GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Conjuntos
Funções

1

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO IV

Relações

I. Par ordenado

59. Par

Chama-se **par** todo conjunto formado por dois elementos. Assim {1, 2}, {3, −1}, {a, b} indicam pares. Lembrando do conceito de igualdade de conjuntos, observamos que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}, \{3, -1\} = \{-1, 3\}, \{a, b\} = \{b, a\}$$

Em Matemática existem situações em que há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos. Por exemplo, no sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ e $y = 1$ é solução, ao passo que $x = 1$ e $y = 2$ não é solução. Se representássemos por um conjunto, teríamos: {2, 1} seria solução e {1, 2} não seria solução. Há uma contradição, pois, sendo {2, 1} = {1, 2}, o mesmo conjunto é e não é solução. Por causa disso dizemos que a solução é o **par ordenado** (2, 1), em que fica subentendido que o primeiro elemento, 2, refere-se à incógnita *x* e o segundo elemento, 1, refere-se à incógnita *y*.

60. Par ordenado

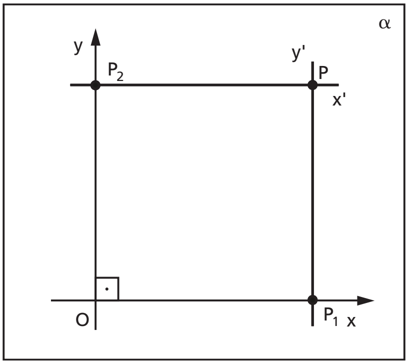
Admitiremos a noção de par ordenado como conceito primitivo(*). Para cada elemento *a* e cada elemento *b*, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b), que denominamos par ordenado, de modo que se tenha

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \quad \text{e} \quad b = d}$$

II. Representação gráfica

61. Plano cartesiano

Consideremos dois eixos *x* e *y* perpendiculares em O, os quais determinam o plano α.



Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por ele duas retas:

$$x' \,//\, x \quad \text{e} \quad y' \,//\, y$$

Denominemos P_1 a interseção de *x* com *y*' e P_2 a interseção de *y* com *x*'.

Nessas condições definimos:

a) **abscissa** de P é o número real x_P representado por P_1

b) **ordenada** de P é o número real y_P representado por P_2

c) **coordenadas** de P são os números reais x_P e y_P, geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_P, y_P) em que x_P é o primeiro termo

d) **eixo das abscissas** é o eixo *x* (ou Ox)

e) **eixo das ordenadas** é o eixo *y* (ou Oy)

f) **sistema de eixos cartesiano ortogonal** (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy

g) **origem** do sistema é o ponto O

h) **plano cartesiano** é o plano α

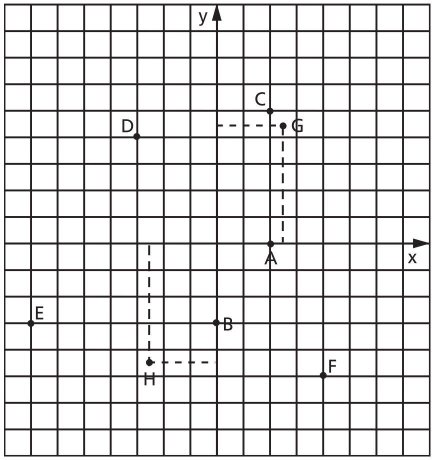
(*) Poderíamos definir par ordenado como Kuratowski fez:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

mas isso ficaria fora do nível deste curso.

Exemplo:

Vamos localizar os pontos $A(2, 0)$, $B(0, -3)$, $C(2, 5)$, $D(-3, 4)$, $E(-7, -3)$, $F(4, -5)$, $G\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ e $H\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ no plano cartesiano, lembrando que, no par ordenado, o primeiro número representa a abscissa e o segundo, a ordenada do ponto.



62. Correspondência entre pontos e pares ordenados

Teorema

Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_P, y_P) de números reais existe uma correspondência biunívoca.

Demonstração:

1ª parte

As definições dadas anteriormente indicam que a todo ponto P, $P \in \alpha$, corresponde um único par de pontos (P_1, P_2) sobre os eixos *x* e *y* respectivamente e, portanto, um único par ordenado de números reais (x_P, y_P) tais que x_P e y_P são representados por P_1 e P_2, respectivamente.

Esquema: $P \to (P_1, P_2) \to (x_P, y_P)$.

2ª parte

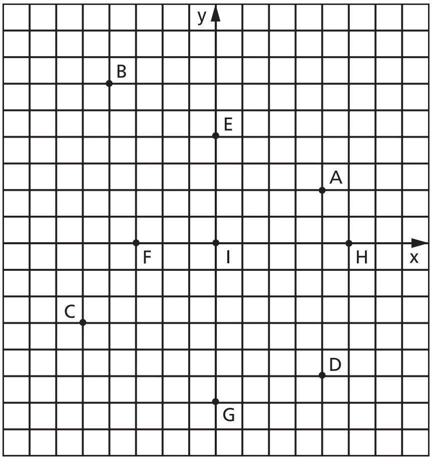
Dado o par ordenado de números reais (x_P, y_P), existem $P_1 \in x$ e $P_2 \in y$ tais que P_1 representa x_P e P_2 representa y_P conforme vimos no item 60.

Se construirmos $x' /\!/ x$ por P_2 e $y' /\!/ y$ por P_1, essas retas vão concorrer em P. Assim, a todo par (x_P, y_P) corresponde um único ponto P, $P \in \alpha$.

Esquema: $(x_P, y_P) \to (P_1, P_2) \to P$.

EXERCÍCIOS

117. Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano abaixo.



118. Assinale no plano cartesiano os pontos: A(2, −3), B(0, −4), C(−4, −5), D(−1, 0), E(0, 5), F(5, 4), G(3, 0), H(−3, 2), $I\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

III. Produto cartesiano

63. Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos **produto cartesiano** de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \quad \text{e} \quad y \in B\}$$

Lê-se a notação $A \times B$ assim: “A cartesiano B” ou “produto cartesiano de A por B”.

