

GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Sequências
Matrizes
Determinantes
Sistemas

4



CAPÍTULO I

Sequências

I. Noções iniciais

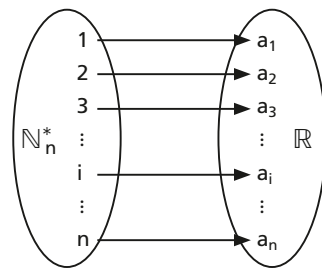
1. Definição

Chama-se **seqüência finita** ou **ênupla** toda aplicação f do conjunto

$$\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ em } \mathbb{R}.$$

Assim, em toda seqüência finita, a cada número natural i ($1 \leq i \leq n$) está associado um número real a_i .

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n)\}$$

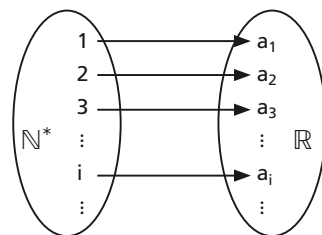


2. Definição

Chama-se **seqüência infinita** toda aplicação f de \mathbb{N}^* em \mathbb{R} .

Em toda seqüência infinita, a cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado um $a_i \in \mathbb{R}$.

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (i, a_i), \dots\}$$



Vamos, daqui em diante, indicar uma sequência f anotando apenas a imagem de f :

$$f = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots)$$

em que aparecem entre parênteses ordenadamente, da esquerda para a direita, as imagens dos naturais $1, 2, 3, \dots, i, \dots$

Quando queremos indicar uma sequência f qualquer, escrevemos

$$f = (a_i)_{i \in I}.$$

e lemos “sequência f dos termos a_i em que o conjunto de índices é I ”.

3. Exemplos:

1º) $(1, 2, 3, 4, 6, 12)$ é a sequência (finita) dos divisores inteiros positivos de 12 dispostos em ordem crescente.

2º) $(2, 4, 6, 8, \dots, 2i, \dots)$ é a sequência (infinita) dos múltiplos inteiros positivos de 2.

3º) $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ é a sequência (infinita) dos números primos positivos.

Observando o 2º exemplo, notamos que estão indicadas entre parênteses as imagens de $1, 2, 3, \dots, i, \dots$ na aplicação $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(i) = 2i$.

II. Igualdade

4. Sabemos que duas aplicações, f e g , são iguais quando têm domínios iguais e $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio. Assim, duas sequências infinitas, $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ e $g = (b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, são iguais quando $f(i) = g(i)$, isto é, $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Em símbolos:

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{N}^*$$

III. Lei de formação

Interessam à Matemática as sequências em que os termos se sucedem obedecendo a certa regra, isto é, aquelas que têm uma lei de formação. Esta pode ser apresentada de três maneiras:

5. Por fórmula de recorrência

São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}).

Exemplos:

1º) Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Temos:

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$$

$$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17$$

então $f = (2, 5, 8, 11, 14, 17)$.

2º) Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Temos:

$$n = 2 \Rightarrow b_2 = 3 \cdot b_1 = 3 \cdot 1 = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow b_3 = 3 \cdot b_2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$n = 4 \Rightarrow b_4 = 3 \cdot b_3 = 3 \cdot 9 = 27$$

$$n = 5 \Rightarrow b_5 = 3 \cdot b_4 = 3 \cdot 27 = 81$$

então $g = (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$.

6. Expressando cada termo em função de sua posição

É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n .

Exemplos:

1º) Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n, n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Temos:

$$a_1 = 2^1 = 2, a_2 = 2^2 = 4, a_3 = 2^3 = 8 \text{ e } a_4 = 2^4 = 16, \text{ então } f(2, 4, 8, 16).$$

2º) Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g em que os termos verificam a relação $b_n = 3n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Temos:

$$b_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4, b_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7, b_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10,$$

$$b_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13 \text{ e } b_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16,$$

então $g = (4, 7, 10, 13, 16, \dots)$.

7. Por propriedade dos termos

É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

Exemplos:

1º) Escrever a sequência finita f de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.

Temos:

$$D(1) = \{1, -1\} \Rightarrow a_1 = 2$$

$$D(2) = \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow a_2 = 4$$

$$D(3) = \{1, -1, 3, -3\} \Rightarrow a_3 = 4$$

$$D(4) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\} \Rightarrow a_4 = 6$$

$$D(5) = \{1, -1, 5, -5\} \Rightarrow a_5 = 4$$

$$D(6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\} \Rightarrow a_6 = 8$$

então $f = (2, 4, 4, 6, 4, 8)$.

2º) Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Temos $g = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$.

Notemos que essa sequência não pode ser dada por fórmula de recorrência, bem como não existe fórmula para calcular o n -ésimo número primo positivo a partir de n .

EXERCÍCIOS

1. Escreva os seis termos iniciais das sequências dadas pelas seguintes fórmulas de recorrência:

a) $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 2, \forall n \geq 2$

b) $b_1 = 3$ e $b_n = 2 \cdot b_{n-1}, \forall n \geq 2$

- c) $c_1 = 2$ e $c_n = (c_{n-1})^2, \forall n \geq 2$
- d) $d_1 = 4$ e $d_n = (-1)^n \cdot d_{n-1}, \forall n \geq 2$
- e) $e_1 = -2$ e $e_n = (e_{n-1})^n, \forall n \geq 2$

2. Escreva os seis termos iniciais das sequências dadas pelas seguintes leis:

- a) $a_n = 3n - 2, \forall n \geq 1$
- b) $b_n = 2 \cdot 3^n, \forall n \geq 1$
- c) $c_n = n(n + 1), \forall n \geq 1$
- d) $d_n = (-2)^n, \forall n \geq 1$
- e) $e_n = n^3, \forall n \geq 1$

3. Descreva por meio de uma fórmula de recorrência cada uma das sequências abaixo:

- a) (3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)
- b) (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)
- c) (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)
- d) (5, 6, 7, 8, 9, 10, ...)
- e) (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)

4. A definição por recorrência $\begin{cases} a_1 = 4 \\ e \\ a_p = a_{p-1} + 5 \end{cases}$, com $p \in \mathbb{N}$, pode definir uma

sequência. Determine-a.

CAPÍTULO II

Progressão aritmética

I. Definição

8. Chama-se **progressão aritmética** (P.A.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

em que a e r são números reais dados.

Assim, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.

Eis alguns exemplos de progressões aritméticas:

$$f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$$

$$\text{em que } a_1 = 1 \text{ e } r = 2$$

$$f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \dots)$$

$$\text{em que } a_1 = 0 \text{ e } r = -2$$

$$f_3 = (4, 4, 4, 4, 4, \dots)$$

$$\text{em que } a_1 = 4 \text{ e } r = 0$$

$$f_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots \right)$$

$$\text{em que } a_1 = \frac{1}{2} \text{ e } r = 1$$

$$f_5 = \left(4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \dots \right)$$

$$\text{em que } a_1 = 4 \text{ e } r = -\frac{1}{3}$$

II. Classificação

As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:

1ª) **crencentes** são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior. É imediato que isso ocorre somente se $r > 0$, pois:

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow r > 0.$$

Exemplos: f_1 e f_4 .

2ª) **constantes** são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior. É fácil ver que isso só ocorre quando $r = 0$, pois:

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

Exemplo: f_3 .

3ª) **decrencentes** são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior. Isso ocorre somente se $r < 0$, pois:

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Leftrightarrow r < 0.$$

Exemplos: f_2 e f_5 .

