
- f possui inversa e $f^{-1}(0) = \pi$.
- f possui inversa e $f^{-1}(0) = 0$.
- f não possui inversa.

494. Considerando a função real $f(x) = 3 + 2^{x-1}$ e sendo $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ a sua inversa, pode-se afirmar:

- A imagem de f é A .
- O gráfico de f está acima da reta $y = 4$.
- $g\left(\frac{11}{2}\right) = \log_2 5$.
- Se $f(h(x)) = 3 + 2x$, então $h\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.
- O conjunto solução da inequação $f(2x + 1) < 1 + 3 \cdot 2^x$ é o intervalo $]0, 1[$.
- O gráfico da função g intercepta o eixo Ox no ponto $(1, 0)$.

495. Seja a função bijetora f , de $\mathbb{R} - \{2\}$ em $\mathbb{R} - \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Qual é a função inversa de f ?

Solução

A função dada é $f(x) = y = \frac{x+1}{x-2}$, com $x \neq 2$ e $y \neq 1$.

Aplicando a regra prática, temos:

$$\begin{aligned} x = \frac{y+1}{y-2} &\Rightarrow xy - 2x = y + 1 \Rightarrow xy - y = 2x + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(x-1) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1} \end{aligned}$$

Resposta: É a função f^{-1} , de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R} - \{2\}$, definida por

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

496. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

- | | |
|---|---|
| a) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ $f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}$ | d) $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$ $f(x) = \frac{5x + 2}{3x - 1}$ |
| b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$ | e) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{4\}$ $f(x) = \frac{4x + 2}{x}$ |
| c) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$ $f(x) = \frac{4 - x}{x - 3}$ | f) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 3}$ |

497. Sendo f e g funções reais definidas pelas sentenças $f(x) = 3^x - 1$ e $g(x) = \log_4(x - 1)$, determine $(f \circ g^{-1})(0)$.

498. A função f definida em $\mathbb{R} - \{2\}$ por $f(x) = \frac{2 + x}{2 - x}$ é inversível. O seu contradomínio é $\mathbb{R} - \{a\}$. Calcule a .

499. Seja a função f de $\mathbb{R} - \{-2\}$ em $\mathbb{R} - \{4\}$ definida por $f(x) = \frac{4x - 3}{x + 2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com imagem 5?

Solução

Queremos determinar $a \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $f^{-1}(a) = 5$; para isso, basta determinar a tal que $f(5) = a$:

$$a = f(5) = \frac{4 \cdot 5 - 3}{5 + 2} = \frac{17}{7} \Rightarrow a = \frac{17}{7}$$

500. Seja a função f de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com imagem 3?

501. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$ e a função f de A em B definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Obtenha a função inversa de f .

Solução

A função dada é $f(x) = y = x^2 - 2x + 3$, com $x \geq 1$ e $y \geq 2$.

Aplicando a regra prática, temos:

l) permutando as variáveis:

$$x = y^2 - 2y + 3 \quad \text{com} \quad y \geq 1 \quad \text{e} \quad x \geq 2$$

II) expressando y em função de x :

$$\begin{aligned}x &= y^2 - 2y + 3 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 1 + 3 - 1 \Rightarrow x = (y - 1)^2 + 2 \Rightarrow \\(y - 1)^2 &= x - 2 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x - 2} \text{ ou} \\y - 1 &= -\sqrt{x - 2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x - 2} \text{ ou } y = 1 - \sqrt{x - 2}\end{aligned}$$

Considerando que na função inversa f^{-1} devemos ter $y \geq 1$ e $x \geq 2$, a sentença que define a função inversa é $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$.

Resposta: $f^{-1}: B \rightarrow A$

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$$

502. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2 - 2x$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2 + 2x + 2$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\right\}$ e $B = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{4}\right\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 9\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = -x^2 + 4x + 5$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = -x^2 - 2x + 4$

g) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{4}\right\}$ e $B = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{8}\right\}$

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

503. Seja a função bijetora de \mathbb{R} em \mathbb{R} definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.
Determine f^{-1} .

Solução

Notemos que:

1º) se $x \geq 0$, então $f(x) = y = x^2 - 1$; logo, $y \geq -1$.

2º) se $x < 0$, então $f(x) = y = x - 1$; logo, $y < -1$.

A função proposta é:

$y = x^2 - 1$, com $x \geq 0$ e $y \geq -1$, ou $y = x - 1$, com $x < 0$ e $y < -1$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis, temos:

$x = y^2 - 1$, com $y \geq 0$ e $x \geq -1$, ou $x = y - 1$, com $y < 0$ e $x < -1$.

II) expressando y em função de x , temos:

$y = \sqrt{x + 1}$, com $y \geq 0$ e $x \geq -1$, ou $y = x + 1$, com $y < 0$ e $x < -1$.

Logo, a função inversa f^{-1} é de \mathbb{R} em \mathbb{R} e definida por:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 1} & \text{se } x \geq -1 \\ x + 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

504. Nas seguintes funções em \mathbb{R} , determine a função inversa.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \geq 2 \\ 3x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 5 - 3x & \text{se } x \geq -1 \\ 4 - 4x & \text{se } x < -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{se } x < -1 \\ 4x + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geq 3 \\ (3 - x)^3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{se } x \geq 2 \\ 2x - 1 & \text{se } -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

505. A função f em \mathbb{R} , definida por $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$, admite função inversa?

506. Seja a função f em \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x + |x + 1| - |2x - 4|$. Determine a função inversa de f . Calcule $f^{-1}(42)$.

507. Seja a função f em \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x - 3$. Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} .

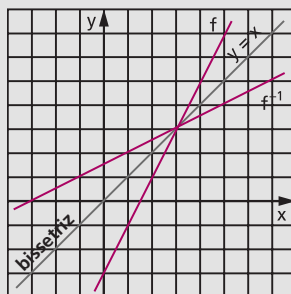
Solução

$$f(x) = 2x - 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$$

| x | y |
|----|----|
| -1 | -5 |
| 0 | -3 |
| 1 | -1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |

| x | y |
|----|----|
| -5 | -1 |
| -3 | 0 |
| -1 | 1 |
| 1 | 2 |
| 3 | 3 |
| 5 | 4 |



508. Nas funções que seguem, construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x + 1$$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x + 4}{3}$$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 - x^3$$

d) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

$$f(x) = 1 - x^2$$

e) $f: A \rightarrow A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

$$f(x) = x^2 + 2x$$

f) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

g) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \frac{x - 1}{x}$$

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$f(x) = 2^x$$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

509. Dadas as funções f e g em \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$, determine a função inversa de $g \circ f$.

Solução

1º processo

Determinamos inicialmente $g \circ f$ e em seguida $(g \circ f)^{-1}$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 5 = 2(3x - 2) + 5 = 6x + 1$$

Aplicando a regra prática, temos: $x = 6y + 1 \Rightarrow y = \frac{x - 1}{6}$;

portanto, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 1}{6}$.

2º processo

Determinamos inicialmente f^{-1} e g^{-1} e em seguida $f^{-1} \circ g^{-1}$, pois $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Aplicando a regra prática em $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$, temos:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} \quad \text{e} \quad g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{g^{-1}(x)+2}{3} = \frac{\frac{x-5}{2}+2}{3} = \frac{x-1}{6}$$

portanto, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$.

Resposta: $(g \circ f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$$

510. Dadas as funções f e g , determine a função inversa de $g \circ f$:

- | | | |
|--|---|---|
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 4x + 1$ | e | $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 3x - 5$ |
| b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ | e | $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 2x + 3$ |
| c) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^2$ | e | $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$ $g(x) = 4 - x$ |
| d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{9}{4}\right\}$ $f: A \rightarrow B$ $f(x) = x^2 - 3x$ | e | $g: B \rightarrow \mathbb{R}_+$ $g(x) = 4x + 9$ |
| e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^2 - 1$ | e | $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ $g(x) = \sqrt{x+4}$ |

511. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e as funções f de A em B , definida por $f(x) = x^2 + 4x$, e g de B em C , definida por $g(x) = x^2 - 1$. Responda: existe $(g \circ f)^{-1}$? Justifique a resposta.

512. Sejam os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2}\right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e as funções: f de A em \mathbb{R}_- , definida por $f(x) = 2x - 1$, g de \mathbb{R}_- em \mathbb{R}_+ , definida por $g(x) = x^2$, e h de \mathbb{R}_+ em B , definida por $h(x) = 4x - 1$. Determine a função inversa de $h \circ (g \circ f)$.

GELSON IEZZI

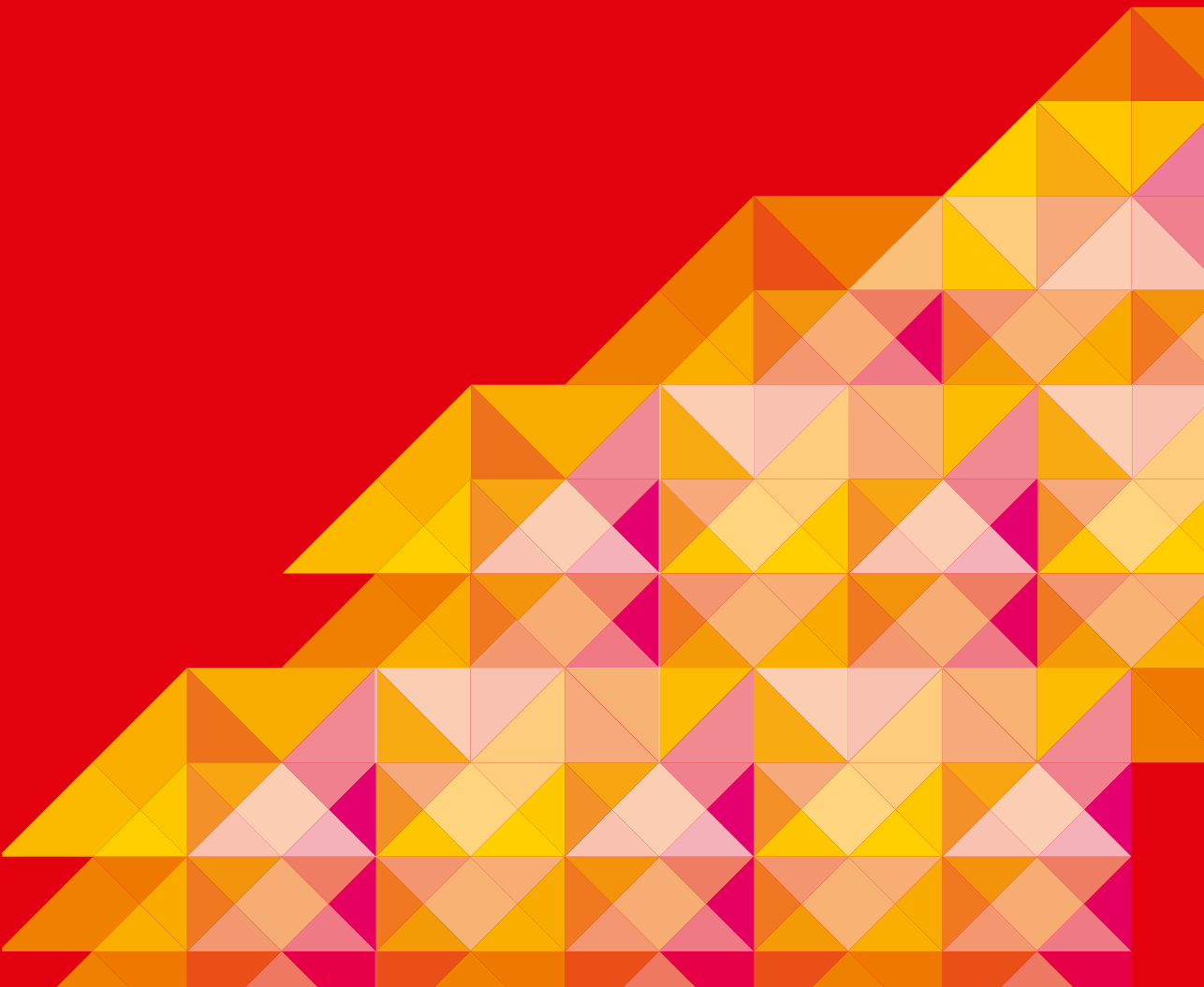
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Trigonometria

3

3ª PARTE

Funções trigonométricas



CAPÍTULO VIII

Funções circulares

I. Noções básicas

93. Dados dois conjuntos A e B , chama-se **relação binária** de A em B todo subconjunto R de $A \times B$.

$$R \text{ é relação binária de } A \text{ em } B \Leftrightarrow R \subset A \times B.$$

94. Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de **aplicação de A em B** ou **função em A com imagens em B** se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists | y \in B | (x, y) \in f)$$

95. Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Então:

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$$

Isso significa que, dados os conjuntos A e B , a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

96. Para definirmos uma função f , definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações:

$$\begin{array}{ccc} f : A \longrightarrow B & \text{ou} & A \xrightarrow{f} B \\ x \longmapsto f(x) & & x \longmapsto f(x) \end{array}$$

97. Chamamos de **domínio** o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, então $D = A$.

98. Chamamos de **imagem** o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Portanto, $Im \subset B$.

II. Funções periódicas

99. Exemplo preliminar

Dado o número real x , sempre existem dois números inteiros consecutivos n e $n + 1$ tais que $n \leq x < n + 1$. Consideremos a função f que associa a cada real x o real $x - n$, em que n é o maior número inteiro que não supera x . Temos, por exemplo:

$$\begin{array}{lll} f(0,1) = 0,1; & f(1,1) = 1,1 - 1 = 0,1; & f(2,1) = 2,1 - 2 = 0,1; \\ f(3) = 3 - 3 = 0; & f(-5) = (-5) - (-5) = 0; & f(7) = 7 - 7 = 0. \end{array}$$

De modo geral, temos:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x - 0 = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = x - 2$$

etc.

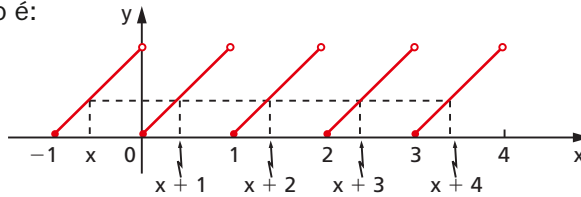
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow f(x) = x - (-2) = x + 2$$

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow f(x) = x - (-3) = x + 3$$

etc.