Se A ou B for o conjunto vazio, definiremos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto vazio.

$$A \times \varnothing = \varnothing \qquad \varnothing \times B = \varnothing \qquad \varnothing \times \varnothing = \varnothing$$

Exemplos:

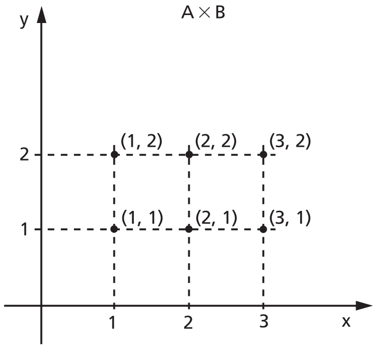
1º) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, temos

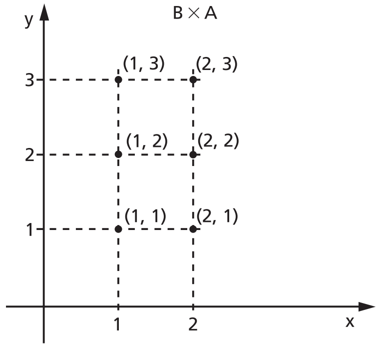
$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

e

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

e as representações no plano cartesiano são as seguintes:

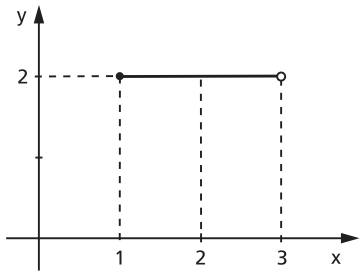




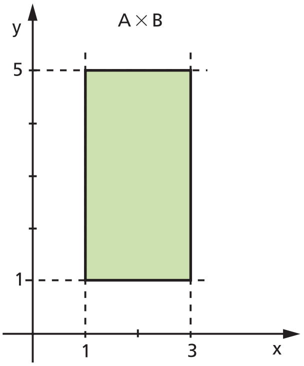
2º) Se $A = \{2, 3\}$, então o conjunto $A \times A$ (que também pode ser indicado por A^2 e lê-se "A dois") é:

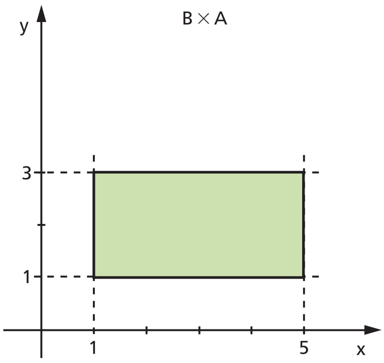
$$A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

3º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 3\}$ e $B = \{2\}$, então temos $A \times B = \{(x, 2) \mid x \in A\}$. A representação gráfica de $A \times B$ dá como resultado o conjunto de pontos do segmento paralelo ao eixo dos *x* da figura ao lado.



4º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$, temos $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 5\}$ representado graficamente no plano cartesiano pelo conjunto de pontos de um retângulo. Notemos que $B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 5 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 3\}$ é representado por um retângulo distinto do anterior.





Observações:

1ª) Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$, isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa.

2ª) Se A e B são conjuntos finitos com *m* e *n* elementos respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos.

3ª) Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito.

EXERCÍCIOS

119. Dados os conjuntos

$A = \{1, 3, 4\}$ $\qquad$ $B = \{-2, 1\}$ $\qquad$ $C = \{-1, 0, 2\}$

represente pelos elementos e pelo gráfico cartesiano os seguintes produtos:

a) $A \times B$ $\qquad$ c) $A \times C$ $\qquad$ e) B^2

b) $B \times A$ $\qquad$ d) $C \times A$ $\qquad$ f) C^2

120. Dados os conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$

represente graficamente os seguintes produtos:

a) $A \times B$ $\qquad$ c) $B \times C$ $\qquad$ e) A^2

b) $A \times C$ $\qquad$ d) $C \times B$ $\qquad$ f) C^2

121. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$, represente graficamente os conjuntos:

a) $A \times B$

b) $B \times A$

c) $(A \times B) \cup (B \times A)$

122. Sejam os conjuntos A, B e C tais que $A \subset B \subset C$. Estabeleça as relações de inclusão entre os conjuntos $A \times A$, $A \times B$, $A \times C$, $B \times A$, $B \times B$, $B \times C$, $C \times A$, $C \times B$ e $C \times C$.

123. Sabendo que $\{(1, 2), (4, 2)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 9$, represente pelos elementos o conjunto A^2.

Solução

O número de elementos de A^2 é igual ao quadrado do número de elementos de A; portanto:

$$n(A^2) = [n(A)]^2 \Rightarrow [n(A)]^2 = 9 \Rightarrow n(A) = 3$$

Se A é um conjunto de 3 elementos, $(1, 2) \in A^2$ e $(4, 2) \in A^2$, concluímos que $A = \{1, 2, 4\}$.

Assim sendo:

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$

124. Se $\{(1, -2), (3, 0)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 16$, então represente A^2 pelos seus elementos.

125. Considerando $A \subset B$, $\{(0, 5), (-1, 2), (2, -1)\} \subset A \times B$ e $n(A \times B) = 12$, represente $A \times B$ pelos seus elementos.

126. Sejam $F = \{1, 2, 3, 4\}$ e $G = \{3, 4, 7\}$. Determine o número de elementos de $F \times G$.

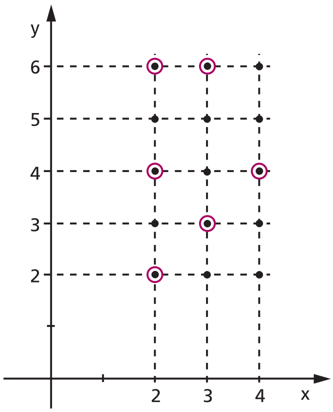
127. Dados os conjuntos $A = \left\{1, \dfrac{3}{2}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$, represente graficamente $A \times B$.

128. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Sejam ainda os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leqslant 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Qual é o número de elementos do conjunto $D = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geqslant x + 4\}$?

IV. Relação binária

64. Consideremos os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. O produto cartesiano de A por B é o conjunto

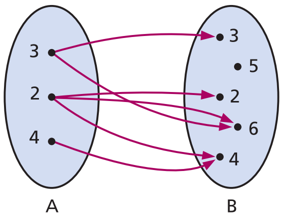
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$



formado por $3 \cdot 5 = 15$ elementos representados na figura ao lado. Se agora considerarmos o conjunto de pares ordenados (x, y) de $A \times B$ tais que $x \mid y$ (lê-se: "*x* é divisor de *y*"), teremos $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x \mid y\} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$, que é chamado relação entre os elementos de A e de B ou, simplesmente, **relação binária de A em B**.