III. Notações especiais

Quando procuramos obter uma P.A. com 3 ou 4 ou 5 termos, é muito prática a notação seguinte:

1ª) para 3 termos: $(x, x + r, x + 2r)$ ou $(x - r, x, x + r)$.

2ª) para 4 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ ou $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$,

em que $y = \frac{r}{2}$.

3ª) para 5 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$ ou $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.

EXERCÍCIOS

5. Determine x de modo que $(x, 2x + 1, 5x + 7)$ seja uma P.A.

Solução

Devemos ter $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, então:

$$(2x + 1) - x = (5x + 7) - (2x + 1) \quad x + 1 = 3x + 6 \quad x = -\frac{5}{2}.$$

6. Determine a de modo que $(a^2, (a + 1)^2, (a + 5)^2)$ seja uma P.A.
7. Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

Solução

Empregando a notação especial $(x - r, x, x + r)$ para a P.A., temos:

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 24 & (1) \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 440 & (2) \end{cases}$$

De (1) obtemos $x = 8$. Substituindo em (2), vem:

$$(8 - r) \cdot 8 \cdot (8 + r) = 440 \Leftrightarrow 64 - r^2 = 55 \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = \pm 3.$$

Assim, a P.A. procurada é:

$$(5, 8, 11) \text{ para } x = 8 \text{ e } r = 3 \text{ ou } (11, 8, 5) \text{ para } x = 8 \text{ e } r = -3.$$

8. Obtenha uma P.A. crescente formada por três números inteiros e consecutivos de modo que a soma de seus cubos seja igual ao quadrado da sua soma.
9. Obtenha 3 números em P.A., sabendo que sua soma é 18 e a soma de seus inversos é $\frac{23}{30}$.
10. Uma P.A. é formada por 3 termos com as seguintes propriedades:
 - I) seu produto é igual ao quadrado de sua soma;
 - II) a soma dos dois primeiros é igual ao terceiro.
 Obtenha a P.A.
11. Obtenha 3 números em P.A. de modo que sua soma seja 3 e a soma de seus quadrados seja 11.

- 12.** Obtenha uma P.A. de 4 termos inteiros em que a soma dos termos é 32 e o produto é 3465.

Solução

Empregando a notação especial $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$, temos:

$$\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = 32 & (1) \\ (x - 3y)(x - y)(x + y)(x + 3y) = 3465 & (2) \end{cases}$$

De (1) vem $4x = 32$, isto é, $x = 8$.

Substituindo em (2) o valor de x , temos:

$$(8 - 3y) \cdot (8 - y) \cdot (8 + y) \cdot (8 + 3y) = 3465 \Rightarrow (64 - 9y^2) \cdot (64 - y^2) = 3465$$

$$9y^4 - 640y^2 + 631 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{640 \pm \sqrt{386\,884}}{18}} = \pm \sqrt{\frac{640 \pm 622}{18}}$$

$$\text{então, } y = 1 \text{ ou } y = -1 \text{ ou } y = \frac{\sqrt{631}}{3} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{631}}{3}.$$

Como a P.A. deve ter elementos inteiros, só convêm as duas primeiras. Assim, temos:

$$x = 8 \text{ e } y = 1 \Rightarrow (5, 7, 9, 11)$$

$$x = 8 \text{ e } y = -1 \Rightarrow (11, 9, 7, 5)$$

- 13.** A soma de quatro termos consecutivos de uma progressão aritmética é -6 , o produto do primeiro deles pelo quarto é -54 . Determine esses termos.
- 14.** Obtenha uma P.A. crescente de 4 termos tais que o produto dos extremos seja 45 e o dos meios seja 77.
- 15.** Obtenha 4 números reais em P.A., sabendo que sua soma é 22 e a soma de seus quadrados é 166.
- 16.** Obtenha uma P.A. de 5 termos, sabendo que sua soma é 25 e a soma de seus cubos é 3025.

Solução

Utilizando a notação $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$, temos:

$$\begin{cases} (x - 2r) + (x - r) + x + (x + r) + (x + 2r) = 25 & (1) \\ (x - 2r)^3 + (x - r)^3 + x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 = 3025 & (2) \end{cases}$$

De (1) vem: $5x = 25$, isto é, $x = 5$.

De (2) vem:

$$(x^3 - 6x^2r + 12xr^2 - 8r^3) + (x^3 - 3x^2r + 3xr^2 - r^3) + x^3 + (x^3 + 3x^2r + 3xr^2 + r^3) + (x^3 + 6x^2r + 12xr^2 + 8r^3) = 3025$$

isto é: $5x^3 + 30xr^2 = 3025$.

Lembrando que $x = 5$, temos:

$$5 \cdot 5^3 + 30 \cdot 5 \cdot r^2 = 3025 \Rightarrow 150r^2 = 2400 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4.$$

Portanto a P.A. é: $(-3, 1, 5, 9, 13)$ ou $(13, 9, 5, 1, -3)$.

17. Obtenha uma P.A. decrescente com 5 termos cuja soma é -10 e a soma dos quadrados é 60 .
18. Obtenha 5 números reais em P.A., sabendo que sua soma é 5 e a soma de seus inversos é $\frac{563}{63}$.
19. Ache 5 números reais em P.A., sabendo que sua soma é 10 e a soma dos cubos dos dois primeiros é igual à soma dos cubos dos dois últimos.
20. Determine o 3º termo (c) da P.A. (a; b; c).
21. Determine o valor de x tal que os números $2x, 3x$ e x^2 sejam termos consecutivos e distintos de uma progressão aritmética.
22. As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1, 2x, x^2 - 5$ e estão em P.A., nessa ordem. Calcule o perímetro do triângulo.
23. Os números que exprimem o lado, a diagonal e a área de um quadrado estão em P.A., nessa ordem. Quanto mede o lado do quadrado?
24. Mostre que, se (a, b, c) é uma P.A., então (a^2bc, ab^2c, abc^2) também é.

Solução

Temos, por hipótese, $b - a = c - b = r$. Então:

$$ab^2c - a^2bc = abc(b - a) = abcr = abc(c - b) = abc^2 - ab^2c.$$

- 25.** Prove que, se $\left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}\right)$ é uma P.A., então (z^2, x^2, y^2) também é.
- 26.** Prove que, se (a, b, c) é uma P.A., então $(a^2(b+c), b^2(a+c), c^2(a+b))$ também é.
- 27.** Sabendo que (a, b, c) e $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right)$ são P.A., mostre que $2ad = c(a+c)$.
- 28.** Sabendo que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ é P.A., prove que:
- $$(\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 2(\alpha\delta - 9\beta\gamma).$$

IV. Fórmula do termo geral

9. Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.A. e admitindo dados o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando essas $n - 1$ igualdades, temos:

$$\underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n}_{\text{cancelam-se}} = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}}_{\text{cancelam-se}} + (n-1) \cdot r$$

e, então, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, o que sugere o seguinte:

10. Teorema

Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r , o n -ésimo termo é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Demonstração pelo princípio da indução finita:

I) Para $n = 1$, temos: $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r$ (sentença verdadeira).