Seu gráfico é:



Temos:

$$f(x) = f(x + 1) = f(x + 2) = f(x + 3) = f(x + 4) = \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

portanto existem infinitos números p inteiros tais que $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

100. O menor número $p > 0$ que satisfaz a igualdade $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ é o número $p = 1$, denominado **período da função f** . A função f é chamada **função periódica** porque foi possível encontrar um número $p > 0$ tal que, dando acréscimos iguais a p em x , o valor calculado para f não se altera, isto é, o valor de f se repete periodicamente para cada acréscimo de p à variável.

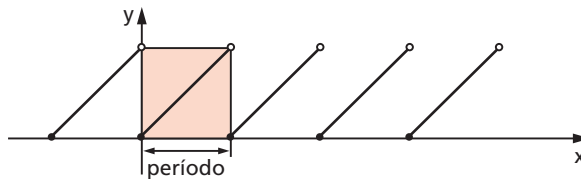
101. Definição

Uma função $f: A \rightarrow B$ é **periódica** se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição

$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in A$$

O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado **período de f** .

102. O gráfico da função periódica se caracteriza por apresentar um elemento de curva que se repete, isto é, se quisermos desenhar toda a curva bastará construirmos um “carimbo” onde esteja desenhado o tal elemento de curva e ir carimbando. Período é o comprimento do carimbo (medido no eixo dos x).



III. Ciclo trigonométrico

103. Definição

Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal uOv . Consideremos a circunferência λ de centro O e raio $r = 1$. Notemos que o comprimento dessa circunferência é 2π , pois $r = 1$.

Vamos agora definir uma aplicação de \mathbb{R} sobre λ , isto é, vamos associar a cada número real x um único ponto P da circunferência λ do seguinte modo:

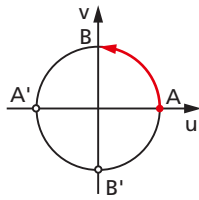
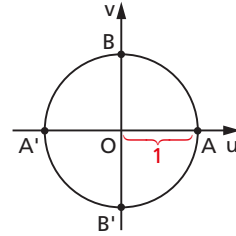
1º) se $x = 0$, então P coincide com A ;

2º) se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x , no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso;

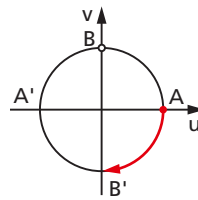
3º) se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é P .

A circunferência λ acima definida, com origem em A , é chamada **ciclo** ou **circunferência trigonométrica**.

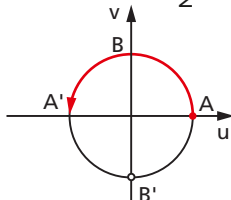
Se o ponto P está associado ao número x , dizemos que P é a imagem de x no ciclo. Assim, por exemplo, temos:



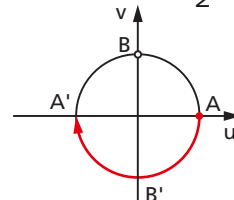
a imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B



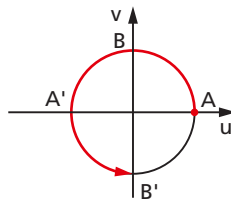
a imagem de $-\frac{\pi}{2}$ é B'



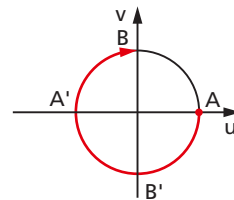
a imagem de π é A'



a imagem de $-\pi$ é A'



a imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B'



a imagem de $-\frac{3\pi}{2}$ é B

104. Notemos que, se P é a imagem do número x_0 , então P também é a imagem dos números:

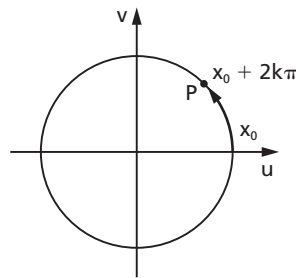
$$x_0, x_0 + 2\pi, x_0 + 4\pi, x_0 + 6\pi, \text{ etc.}$$

e também de:

$$x_0 - 2\pi, x_0 - 4\pi, x_0 - 6\pi, \text{ etc.}$$

105. Em resumo, P é a imagem dos elementos do conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



106. Dois números reais $x_1 = x_0 + 2k_1\pi$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$) e $x_2 = x_0 + 2k_2\pi$ ($k_2 \in \mathbb{Z}$) que têm a mesma imagem P no ciclo são tais que $x_1 - x_2 = 2k\pi$ (em que $k = k_1 - k_2$) e, por isso, diz-se que x_1 e x_2 são **côngruos módulo 2π** ou, simplesmente, x_1 e x_2 são **côngruos**.

107. Os eixos u e v dividem a circunferência em quatro arcos: \widehat{AB} , $\widehat{BA'}$, $\widehat{A'B'}$ e $\widehat{B'A}$. Dado um número real x , usamos a seguinte linguagem para efeito de localizar a imagem P de x no ciclo:

$$x \text{ está no } 1^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow P \in \widehat{AB} \Leftrightarrow 0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x \text{ está no } 2^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow P \in \widehat{BA'} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

$$x \text{ está no } 3^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow P \in \widehat{A'B'} \Leftrightarrow \pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x \text{ está no } 4^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow P \in \widehat{B'A} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

EXERCÍCIOS

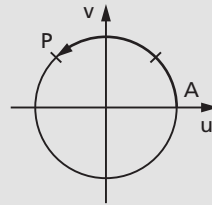
123. Indique no ciclo a imagem de cada um dos seguintes números:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $-\frac{5\pi}{4}$ c) 11π d) -3π e) $\frac{25\pi}{3}$ f) $-\frac{19\pi}{6}$

Solução

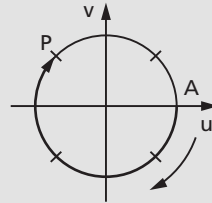
a) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{8} \cdot 2\pi$

Marcamos, a partir de A, um percurso \widehat{AP} igual a $\frac{3}{8}$ do ciclo, no sentido anti-horário.



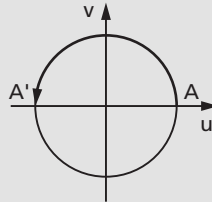
b) $-\frac{5\pi}{4} = -\frac{5}{8} \cdot 2\pi$

Marcamos, a partir de A, um percurso \widehat{AP} igual a $\frac{5}{8}$ do ciclo, no sentido horário.



c) $11\pi = \pi + 10\pi$

Como $11\pi - \pi$ é múltiplo de 2π , então 11π e π têm a mesma imagem (A').

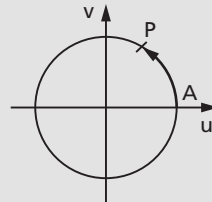


d) $-3\pi = \pi - 4\pi$

Como $(-3\pi) - \pi$ é múltiplo de 2π , então -3π e π têm a mesma imagem (A').

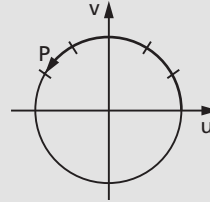
e) $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi$

Assim, $\frac{25\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$ têm a mesma imagem P que é obtida marcando um percurso \widehat{AP} igual a $\frac{1}{6}$ do ciclo, no sentido anti-horário.



f) $-\frac{19\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - \frac{24\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 4\pi$

Assim, $-\frac{19\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ têm a mesma imagem. Como $\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{12} \cdot 2\pi$, a imagem procurada é a extremidade do percurso \widehat{AP} igual a $\frac{5}{12}$ do ciclo medido no sentido anti-horário.



124. Indique no ciclo as imagens dos seguintes números reais: $\frac{\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{7\pi}{8}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{15\pi}{2}, \frac{17\pi}{4}$ e $-\frac{31\pi}{4}$.

125. Represente, no ciclo, as imagens dos seguintes conjuntos de números:

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Solução

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ (imagem: B)}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \text{ (imagem: B')}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \text{ (repetição: B)}$$

O conjunto E tem como imagem os pontos B e B' do ciclo.

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (imagem: A)}$$

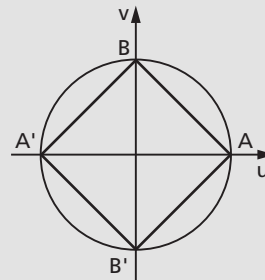
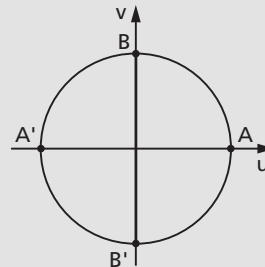
$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ (imagem: B)}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \pi \text{ (imagem: A')}$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \text{ (imagem: B')}$$

$$k = 4 \Rightarrow x = 2\pi \text{ (repetição: A)}$$

O conjunto F tem como imagem os pontos A, B, A' e B' do ciclo.



126. Represente, no ciclo, as imagens dos seguintes conjuntos de números reais:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$G = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$H = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

127. Qual dos números é o maior? Justifique.

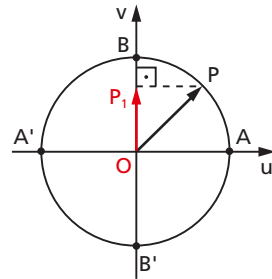
- a) $\sin 830^\circ$ ou $\sin 1195^\circ$
 b) $\cos(-535^\circ)$ ou $\cos 190^\circ$

IV. Função seno

108. Definição

Dado um número real x , seja P sua imagem no ciclo. Denominamos **seno** de x (e indicamos $\sin x$) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv . Denominamos **função seno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OP_1 = \sin x$, isto é:

$$f(x) = \sin x.$$



109. Propriedades

As propriedades da razão trigonométrica seno, já vistas no capítulo IV, item 52, a saber: (a) se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $\sin x$ é positivo; (b) se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então $\sin x$ é negativo; (c) se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $\sin x$ é crescente; (d) se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $\sin x$ é decrescente, são também válidas para a função seno.

Além dessas, temos para a função seno:

1ª) A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ para todo x real.

É imediata a justificação, pois, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a $+1$.

2ª) A função seno é periódica e seu período é 2π .

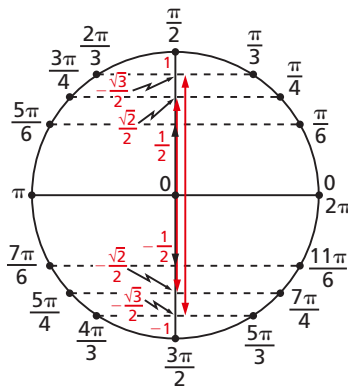
É imediato que, se $\text{sen } x = OP_1$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\text{sen}(x + k \cdot 2\pi) = OP_1$, pois x e $x + k \cdot 2\pi$ têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, para todo x real:

$$\text{sen } x = \text{sen}(x + k \cdot 2\pi)$$

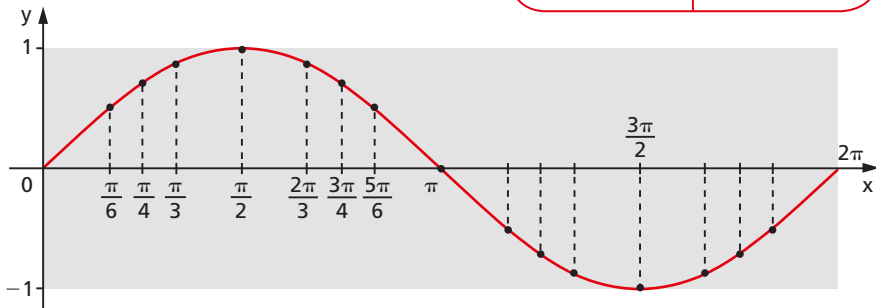
e, portanto, a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, isto é, 2π .

110. Gráfico

Fazendo um diagrama com x em abscissas e $\text{sen } x$ em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado **senoide**, que nos indica como varia a função $f(x) = \text{sen } x$.



| x | $y = \text{sen } x$ |
|------------------|----------------------|
| 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| π | 0 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| 2π | 0 |



Observemos que, como o domínio da função seno é \mathbb{R} , a senoide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são $2\pi \times 2$, isto é, aproximadamente $6,28 \times 2$ e, em escala, $10,5 \times 3,2$.

EXERCÍCIOS

Determine o período e a imagem e faça o gráfico de um período completo das funções dadas nos exercícios 128 a 147.

128. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\text{sen } x$.

Solução

Vamos contruir uma tabela em três etapas:

- 1ª) atribuímos valores a x ;
- 2ª) associamos a cada x o valor de $\text{sen } x$;
- 3ª) multiplicamos $\text{sen } x$ por -1 .

| x | sen x | y |
|------------------|-------|---|
| 0 | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | | |
| π | | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | | |
| 2π | | |

| x | sen x | y |
|------------------|-------|---|
| 0 | 0 | |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | |
| π | 0 | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | |
| 2π | 0 | |

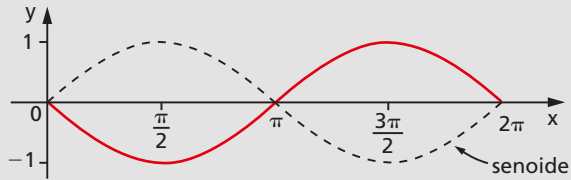
| x | sen x | y |
|------------------|-------|----|
| 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | -1 |
| π | 0 | 0 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | 1 |
| 2π | 0 | 0 |

Com essa tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que é simétrico da senoide em relação ao eixo dos x .

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

$$p(f) = 2\pi$$



129. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$.

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

- 1ª) atribuímos valores a x ;
- 2ª) associamos a cada x o valor de $\text{sen } x$;
- 3ª) multiplicamos $\text{sen } x$ por 2.

| x | sen x | y |
|------------------|-------|---|
| 0 | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | | |
| π | | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | | |
| 2π | | |

| x | sen x | y |
|------------------|-------|---|
| 0 | 0 | |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | |
| π | 0 | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | |
| 2π | 0 | |

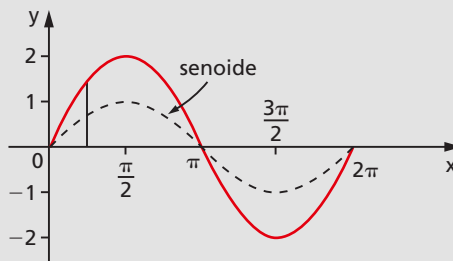
| x | sen x | y |
|------------------|-------|----|
| 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 2 |
| π | 0 | 0 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | -2 |
| 2π | 0 | 0 |

Com essa tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o dobro da ordenada correspondente da senoide.