O conjunto R está contido em $A \times B$ e é formado por pares (x, y), em que o elemento *x* de A é "associado" ao elemento *y* de B mediante um certo critério de "relacionamento" ou "correspondência".

Será bastante útil a representação da relação por meio de flechas, como na figura ao lado.



65. Dados dois conjuntos A e B, chama-se **relação binária de A em B** todo subconjunto R de $A \times B$.

$$\boxed{R \text{ é relação binária de A em B} \iff R \subset A \times B.}$$

Se, eventualmente, os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de $A \times A$ é chamado **relação binária em A**.

$$\boxed{R \text{ é relação binária em A} \iff R \subset A \times A.}$$

Utilizaremos as seguintes nomenclaturas já consagradas:

A = conjunto de partida da relação R

B = conjunto de chegada ou contradomínio da relação R

Quando o par (x, y) pertence à relação R, escrevemos xRy (lê-se: "*x* erre *y*").

$$\boxed{(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy}$$

Se o par (x, y) não pertence à relação R, escrevemos $x\not{R}y$ (lê-se "*x* não erre *y*").

$$\boxed{(x, y) \notin R \Leftrightarrow x\not{R}y}$$

Exemplos:

1º) Se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {1, 2, 3, 4}, quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \mid x < y\}$ de A em B?

Os elementos de R são todos os pares ordenados de $A \times B$ nos quais o primeiro elemento é menor que o segundo, isto é, são os pares formados pela "associação de cada elemento $x \in A$ com cada elemento de $y \in B$ tal que $x < y$".

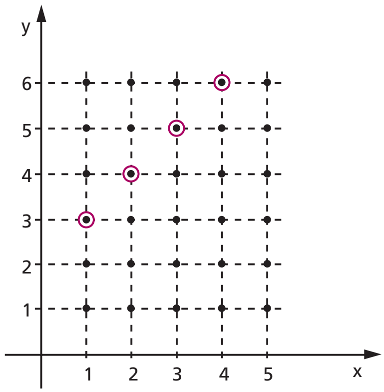
Temos, então:

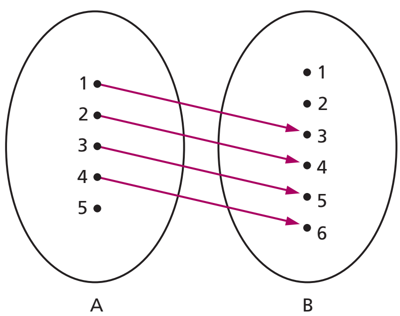
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

2º) Se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, quais são os elementos da relação binária R de A em B assim definida: $xRy \Leftrightarrow y = x + 2$?

Fazem parte da relação todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$, $y \in B$ e $y = x + 2$.

Utilizando as representações gráficas:

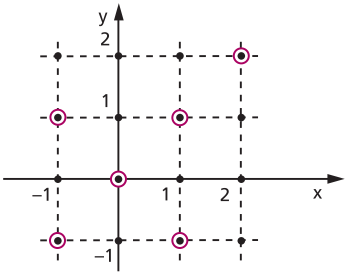


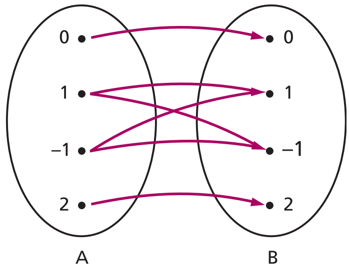


3º) Se $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x^2 = y^2\}$?

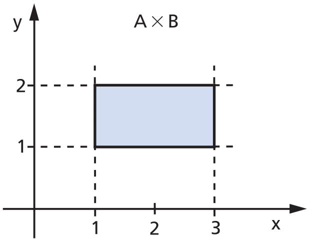
Fazendo a representação gráfica, notamos que:

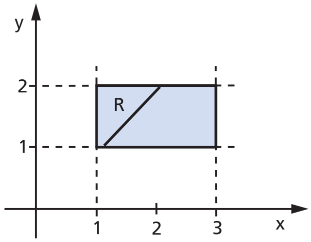
$$R = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1), (2, 2)\}$$





4º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$, pede-se a representação cartesiana de $A \times B$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$.





EXERCÍCIOS

129. I) Enumere pares ordenados.

II) Represente por meio de flechas.

III) Faça o gráfico cartesiano das relações binárias de $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ definidas por:

a) $xRy \Leftrightarrow x + y = 2$

b) $xSy \Leftrightarrow x^2 = y$

c) $xTy \Leftrightarrow |x| = |y|$

d) $xVy \Leftrightarrow x + y > 2$

e) $xWy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 1$

130. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, enumere os pares ordenados e construa o gráfico cartesiano da relação R em A dada por:

$$R = \left\{(x, y) \in A^2 \mid \text{mdc}\ (x, y) = 2\right\}$$

131. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Construa o gráfico cartesiano da relação R em A definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ são primos entre si}$$

132. Dado o conjunto $A = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid -7 \leqslant m \leqslant 7\right\}$, construa o gráfico cartesiano da relação binária R em A definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

V. Domínio e imagem

66. Domínio

Seja R uma relação de A em B.

Chama-se **domínio** de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencente a R.

$$\boxed{x \in D \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y, y \in B \mid (x, y) \in R}$$

Decorre da definição que $D \subset A$.

67. Imagem

Chama-se **imagem** de R o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencente a R.

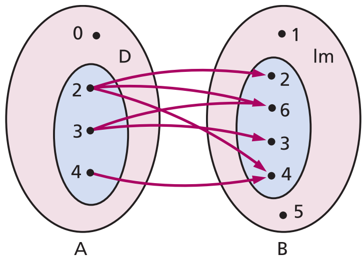
$$\boxed{y \in \text{Im} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x, x \in A \mid (x, y) \in R}$$

Decorre da definição que $\text{Im} \subset B$.

Exemplos:

1º) Se $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual é o domínio e a imagem da relação $R = \left\{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ é múltiplo de } x\right\}$?