II) Admitamos a validade da fórmula para $n = p$: $a_p = a_1 + (p - 1) \cdot r$ (hipótese de indução) e provemos que vale para $n = p + 1$:

$$a_{p+1} = a_p + r = (a_1 + (p - 1) \cdot r) + r = a_1 + [(p + 1) - 1] \cdot r$$

$$\text{Então } a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

EXERCÍCIOS

29. Calcule o 17º termo da P.A. cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

Solução

Notando que $a_1 = 3$ e $r = 5$, apliquemos a fórmula do termo geral:

$$a_{17} = a_1 + 16r = 3 + 16 \cdot 5 = 83$$

30. Obtenha o 12º, o 27º e o 100º termos da P.A. (2, 5, 8, 11, ...).

31. Obtenha a razão da P.A. em que o primeiro termo é -8 e o vigésimo é 30.

Solução

$$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow 30 = -8 + 19r \Rightarrow r = 2$$

32. Obtenha a razão da P.A. em que $a_2 = 9$ e $a_{14} = 45$.

33. Obtenha o primeiro termo da P.A. de razão 4 cujo 23º termo é 86.

34. Qual é o termo igual a 60 na P.A. em que o 2º termo é 24 e a razão é 2?

35. Obtenha a P.A. em que $a_{10} = 7$ e $a_{12} = -8$.

Solução

Para escrever a P.A. é necessário determinar a_1 e r .

Temos:

$$\begin{cases} a_{10} = 7 \Rightarrow a_1 + 9r = 7 & (1) \\ a_{12} = -8 \Rightarrow a_1 + 11r = -8 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$(2) - (1) \Rightarrow 2r = -15 \Rightarrow r = -\frac{15}{2}$$

$$(1) \Rightarrow a_1 + 9\left(-\frac{15}{2}\right) = 7 \Rightarrow a_1 = \frac{149}{2}$$

e, portanto, a P.A. é $\left(\frac{149}{2}, \frac{134}{2}, \frac{119}{2}, \dots\right)$.

- 36.** Determine a P.A. em que o 6º termo é 7 e o 10º é 15.
- 37.** Qual é a P.A. em que o 1º termo é 20 e o 9º termo é 44?
- 38.** Determine a P.A. em que se verificam as relações:
 $a_{12} + a_{21} = 302$ e $a_{23} + a_{46} = 446$.
- 39.** Quantos números ímpares há entre 14 e 192?
- 40.** Determine a relação que deve existir entre os números m , n , p e q , para que se verifique a seguinte igualdade entre os termos da mesma progressão aritmética:
 $a_m + a_n = a_p + a_q$.
- 41.** Qual é o primeiro termo negativo da P.A. (60, 53, 46, ...)?

Solução

Temos:

$$a_n < 0 \Rightarrow a_1 + (n-1)r < 0 \Rightarrow 60 + (n-1)(-7) < 0 \Rightarrow n-1 > \frac{60}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{67}{7} \cong 9,5.$$

Concluimos que $a_n < 0$ para $n = 10, 11, 12, \dots$; portanto, o primeiro termo negativo da P.A. é a_{10} .

- 42.** As progressões aritméticas 5, 8, 11, ... e 3, 7, 11, ... têm 100 termos cada uma. Determine o número de termos iguais nas duas progressões.

- 43.** O primeiro termo a de uma progressão aritmética de razão 13 satisfaz $0 \leq a \leq 10$. Se um dos termos da progressão é 35, determine o valor de a .
- 44.** A sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo igual a 1. A função f definida por $f(x) = ax + b$ é tal que $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 6 e primeiro termo igual a 4. Determine o valor de $f(2)$.
- 45.** Prove que, se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é P.A., com $n > 2$, então $(a_2^2 - a_1^2, a_3^2 - a_2^2, a_4^2 - a_3^2, \dots, a_n^2 - a_{n-1}^2)$ também é.
- 46.** Prove que, se uma P.A. apresenta $a_m = x, a_n = y$ e $a_p = z$, então verifica-se a relação:
- $$(n - p) \cdot x + (p - m) \cdot y + (m - n) \cdot z = 0.$$
- 47.** Prove que os termos de uma P.A. qualquer em que 0 não participa verificam a relação:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

V. Interpolação aritmética

Em toda sequência finita $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, os termos a_1 e a_n são chamados **extremos** e os demais são chamados **meios**. Assim, na P.A. $(0, 3, 6, 9, 12, 15)$ os extremos são 0 e 15 enquanto os meios são 3, 6, 9 e 12.

Interpolar, inserir ou intercalar k meios aritméticos entre os números a e b significa obter uma P.A. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.A. é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow b = a + (k + 1) \cdot r \Rightarrow r = \frac{b - a}{k + 1}$$

Exemplo:

Interpolar 5 meios aritméticos entre 1 e 2.

Vamos formar uma P.A. com 7 termos em que $a_1 = 1$ e $a_7 = 2$. Temos:

$$a_7 = a_1 + 6 \cdot r \Rightarrow r = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{2 - 1}{6} = \frac{1}{6}$$

Então a P.A. é $\left(1, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, 2\right)$.

EXERCÍCIOS

48. Intercale 5 meios aritméticos entre -2 e 40 .

Solução

Devemos obter a razão da P.A. com 7 termos (2 extremos e 5 meios) em que $a_1 = -2$ e $a_7 = 40$. Temos: $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 40 = -2 + 6r \Rightarrow r = 7$, então a P.A. é $(-2, 5, 12, 19, 26, 33, 40)$.

meios

49. Quantos meios aritméticos devem ser interpolados entre 12 e 34 para que a razão da interpolação seja $\frac{1}{2}$?
50. Intercale 12 meios aritméticos entre 100 e 200.
51. Quantos números inteiros e positivos, formados com 3 algarismos, são múltiplos de 13?
52. De 100 a 1000, quantos são os múltiplos de 2 ou 3?
53. Quantos números inteiros e positivos, formados de dois ou três algarismos, não são divisíveis por 7?
54. Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, não divisíveis nem por 5 nem por 7?
55. Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, qual é o sexto termo da P.A.?
56. Ao inserir n meios aritméticos entre 1 e n^2 , determine a razão da P.A.: $1, \dots, n^2$.

VI. Soma

Vamos deduzir uma fórmula para calcular a soma S_n dos n termos iniciais de uma P.A.

11. Teorema 1

A soma dos n primeiros números inteiros positivos é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração por indução finita:

I) Para $n = 1$, temos: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (sentença verdadeira).

II) Admitamos a validade da fórmula para $n = p$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

e provemos para $n = p + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + p + (p + 1) &= \frac{p(p+1)}{2} + (p + 1) = \\ &= \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Então } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemplo:

A soma dos 50 termos iniciais da sequência dos inteiros positivos é:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275.$$

Utilizando a fórmula do termo geral, podemos calcular a soma S_n dos n termos iniciais da P.A. $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

12. Teorema 2

Em toda P.A. tem-se: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r$.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r \quad (+)$$

⋮

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \underbrace{(a_1 + a_1 + \dots + a_1)}_{n \text{ parcelas}} + [r + 2r + \dots + (n-1)r] =$$

$$= na_1 + [1 + 2 + \dots + (n-1)] \cdot r.$$

Pelo teorema 1: $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}$, então:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = na_1 + \frac{(n - 1) \cdot n}{2} \cdot r, \text{ isto é,}$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2} \cdot r$$

13. Teorema 3

Em toda P.A. tem-se:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} S_n &= na_1 + \frac{n(n - 1)}{2} \cdot r = \frac{2na_1 + n(n - 1)r}{2} = \frac{n[2a_1 + (n - 1)r]}{2} = \\ &= \frac{n[a_1 + a_1 + (n - 1)r]}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \end{aligned}$$

Exemplos:

1º) A soma dos 15 termos iniciais da P.A. $(-2, 1, 4, 7, \dots)$ é:

$$S_{15} = 15(-2) + \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 3 = -30 + 315 = 285.$$

2º) A soma dos múltiplos inteiros de 2 desde 4 até 100 pode ser calculada notando-se que $(4, 6, 8, \dots, 100)$ é uma P.A. de 49 termos em que $a_1 = 4$ e $a_{49} = 100$:

$$S_{49} = \frac{49(4+100)}{2} = 49 \cdot 52 = 2548.$$

EXERCÍCIOS

57. Calcule a soma dos 25 termos iniciais da P.A. (1, 7, 13, ...).

Solução

Sendo $a_1 = 1$ e $r = 6$, temos:

$$a_{35} = a_1 + 24 \cdot r = 1 + 24 \cdot 6 = 145$$

$$S_{25} = \frac{25(a_1 + a_{25})}{2} = \frac{25(1 + 145)}{2} = 1825.$$

58. Obtenha a soma dos 200 primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos. Calcule também a soma dos n termos iniciais da mesma sequência.