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-2, 2]$$

$$p(f) = 2\pi$$



130. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 \cdot \text{sen } x$.

131. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\text{sen } x|$.

Solução

Recordemos inicialmente que, para um dado número real a , temos:

$$a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

Aplicando essa definição, temos:

$$\text{sen } x \geq 0 \Rightarrow |\text{sen } x| = \text{sen } x$$

(quando $\text{sen } x \geq 0$, os gráficos $y = |\text{sen } x|$ e $y = \text{sen } x$ coincidem)

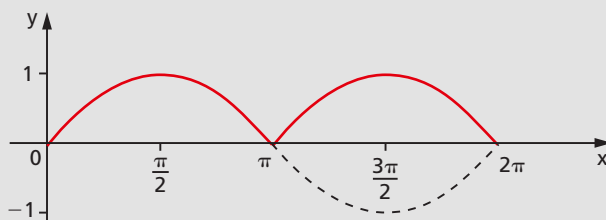
$$\text{sen } x < 0 \Rightarrow |\text{sen } x| = -\text{sen } x$$

(quando $\text{sen } x < 0$, os gráficos $y = |\text{sen } x|$ e $y = \text{sen } x$ são simétricos em relação ao eixo dos x).

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [0, 1]$$

$$p(f) = \pi$$



132. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |3 \cdot \text{sen } x|$.

133. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } 2x$.

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

1ª) atribuímos valores a $t = 2x$;

2ª) associamos a cada $2x$ o correspondente $\text{sen } 2x$;

3ª) calculamos $x \left(x = \frac{t}{2} \right)$.

| x | t = 2x | y |
|---|------------------|---|
| | 0 | |
| | $\frac{\pi}{2}$ | |
| | π | |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | |
| | 2π | |

| x | t = 2x | y |
|---|------------------|----|
| | 0 | 0 |
| | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| | π | 0 |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| | 2π | 0 |

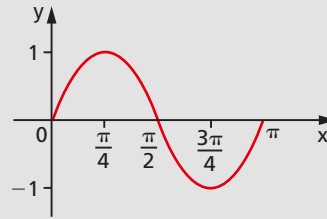
| x | t = 2x | y |
|------------------|------------------|----|
| 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{2}$ | π | 0 |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| π | 2π | 0 |

Com base nessa tabela, podemos obter 5 pontos da curva. Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o seno do dobro de x. Notemos ainda que para sen t completar um período é necessário que t = 2x percorra o intervalo [0, 2π], isto é, x percorra o intervalo [0, π].

Assim, o período de f é:

$$p(f) = \pi - 0 = \pi$$

É imediato que: Im(f) = [-1, 1]



134. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$.

Solução

| x | t = $\frac{x}{2}$ | y |
|---|-------------------|---|
| | 0 | |
| | $\frac{\pi}{2}$ | |
| | π | |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | |
| | 2π | |

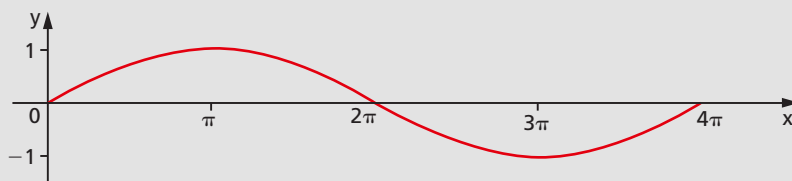
| x | t = $\frac{x}{2}$ | y |
|---|-------------------|----|
| | 0 | 0 |
| | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| | π | 0 |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| | 2π | 0 |

| x | t = $\frac{x}{2}$ | y |
|--------|-------------------|----|
| 0 | 0 | 0 |
| π | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| 2π | π | 0 |
| 3π | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| 4π | 2π | 0 |

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

$$\rho(f) = 4\pi$$



135. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } 3x$.

Solução

| x | t = 3x | y |
|---|------------------|---|
| | 0 | |
| | $\frac{\pi}{2}$ | |
| | π | |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | |
| | 2π | |

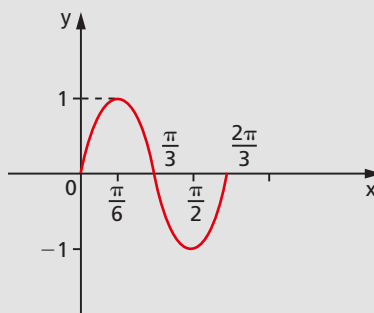
| x | t = 3x | y |
|---|------------------|----|
| | 0 | 0 |
| | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| | π | 0 |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| | 2π | 0 |

| x | t = 3x | y |
|------------------|------------------|----|
| 0 | 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{3}$ | π | 0 |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| $\frac{2\pi}{3}$ | 2π | 0 |

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

$$\rho(f) = \frac{2\pi}{3}$$



136. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\text{sen } \frac{x}{3}$.

137. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 \cdot \text{sen } 4x$.

138. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \text{sen } x$.

Solução

| x | sen x | y |
|------------------|-------|---|
| 0 | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | | |
| π | | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | | |
| 2π | | |

| x | sen x | y |
|------------------|-------|---|
| 0 | 0 | |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | |
| π | 0 | |
| $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | |
| 2π | 0 | |

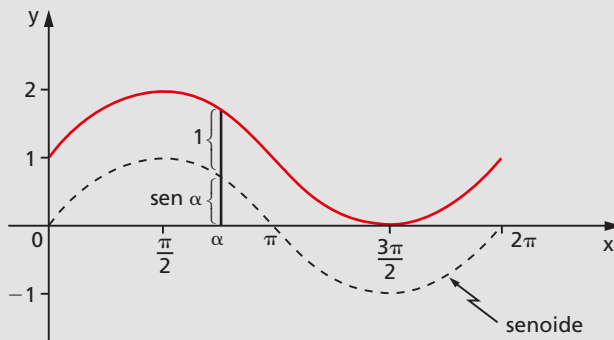
| x | sen x | y |
|------------------|-------|---|
| 0 | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 2 |
| π | 0 | 1 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | -1 | 0 |
| 2π | 0 | 1 |

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é igual ao seno de x mais uma unidade. Se cada seno sofre um acréscimo de 1, então a senoide sofre uma translação de uma unidade "para cima".

É imediato que:

$\text{Im}(f) = [0, 2]$

$p(f) = 2\pi$



139. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 + \text{sen } x$.

140. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen } x$.

141. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - \text{sen } x$.

142. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1 + \text{sen } 2x$.

143. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 3 \cdot \text{sen } \frac{x}{2}$.

144. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Solução

| x | $t = x - \frac{\pi}{4}$ | y |
|---|-------------------------|---|
| | 0 | |
| | $\frac{\pi}{2}$ | |
| | π | |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | |
| | 2π | |

| x | $t = x - \frac{\pi}{4}$ | y |
|---|-------------------------|----|
| | 0 | 0 |
| | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| | π | 0 |
| | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| | 2π | 0 |

| x | $t = x - \frac{\pi}{4}$ | y |
|------------------|-------------------------|----|
| $\frac{\pi}{4}$ | 0 | 0 |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| $\frac{5\pi}{4}$ | π | 0 |
| $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | -1 |
| $\frac{9\pi}{4}$ | 2π | 0 |

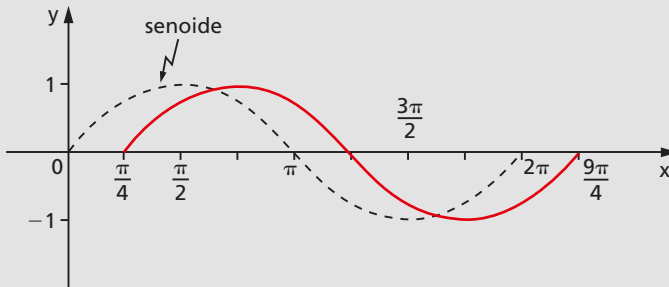
Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o seno de $x - \frac{\pi}{4}$. Notemos que para $\text{sen } t$ completar um período é necessário que $t = x - \frac{\pi}{4}$ percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, x percorra o intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right]$.

Assim, o período de f é:

$$p(f) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

É imediato que:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$



145. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

146. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

147. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

148. Sendo a, b, c, d números reais e positivos, determine imagem e período da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$.

Solução

Façamos $cx + d = t$. Quando x percorre \mathbb{R} , t percorre \mathbb{R} (pois a função afim $t = cx + d$ é sobrejetora) e, em consequência, $\text{sen } t$ percorre o intervalo $[-1, 1]$, $b \cdot \text{sen } t$ percorre o intervalo $[-b, b]$ e $y = a + b \cdot \text{sen } t$ percorre o intervalo $[a - b, a + b]$, que é a imagem de f .

Para que f complete um período é necessário que t varie de 0 a 2π , então:

$$t = 0 \Rightarrow cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$$

$$t = 2\pi \Rightarrow cx + d = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}$$

Portanto:

$$p = \Delta x = \left(\frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}\right) - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}.$$

149. Determine o período da função dada por $y = 3 \operatorname{sen} \left(2\pi x + \frac{\pi}{2} \right)$.

150. Construa o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

151. Para que valores de m existe x tal que $\operatorname{sen} x = 2m - 5$?

Solução

Para que exista x satisfazendo a igualdade acima, devemos ter:

$$-1 \leq 2m - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 2m \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3.$$

152. Em cada caso abaixo, para que valores de m existe x satisfazendo a igualdade:

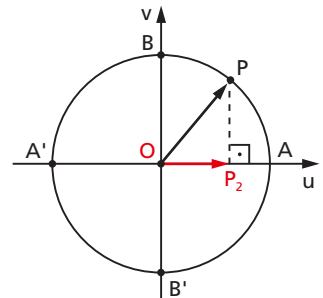
a) $\operatorname{sen} x = 2 - 5m$;

b) $\operatorname{sen} x = \frac{m-1}{m-2}$?

V. Função cosseno

111. Definição

Dado um número real x , seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv . Denominamos **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OP_2 = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.



112. Propriedades

As propriedades da razão trigonométrica cosseno, já vistas no capítulo IV, item 57, a saber: (a) se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo; (b) se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $\cos x$ é negativo; (c) se x percorre o

primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos x$ é decrescente; (d) se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\cos x$ é crescente, são também válidas para a função cosseno.

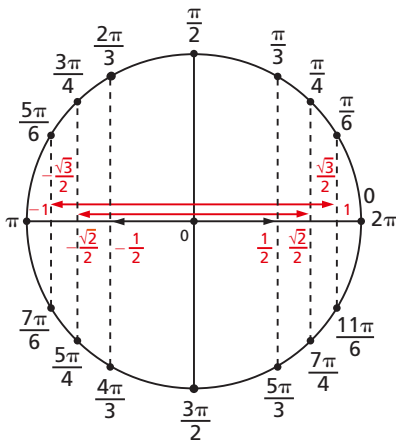
Além dessas, temos para a função cosseno:

1ª) A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real.

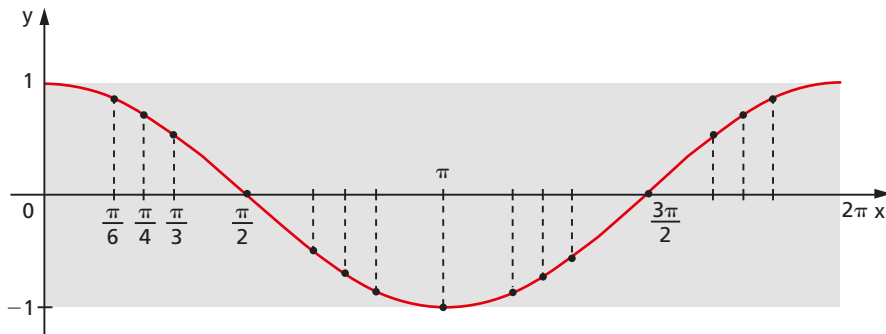
2ª) A função cosseno é periódica e seu período é 2π .

113. Gráfico

Fazendo um diagrama com x em abscissas e $\cos x$ em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado **cossenoide**, que nos indica como varia a função $f(x) = \cos x$.



| x | $y = \cos x$ |
|------------------|----------------------|
| 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0 |
| π | -1 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | 0 |
| 2π | 1 |



Observemos que, como o domínio da função cosseno é \mathbb{R} , a cossenoide continua para a direita de 2π e para a esquerda de zero. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo devem manter a proporção na escala $2\pi \times 2$, isto é, aproximadamente $6,28 \times 2$ (em escala, $10,6 \times 3$).

EXERCÍCIOS

Determine o período e a imagem e faça o gráfico de um período completo das funções dadas nos exercícios 153 a 167.

153. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\cos x$.

154. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \cos x$.

155. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -3 \cdot \cos x$.

156. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\cos x|$.

157. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos 2x$.

158. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

159. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \cos x$.

160. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos 3x$.

161. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

162. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

163. Determine imagem e período da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -1 + 2 \cdot \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right).$$

164. Para que valores de t existe x satisfazendo a igualdade $\cos x = \frac{t+2}{2t-1}$?

165. Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin x + \cos x$.

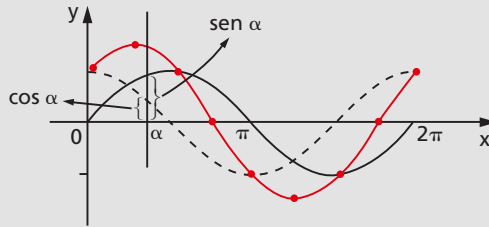
Solução

Notemos que para cada x esta função associa um y que é a soma do seno com o cosseno de x . Vamos, então, colocar num diagrama a senoide e a cossenoide e, para cada x , somemos as ordenadas dos pontos encontrados em cada curva.

Veremos mais adiante que:

$$\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$p(f) = 2\pi$$



166. Esboce o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x - \sin x$.

167. Prove que, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\sin x + \cos x > 1$.

Sugestão: ciclo trigonométrico e desigualdade triangular.

168. Determine o período da função $y = 3 \cos 4x$.

169. Calcule a soma dos 12 primeiros termos da série $\cos \alpha, \cos(\alpha + \pi), \cos(\alpha + 2\pi), \dots$

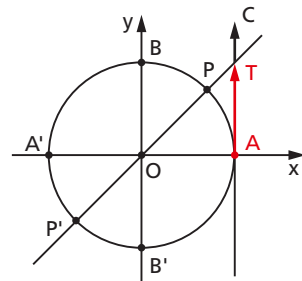
VI. Função tangente

114. Definição

Dado um número real x ,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta \overleftrightarrow{OP} e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (e indicamos $\text{tg } x$) a medida algébrica do segmento \overline{AT} .