Utilizando o esquema das flechas é fácil perceber que D é o conjunto dos elementos de A dos quais partem flechas e que Im é o conjunto dos elementos de B aos quais chegam flechas; portanto:

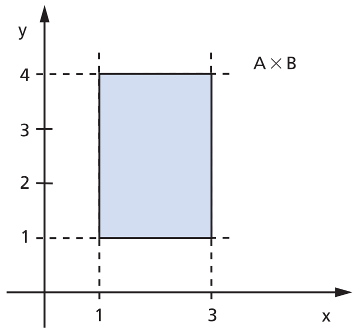


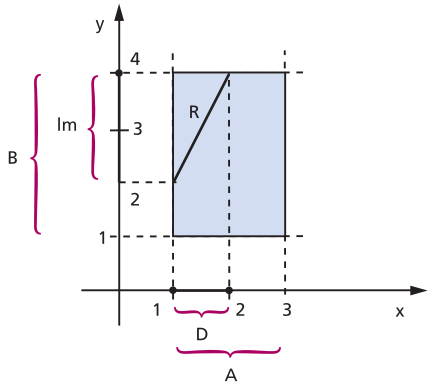
$R = \{(2, 2), (2, 4) (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$
$D = \{2, 3, 4\}$ $\quad$ $Im = \{2, 3, 4, 6\}$

2º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 4\}$, qual é o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$?

Utilizando a representação cartesiana, temos:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ e $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 4\}$





EXERCÍCIOS

133. Estabeleça o domínio e a imagem das seguintes relações:

a) $\{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$

b) $\{(-2, 4), (-1, 1), (3, -7), (2, 1)\}$

c) $\{(2, 1), (1, -3), (5, \sqrt{2})\}$

d) $\{(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}), (1 - \sqrt{3}, 1)\}$

e) $\left\{\left(3, \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{5}{2}, -1\right), \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)\right\}$

134. Estabeleça o domínio e a imagem das relações binárias do exercício 129.

135. Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e R a relação binária de A em B definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x = y^2$$

a) Enumere os pares ordenados de R.
b) Enumere os elementos do domínio e da imagem de R.
c) Faça o gráfico cartesiano de R.

136. Qual é o domínio da relação

$$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{4 - x^2}\right\}?$$

137. Se R é a relação binária de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 4\}$, definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x = 2y$$

forneça:
a) a representação cartesiana de $A \times B$;
b) a representação cartesiana de R;
c) o domínio e a imagem de R.

138. Se R e S são as relações binárias de $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$ em $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant y \leqslant 3\}$ definidas por:

$$xRy \Leftrightarrow 2 \text{ divide } (x - y)$$
$$xSy \Leftrightarrow (x - 1)^2 = (y - 2)^2$$

forneça:
a) as representações cartesianas de R e de S;
b) o domínio e a imagem de R e de S;
c) $R \cap S$.

VI. Relação inversa

68. Dada uma relação binária R de A em B, consideremos o conjunto

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Como R^{-1} é subconjunto de $B \times A$, então R^{-1} é uma relação binária de B em A, à qual daremos o nome de **relação inversa de R**.

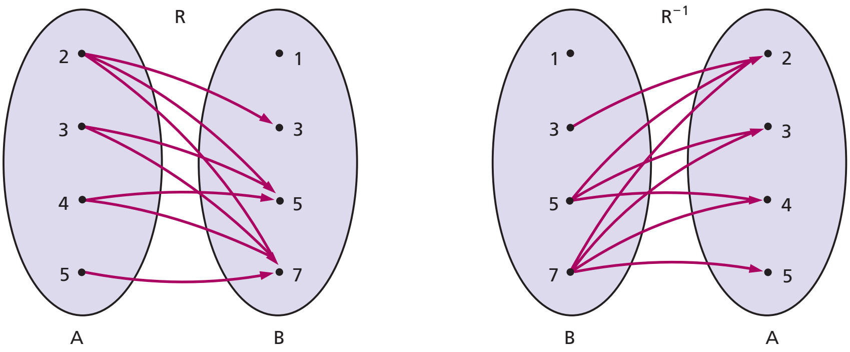
$$\boxed{(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R}$$

Decorre dessa definição que R^{-1} é o conjunto dos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de R invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

Exemplos:

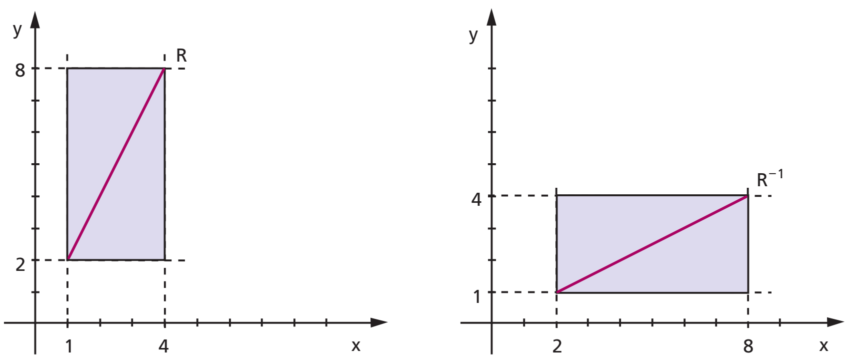
1º) Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, quais são os elementos de $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$ e de R^{-1}?

Utilizando o esquema das flechas,



temos: $R = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 7)\}$ e
$R^{-1} = \{(3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 4), (7, 5)\}$.

2º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 8\}$, representar no plano cartesiano as relações $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ e sua inversa R^{-1}.



VII. Propriedades das relações

69. São evidentes as seguintes propriedades:

1ª) $D(R^{-1}) = Im(R)$

isto é, o domínio de R^{-1} é igual à imagem de R.

2ª) $Im(R^{-1}) = D(R)$

isto é, a imagem de R^{-1} é igual ao domínio de R.

3ª) $(R^{-1})^{-1} = R$

isto é, a relação inversa de R^{-1} é a relação de R.