Solução

A sequência (1, 3, 5, ...) é uma P.A. em que $a_1 = 1$ e $r = 2$, então:

$$a_{200} = a_1 + 199 \cdot r = 1 + 199 \cdot 2 = 399$$

$$S_{200} = \frac{200(a_1 + a_{200})}{2} = \frac{200(1 + 399)}{2} = 40000$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2$$

59. Qual é a soma dos números inteiros de 1 a 350?
60. Qual é a soma dos 120 primeiros números pares positivos? E a soma dos n primeiros?
61. Obtenha a soma dos 12 primeiros termos da P.A. (6, 14, 22, ...).
62. Obtenha a soma dos n elementos iniciais da sequência:

$$\left(\frac{1-n}{n}, \frac{2-n}{n}, \frac{3-n}{n}, \dots \right)$$

63. Determine a P.A. em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650.

Solução

Determinar uma P.A. é obter a_1 e r . Temos:

$$a_{20} = 2 \Rightarrow a_1 + 19r = 2 \quad (1)$$

$$S_{50} = 650 \Rightarrow \frac{50(2a_1 + 49r)}{2} = 650 \Rightarrow 2a_1 + 49r = 26 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), obtemos $a_1 = -36$ e $r = 2$. Portanto, a P.A. procurada é $(-36, -34, -32, \dots)$.

64. Qual é o 23º elemento da P.A. de razão 3 em que a soma dos 30 termos iniciais é 255?
65. Uma progressão aritmética de 9 termos tem razão 2 e soma de seus termos igual a 0. Determine o sexto termo da progressão.
66. O primeiro termo de uma progressão aritmética é -10 e a soma dos oito primeiros termos 60. Determine a razão.
67. A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é -15 . Calcule a soma do sexto termo dessa P.A. com o décimo quinto termo.
68. A razão de uma P.A. é igual a 8% do primeiro termo. Sabendo que o 11º termo vale 36, determine o valor da soma dos 26 primeiros termos dessa P.A.
69. Se a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética é 50 e a soma dos 20 primeiros termos também é 50, determine o valor da soma dos 30 primeiros termos.
70. Um matemático (com pretensões a carpinteiro) compra uma peça de madeira de comprimento suficiente para cortar os 20 degraus de uma escada de obra. Se os comprimentos dos degraus formam uma progressão aritmética, se o primeiro degrau mede 50 cm e o último 30 cm e supondo que não há desperdício de madeira no corte, determine o comprimento mínimo da peça.
71. Um jardineiro tem que regar 60 roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea e distando 1 m uma da outra. Ele enche seu regador numa fonte situada na mesma vereda, a 15 m da primeira roseira, e a cada viagem rega 3 roseiras. Começando e terminando na fonte, qual é o percurso total que ele terá que caminhar até regar todas as roseiras?

- 72.** Numa progressão aritmética limitada em que o 1º termo é 3 e o último 31, a soma de seus termos é 136. Determine o número de termos dessa progressão.
- 73.** Quantos termos devem ser somados na P.A. $(-5, -1, 3, \dots)$, a partir do 1º termo, para que a soma seja 1590?
- 74.** Qual é o número mínimo de termos que devemos somar na P.A. $\left(13, \frac{45}{4}, \frac{19}{2}, \dots\right)$, a partir do 1º termo, para que a soma seja negativa?
- 75.** Ao se efetuar a soma de 50 parcelas em P.A., 202, 206, 210, ..., por distração não foi somada a 35ª parcela. Qual a soma encontrada?
- 76.** Determine uma P.A. de 60 termos em que a soma dos 59 primeiros é 12 e a soma dos 59 últimos é 130.
- 77.** Determine uma P.A. em que a soma dos 10 termos iniciais é 130 e a soma dos 50 iniciais é 3650.
- 78.** Calcule o quociente entre a soma dos termos de índice ímpar e a soma dos termos de índice par da P.A. finita $(4, 7, 10, \dots, 517)$.
- 79.** Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos?

Solução

Os múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos constituem a P.A. $(100, 105, 110, \dots, 995)$, em que $a_1 = 100$, $r = 5$ e $a_n = 995$. O número de elementos dessa P.A. é n tal que:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 995 = 100 + (n - 1)5 \Rightarrow n = 180.$$

A soma dos termos da P.A. é:

$$S_{180} = \frac{180(a_1 + a_{180})}{2} = \frac{180(100 + 995)}{2} = 98\,550.$$

- 80.** Qual é a soma dos múltiplos de 11 compreendidos entre 100 e 10000?
- 81.** Qual é a soma dos múltiplos positivos de 7, com dois, três ou quatro algarismos?
- 82.** Obtenha uma P.A. em que a soma dos n primeiros termos é $n^2 + 2n$ para todo n natural.

Solução

Como $S_n = n^2 + 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$S_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 \Rightarrow a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5$$

e a P.A. é $(3, 5, 7, 9, \dots)$.

- 83.** Calcule o 1º termo e a razão de uma P.A. cuja soma dos n primeiros termos é $n^2 + 4n$ para todo n natural.
- 84.** Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 3$, calcule o valor de $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(25)$.
- 85.** Se $\sum_{x=5}^{n+5} 4(x - 3) = An^2 + Bn + C$, calcule o valor de $A + B$.
- 86.** Se numa P.A. a soma dos m primeiros termos é igual à soma dos n primeiros termos, $m \neq n$, mostre que a soma dos $m + n$ primeiros termos é igual a zero.
- 87.** Demonstre que em toda P.A., com número ímpar de termos, o termo médio é igual à diferença entre a soma dos termos de ordem ímpar e a soma dos termos de ordem par.
- 88.** Quais as progressões aritméticas nas quais a soma de dois termos quaisquer faz parte da progressão?
- 89.** Determine uma progressão aritmética de razão 1, sabendo que o número de termos é divisível por 3, que a soma dos termos é 33 e que o termo de ordem $\frac{n}{3}$ é 4.
- 90.** A soma de quatro termos consecutivos de uma progressão aritmética é -6 , o produto do primeiro deles pelo quarto é -54 . Determine esses termos.
- 91.** Prove que, se uma P.A. é tal que a soma dos seus n primeiros termos é igual a $n + 1$ vezes a metade do enésimo termo, então $r = a_1$.