Denominamos **função tangente** a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x , $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $AT = \operatorname{tg} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta \vec{OP} fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T , a $\operatorname{tg} x$ não é definida.

115. Propriedades

Além das propriedades já vistas no capítulo IV, item 61, para a razão trigonométrica tangente, ou seja, (a) se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é positiva; (b) se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é negativa; (c) se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\operatorname{tg} x$ é crescente, temos também para a função tangente:

$$1^{\text{a}}) \text{ O domínio da função tangente é } D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

2^a) A imagem da função tangente é \mathbb{R} , isto é, para todo y real existe um x real tal que $\operatorname{tg} x = y$.

De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $AT = y$. Construindo a reta \vec{OT} , observamos que ela intercepta o ciclo em dois pontos, P e P' , imagens dos reais x cuja tangente é y .

3^a) A função tangente é periódica e seu período é π .

De fato, se $\operatorname{tg} x = AT$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\operatorname{tg}(x + k\pi) = AT$, pois x e $x + k\pi$ têm imagens P e P' coincidentes ou diametralmente opostas no ciclo e, assim, $\vec{OP} = \vec{OP}'$, portanto $\vec{OP} \cap c = \vec{OP}' \cap c$.

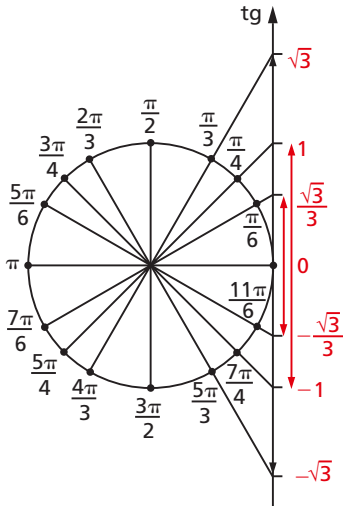
Temos, então, para todo x real e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$$

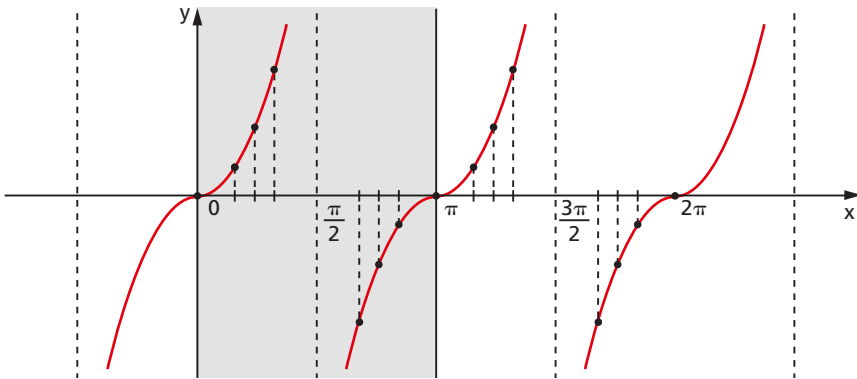
e a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k\pi$, isto é, π .

116. Gráfico

Fazendo um diagrama com x em abscissas e $\operatorname{tg} x$ em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado **tangenteoide**, que nos indica a variação da função $f(x) = \operatorname{tg} x$.



| x | y = tg x |
|------------------|-----------------------|
| 0 | 0 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | \neq |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $-\sqrt{3}$ |
| $\frac{3\pi}{4}$ | -1 |
| $\frac{5\pi}{6}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| π | 0 |
| 2π | 0 |



EXERCÍCIOS

170. Qual é o domínio da função real f tal que $f(x) = \text{tg } 2x$?

Solução

Façamos $2x = t$. Sabemos que existe $\operatorname{tg} t$ se, e somente se, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), então:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ e}$$

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

171. Qual é o domínio das seguintes funções reais?

a) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$

b) $g(x) = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$

172. Para que valores de α existe x tal que $\operatorname{tg} x = \sqrt{\alpha^2 - 5\alpha + 4}$?

173. Esboce o gráfico e dê o domínio e o período da função real $f(x) = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Solução

Façamos $x - \frac{\pi}{4} = t$.

Temos: $\exists \operatorname{tg} t \Rightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

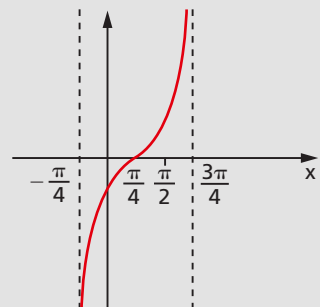
então $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Para $\operatorname{tg} t$ descrever um período completo devemos ter:

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

então $p(f) = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \pi$.

Como a função associa a cada x a $\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, teremos (por analogia com as funções já vistas) um gráfico que é a tangente deslocada de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.



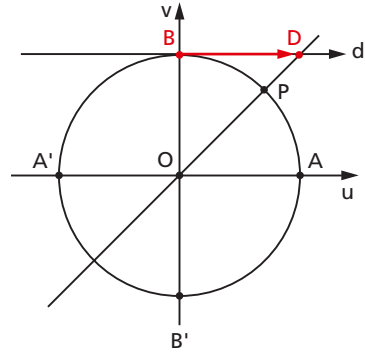
174. Esboce o gráfico e dê o domínio e o período da função real $f(x) = \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$.

VII. Função cotangente

117. Definição

Dado um número real x , $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta \vec{OP} e seja D sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x (e indicamos $\cotg x$) a medida algébrica do segmento \overline{BD} . Denominamos **função cotangente** a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x , $x \neq k\pi$, o real $BD = \cotg x$, isto é, $f(x) = \cotg x$.

Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta \vec{OP} fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D , a $\cotg x$ não é definida.



118. Propriedades

São válidas para a função cotangente as propriedades já vistas no capítulo IV, item 65, para a razão trigonométrica cotangente, a saber: (a) se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\cotg x$ é positiva; (b) se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\cotg x$ é negativa; (c) se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\cotg x$ é decrescente. Além dessas, temos:

1ª) O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

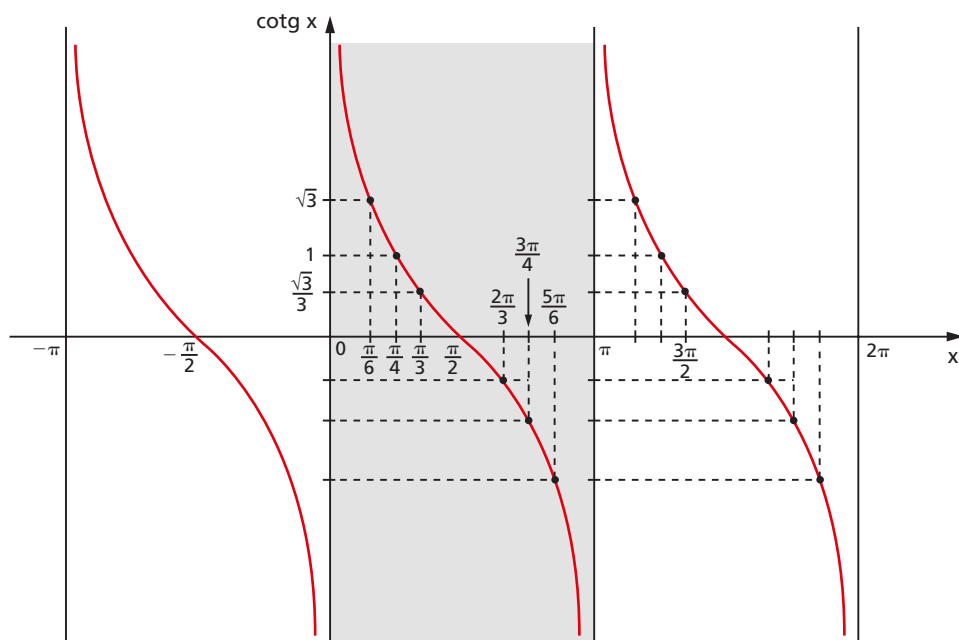
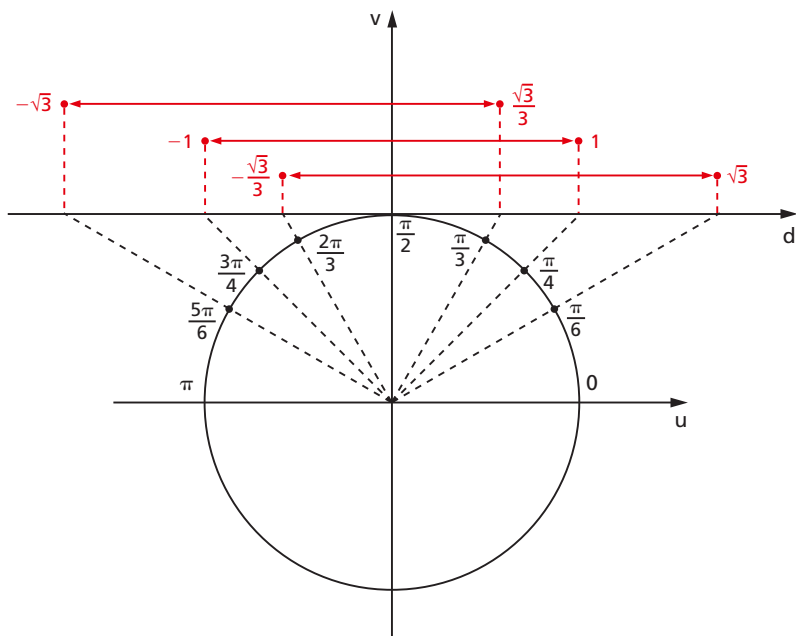
2ª) A imagem da função cotangente é \mathbb{R} , isto é, para todo y real existe um x real tal que $\cotg x = y$.

3ª) A função cotangente é periódica e seu período é π .

119. Gráfico

Considerando arcos, por exemplo, do 1º e 2º quadrantes, temos a seguinte relação de pares ordenados $(x, \cotg x)$ para traçar o gráfico da cotangente:

$$\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{\pi}{4}, 1\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{3\pi}{4}, -1\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3}\right).$$



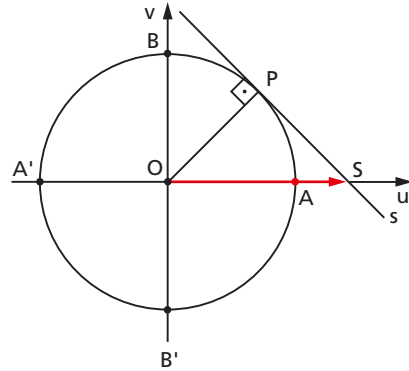
VIII. Função secante

120. Definição

Dado um número real x ,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua interseção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de x (e indicamos $\sec x$) a abscissa OS do ponto S . Denominamos **função secante** a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x , $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $OS = \sec x$, isto é, $f(x) = \sec x$.



Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S , a $\sec x$ não é definida.

121. Propriedades

A função secante tem as mesmas propriedades já vistas no capítulo IV, item 67, para a razão secante, a saber: (a) se x é do 1º ou do 4º quadrante, então $\sec x$ é positiva; (b) se x é do 2º ou do 3º quadrante, então $\sec x$ é negativa; (c) se x percorre o 1º ou o 2º quadrante, então $\sec x$ é crescente; (d) se x percorre o 3º ou o 4º quadrante, então $\sec x$ é decrescente. Além dessas, há, ainda:

1ª) O domínio da função secante é $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

2ª) A imagem da função secante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo y real, com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x real tal que $\sec x = y$.

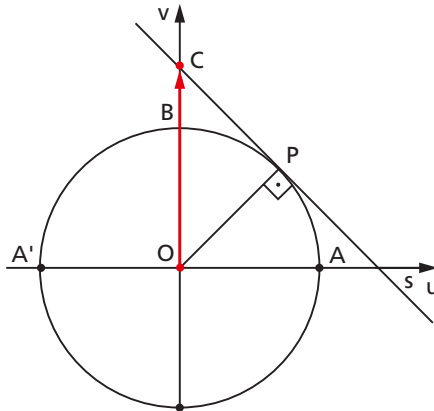
3ª) A função secante é periódica e seu período é 2π .

IX. Função cossecante

123. Definição

Dado um número real x , $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua interseção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de x (e indicamos por $\operatorname{cossec} x$) a ordenada OC do ponto C . Denominamos **função cossecante** a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x , $x \neq k\pi$, o real $OC = \operatorname{cossec} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{cossec} x$.

Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C , a $\operatorname{cossec} x$ não é definida.



124. Propriedades

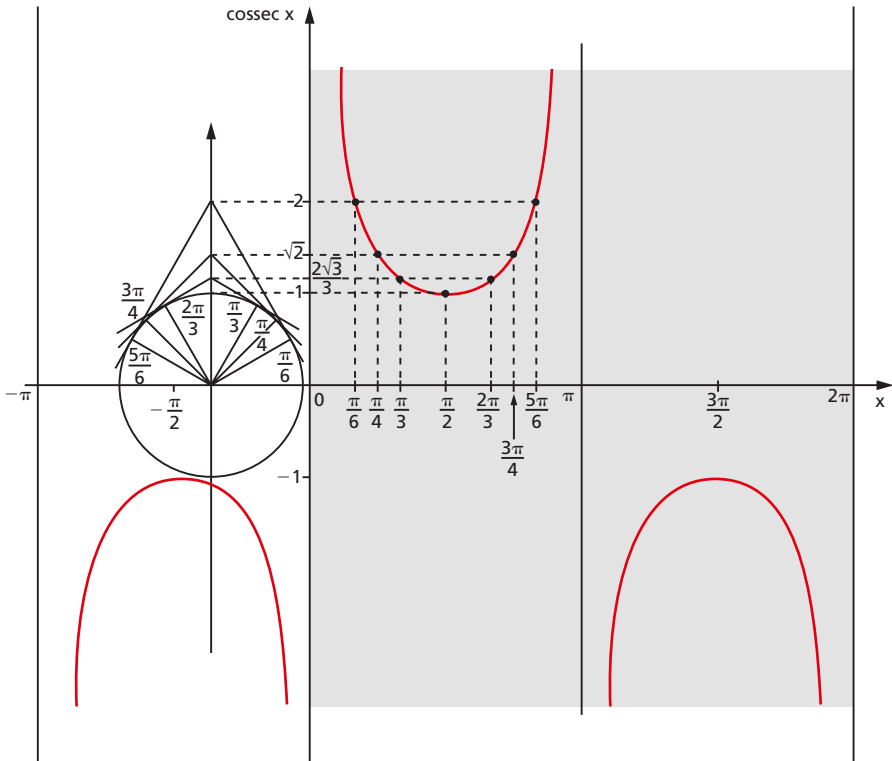
São válidas as propriedades vistas no capítulo IV, item 69, para a razão trigonométrica cossecante, também para a função cossecante, a saber: (a) se x é do 1º ou do 2º quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é positiva; (b) se x é do 3º ou do 4º quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é negativa; (c) se x percorre o 2º ou o 3º quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é crescente; (d) se x percorre o 1º ou o 4º quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é decrescente. Além dessas, temos:

1ª) O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

2ª) A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo real y , com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x real tal que $\operatorname{cossec} x = y$.