EXERCÍCIOS

139. Enumere os elementos de R^{-1}, relação inversa de R, nos seguintes casos:

a) $R = \{(1, 2), (3, 1), (2, 3)\}$

b) $R = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1), (-2, 1)\}$

c) $R = \{(-3, -2), (1, 3), (-2, -3), (3, 1)\}$

140. Enumere os elementos e esboce os gráficos de R e R^{-1}, relações binárias em $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 10\}$, nos seguintes casos:

a) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x + y = 8\}$

b) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x + 2y = 10\}$

c) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = (x - 3)^2 + 1\}$

d) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = 2^x\}$

141. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 10\}$ e as seguintes relações binárias:

a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$

b) $S = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

c) $T = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$

d) $V = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 7\}$

dê o gráfico cartesiano dessas relações e das respectivas relações inversas.

CAPÍTULO V

Introdução às funções

I. Conceito de função

70. Exemplos iniciais

Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

e as seguintes relações binárias de A em B:

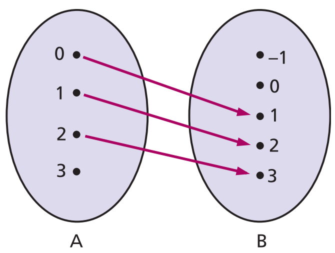
$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$
$S = \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$
$T = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$
$V = \{(x, y) \in A \times B \mid y = (x - 1)^2 - 1\}$
$W = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2\}$

Analisando cada uma das relações, temos:

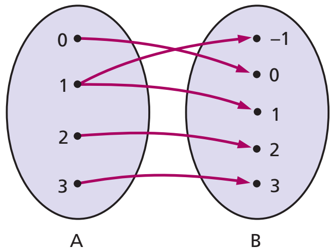
a) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.

Para o elemento $3 \in A$, não existe $y \in B$ tal que $(3, y) \in R$.

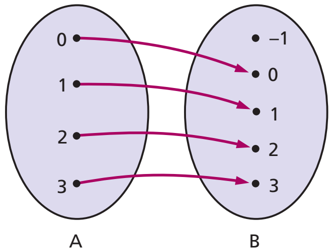


b) $S = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, 2), (3, 3)\}$



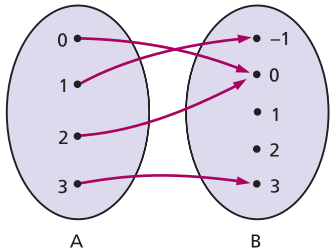
Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in S$. Para o elemento $1 \in A$ existem dois elementos de B, o 1 e o -1, tais que $(1, 1) \in S$ e $(1, -1) \in S$.

c) $T = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$



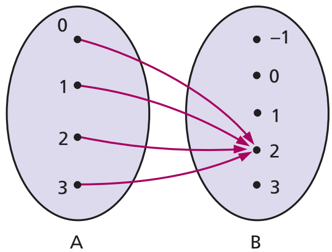
Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in T$.

d) $V = \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$



Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in V$.

e) $W = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$



Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in W$.

As relações T, V e W, que apresentam a particularidade: "para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que (x, y) pertence à relação", recebem o nome de **aplicação de A em B** ou **função definida em A com imagens em B**.

II. Definição de função

71. Dados dois conjuntos A e B(*), não vazios, uma relação *f* de A em B recebe o nome de **aplicação de A em B** ou **função definida em A com imagens em B** se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$f \text{ é aplicação de A em B} \iff (\forall\, x \in A, \exists \mid y \in B \mid (x, y) \in f)$$

72. Esquema de flechas

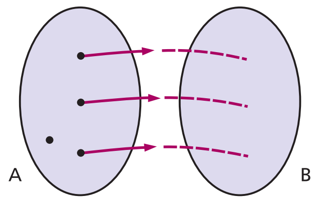
Vejamos agora, com o auxílio do esquema de flechas, que condições deve satisfazer uma relação *f* de A em B para ser aplicação (ou função).

1ª) É necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A "deve servir como ponto de partida de flecha".

2ª) É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A "deve servir como ponto de partida de uma única flecha".

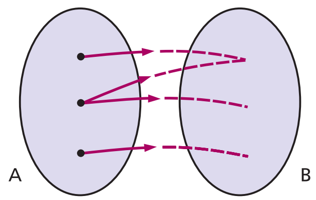
Uma relação *f* não é aplicação (ou função) se não satisfizer uma das condições acima, isto é:

1ª) se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma ou



f não é função

2ª) se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.



f não é função

(*) Em todo o nosso estudo de funções, fica estabelecido que A e B são conjuntos formados de números reais, isto é, A e B contidos em $\mathbb{R}$.

73. Gráfico cartesiano

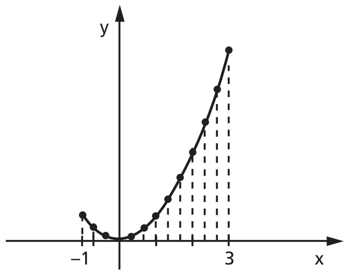
Podemos verificar pela representação cartesiana da relação f de A em B se f é ou não função: basta verificarmos se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto (x, 0), em que $x \in A$, "encontra sempre o gráfico de f em um só ponto".

Exemplos:

1º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, com

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$,

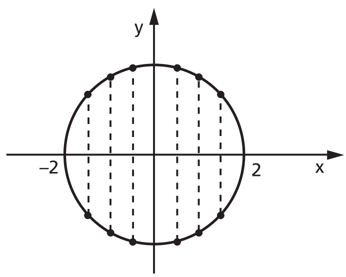
representada ao lado, **é função**, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in A$ "encontra sempre o gráfico de f num só ponto".



2º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, representada ao lado, em que

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$,

não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em dois pontos.

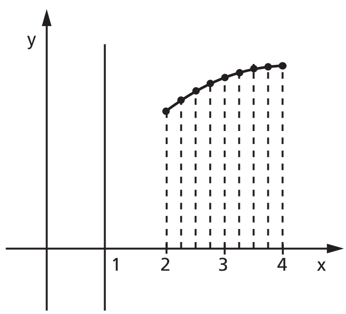


3º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, representada ao lado, em que

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$,

não é função de A em $\mathbb{R}$, pois a reta vertical conduzida pelo ponto (1, 0) não encontra o gráfico de f. Observamos que f é função de B em $\mathbb{R}$ em que

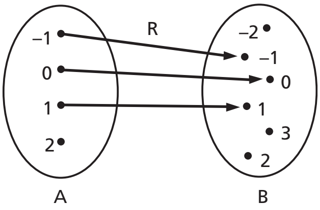
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.