LEITURA

Dirichlet e os números primos de uma progressão aritmética

Hygino H. Domingues

O exame de uma tabela de números primos parece sugerir que estes tendem a se tornar cada vez mais raros à medida que se avança na sequência dos números naturais. Por exemplo: são 168 os números primos entre 1 e 1000, 135 entre 1000 e 2000 e 127 entre 2000 e 3000. Essa observação é confirmada, de certo modo, pelo seguinte teorema: para todo n , não importa quão grande seja, há sempre uma sucessão a_1, a_2, \dots, a_n de números naturais consecutivos em que nenhum termo é primo. Basta fazer $a_1 = (n + 1)! + 2, a_2 = (n + 1)! + 3, \dots, a_n = (n + 1)! + (n + 1)$, pois, obrigatoriamente, a_1 é divisível por 2, a_2 é divisível por 3, ..., a_n é divisível por $n + 1$.

Apesar desses fatos, sabe-se há mais de dois milênios, através de uma demonstração de Euclides (c. séc. III a.C.) em seus *Elementos*, que o conjunto dos números primos é infinito. A distribuição desses infinitos números primos ao longo da sucessão dos números naturais é uma das questões mais interessantes da Matemática.

Gauss, entre 1792 e 1793 (portanto com cerca de 15 anos de idade), tabulou detalhadamente a distribuição dos primos em intervalos de 1000 números, de 1 a 300 000, com pouquíssimos erros, considerando os parcos recursos computacionais de que dispunha. E chegou estatisticamente à conclusão que o número de primos menores que x , costumeiramente indicado por $\pi(x)$, é aproximadamente igual a $\frac{x}{\ell_n x}$, tanto mais próximo quanto maior x . Por exemplo: $\pi(1\,000\,000) = 78\,498$, ao passo que $\frac{1\,000\,000}{\ell_n 1\,000\,000} = 72\,382,414$. Mas Gauss, ao que parece, não demonstrou esse resultado e tampouco o publicou.

O primeiro matemático a publicar uma forma possível para a função $\pi(x)$ foi Legendre em seu *Ensaio sobre a teoria dos números*, em dois volumes (1797-1798). Também do exame de um grande número de casos, Legendre conjecturou que $\pi(x)$ se avizinha arbitrariamente de $\frac{x}{(\ell_n x - 1,08366)}$, fazendo-se x crescer indefinidamente. Tudo indicava, portanto, que valeria o seguinte teorema (conhecido como “teorema dos números primos”): o quociente

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ell_n x}}$$

“tende” a 1 à medida que x “cresce indefinidamente”.

E, de fato, em 1896 os matemáticos C. J. de la Vallée-Poussin (belga) e J. Hadamard (francês), em trabalhos independentes, mediante métodos analíticos, numa linha de abordagem da teoria dos números inaugurada por Riemann (1826-1866), conseguiram provar esse teorema. Aliás, essa nova linha (**teoria analítica dos números**) vinha se mostrando extremamente fértil, como provavam os trabalhos de P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Embora alemão da cidade de Düren, Dirichlet optou por fazer estudos científicos em Paris (1822-1825), na época o melhor centro de Matemática do mundo. Mas foi provavelmente a leitura da obra de seu conterrâneo Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, feita nesse período, o fato que mais influenciou sua carreira, pois, apesar de ter deixado contribuições em áreas diversas, é na teoria dos números que estão as mais significativas, tendo explorado com grande brilhantismo e originalidade o grande manancial que era a citada obra de Gauss. Academicamente, Dirichlet iniciou sua carreira em Breslau, em 1827; no ano seguinte transferiu-se para a Universidade de Berlim; finalmente, em 1855, sucede a Gauss em Göttingen.

Ao tempo de Dirichlet não era segredo que algumas progressões aritméticas, como $(4x + 3) = (3, 7, 11, \dots)$, por exemplo, contêm infinitos números primos. Valeria também esse resultado para toda P.A. $(a + bn)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, em que a e b são naturais primos entre si? Mediante instrumentos matemáticos sofisticados, pois se trata de questão extremamente difícil, embora não pareça, Dirichlet provou que sim. Esse teorema, com sua aparente ingenuidade, é daqueles que marcam a obra de um matemático.



Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805-1859).

CAPÍTULO III

Progressão geométrica

I. Definição

14. Chama-se **progressão geométrica** (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

em que a e q são números reais dados.

Assim, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada.

Eis alguns exemplos de progressões geométricas:

$$f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \dots)$$

$$\text{em que } a_1 = 1 \text{ e } q = 2$$

$$f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \dots)$$

$$\text{em que } a_1 = -1 \text{ e } q = 2$$

$$f_3 = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots \right)$$

$$\text{em que } a_1 = 1 \text{ e } q = \frac{1}{3}$$

$$f_4 = \left(-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3}, \dots \right)$$

$$\text{em que } a_1 = -54 \text{ e } q = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ll} f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, \dots) & \text{em que } a_1 = 7 \text{ e } q = 1 \\ f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, \dots) & \text{em que } a_1 = 5 \text{ e } q = -1 \\ f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, \dots) & \text{em que } a_1 = 3 \text{ e } q = 0 \end{array}$$

II. Classificação

As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:

1ª) **crecentes** são as P.G. em que cada termo é maior que o anterior. Notemos que isso pode ocorrer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

b) P.G. com termos negativos

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

Exemplos: f_1 e f_4 .

2ª) **constantes** são as P.G. em que cada termo é igual ao anterior. Observemos que isso ocorre em duas situações:

a) P.G. com termos todos nulos

$$a_1 = 0 \text{ e } q \text{ qualquer}$$

b) P.G. com termos iguais e não nulos

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Leftrightarrow q = 1$$

Exemplo: f_5 .

3ª) **decrecentes** são as P.G. em que cada termo é menor que o anterior. Notemos que isso pode ocorrer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

b) P.G. com termos negativos

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

Exemplos: f_2 e f_3 .

4ª) **alternantes** são as P.G. em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isso ocorre quando $q < 0$.

Exemplo: f_6 .

5ª) **estacionárias** são as P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$. Isso ocorre quando $q = 0$.

Exemplo: f_7 .

III. Notações especiais

Para a obtenção de uma P.G. com 3 ou 4 ou 5 termos é muito prática a notação seguinte:

1ª) para 3 termos: (x, xq, xq^2) ou $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$

2ª) para 4 termos: (x, xq, xq^2, xq^3) ou $\left(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3\right)$

3ª) para 5 termos: $(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4)$ ou $\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2\right)$

EXERCÍCIOS

92. Qual é o número que deve ser somado a 1, 9 e 15 para termos, nessa ordem, três números em P.G.?

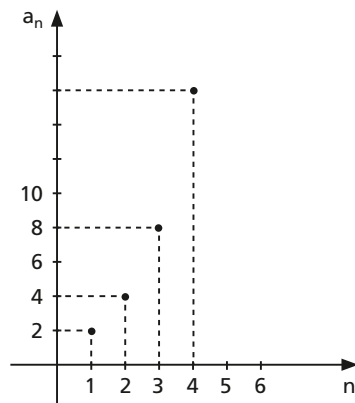
Solução

Para que $(x + 1, x + 9, x + 15)$ seja P.G., devemos ter

$$\frac{x + 9}{x + 1} = \frac{x + 15}{x + 9} \text{ e, então:}$$

$$(x + 9)^2 = (x + 1)(x + 15) \Rightarrow \cancel{x^2} + 18x + 81 = \cancel{x^2} + 16x + 15 \Rightarrow 2x = -66 \Rightarrow x = -33.$$

- 93.** Qual é o número x que deve ser somado aos números $a - 2$, a e $a + 3$ para que $a - 2 + x$, $a + x$ e $a + 3 + x$ formem uma P.G.?
- 94.** Sabendo que x , $x + 9$ e $x + 45$ estão em P.G., determine o valor de x .
- 95.** A sequência $(x + 1, x + 3, x + 4, \dots)$ é uma P.G. Calcule o seu quarto termo.
- 96.** Se a sequência $(4x, 2x + 1, x - 1)$ é uma P.G., determine o valor de x .
- 97.** Há 10 anos o preço de certa mercadoria era de $1 + x$ reais. Há 5 anos era de $13 + x$ reais e hoje é $49 + x$ reais. Sabendo que tal aumento deu-se em progressão geométrica e de 5 em 5 anos, determine a razão do aumento.
- 98.** No gráfico, os pontos representam os termos de uma progressão, sendo n o número de termos e a_n o n -ésimo termo. Determine a razão e a progressão representada.