3ª) A função cossecante é periódica e seu período é 2π .

125. Gráfico



EXERCÍCIOS

175. Determine o domínio e o período das seguintes funções reais:

$$f(x) = \cotg \left(x - \frac{\pi}{3} \right), g(x) = \sec 2x, h(x) = \operatorname{cossec} \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

176. Em cada caso, determine o conjunto ao qual m deve pertencer de modo que exista x , satisfazendo a igualdade:

a) $\cotg x = \sqrt{2 - m}$

c) $\operatorname{cossec} x = \frac{2m - 1}{1 - 3m}$

b) $\sec x = 3m - 2$

177. Simplifique $\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$.

178. Dê uma expressão, em função de $\cotg x$, equivalente a $\frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x}{\sec x - \cos x}$.

179. Se $\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k inteiro, calcule $\frac{\cos^2 \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$ em função de $\operatorname{sen} \theta$.

180. Determine uma expressão, em função de $\cos x$, equivalente a $\frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{1 - \operatorname{tg}^4 x}$.

181. Determine, em função de $\operatorname{cosec} x$, uma expressão equivalente a $\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$.

182. Se $\operatorname{sen} x + \operatorname{cosec}(-x) = t$, calcule $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$ em função de t .

183. Se $\operatorname{sen} x = \frac{n-1}{n}$, calcule $\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{cotg}^2 x + 1}$, em função de n .

X. Funções pares e funções ímpares

126. Definição

Uma função $f: A \rightarrow B$ é denominada **função par** se, e somente se:

$$f(x) = f(-x), \forall x \in A$$

isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos o mesmo valor para a função.

Exemplos:

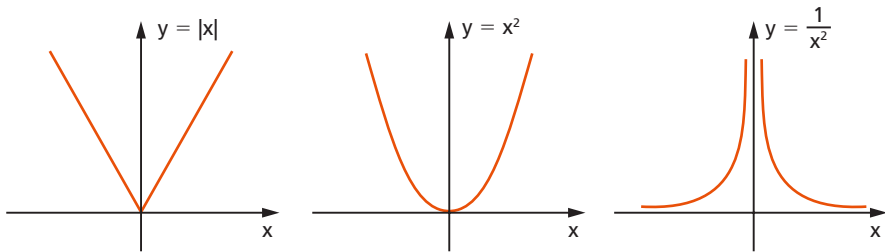
1º) $f(x) = |x|$ é função par, pois $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

2º) $f(x) = x^2$ é função par, pois $(-x)^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

3º) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é função par, pois $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Da definição decorre que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y , pois:

$$(x, y) \in f \Rightarrow (-x, y) \in f$$



127. Definição

Uma função $f: A \rightarrow B$ é denominada **função ímpar** se, e somente se:

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in A$$

isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos valores simétricos para a função.

Exemplos:

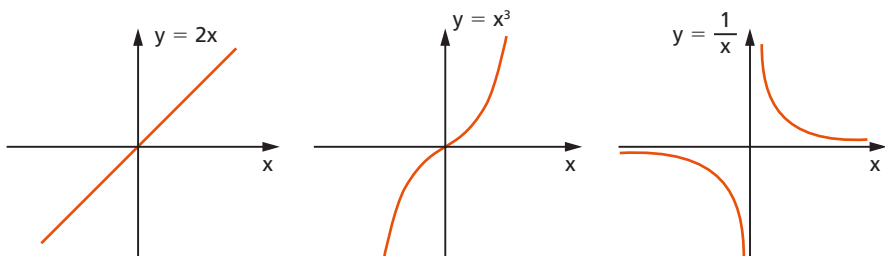
1º) $f(x) = 2x$ é função ímpar, pois $2(-x) = -2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

2º) $f(x) = x^3$ é função ímpar, pois $(-x)^3 = -x^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

3º) $f(x) = \frac{1}{x}$ é função ímpar, pois $\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Da definição decorre que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano, pois:

$$(x, y) \in f \Rightarrow (-x, -y) \in f$$



128. Os números x e $-x$ têm, no ciclo, imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos. Em consequência, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x, \forall x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{cos}(-x) &= \operatorname{cos} x, \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

portanto, de acordo com as definições dadas, a função seno é função ímpar e a função cosseno é função par.

EXERCÍCIOS

184. Verifique a paridade das funções:

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| a) $\operatorname{tg} x$ | c) $\operatorname{sec} x$ |
| b) $\operatorname{cotg} x$ | d) $\operatorname{cossec} x$ |

185. Uma função, com domínio simétrico em relação à origem, é par se $f(-x) = f(x)$ e é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, qualquer que seja x pertencente ao domínio.

- Prove que, se f é ímpar e 0 pertence ao seu domínio, então $f(0) = 0$.
- Prove que, se f é par e ímpar, então $f(x) \equiv 0$.

186. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3$. Determine a paridade da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

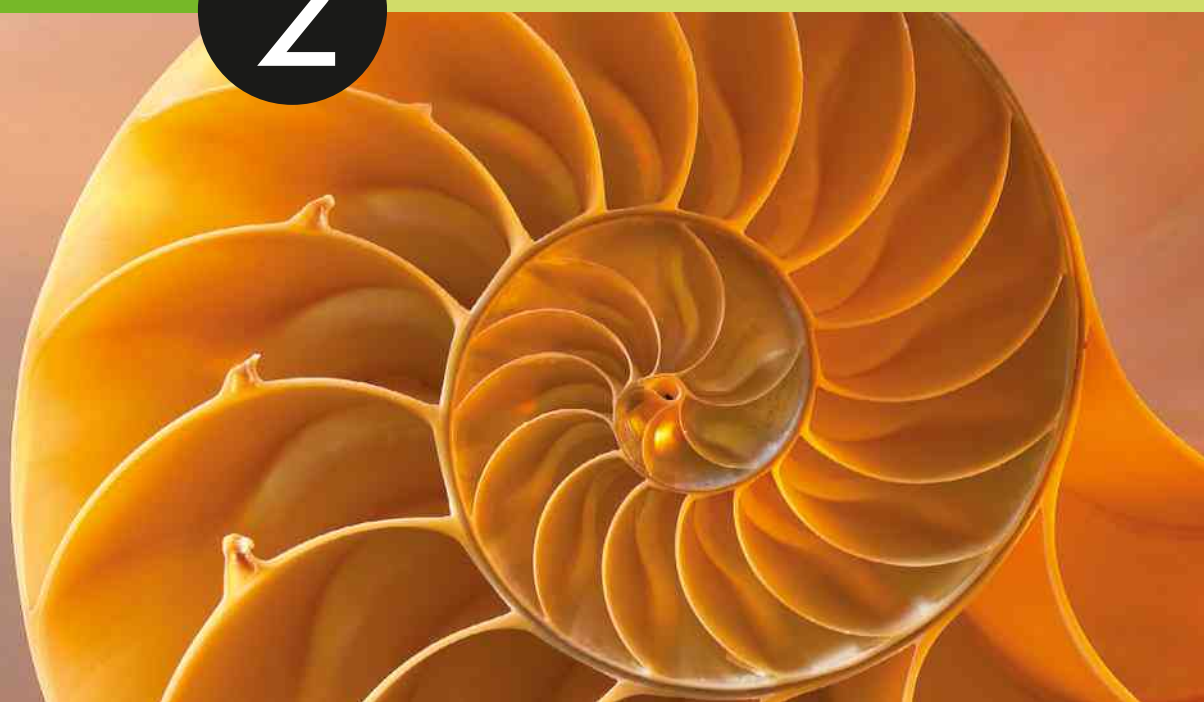
$$g(x) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_{n \text{ fatores}}$$

GELSON IEZZI
OSVALDO DOLCE
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Logaritmos

2



 **Atual**
Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO II

Função exponencial

I. Definição

22. Dado um número real a , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos **função exponencial** de base a a função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} que associa a cada x real o número a^x .

Em símbolos: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow a^x$

Exemplos de funções exponenciais em \mathbb{R} :

1º) $f(x) = 2^x$

4º) $p(x) = 10^x$

2º) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

5º) $r(x) = (\sqrt{2})^x$

3º) $h(x) = 3^x$

II. Propriedades

1ª) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$$

isto é, o par ordenado $(0, 1)$ pertence à função para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$). Portanto, dados os reais x_1 e x_2 , temos:

I) quando $a > 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

II) quando $0 < a < 1$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

A demonstração desta propriedade exige a sequência de lemas e teoremas apresentados nos itens 23 a 30.

3ª) A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora, pois, dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$ (por exemplo $x_1 < x_2$), vem:

I) se $a > 1$, temos: $f(x_1) < f(x_2)$;

II) se $0 < a < 1$, temos: $f(x_1) < f(x_2)$;

e, portanto, nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

23. Lema 1

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a^n > 1 \text{ se, e somente se, } n > 0$$

Demonstração:

1ª parte

Provemos, por indução sobre n , a proposição

$$n > 0 \Rightarrow a^n > 1:$$

1º) é verdadeira para $n = 1$, pois $a^1 = a > 1$;

2º) suponhamos que a proposição seja verdadeira para $n = p$, isto é, $a^p > 1$, e provemos que é verdadeira para $n = p + 1$.

De fato, de $a > 1$, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por a^p e mantendo a desigualdade, pois a^p é positivo, temos:

$$a > 1 \Rightarrow a \cdot a^p > a^p \Rightarrow a^{p+1} > a^p > 1$$

2ª parte

Provemos, por redução ao absurdo, a proposição:

$$a^n > 1 \Rightarrow n > 0$$

Supondo $n \leq 0$, temos: $-n \geq 0$.

Notemos que $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$ e pela primeira parte $-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$; portanto:

$$-n \geq 0 \Rightarrow a^{-n} \geq 1$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por a^n e mantendo o sentido da desigualdade, pois a^n é positivo, temos:

$$a^{-n} \geq 1 \Rightarrow a^n \cdot a^{-n} \geq a^n \Rightarrow 1 \geq a^n$$

o que é um absurdo, pois contraria a hipótese $a^n > 1$. Logo, $n > 0$.

24. Lema 2

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos:

$$a^r > 1 \text{ se, e somente se, } r > 0$$

Demonstração:

1ª parte

Provemos a proposição

$$r > 0 \Rightarrow a^r > 1$$

Façamos $r = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}^*$; então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}}$$

Pelo lema 1, se $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q > 1$ e $q > 0$, então $a^{\frac{1}{q}} > 1$. Ainda pelo mesmo lema, se $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$, então $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$, ou seja,

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r > 1$$

2ª parte

Provemos agora a proposição

$$a^r > 1 \Rightarrow r > 0$$

Façamos $r = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$; então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Supondo $q > 0$ e considerando que na 1ª parte provamos que $a^{\frac{1}{q}} > 1$, temos, pelo lema 1:

$$a^{\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1 \Rightarrow p > 0$$

Logo: $q > 0$ e $p > 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$.

Supondo, agora, $q < 0$, isto é, $-q > 0$, pelo lema 1 temos:

$$a^{-\frac{1}{q}} > 1 \text{ e } \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{-\frac{1}{q}}\right)^{-p} > 1 \Rightarrow -p > 0 \Rightarrow p < 0$$

Logo: $q < 0$ e $p < 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$.

25. Lema 3

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, r e s racionais, temos:

$$a^s > a^r \text{ se, e somente se, } s > r$$

Demonstração:

$$a^s > a^r \Leftrightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Leftrightarrow a^{s-r} > 1 \stackrel{\text{(lema 2)}}{\Leftrightarrow} s - r > 0 \Leftrightarrow s > r$$

26. Lema 4

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos:

$$a^\alpha > 1 \text{ se, e somente se, } \alpha > 0$$

Demonstração:

Sejam os dois conjuntos que definem o número irracional α ,

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

e em correspondência os conjuntos de potências de expoentes racionais que definem a^α ,

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$

1ª parte

Provemos a proposição:

$$\alpha > 0 \Rightarrow a^\alpha > 1$$

Pela definição do número α irracional e positivo, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tal que $0 < r < \alpha < s$.

Pelo lema 2, como $a > 1$, $r > 0$ e $s > 0$, temos: $a^r > 1$ e $a^s > 1$.

Pelo lema 3, como $a > 1$ e $r < s$, temos: $1 < a^r < a^s$ e, agora, pela definição de potência de expoente irracional, vem:

$$1 < a^r < a^\alpha < a^s,$$

isto é,

$$a^\alpha > 1$$

2ª parte

Provemos, agora, por redução ao absurdo, a proposição:

$$a^\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > 0$$

Suponhamos $\alpha < 0$, isto é, $-\alpha > 0$.

Pela primeira parte deste teorema, temos:

$$\left. \begin{array}{l} a > 1, -\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ -\alpha > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a^{-\alpha} > 1$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade obtida por $a^\alpha > 0$, vem:

$$a^{-\alpha} \cdot a^\alpha > a^\alpha,$$

isto é,

$$1 > a^\alpha,$$

o que contraria a hipótese; logo:

$$\alpha > 0$$

27. Teorema 1

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b > 0$$

Demonstração:

$$b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{Q} \stackrel{\text{(lema 2)}}{\Leftrightarrow} (a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0) \\ \text{ou} \\ b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \stackrel{\text{(lema 4)}}{\Leftrightarrow} (a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0) \end{cases}$$

28. Teorema 2

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ se, e somente se, } x_1 > x_2$$

Demonstração:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \stackrel{\text{(teorema 1)}}{\Leftrightarrow} x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

29. Teorema 3

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^b > 1 \text{ se, e somente se, } b < 0$$

Demonstração:

Se $0 < a < 1$, então $\frac{1}{a} > 1$.