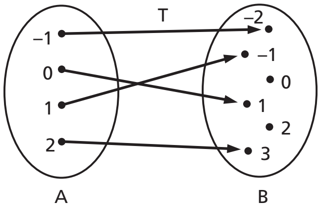
EXERCÍCIOS

142. Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Justifique.

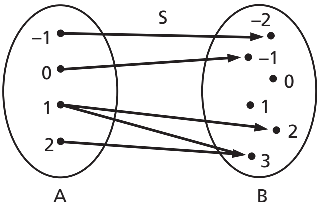
a)



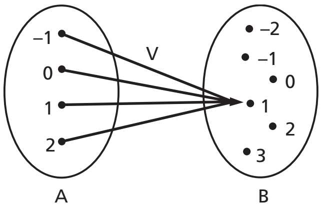
c)



b)

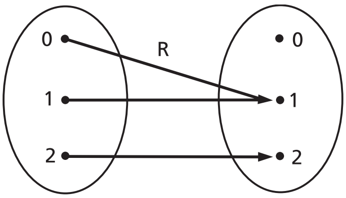


d)

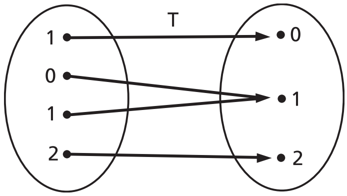


143. Quais dos esquemas abaixo definem uma função de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{-1, 0, 1, 2\}$?

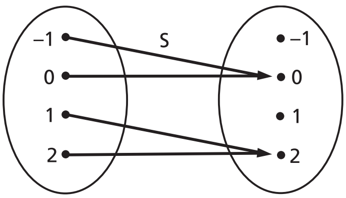
a)



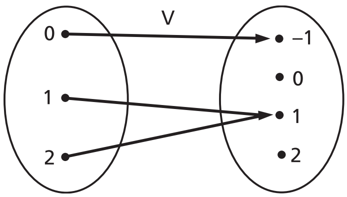
c)



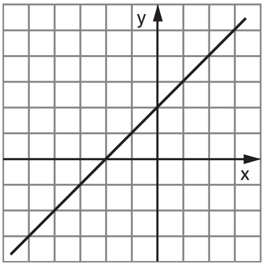
b)

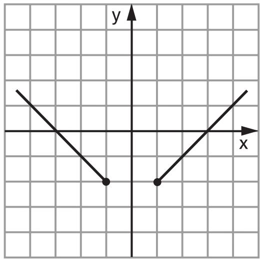


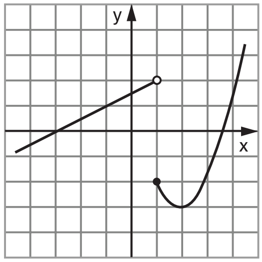
d)

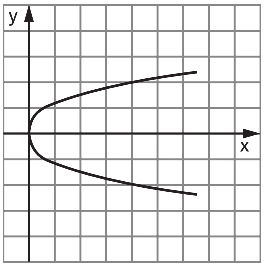


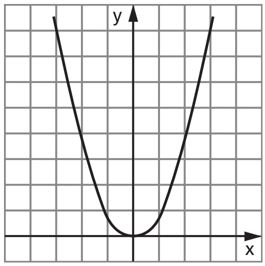
144. Quais das relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

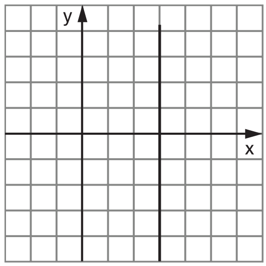
a)


c)


e)


b)


d)


f)


III. Notação das funções

74. Toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.

Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}.$$

Isso significa que, dados os conjuntos A e B, a função *f* tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Para indicarmos uma função *f*, definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações:

$$\begin{array}{ll} f\colon & A \to B \\ & x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} f\colon A \to B \quad \text{tal que} \\ \quad y = f(x) \end{array}$$

Exemplos:

1º) f: $A \to B$ tal que $y = 2x$

é uma função que associa a cada *x* de A um *y* de B tal que $y = 2x$.

2º) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$

é uma função que leva a cada *x* de $\mathbb{R}$ um *y* de $\mathbb{R}$ tal que $y = x^2$.

3º) f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$

é uma função que faz corresponder a cada $x \in \mathbb{R}_+$ um $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$.

75. Imagem de um elemento

Se $(a, b) \in f$, como já dissemos anteriormente, o elemento *b* é chamado **imagem** de *a* pela aplicação *f* ou **valor** de *f* no elemento *a*, e indicamos:

$$f(a) = b$$

que se lê "*f* de *a* é igual a *b*".

Exemplo:

Seja a função

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto 2x + 1, \text{ então:} \end{aligned}$$

a) a imagem de 0 pela aplicação *f* é 1, isto é:

$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

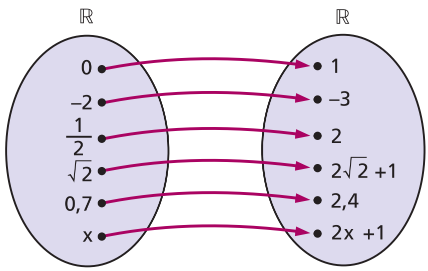
b) a imagem de -2 pela aplicação *f* é -3, isto é:
$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$

c) analogamente:

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 = 2$

$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} + 1$

$f(0{,}7) = 2 \cdot 0{,}7 + 1 = 2{,}4$



EXERCÍCIOS

145. Qual é a notação das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

a) *f* associa cada número real ao seu oposto.

b) *g* associa cada número real ao seu cubo.

c) *h* associa cada número real ao seu quadrado menos 1.

d) *k* associa cada número real ao número 2.

146. Qual é a notação das seguintes funções?

a) *f* é função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número racional ao seu oposto adicionado com 1.

b) *g* é a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número inteiro à potência de base 2 desse número.

c) *h* é a função de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real ao seu inverso.