- 99.** Que tipo de progressão constitui a sequência:
 $\text{sen } x, \text{sen } (x + \pi), \text{sen } (x + 2\pi), \dots, \text{sen } (x + n\pi)$ com $\text{sen } x \neq 0$?
- 100.** Classifique as sentenças abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F):
- Na P.G. em que $a_1 > 0$ e $q > 0$, todos os termos são positivos.
 - Na P.G. em que $a_1 < 0$ e $q > 0$, todos os termos são negativos.

- 110.** Prove que, se os números a, b, c, d formam, nessa ordem, uma P.G., então vale a relação $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$.
- 111.** Os lados de um triângulo retângulo apresentam medidas em P.G. Calcule a razão da P.G.
- 112.** Determine o conjunto dos valores que pode ter a razão de uma P.G. crescente formada pelas medidas dos lados de um triângulo.
- 113.** As medidas dos lados de um triângulo são expressas por números inteiros em P.G. e seu produto é 1 728. Calcule as medidas dos lados.
- 114.** Calcule todos os ângulos x , em radianos, de modo que os números $\frac{\sen x}{2}$, $\sen x$, $\tg x$ formem uma progressão geométrica.

IV. Fórmula do termo geral

15. Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.G. e admitindo dados o primeiro termo ($a_1 \neq 0$), a razão ($q \neq 0$) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando essas $n - 1$ igualdades, temos:

$$\underbrace{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n}_{\text{cancelam-se}} = a_1 \cdot \underbrace{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{n-1}}_{\text{cancelam-se}} \cdot q^{n-1}$$

e, então, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, o que sugere o seguinte:

16. Teorema

Na P.G. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q , o n -ésimo termo é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Demonstração:

Demonstra-se pelo princípio da indução finita.

EXERCÍCIOS

115. Obtenha o 10º e o 15º termos da P.G. (1, 2, 4, 8, ...).

Solução

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$$

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} = 1 \cdot 2^{14} = 4096$$

116. Obtenha o 100º termo da P.G. (2, 6, 18, ...).

117. Calcule o 21º termo da sequência (1, 0, 3, 0, 9, 0, ...).

118. Os três primeiros termos de uma progressão geométrica são $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}$ e $a_3 = \sqrt[4]{2}$. Determine o quarto termo dessa progressão.

119. Dada a progressão geométrica $\left(\dots; 1; \frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{2-\sqrt{3}}{2}; \dots \right)$, determine o termo que precede 1.

120. Se o oitavo termo de uma progressão geométrica é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$, qual é o primeiro termo dessa progressão?

121. O quinto e o sétimo termos de uma P.G. de razão positiva valem, respectivamente, 10 e 16. Qual é o sexto termo dessa P.G.?

122. Se $a_1, a_2, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, a_5, a_6, a_7, a_8$ formam, nessa ordem, uma P.G., determine os valores de a_1 e a_8 .

123. Determine o número de termos da progressão (1, 3, 9, ...) compreendidos entre 100 e 1000.

124. Dada uma P.G. finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10})$ de modo que $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$, pergunta-se se é correta a igualdade

$$(a_{10})^{\frac{1}{8}} = 3 \cdot (2)^{\frac{1}{8}}.$$

125. Sabendo que a população de certo município foi de 120000 habitantes em 1990 e que essa população vem crescendo a uma taxa de 3% ao ano, determine a melhor aproximação para o número de habitantes desse município em 1993.

- 126.** Uma indústria está produzindo atualmente 100 000 unidades de um certo produto. Quantas unidades estará produzindo ao final de 4 anos, sabendo que o aumento anual da produção é de 10%?
- 127.** Um químico tem 12 litros de álcool. Ele retira 3 litros e os substitui por água. Em seguida, retira 3 litros da mistura e os substitui por água novamente. Após efetuar essa operação 5 vezes, aproximadamente quantos litros de álcool sobram na mistura?
- 128.** Uma empresa produziu, no ano de 2010, 100 000 unidades de um produto. Quantas unidades produzirá no ano de 2015, se o aumento de produção é de 20%?
- 129.** Obtenha a P.G. cujos elementos verificam as relações:

$$a_2 + a_4 + a_6 = 10 \qquad a_3 + a_5 + a_7 = 30$$

- 130.** Calcule o número de termos da P.G. que tem razão $\frac{1}{2}$, 1º termo 6144 e último termo 3.
- 131.** Prove que, se a, b, c são elementos de ordem p, q, r , respectivamente, da mesma P.G., então:
- $$a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = 1$$
- 132.** Prove que, se (a_1, a_2, a_3, \dots) é uma P.G., com termos todos diferentes de zero, então $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots\right)$ também é P.G.
- 133.** Prove que, se (a_1, a_2, a_3, \dots) é uma P.G., então (a_1, a_3, a_5, \dots) e (a_2, a_4, a_6, \dots) também são P.G.

V. Interpolação geométrica

Interpolar k meios geométricos entre os números a e b significa obter uma P.G. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.G. é necessário calcular a razão. Assim, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b = a \cdot q^{k+1} \Rightarrow q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

Exemplo:

Interpolar 8 meios geométricos (reais) entre 5 e 2560.

Formemos uma P.G. com 10 termos em que $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2560$.
Temos:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow q = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}} = \sqrt[9]{\frac{2560}{5}} = \sqrt[9]{512} = 2$$

Então a P.G. é (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560).

EXERCÍCIOS

- 134.** Intercale 6 meios geométricos reais entre 640 e 5.
- 135.** Qual é o sexto termo de uma progressão geométrica, na qual dois meios geométricos estão inseridos entre 3 e -24 , tomados nessa ordem?
- 136.** Quantos meios devem ser intercalados entre 78125 e 128 para obter uma P.G. de razão $\frac{2}{5}$?
- 137.** Qual é o número máximo de meios geométricos que devem ser interpolados entre 1458 e 2 para a razão de interpolação ficar menor que $\frac{1}{3}$?
- 138.** Sendo a e b números dados, ache outros dois, x e y , tais que a, x, y, b formem uma P.G.

VI. Produto

Vamos deduzir uma fórmula para calcular o produto P_n dos n termos iniciais de uma P.G.

17. Teorema

Em toda P.G. tem-se: $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \quad (+)$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} = \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_1)}_{n \text{ fatores}} (q \cdot q^2 \cdot \dots \cdot q^{n-1}) =$$

$$= a_1^n \cdot q^{1+2+\dots+n-1} = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Isto é:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

EXERCÍCIOS

139. Em cada uma das P.G. abaixo, calcule o produto dos n termos iniciais:

- $(1, 2, 4, 8, \dots)$ e $n = 10$
- $(-2, -6, -18, -54, \dots)$ e $n = 20$
- $(3, -6, 12, -24, \dots)$ e $n = 25$
- $[(-2)^0, (-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, \dots]$ e $n = 66$
- $[(-3)^{25}, (-3)^{24}, (-3)^{23}, \dots]$ e $n = 51$
- $(a^1, -a^2, a^3, -a^4 \dots)$ e $n = 100$

140. a) Calcule a soma $S = \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 4a + \dots + \log_2 2^n a$.

b) Qual o valor de a , se $S = n + 1$?