Seja $c = \frac{1}{a} > 1$; pelo teorema 1, vem:

$$c^{-b} > 1 \Leftrightarrow -b > 0$$

Substituindo $c = \frac{1}{a}$, temos:

$$c^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} = a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0$$

30. Teorema 4

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \text{ se, e somente se, } x_1 < x_2$$

Demonstração:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \stackrel{\text{(teorema 3)}}{\Leftrightarrow} x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

EXERCÍCIO

59. Determine o menor valor da expressão $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-x^2}$.

III. Imagem

31. Vimos anteriormente, no estudo de potências de expoente real, que, se $a \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^x > 0$ para todo x real.

Afirmamos, então, que a imagem da função exponencial é:

$$\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$$

IV. Gráfico

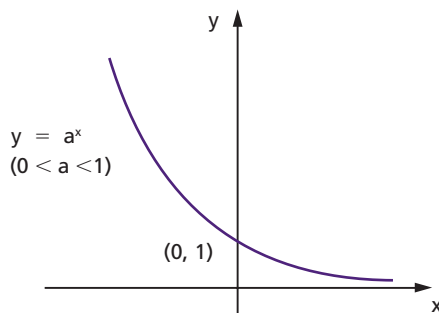
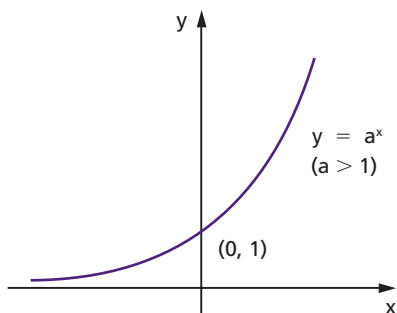
32. Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, podemos dizer:

1º) a curva representativa está toda acima do eixo dos x , pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2º) corta o eixo y no ponto de ordenada 1;

3º) se $a > 1$ é o gráfico de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é o gráfico de uma função decrescente;

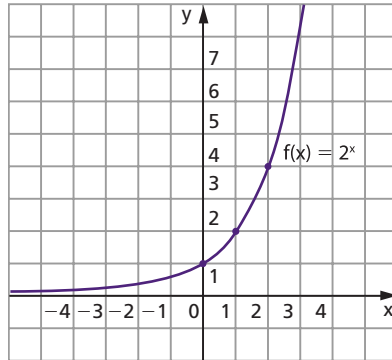
4º) toma um dos aspectos das figuras abaixo.



3. Exemplos:

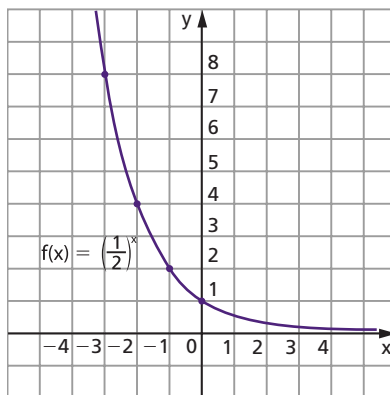
1º) Construir o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$.

| x | $y = 2^x$ |
|----|---------------|
| -3 | $\frac{1}{8}$ |
| -2 | $\frac{1}{4}$ |
| -1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |



2º) Construir o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

| x | $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
|----|----------------------------------|
| -3 | 8 |
| -2 | 4 |
| -1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ |



3º) Construir o gráfico da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$.

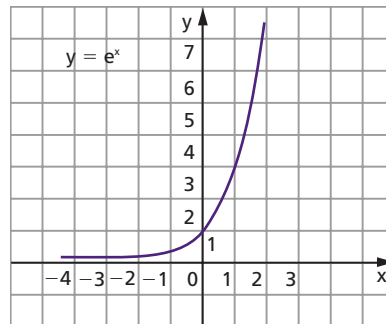
Um número irracional importantíssimo para a análise matemática é indicado pela letra e e definido pela relação:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, x \in \mathbb{R}$$

A demonstração de que o citado limite existe será feita quando realizarmos o estudo de limites. A tabela abaixo sugere um valor para e (com quatro casas decimais): $e \cong 2,7183$.

| x | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | 0,00001 |
|-----------------------|-------------|----------------------|------------------------|-------|--------|---------|
| $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ | $(1+1)^1=2$ | $(1+0,1)^{10}=2,594$ | $(1+0,01)^{100}=2,705$ | 2,717 | 2,7182 | 2,7183 |

| x | e^x |
|------|-------|
| -3 | 0,05 |
| -2,5 | 0,08 |
| -2 | 0,14 |
| -1,5 | 0,22 |
| -1 | 0,36 |
| -0,5 | 0,60 |
| 0 | 1 |
| 0,5 | 1,65 |
| 1 | 2,72 |
| 1,5 | 4,48 |
| 2 | 7,39 |
| 2,5 | 12,18 |
| 3 | 20,80 |



EXERCÍCIOS

60. Construa os gráficos cartesianos das seguintes funções exponenciais:

a) $y = 3^x$

c) $y = 4^x$

e) $y = 10^{-x}$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $y = 10^x$

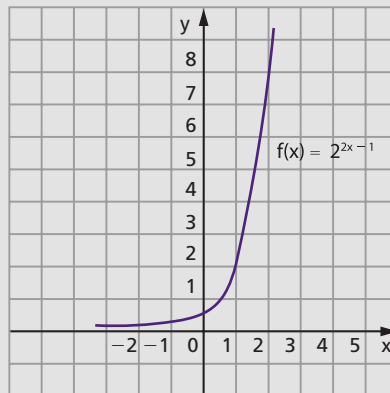
f) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

61. Construa o gráfico cartesiano da função em \mathbb{R} definida por $f(x) = 2^{2x-1}$.

Solução

Vamos contruir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $2x - 1$, calculamos 2^{2x-1} e finalmente x .

| x | $2x-1$ | $y=2^{2x-1}$ |
|----------------|--------|---------------|
| -1 | -3 | $\frac{1}{8}$ |
| $-\frac{1}{2}$ | -2 | $\frac{1}{4}$ |
| 0 | -1 | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| $\frac{3}{2}$ | 2 | 4 |
| 2 | 3 | 8 |



62. Construa os gráficos das funções em \mathbb{R} definidas por:

a) $f(x) = 2^{1-x}$

c) $f(x) = 2^{|x|}$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

b) $f(x) = 3^{\frac{x+1}{2}}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$

67. Construa os gráficos das funções em \mathbb{R} definidas por:

a) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

68. Construa o gráfico da função em \mathbb{R} definida por $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$.

Solução

Vamos construir uma tabela atribuindo valores a $x - 1$ e calculando 2^{x-1} , $3 \cdot 2^{x-1}$ e x . Temos:

| x | x - 1 | 2^{x-1} | $y = 3 \cdot 2^{x-1}$ |
|----|-------|---------------|-----------------------|
| -2 | -3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| -1 | -2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 0 | -1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |
| 1 | 0 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 6 |
| 3 | 2 | 4 | 12 |
| 4 | 3 | 8 | 24 |



69. Construa os gráficos das funções em \mathbb{R} definidas por:

a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$

c) $f(x) = \frac{1}{5} \cdot 3^{2x-1}$

b) $f(x) = 0,1 \cdot 2^{2x-3}$

d) $f(x) = 3 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$

V. Equações exponenciais

34. Definição

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

Exemplos:

$$2^x = 64, (\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}, 4^x - 2^x = 2$$

Existem dois métodos fundamentais para resolução das equações exponenciais.

Faremos neste capítulo a apresentação do primeiro método; o segundo será apresentado quando do estudo de logaritmos.

35. Método da redução a uma base comum

Este método, como o próprio nome já diz, será aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base a ($0 < a \neq 1$). Pelo fato de a função exponencial $f(x) = a^x$ ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é:

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0 < a \neq 1)$$

EXERCÍCIOS

70. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$

b) $8^x = \frac{1}{32}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

Solução

a) $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

$S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

$S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

71. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 128$

h) $4^x = \frac{1}{8}$

b) $3^x = 243$

i) $\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25$

c) $2^x = \frac{1}{16}$

j) $(\sqrt[5]{4})^x = \frac{1}{\sqrt{8}}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$

k) $100^x = 0,001$

e) $(\sqrt[3]{2})^x = 8$

l) $8^x = 0,25$

f) $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9}$

m) $125^x = 0,04$

g) $9^x = 27$

n) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25$

72. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{3x-1} = 32$

h) $7^{3x+4} = 49^{2x-3}$

b) $7^{4x+3} = 49$

i) $5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+3}$

c) $11^{2x+5} = 1$

j) $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1}$

d) $2^{x^2-x-16} = 16$

k) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}}$

e) $3^{x^2+2x} = 243$

l) $4^{x^2-1} = 8^x$

f) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

m) $27^{x^2+1} = 9^{5x}$

g) $81^{1-3x} = 27$

n) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

73. Resolva a equação $4^{x^2+4x} = 4^{12}$.

74. Determine os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[5]{1000^5}$.

75. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $(2^x)^{x-1} = 4$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1}$

c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[3]{25^{2x-5}} - \sqrt[2]{5^{3x-2}} = 0$

Solução

a) $(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$
 $S = \{2, -1\}$

b) $3^{2x-1} \cdot 9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot (3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$
 $S = \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$

c) $\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[3]{25^{2x-5}} = \sqrt[2]{5^{3x-2}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}} \cdot (5^2)^{\frac{2x-5}{3}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{3}} =$
 $= 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{3} = \frac{3x-2}{2x} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -6$ (não serve, pois $x > 0$)
 $S = \{3\}$

76. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $(2^x)^{x+4} = 32$

f) $\frac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \frac{81^{2x}}{27^{3-4x}}$

b) $(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4}$

g) $^{x+4}\sqrt{2^{3x-8}} = 2^{x-5}$

c) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$

h) $8^{3x} = \sqrt[3]{32^x} : 4^{x-1}$

d) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4$

i) $^{x-1}\sqrt[3]{2^{3x-1}} - ^{3x-7}\sqrt{8^{x-3}} = 0$

e) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

j) $\sqrt{8^{x-1}} \cdot ^{x+1}\sqrt[4]{2^{2x-3}} = \sqrt[6]{2^{5x+3}}$

77. Determine os valores de x que satisfazem a equação $(4^{3-x})^{2-x} = 1$.

81. Resolva as seguintes equações exponenciais:

- a) $4^x - 2^x - 2 = 0$
- b) $9^x + 3^x = 90$
- c) $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$
- d) $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x$
- e) $9^x + 3^{x+1} = 4$
- f) $5^{2x} + 5^x + 6 = 0$
- g) $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$
- h) $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$
- i) $4^{x+1} + 4^{3-x} = 257$
- j) $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x-\frac{1}{2}} - 8 = 0$

82. Resolva a equação $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125$.

83. Calcule o produto das soluções da equação $4^{x^2+2} - 3 \cdot 2^{x^2+3} = 160$.

84. Resolva as seguintes equações exponenciais:

- a) $3^x - \frac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \frac{23}{3^{x-2}}$
- b) $2^{x+1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2^{x-1}} = \frac{30}{2^x}$
- c) $16^{2x+3} - 16^{2x+1} = 2^{8x+12} - 2^{6x+5}$

85. Resolva a equação exponencial:

$$3^{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{81}{3^{\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$$

86. Determine o número de soluções distintas da equação $2^x - 2^{-x} = k$, para k real.

87. Resolva a equação exponencial:

$$\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$$

88. Resolva a equação exponencial:

$$4^x - 3^x - \frac{1}{2} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

89. Resolva a equação:

$$3^{x-1} - \frac{5}{3^{x+1}} = 4 \cdot 3^{1-3x}$$

90. Resolva a equação:

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$$

91. Resolva as equações em \mathbb{R}_+ :

a) $x^{x^2-5x+6} = 1$

b) $x^{2x^2-7x+4} = x$

Solução

a) Devemos examinar inicialmente se 0 ou 1 são soluções da equação. Substituindo $x = 0$ na equação proposta, temos:

$$0^6 = 1 \text{ (falso)}$$

Logo, 0 não é solução.

Substituindo $x = 1$ na equação, temos:

$$1^2 = 1 \text{ (verdadeiro)}$$

Logo, 1 é solução da equação.

Supondo agora $0 < x \neq 1$, temos:

$$x^{x^2-5x+6} = 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$

Os valores $x = 2$ ou $x = 3$ são soluções, pois satisfazem a condição $0 < x \neq 1$.

$$S = \{1, 2, 3\}$$

b) Examinemos inicialmente se 0 ou 1 são soluções da equação proposta:

$$0^4 = 0 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow x = 0 \text{ é solução}$$

$$1^{-1} = 1 \text{ (verdadeiro)} \Rightarrow x = 1 \text{ é solução}$$

Supondo $0 < x \neq 1$, temos:

$$x^{2x^2-7x+4} = x \Rightarrow 2x^2 - 7x + 4 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Os valores $x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$ são soluções, pois satisfazem a condição $0 < x \neq 1$.

$$S = \left\{0, 1, 3, \frac{1}{2}\right\}$$

92. Resolva as equações em \mathbb{R}_+ :

a) $x^{2-3x} = 1$

c) $x^{x^2-2} = 1$

e) $x^{x^2-3x-4} = 1$

b) $x^{2x+5} = 1$

d) $x^{x^2-7x+12} = 1$

93. Resolva as equações em \mathbb{R}_+ :

a) $x^x = x$

c) $x^{4-2x} = x$

e) $x^{x^2-2x-7} = x$

b) $x^{x+1} = x$

d) $x^{2x^2-5x+3} = x$

94. Resolva em \mathbb{R} a equação $(x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = 1$.
95. Determine, em \mathbb{R}_+ , o conjunto solução da equação $x^{x^3 - 8} = 1$.
96. Determine o número de soluções de $2^x = x^2$.
Sugestão: Faça os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$.
 Observe que $2^{100} > 100^2$.
97. Resolva em \mathbb{R}_+ a equação $x^{2x} - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$.
98. Resolva a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

Solução

Dividindo por 9^x , temos:

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, temos:

$$y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \text{ou} \\ y = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

mas $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, então:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$S = \{0\}$$

99. Resolva as equações:
- a) $4^x + 2 \cdot 14^x = 3 \cdot 49^x$ b) $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0$
100. Resolva os seguintes sistemas de equações:
- a) $\begin{cases} 4^x = 16y \\ 2^{x+1} = 4y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24 \\ x + y = 8 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2^{2(x^2-y)} = 100 \cdot 5^{2(y-x^2)} \\ x + y = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3^x - 2^{(y^2)} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2\left(\frac{y^2}{2}\right) = 7 \end{cases}$
101. Se $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$, calcule o valor de $x - y$.