147. Seja *f* a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:

a) $f(2)$ b) $f(-3)$ c) $f(0)$ d) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

148. Seja *f* a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcule:

a) $f(2)$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e) $f(\sqrt{3})$

b) $f(-1)$ d) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ f) $f(1 - \sqrt{2})$

149. Seja P o único número natural que é primo e par. Sendo $f(x) = (0{,}25)^{-x} + x - 1$, determine o valor de f(P).

150. Seja *f* a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcule:

a) $f(3)$ c) $f(\sqrt{2})$ e) $f(\sqrt{3} - 1)$

b) $f\left(-\frac{3}{7}\right)$ d) $f(\sqrt{4})$ f) $f(0{,}75)$

151. Seja a função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{5}$. Qual é o elemento do domínio que tem $-\dfrac{3}{4}$ como imagem?

Solução

Para determinar o valor de *x* tal que $f(x) = -\frac{3}{4}$ basta, portanto, resolver a equação $\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4}$.

Resolvendo a equação:

$$\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(2x - 3) = -3 \cdot 5 \Leftrightarrow 8x - 12 = -15 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{8}$$

Resposta: O elemento é $x = -\frac{3}{8}$.

152. Seja a função *f* de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$. Qual é o elemento do domínio que tem imagem 2?

153. Quais são os valores do domínio da função real definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$ que produzem imagem igual a 3?

154. A função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(3x) = 3f(x)$. Se $f(9) = 45$, calcule $f(1)$.

Solução

Fazendo $3x = 9 \Rightarrow x = 3$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = 3 \cdot f(3) = 45 = 3 \cdot 15 \Rightarrow f(3) = 15$

Fazendo $3x = 3 \Rightarrow x = 1$

$f(3) = f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1) = 15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow f(1) = 5$

Portanto, $f(1) = 5$.

155. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade: $f(m \cdot x) = m \cdot f(x)$ para $m \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(0)$.

156. É dada uma função real tal que:

1. $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$
2. $f(1) = 2$
3. $f(\sqrt{2}) = 4$

Calcule $f(3 + \sqrt{2})$.

157. Seja *f* uma função definida no conjunto dos números naturais, tal que:

$$f(n + 1) = 2f(n) + 3$$

para todo *n* natural.

a) Supondo $f(0) = 0$, calcule $f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$ e descubra a "fórmula geral" de $f(n)$.

b) Prove por indução finita a fórmula descoberta.

IV. Domínio e imagem

Considerando que toda função *f* de A em B é uma relação binária, então *f* tem um **domínio** e uma **imagem**.

76. Domínio

Chamamos de **domínio** o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

domínio = conjunto de partida

isto é,

$$D = A$$

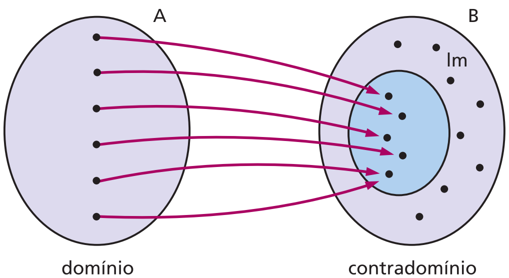
77. Imagem

Chamamos de **imagem** o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto:

imagem é subconjunto do contradomínio

isto é,

$$Im \subset B$$



Notemos que, feita a representação cartesiana da função *f*, temos:

Domínio

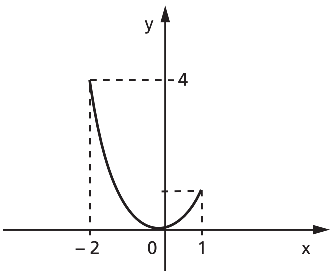
(D) é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de *f*, isto é, é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de *f*.

Imagem

(Im) é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de *f*, isto é, é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de *f*.

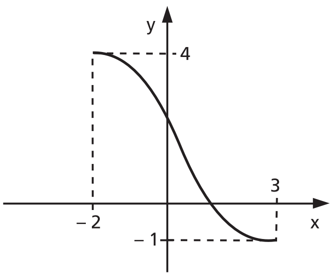
Exemplos:

1º)



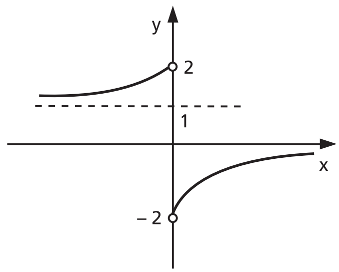
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 4\}$

2º)



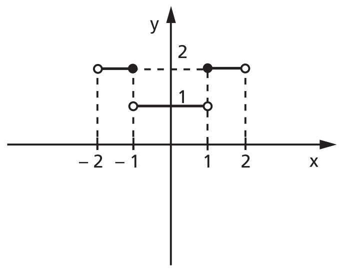
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 4\}$

3º)



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 0$
ou $1 < y < 2\}$

4º)



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$
$Im = \{1, 2\}$

78. Domínio das funções numéricas

As funções que apresentam maior interesse na Matemática são as funções numéricas, isto é, aquelas em que o domínio A e o contradomínio B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. As **funções numéricas** são também chamadas **funções reais de variável real**.

Observemos que uma função *f* fica completamente definida quando são dados o seu domínio D, o seu contradomínio e a lei de correspondência $y = f(x)$.

Quando nos referimos à função *f* e damos apenas a sentença aberta $y = f(x)$ que a define, subentendemos que D é o conjunto dos numeros reais *x* cujas imagens pela aplicação *f* são números reais, isto é, D é formado por todos os números reais *x* para os quais é possível calcular f(x).

$$\boxed{x \in D \iff f(x) \in \mathbb{R}}$$

Exemplos:

Tomemos algumas funções e determinemos o seu domínio.