141. Considere uma progressão geométrica em que o primeiro termo é a , $a > 1$, a razão é q , $q > 1$, e o produto dos seus termos é c . Se $\log_a b = 4$, $\log_q b = 2$ e $\log_c b = 0,01$, quantos termos tem essa progressão geométrica?

142. Calcule o produto dos 101 termos iniciais da P.G. alternante em que $a_{51} = -1$.

143. Uma sequência é tal que:

I) os termos de ordem par são ordenadamente as potências de 2 cujo expoente é igual ao índice do termo, isto é, $a_{2n} = 2^{2n}$ para todo $n \geq 1$.

II) os termos de ordem ímpar são ordenadamente as potências de -3 cujo expoente é igual ao índice do termo, isto é, $a_{2n-1} = (-3)^{2n-1}$ para todo $n \geq 1$. Calcule o produto dos 55 termos iniciais dessa sequência.

VII. Soma dos termos de P.G. finita

18. Sendo dada uma P.G., isto é, conhecendo-se os valores de a_1 e q , procuremos uma fórmula para calcular a soma S_n dos n termos iniciais da sequência.

$$\text{Temos: } S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}. \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros por q , obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \quad (2)$$

Comparando os segundos membros de (1) e (2), podemos observar que a parcela a_1 só aparece em (1), a parcela a_1q^n só aparece em (2) e todas as outras parcelas são comuns às duas igualdades; então, subtraindo, temos:

$$(2) - (1) \Rightarrow qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1q^n - a_1.$$

Supondo $q \neq 1$, resulta:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1}$$

Esse resultado sugere o seguinte teorema:

19. Teorema

A soma dos n termos iniciais de uma P.G. é:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

Demonstração:

Demonstra-se aplicando o princípio da indução finita:

20. Corolário

A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

Demonstração:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} = \frac{(a_1 q^{n-1})q - a_1}{q - 1} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

21. Exemplos:

1º) Calcular a soma dos 10 termos iniciais da P.G. (1, 3, 9, 27, ...).

$$S_{10} = \frac{a_1 q^{10} - a_1}{q - 1} = \frac{1 \cdot 3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{59\,049 - 1}{2} = 29\,524$$

2º) Calcular a soma das potências de 5 com expoentes inteiros consecutivos, desde 5^2 até 5^{26} .

Trata-se da P.G. ($5^2, 5^3, 5^4, \dots, 5^{26}$).

Temos:

$$S = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{5^{26} \cdot 5 - 5^2}{5 - 1} = \frac{5^{27} - 5^2}{4}.$$

EXERCÍCIOS

144. Calcule a soma das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$.

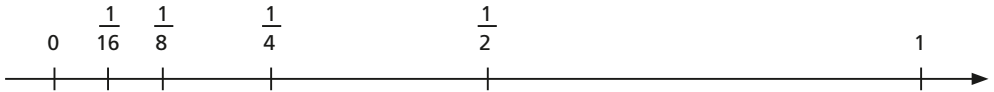
145. Calcule a soma dos 20 termos iniciais da série $1 + 3 + 9 + 27 + \dots$.

146. Numa progressão geométrica de 4 termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. Determine o 4º termo dessa progressão.

- 147.** Em um triângulo, a medida da base, a medida da altura e a medida da área formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 8. Calcule a medida da base.
- 148.** Se $S_3 = 21$ e $S_4 = 45$ são, respectivamente, as somas dos três e quatro primeiros termos de uma progressão geométrica cujo termo inicial é 3, determine a soma dos cinco primeiros termos da progressão.
- 149.** Dois conjuntos, A e B, são tais que o número de elementos de $A - B$ é 50, o número de elementos de $A \cup B$ é 62 e o número de elementos de $A - B$, $A \cap B$ e $B - A$ estão em progressão geométrica. Determine o número de elementos do conjunto $A \cap B$.
- 150.** Os números x, y, z formam, nessa ordem, uma P.A. de soma 15. Por outro lado, os números $x, y + 1, z + 5$ formam, nessa ordem, uma P.G. de soma 21. Sendo $0 \leq x \leq 10$, calcule o valor de $3z$.
- 151.** Seja $a > 0$ o 1º termo de uma progressão aritmética de razão r e também de uma progressão geométrica de razão $q = 2r \frac{\sqrt{3}}{3a}$. Determine a relação entre a e r para que o 3º termo da progressão geométrica coincida com a soma dos 3 primeiros termos da progressão aritmética.
- 152.** Se a e q são números reais não nulos, calcule a soma dos n primeiros termos da P.G.: $a, aq^2, aq^4, aq^6, \dots$
- 153.** Partindo de um quadrado Q_1 , cujo lado mede a metros, consideremos os quadrados $Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_n$ tais que os vértices de cada quadrado sejam os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Calcule, então, a soma das áreas dos quadrados $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$.
- 154.** Quantos termos da P.G. $(1, 3, 9, 27, \dots)$ devem ser somados para que o resultado dê 3280?
- 155.** Determine n tal que $\sum_{i=3}^n 2^i = 4088$.
- 156.** A soma de seis elementos em P.G. de razão 2 é 1197. Qual é o 1º termo da P.G.?
- 157.** Prove que em toda P.G. $S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n \cdot (S_{2n} + S_{3n})$.
- 158.** Determine onze números em P.G., sabendo que a soma dos dez primeiros é 3069 e a soma dos dez últimos é 6138.
- 159.** Uma P.G. finita tem n termos. Sendo S a soma dos termos, S' a soma de seus inversos e P o produto dos elementos, prove que $P^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^n$.

VIII. Limite de uma sequência

22. Consideremos a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$ e representemos seus 4 termos iniciais sobre a reta real



Notemos que os termos da sequência vão se aproximando de zero, isto é, para n bastante “grande” o n ésimo termo da sequência $\frac{1}{2^n}$ estará tão próximo de zero quanto quisermos. Assim, desejando que a distância entre $\frac{1}{2^n}$ e 0 seja menor que $\frac{1}{1000}$, impomos:

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \frac{1}{1000}$$

então: $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n > 9$ (pois $2^9 = 512 < 1000$).

Quer dizer que, a partir do 10º termo, os termos da sequência estarão próximos de 0, com aproximação menor que $\frac{1}{1000}$.

Em geral, sendo dada uma aproximação $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um número natural n_0 tal que $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$ quando $n > n_0$.

Dizemos, então, que o limite de $\frac{1}{2^n}$, quando n tende a infinito, é zero e anotamos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

23. Definição

Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ tem um limite ℓ se, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter um número natural n_0 tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ quando $n > n_0$.

Neste caso, indica-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ e diz-se que a sequência **converge para ℓ** .

24. Exemplo importante

Para nosso próximo assunto é importante saber que toda sequência da forma $(1, q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots)$, com $-1 < q < 1$, converge para zero.

Se $-1 < q < 1$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Assim, têm limite nulo as sequências:

$$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \dots \right)$$

$$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots \right)$$

$$(1; 0,7; 0,49; 0,343; \dots; (0,7)^n, \dots)$$

IX. Soma dos termos de P.G. infinita

25. Exemplo preliminar

Consideremos a P.G. infinita $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$.