102. Calcule o produto das soluções das equações:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \end{cases}$$

103. Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^{y^2-15y+56} = 1 \\ y - x = 5 \end{cases}$$

104. Resolva os sistemas de equações para $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}_+$.

a)
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}$$

105. Resolva o sistema de equações para $x > 0$ e $y > 0$, sendo $m \cdot n > 0$:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n \end{cases}$$

106. Para que valores reais de m a equação $4^x - (m - 2) \cdot 2^x + 2m + 1 = 0$ admite pelo menos uma raiz real?

Solução

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - (m - 2)y + (2m + 1) = 0$$

Lembrando que a equação exponencial admitirá pelo menos uma raiz real se existir $y = 2^x > 0$, a equação acima deverá ter pelo menos uma raiz real e positiva.

Sendo $f(y) = y^2 - (m - 2)y + (2m + 1)$, temos:

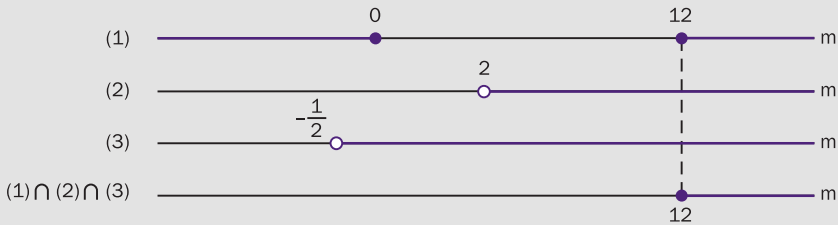
a) as duas raízes são positivas:

$$y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, \frac{S}{2} > 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 12m \geq 0 \Rightarrow m \leq 0 \text{ ou } m \geq 12 \quad (1)$$

$$\frac{S}{2} > 0 \Rightarrow \frac{S}{2} = \frac{m - 2}{2} > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (2)$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow a \cdot f(0) = 2m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2} \quad (3)$$



$$S_1 = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geq 12\}$$

b) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) = 2m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_2 = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m < -\frac{1}{2} \right\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow S = m - 2 > 0 \text{ e} \\ f(0) = 2m + 1 = 0 \Rightarrow m > 2 \text{ e } m = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_3 = \emptyset \end{cases}$$

O conjunto dos valores de m , para que a equação exponencial proposta admita pelo menos uma raiz real, é:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m < -\frac{1}{2} \text{ ou } m \geq 12 \right\}$$

107. Determine m real para que as equações abaixo admitam pelo menos uma raiz real.

a) $3^{2x} - (2m + 3) \cdot 3^x + (m + 3) = 0$

b) $2^{2x+1} - (2m - 3) \cdot 2^{x+1} + (7 - 2m) = 0$

c) $m \cdot 9^x - (2m + 1) 3^x + (m - 1) = 0$

108. Determine m real para que a equação $m(2^x - 1)^2 - 2^x(2^x - 1) + 1 = 0$ admita pelo menos uma raiz real.

109. Para que valores reais de m a equação $2^x + 2^{-x} = m$ admite pelo menos uma raiz real?

110. Para que valores reais de m a equação $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = m$, com $0 < a \neq 1$, admite raiz real?

111. Mostre que a equação $a^{2x} - (m + 1)a^x + (m - 1) = 0$, com $0 < a \neq 1$, admite pelo menos uma raiz real, qualquer que seja m real.

VI. Inequações exponenciais

36. Definição

Inequações exponenciais são as inequações com incógnita no expoente.

Exemplos:

$$2^x > 32, (\sqrt{5})^x = \sqrt[3]{25}, 4^x - 2 > 2^x$$

Assim como em equações exponenciais, existem dois métodos fundamentais para resolução das inequações exponenciais.

Do mesmo modo usado no estudo de equações exponenciais, faremos neste capítulo a apresentação do primeiro método; o segundo será visto no estudo de logaritmos.

37. Método da redução a uma base comum

Este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências de mesma base a ($0 < a \neq 1$).

Lembremos que a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$, ou decrescente, se $0 < a < 1$; portanto:

Se b e c são números reais, então:
 para $a > 1$ tem-se $a^b > a^c \Leftrightarrow b > c$
 para $0 < a < 1$ tem-se $a^b > a^c \Leftrightarrow b < c$

EXERCÍCIOS

112. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes sentenças:

a) $3^{2,7} > 1$

c) $(0,3)^{0,2} > 1$

e) $\pi^{\sqrt{2}} > 1$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1,5} > 1$

d) $\left(\frac{7}{5}\right)^{-0,32} < 1$

f) $e^{-\sqrt{3}} > 1$

113. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes sentenças:

- | | |
|--|--|
| a) $2^{1,3} > 2^{1,2}$ | f) $(0,11)^{-3,4} < (0,11)^{4,2}$ |
| b) $(0,5)^{1,4} > (0,5)^{1,3}$ | g) $e^{2,7} > e^{2,4}$ |
| c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2,3} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-1,7}$ | h) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{4,3} < \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1,5}$ |
| d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{3,1} < \left(\frac{5}{4}\right)^{2,5}$ | i) $(\sqrt[3]{3})^{\frac{3}{4}} > (\sqrt[3]{3})^{\frac{2}{3}}$ |
| e) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ | j) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{3}{5}} < \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{5}{7}}$ |

114. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) as seguintes sentenças:

- | | |
|---|---|
| a) $2^{0,4} > 4^{0,3}$ | e) $(\sqrt[3]{3})^{-0,5} < 27^{-0,1}$ |
| b) $8^{1,2} > 4^{1,5}$ | f) $(\sqrt{8})^{-1,2} > (\sqrt[3]{4})^{2,1}$ |
| c) $9^{3,4} < 3^{2,3}$ | g) $8^{-1,2} > 0,25^{2,2}$ |
| d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{5,4} < \left(\frac{1}{8}\right)^{1,6}$ | h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2,5} < (2,25)^{-1,2}$ |

115. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

- | | | |
|----------------|---|------------------------------------|
| a) $2^x > 128$ | b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27}$ | c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$ |
|----------------|---|------------------------------------|

Solução

a) $2^x > 128 \Leftrightarrow 2^x > 2^7$

Como a base é maior que 1, vem $x > 7$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

Como a base está compreendida entre 0 e 1, temos $x \leq -3$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$$

c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8} \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$

Como a base é maior que 1, temos: $\frac{x}{3} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{9}{4}\right\}$$

116. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x < 32$

g) $4^x \geq 8$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

h) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \leq 243$

c) $3^x < \frac{1}{27}$

i) $(\sqrt[5]{25})^x < \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 125$

j) $(0,01)^x \leq \frac{1}{\sqrt{1000}}$

e) $(\sqrt[3]{3})^x \leq \frac{1}{9}$

k) $(0,008)^x > \sqrt[3]{25}$

f) $(\sqrt{2})^x > \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$

l) $0,16^x > \sqrt[5]{15,625}$

117. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $3^{2x+3} > 243$

h) $(0,3)^{x^2-2x-8} \geq 1$

b) $2^{5x-1} \geq 8$

i) $4^{x^2+1} \leq 32^{1-x}$

c) $(0,1)^{3-4x} < 0,0001$

j) $27^{x^2-3} > 9$

d) $7^{5x-6} < 1$

k) $(0,01)^{2x^2+1} \geq (0,001)^{3x}$

e) $(0,42)^{1-2x} \geq 1$

l) $8^{3x^2-5x} > \frac{1}{16}$

f) $3^{x^2-5x+6} > 9$

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < \left(\frac{1}{32}\right)^{2x+1}$

g) $2^{x^2-x} \leq 64$

n) $(\sqrt{0,7})^{x^2+1} \geq (\sqrt[3]{0,7})^{2x+1}$

118. Resolva, em \mathbb{R} , a inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5x+1} \geq \frac{1}{2}$.

119. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $8 < 2^x < 32$

g) $4 < 8^{|x|} < 32$

b) $0,0001 < (0,1)^x < 0,01$

h) $25 < 125^{2x-1} < 125$

c) $\frac{1}{27} < 3^x < 81$

i) $(0,3)^{x-5} \leq (0,09)^{2x+3} \leq (0,3)^{x+6}$

d) $\frac{1}{8} \leq 4^x \leq 32$

j) $1 \leq 7^{x^2-4x+3} \leq 343$

e) $\frac{8}{27} < \left(\frac{4}{9}\right)^x < \frac{3}{2}$

k) $3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 9$

f) $0,1 < 100^x < 1000$

120. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$

b) $\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$

c) $7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < \sqrt{343}$

Solução

a) $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{2x^2-7x} > 3^{-3} \Leftrightarrow 2x^2 - 7x > -3 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3$

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3 \right\}$

b) $\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} \cdot 4^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^{3x+1} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{1+2x-x^2} \geq$

$\geq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x^2+x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2-4x+2x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2-3x-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3} \Leftrightarrow 5x^2 - 3x - 2 \leq 3x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 6x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq x \leq 1$

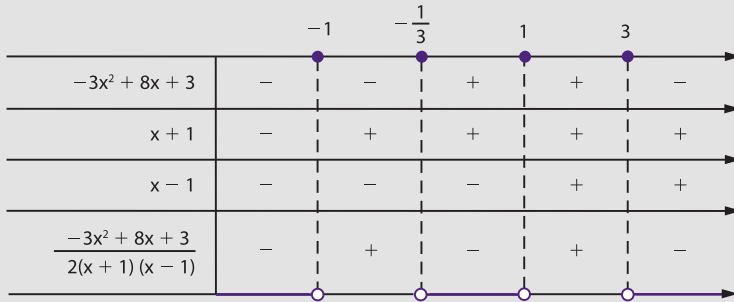
$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x \leq 1 \right\}$

c) $7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < \sqrt{343} \Leftrightarrow 7^{\frac{x+1}{x-1}} : 7^{\frac{x-1}{x+1}} < 7^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 7^{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}} < 7^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 8x + 3}{2(x+1)(x-1)} < 0$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } -\frac{1}{3} < x < 1 \text{ ou } x > 3 \right\}$$

121. Resolva as inequações exponenciais:

- a) $(2^{x+1})^{2x-3} < 128$
 b) $(27^{x-2})^{x+1} \geq (9^{x+1})^{x-3}$
 c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3}$
 d) $25^{3-4x} : 125^{2-x} > 5^{3x+1}$
 e) $\frac{0,04^{3x+2} \cdot 25^{1-4x}}{0,008^{3-x} \cdot 125^{4-3x}} > 1$
 f) $2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 32^{\frac{1}{x+1}} > 4$
 g) $(0,1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0,01)^{\frac{1}{x+3}} < (0,001)^{\frac{1}{x+2}}$
 h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} : \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}} \leq \left[\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x+3}}\right]^{\frac{1}{x}}$

122. Resolva a inequação:

$$2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} < \frac{3}{4}$$

Solução

$$\begin{aligned} 2^x - 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} + 2^{x+4} < \frac{3}{4} &\Leftrightarrow 2^x(1 - 2 - 2^2 - 2^3 + 2^4) < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^x \cdot 3 < \frac{3}{4} &\Leftrightarrow 2^x < 2^{-2} \Leftrightarrow x < -2 \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

123. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

- a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240$
 b) $3^{x+5} - 3^{x+4} + 3^{x+3} - 3^{x+2} < 540$
 c) $4^{x+1} - 2^{2x+1} + 4^x - 2^{2x-1} - 4^{x-1} \geq 144$
 d) $3^{2x+1} - 9^x - 3^{2x-1} - 9^{x-1} \leq 42$
 e) $3 \cdot 2^{2x+5} - 9 \cdot 2^{2x+3} - 5 \cdot 4^{x+1} + 7 \cdot 2^{2x+1} - 3 \cdot 4^x < 60$
 f) $3^{x^2} + 5 \cdot 3^{x^2+1} + 2 \cdot 3^{x^2+2} - 4 \cdot 3^{x^2+3} + 3^{x^2+4} < 63$

124. Resolva as seguintes inequações:

- a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$ c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0$
 b) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

Solução

a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^2 - 3^x \cdot 3^3 - 3^x + 3 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 9(3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 3 > 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$$9y^2 - 28y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{9} \text{ ou } y > 3; \text{ mas } y = 3^x, \text{ logo:}$$

$$3^x < \frac{1}{9} \text{ ou } 3^x > 3 \Leftrightarrow 3^x < 3^{-2} \text{ ou } 3^x > 3 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x > 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$$

b) $2^x - 1 > 2^{1-x} \Leftrightarrow 2^x - 1 > \frac{2}{2^x} \Leftrightarrow 2^x(2^x - 1) > 2 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 > 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$y^2 - y - 2 > 0 \Leftrightarrow y < -1 \text{ ou } y > 2$$

Mas $2^x = y$, logo: $2^x < -1$ ou $2^x > 2$

Lembrando que $2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow 4^x \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 + 5 \cdot 2^x + 2 > 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$2y^2 + 5y + 2 > 0 \Leftrightarrow y < -2 \text{ ou } y > -\frac{1}{2}; \text{ mas } y = 2^x, \text{ logo:}$$

$$2^x < -2 \text{ ou } 2^x > -\frac{1}{2}$$

Lembrando que $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$2^x > -\frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$S = \mathbb{R}$$

125. Resolva as seguintes inequações:

a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

g) $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 > 0$

b) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$

h) $3^x (3^x + 6) < 3 (2 \cdot 3^{x-1} - 3)$

c) $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 \leq 0$

i) $2^{x+3} + 2^{-x} < 6$

d) $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 \leq 0$

j) $3 (3^x - 1) \geq 1 - 3^{-x}$

e) $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3$

k) $4^{x+\frac{3}{2}} - 2^{x+2} \geq 2^{x+1} - 1$

f) $2^x (2^x + 1) < 2$

l) $e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e < 0$

126. Determine o conjunto solução da inequação $2^{2x+2} - 0,75 \cdot 2^{x+2} < 1$.

127. Resolva a inequação $2^{x+5} + 3^x < 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x$.

128. Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais $\frac{e^x + 1}{1 - x^2} < 0$.