1º) $y = 2x$

notando que $2x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}$$

2º) $y = x^2$

notando que $x^2 \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}$$

3º) $y = \dfrac{1}{x}$

notemos que $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, *x* é real e diferente de zero; temos, então:

$$D = \mathbb{R}^*$$

4º) $y = \sqrt{x}$

notemos que $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, *x* é real e não negativo; então:

$$D = \mathbb{R}_+$$

5º) $y = \sqrt[3]{x}$

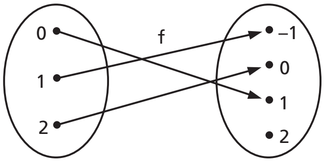
notando que $\sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}$$

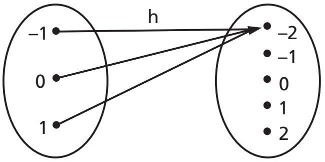
EXERCÍCIOS

158. Estabeleça o domínio e a imagem das funções abaixo:

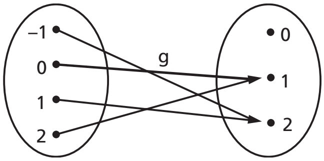
a)



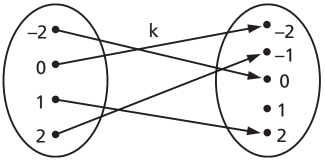
c)



b)

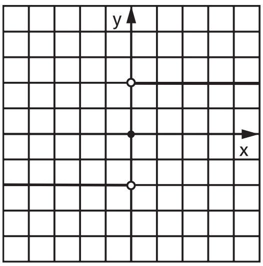


d)

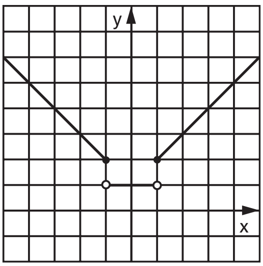


159. Determine o conjunto imagem das funções abaixo representadas nos gráficos cartesianos.

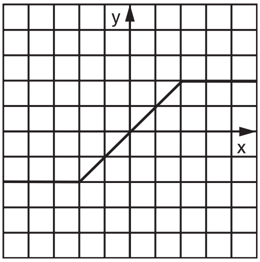
a)



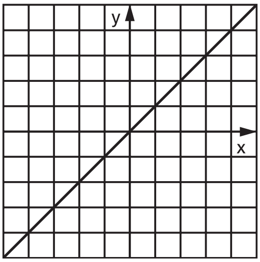
c)



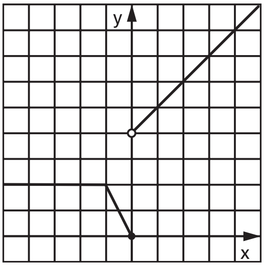
b)



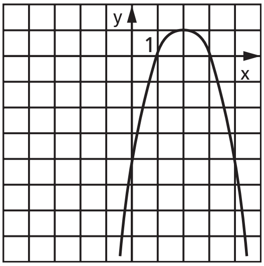
d)



e)

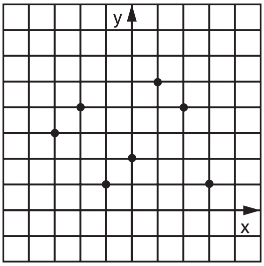


f)

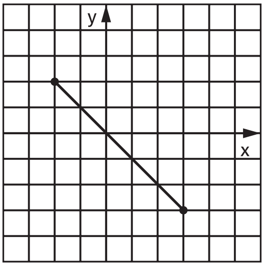


160. Considerando que os gráficos abaixo são gráficos de funções, estabeleça o domínio e a imagem.

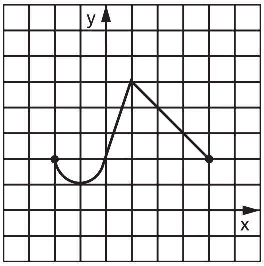
a)



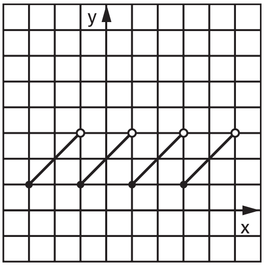
b)



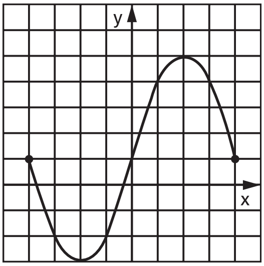
c)



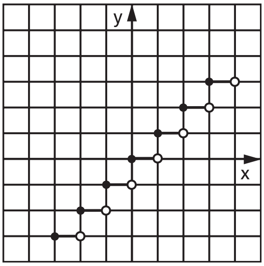
d)



e)



f)



161. Dê o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

c) $h(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$

d) $p(x) = \sqrt{x - 1}$

e) $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$

f) $r(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 2}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$

h) $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x + 3}}$

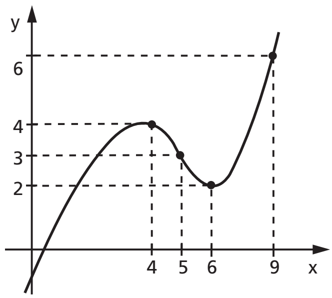
i) $u(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 2}}{x - 3}$

162. Sendo $x \geqslant 4$, determine o conjunto imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 4}$.

163. Se $f\colon A \to B$ é uma função e se $D \subset A$, chamamos de imagem de D pela função *f* ao conjunto anotado e definido por:

$$f < D > = \{y \in B \mid \text{existe } x \in D \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Se *g* é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujo gráfico está representado ao lado, determine a imagem de g do intervalo fechado [5; 9].



V. Funções iguais

79. Duas funções $f\colon A \to B$ e $g\colon C \to D$ são iguais se, e somente se, apresentarem:

a) domínios iguais ($A = C$);

b) contradomínios iguais ($B = D$);

c) $f(x) = g(x)$ para todo *x* do domínio.

Isso equivale a dizer que duas funções *f* e *g* são iguais se, e somente se, forem conjuntos iguais de pares ordenados.

Exemplos:

1º) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, então as funções de A em B definidas por:

$$f(x) = x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

são iguais, pois:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 1 = 0 \text{ e } g(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - 1 = 1 \text{ e } g(2) = \frac{4-1}{2+1} = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 3 - 1 = 2 \text{ e } g(3) = \frac{9-1}{3+1} = 2$$

ou seja, $f = g = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$.

2º) As funções $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são iguais, pois $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

3º) As funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não são iguais, pois $x \neq |x|$ para $x < 0$.

EXERCÍCIOS

164. Sejam as funções *f*, *g* e *h* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$, $g(y) = y^3$ e $h(z) = z^3$. Quais delas são iguais entre si?

165. As funções *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e *g* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Justifique.

166. As funções *f* e *g* cujas leis de correspondência são

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ podem ser iguais? Justifique.

167. As funções *f* e *g* de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x}}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-x}}$ são iguais? Justifique.

168. As funções:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + 1 \quad \text{ e } \quad x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$$

são iguais? Justifique.