Formemos a sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ em que:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

.....

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

.....

Esta última sequência converge para 1, pois:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

Quer dizer que, quanto maior o número de termos somados na P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$, mais nos aproximamos de 1. Dizemos, então, que a soma dos infinitos termos dessa P.G. é 1.

26. Definição

Dada uma P.G. infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, dizemos que $a_1 + a_2 + \dots = S$ se, formada a sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ em que:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

.....

essa sequência converge para S, isto é, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$.

27. Teorema

Se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é uma P.G. com razão q tal que $-1 < q < 1$, então:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Demonstração:

Vamos provar que o limite da sequência $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots)$ das somas parciais dos termos da P.G. é $\frac{a_1}{1 - q}$.

$$\text{Temos: } S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n.$$

Lembrando que a_1 e q são constantes, notamos que $-\frac{a_1}{1-q}$ é constante; lembrando que, para $-1 < q < 1$, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. Resulta, portanto, o seguinte:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{a_1}{1-q} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot 0 = 0$$

isto é:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

28. Observações:

1ª) Se $a_1 = 0$, a condição $-1 < q < 1$ é desnecessária para a convergência da sequência (S_1, S_2, S_3, \dots) . Nesse caso, é óbvio que a P.G. é $(0, 0, 0, \dots)$ e sua soma é 0, qualquer que seja q .

2ª) Se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência (S_1, S_2, S_3, \dots) não converge. Nesse caso, é impossível calcular a soma dos termos da P.G.

29. Exemplos:

1º) Calcular a soma dos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \right)$.

Como $q = \frac{1}{3}$ e $-1 < \frac{1}{3} < 1$, decorre $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

2º) Calcular a soma dos termos da P.G. $\left(2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots \right)$.

Como $q = -\frac{1}{2}$ e $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, decorre:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

3º) Calcular $S = 3 + \frac{6}{5} + \frac{12}{25} + \frac{24}{125} + \dots$.

Como as parcelas formam uma P.G. infinita com razão $q = \frac{2}{5}$

e $-1 < \frac{2}{5} < 1$, vem: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5$.

EXERCÍCIOS

160. Calcule a soma dos termos das seguintes seqüências:

a) $\left(2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}, \dots\right)$ c) $\left(5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \dots\right)$

b) $\left(-3, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \dots\right)$ d) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots\right)$

161. Calcule a soma da série infinita:

$$1 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{9} + \frac{2}{25} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots$$

162. Qual é o número para o qual converge a série $\frac{2a}{3} + \frac{a}{9} + \frac{a}{54} + \frac{a}{324} + \dots$?

163. Calcule $S = \frac{3}{5} + \frac{6}{35} + \frac{12}{245} + \dots$

164. Determine o limite da soma dos termos da progressão geométrica $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

- 165.** Qual o erro cometido quando, em vez de somar os 1000 elementos iniciais, calcula-se a soma dos infinitos elementos da P.G. abaixo?

$$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right)$$

- 166.** Calcule a expressão $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots$

- 167.** Determine a soma dos infinitos termos da progressão geométrica

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}, \dots$$

- 168.** Determine o valor de m , sabendo que $2 + \frac{4}{m} + \frac{8}{m^2} + \dots = \frac{14}{5}$.

- 169.** Determine o valor de $S = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ ($0 < x < 1$).

Sugestão: Multiplique os dois membros por x .

- 170.** Sabendo que $0 < q < 1$, calcule o valor da expressão

$$q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \dots$$

- 171.** Calcule a soma da série

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right). \end{aligned}$$

- 172.** Determine o valor da soma $S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} + \dots$

Sugestão: Decomponha o termo geral e use a fórmula da soma.

- 173.** Qual é a geratriz das dízimas periódicas abaixo?

a) 0,417417417...

c) 0,17090909...

b) 5,12121212...

d) 9,3858585...

- 174.** Determine a fração geratriz do número decimal periódico $N = 121,434343\dots$

175. Mostre que existe a P.G. cujos três primeiros termos são $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e determine o limite da soma dos n primeiros termos, quando $n \rightarrow \infty$.

176. A soma dos termos de ordem ímpar de uma P.G. infinita é 20 e a soma dos termos de ordem par é 10. Obtenha o primeiro termo.

177. A soma dos termos de ordem ímpar de uma P.G. infinita é 17 e a soma dos termos de ordem par é $\frac{17}{3}$. Calcule o primeiro termo da progressão.

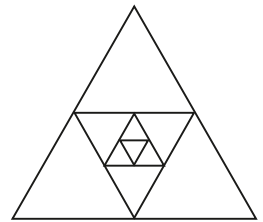
178. Numa P.G., $a_1 = \frac{25a^2}{4(a^2 + 1)}$ e $a_4 = \frac{2(a^2 + 1)^2}{5a}$, com $a > 0$. Estabeleça:

a) o conjunto de valores de a para os quais a P.G. é decrescente.

b) o limite da soma dos termos para $q = a - \frac{1}{5}$.

179. Divide-se um segmento de comprimento m em três partes iguais e retira-se a parte central; para cada um dos segmentos repete-se o processo, retirando-se suas partes centrais e assim sucessivamente. Calcule a soma dos comprimentos retirados.

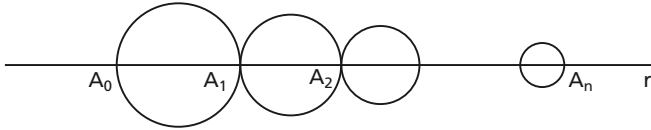
180. O lado de um triângulo equilátero mede 3. Unindo os pontos médios de seus lados, obtém-se um novo triângulo equilátero. Unindo os pontos médios do novo triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero, e assim sucessivamente. Calcule a soma dos perímetros de todos os triângulos citados.



181. É dado um triângulo de perímetro p . Com vértices nos pontos médios dos seus lados, constrói-se um 2º triângulo. Com vértices nos pontos médios dos lados do 2º constrói-se um 3º triângulo e assim por diante. Qual é o limite da soma dos perímetros dos triângulos construídos?

182. É dada uma seqüência infinita de quadriláteros, cada um, a partir do segundo, tendo por vértices os pontos médios dos lados do anterior. Obtenha a soma das áreas dos quadriláteros em função da área A do primeiro.

- 183.** As bolas abaixo têm centros sobre a reta r e são tangentes exteriormente, tendo, cada uma, metade da área da anterior. Sabendo que a primeira tem diâmetro igual a d , determine a distância do ponto A_0 ao ponto A_n quando $n \rightarrow \infty$.



- 184.** Num triângulo equilátero de lado a se inscreve uma circunferência de raio r . Nessa circunferência se inscreve um triângulo equilátero de lado a' e neste inscreve-se uma circunferência de raio r' . Repete-se indefinidamente a operação.

Calcule:

- o limite da soma dos lados dos triângulos;
 - o limite da soma dos raios das circunferências;
 - o limite da soma das áreas dos triângulos;
 - o limite da soma das áreas dos círculos.
- 185.** Num quadrado de lado a inscreve-se um círculo; nesse círculo se inscreve um novo quadrado e neste um novo círculo. Repetindo a operação indefinidamente, forneça:
- a soma dos perímetros de todos os quadrados;
 - a soma dos perímetros de todos os círculos;
 - a soma das áreas de todos os quadrados;
 - a soma das áreas de todos os círculos.