129. Resolva a inequação $x^{2x^2-9x+4} < 1$ em \mathbb{R}_+ .

Solução

1º) Verificamos se 0 ou 1 são soluções:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^4 < 1 \text{ (V)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-3} < 1 \text{ (F)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \{0\}$$

2º) Supomos $0 < x < 1$ e resolvemos:

$$x^{2x^2-9x+4} < x^0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 4$$

$$\text{Lembrando que } 0 < x < 1, \text{ vem } S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \right\}.$$

3º) Supomos $x > 1$ e resolvemos:

$$2^{2x^2-9x+4} < x^0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 4$$

$$\text{Lembrando que } x > 1, \text{ vem } S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}.$$

$$\text{A solução é } S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x < 4 \right\}.$$

CAPÍTULO IV

Função logarítmica

I. Definição

58. Dado um número real a ($0 < a \neq 1$), chamamos **função logarítmica** de base a a função f de \mathbb{R}_+^* em \mathbb{R} que associa a cada x o número $\log_a x$.

Em símbolos:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \log_a x \end{aligned}$$

Exemplos de funções logarítmicas em \mathbb{R}_+^*

a) $f(x) = \log_2 x$

c) $h(x) = \log x$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

d) $p(x) = \ln x$

II. Propriedades

1ª) Se $0 < a \neq 1$, então as funções f de \mathbb{R}_+^* em \mathbb{R} , definida por $f(x) = \log_a x$, e g de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* , definida por $g(x) = a^x$, são inversas uma da outra.

Demonstração:

Para provar esta propriedade, basta mostrarmos que $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$ e $g \circ f = I_{\mathbb{R}_+^*}$.

De fato:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x \text{ e}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x$$

2ª) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$).

Demonstração:

Provemos inicialmente a implicação

$$a > 1 \Rightarrow (\forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*, x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1).$$

De fato:

Quaisquer que sejam x_1 e x_2 positivos e $x_2 > x_1$, tem-se pela terceira consequência da definição de logaritmos

$$a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$$

e, agora, pelo teorema 2 (item 28), concluímos que:

$$\log_a x_2 > \log_a x_1$$

Provemos agora a implicação

$$(\forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \log_a x_2 > \log_a x_1 \Rightarrow x_2 > x_1) \Rightarrow a > 1.$$

Considerando

$$\log_a x_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = a^{y_2} \text{ e}$$

$$\log_a x_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = a^{y_1}, \text{ temos:}$$

$$y_2 > y_1 \Rightarrow a^{y_2} > a^{y_1}.$$

Pelo fato de a função exponencial ser crescente para base maior que 1, concluímos que $a > 1$.

A demonstração de que a função logarítmica é decrescente se, e somente se, a base é positiva e menor que 1 ficará como exercício.

59. Observações

1ª) Quando a base é maior que 1, a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos tem o mesmo sentido que a relação entre esses números.

Exemplos:

$$1^\circ) 4 > 2 \Rightarrow \log_2 4 > \log_2 2$$

$$2^\circ) 15 > 4 \Rightarrow \log_3 15 > \log_3 4$$

$$3^\circ) \sqrt{5} < 7 \Rightarrow \log \sqrt{5} < \log 7$$

$$4^\circ) 0,42 < 6,3 \Rightarrow \log_7 0,42 < \log_7 6,3$$

$$5^\circ) 4 > 0,3 \Rightarrow \ln 4 > \ln 0,3$$

2ª) Quando a base é positiva e menor que 1, a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos é de sentido contrário à que existe entre esses números.

Exemplos:

$$1^\circ) 8 > 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 8 < \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$2^\circ) 12 > 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 12 < \log_{\frac{1}{3}} 5$$

$$3^\circ) \sqrt{3} < 7 \Rightarrow \log_{0,1} \sqrt{3} > \log_{0,1} 7$$

$$4^\circ) 0,3 < 2,4 \Rightarrow \log_{0,2} 0,3 > \log_{0,2} 2,4$$

3ª) Se a base é maior que 1, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos negativos e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos.

De fato, se $a > 1$:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$$

Exemplos:

$$1^\circ) \log_2 0,25 < 0$$

$$2^\circ) \log 0,02 < 0$$

$$3^\circ) \log_2 32 > 0$$

$$4^\circ) \log_3 \sqrt{5} > 0$$

4ª) Se a base é positiva e menor que 1, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos positivos e os números maiores que 1 têm logaritmos negativos.

De fato, se $0 < a < 1$:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$$

Exemplos:

$$1^\circ) \log_{0,5} 0,25 > 0$$

$$2^\circ) \log_{0,1} 0,03 > 0$$

$$3^\circ) \log_{0,5} 4 < 0$$

$$4^\circ) \log_{0,2} \sqrt{3} < 0$$

III. Imagem

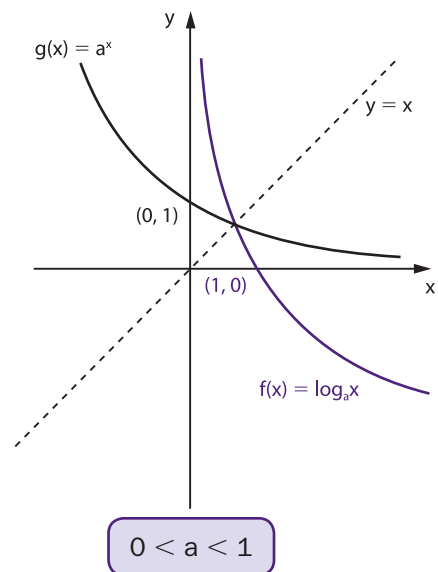
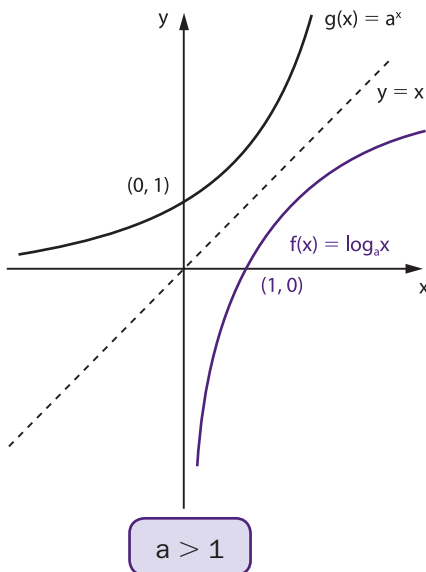
Se $0 < a \neq 1$, então a função f de \mathbb{R}_+^* em \mathbb{R} definida por $f(x) = \log_a x$ admite a função inversa de g de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* definida por $g(x) = a^x$. Logo, f é bijetora e, portanto, a imagem de f é:

$$\text{Im} = \mathbb{R}$$

IV. Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$), podemos dizer:

- 1º) está todo à direita do eixo y ($x > 0$);
- 2º) corta o eixo x no ponto de abscissa 1 ($\log_a 1 = 0$ para todo $0 < a \neq 1$);
- 3º) se $a > 1$ é de uma função crescente e se $0 < a < 1$ é de uma função decrescente;
- 4º) é simétrico em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) do gráfico da função $g(x) = a^x$;
- 5º) toma um dos aspectos da figura abaixo:

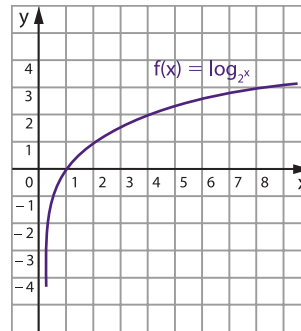


60. Exemplos:

1º) Construir o gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_2 x$ ($x > 0$). Construímos a tabela dando valores inicialmente a y e depois calculamos x .

| x | $y = \log_2 x$ |
|---|----------------|
| | -3 |
| | -2 |
| | -1 |
| | 0 |
| | 1 |
| | 2 |
| | 3 |

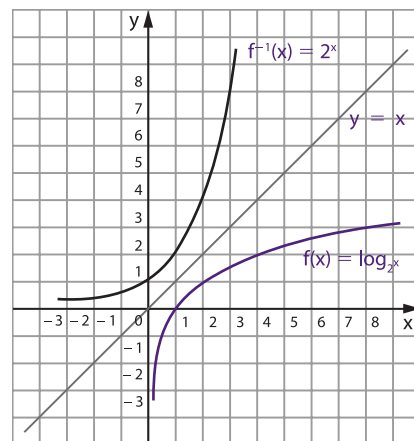
| x | $y = \log_2 x$ |
|---------------|----------------|
| $\frac{1}{8}$ | -3 |
| $\frac{1}{4}$ | -2 |
| $\frac{1}{2}$ | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |



Uma alternativa para construirmos o gráfico de $f(x) = \log_2 x$ ($x > 0$) seria construirmos inicialmente o gráfico da função inversa $g(x) = f^{-1}(x) = 2^x$ e lembrar que, se $(b, a) \in f^{-1} = g$, então $(a, b) \in f$.

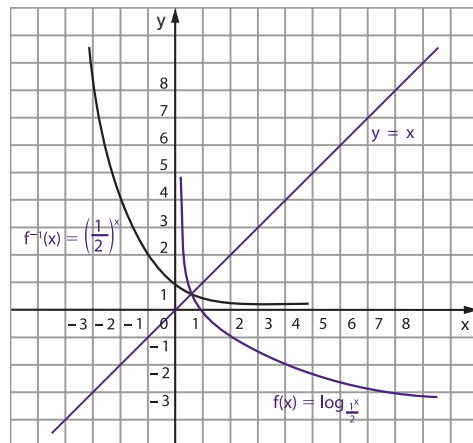
| f^{-1} | |
|----------|---------------|
| x | $y = 2^x$ |
| -3 | $\frac{1}{8}$ |
| -2 | $\frac{1}{4}$ |
| -1 | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |

| f | |
|---------------|----------------|
| x | $y = \log_2 x$ |
| $\frac{1}{8}$ | -3 |
| $\frac{1}{4}$ | -2 |
| $\frac{1}{2}$ | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |



2º) Construir o gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ($x > 0$).

| f^{-1} | | f | |
|----------|----------------------------------|---------------|----------------------------|
| x | $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | x | $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ |
| -3 | 8 | 8 | -3 |
| -2 | 4 | 4 | -2 |
| -1 | 2 | 2 | -1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 2 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 3 |



EXERCÍCIOS

205. Assinale em cada proposição V (verdadeira) ou F (falsa):

- $\log_2 3 > \log_2 0,2$
- $\log_3 5 < \log_3 7$
- $\log_{\frac{1}{2}} 6 > \log_{\frac{1}{2}} 3$
- $\log_{0,1} 0,13 > \log_{0,1} 0,32$
- $\log_4 0,10 > \log_4 0,9$
- $\log_{0,2} 2,3 < \log_{0,2} 3,5$
- $\log \frac{1}{2} < \log \frac{1}{3}$
- $\log_{0,5} \frac{2}{3} > \log_{0,5} \frac{3}{4}$
- $\log_5 \sqrt{2} > \log_5 \sqrt{3}$
- $\log_{(\sqrt{2}-1)} (1 + \sqrt{2}) < \log_{(\sqrt{2}-1)} 6$

- 206.** Sendo $y = e^x$ para x pertencente a \mathbb{R} , expresse sua função inversa.
- 207.** Se $f(x) = \log_e \frac{1}{x}$, calcule o valor de $f(e^3)$.
- 208.** Seja f a função que a cada quadrado perfeito associa seu logaritmo na base 2. Se $f(x^2) = 2$, determine o valor de x .
- 209.** Construa os gráficos das funções:
- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \log_3 x$ | c) $f(x) = \log x$ |
| b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ | d) $f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$ |
- 210.** Construa os gráficos das funções:
- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = \log_2 x $ | c) $f(x) = \lvert \log_2 x \rvert$ |
| b) $f(x) = \lvert \log_2 x \rvert$ | |
- 211.** Represente graficamente a função f definida por $f(x) = \ell n |x|$.
- 212.** Construa os gráficos das funções:
- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = \log_2 (x - 1)$ | c) $f(x) = \log_2 x^2$ |
| b) $f(x) = \log_3 (2x - 1)$ | d) $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$ |
- 213.** Construa os gráficos das funções:
- | | |
|--------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = 2 + \log_2 x$ | b) $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$ |
|--------------------------|--------------------------------------|
- 214.** Represente graficamente a função f definida por
- $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ \sqrt{\log_a |x|} & \text{se } |x| \geq 1 \text{ e } a > 1 \end{cases}$$
- 215.** Represente graficamente a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lvert \log_2 |x - 2| \rvert$.
- 216.** Determine o número de pontos comuns aos gráficos das funções definidas por $y = e^x$ e $y = -\log |x|$, $x \neq 0$.
- 217.** Determine o domínio da função $f(x) = \log_3 (x^2 - 4)$.

Solução

Para que o logaritmo seja real, devemos ter logaritmando positivo e base positiva e diferente de 1.

Assim:

$$\log_3(x^2 - 4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x > 2$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}.$$

218. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_2(1 - 2x)$

c) $f(x) = \log_5 \frac{x+1}{1-x}$

b) $f(x) = \log_3(4x - 3)^2$

d) $f(x) = \log(x^2 + x - 12)$

219. Determine o conjunto do domínio da função definida por $\log(x^2 - 6x + 9)$.

220. Determine os valores de K para que o domínio da função f dada por $f(x) = \log(x^2 + Kx + K)$ seja o conjunto dos números reais.

221. Determine o domínio da função $f(x) = \log_{(x+1)}(2x^2 - 5x + 2)$.

Solução

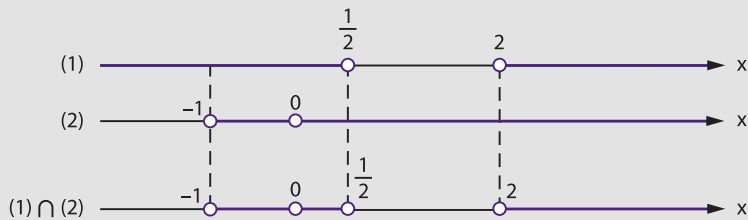
$$\log_{(x+1)}(2x^2 - 5x + 2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0 & (1) \text{ e} \\ 0 < x + 1 \neq 1 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo separadamente as inequações (1) e (2), temos:

$$(1) \quad 2x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2$$

$$(2) \quad 0 < x + 1 \neq 1 \Rightarrow -1 < x \neq 0$$

Fazendo a interseção desses conjuntos:



$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq 0 \right\}$$

222. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_{(3-x)}(x + 2)$

c) $f(x) = \log_{(2x-3)}(3 + 2x - x^2)$

b) $f(x) = \log_x(x^2 + x - 2)$