

GELSON IEZZI

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Complexos  
Polinômios  
Equações

6

# CAPÍTULO III

## Equações polinomiais

### I. Introdução

**74.** Neste capítulo, trabalharemos com funções polinomiais

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

em que os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  são números complexos e a variável  $x$  também é complexa, isto é,  $x$  pode ser substituído por um número complexo qualquer.

Há algumas propriedades que exigem restrição para os coeficientes (por exemplo, os coeficientes devem ser reais); quando surgirem, faremos a restrição.

**75.** Recomendamos ao estudante fazer, neste instante, uma revisão de alguns assuntos básicos vistos no capítulo anterior, tais como:

- valor numérico de  $P(x)$  para  $x = \alpha$  (item 37);
- função polinomial identicamente nula e teorema correspondente (itens 38 e 39);
- funções polinomiais idênticas e teorema correspondente (itens 40 e 41);
- adição, multiplicação e divisão de polinômios (itens 42 e 58);
- divisão por binômios do 1º grau, especialmente o teorema de D'Alembert (item 69)

## II. Definições

### 76. Equação polinomial

Dadas duas funções polinomiais  $f(x)$  e  $g(x)$ , chama-se **equação polinomial** ou **equação algébrica** a sentença aberta  $f(x) = g(x)$ .

Assim, por exemplo, se  $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$  e  $g(x) = 3x^2 - 3$ , a sentença aberta  $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$  é uma equação polinomial.

Recordemos que uma sentença em  $x$ , aberta, pode ser verdadeira ou falsa conforme o valor atribuído a  $x$ . No nosso exemplo, temos:

$$\text{para } x = 0, \quad \underbrace{0^3 + 0^2 - 0 - 1}_{f(0)} = \underbrace{3 \cdot 0^2 - 3}_{g(0)} \quad (\text{falsa})$$

$$\text{para } x = 1, \quad \underbrace{1^3 + 1^2 - 1 - 1}_{f(1)} = \underbrace{3 \cdot 1^2 - 3}_{g(1)} \quad (\text{verdadeira})$$

### 77. Raiz de equação polinomial

Dada uma equação polinomial  $f(x) = g(x)$ , chama-se **raiz** da equação todo número que, substituído em lugar de  $x$ , torna a sentença verdadeira. Assim, o número  $r$  é raiz de  $f(x) = g(x)$  se, e só se,  $f(r) = g(r)$  é sentença verdadeira.

Retomando o exemplo dado, na equação  $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$  as raízes são 1, 2 e  $-1$ , pois:

$$\text{para } x = 1, \quad 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 3 \cdot 1^2 - 3 \Rightarrow 0 = 0 \quad (\text{verdadeira})$$

$$\text{para } x = 2, \quad 2^3 + 2^2 - 2 - 1 = 3 \cdot 2^2 - 3 \Rightarrow 9 = 9 \quad (\text{verdadeira})$$

$$\text{para } x = -1, \quad (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = 3(-1)^2 - 3 \Rightarrow 0 = 0 \quad (\text{verdadeira})$$

enquanto 3 não é raiz, pois:

$$\text{para } x = 3, \quad 3^3 + 3^2 - 3 - 1 = 3 \cdot 3^2 - 3 \Rightarrow 33 = 24 \quad (\text{falsa})$$

### 78. Conjunto solução

Chama-se **conjunto solução** ou **conjunto verdade** da equação  $f(x) = g(x)$  em  $\mathbb{C}$  o conjunto  $S$  cujos elementos são as raízes complexas da equação.

Por exemplo, o conjunto solução da equação  $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$  é  $S = \{1, 2, -1\}$ .

## 79. Resolução de uma equação

Resolver uma equação polinomial é obter o seu conjunto solução.

Dada a equação polinomial  $f(x) = g(x)$ , resolvê-la significa desenvolver um raciocínio lógico e concluir quais são as raízes, sem ter de “adivinhar” nenhuma e sem “esquecer” nenhuma. Aprender a resolver equações polinomiais é a meta deste capítulo.

Vimos que a equação  $x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$  apresenta as raízes 1, 2 e  $-1$ , porém não esclarecemos duas questões:

1ª) como obtivemos as raízes?

2ª) são só essas as raízes da equação?

A teoria seguinte responde a essas perguntas.

## 80. Equações equivalentes

Duas equações polinomiais são equivalentes quando apresentam o mesmo conjunto solução, isto é, toda raiz de uma equação é também raiz da outra e reciprocamente. Assim, por exemplo, as equações

$$(1) x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3 \text{ e } (2) x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

são equivalentes, pois  $S_1 = \{1, 2, -1\}$  e  $S_2 = \{1, 2, -1\}$ .

**81.** Há duas transformações que não alteram o conjunto solução de uma equação polinomial, isto é, há duas maneiras de transformar uma equação polinomial em outra, equivalente à primeira:

1ª) somar aos dois membros a mesma função polinomial

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

Exemplo:

Seja a equação:

$$\underbrace{3x^2 - 4x + 11}_{f(x)} = \underbrace{2x^2 + x + 5}_{g(x)} \quad (1)$$

Adicionemos  $h(x) = -g(x) = -2x^2 - x - 5$  aos dois membros:

$$\underbrace{(3x^2 - 4x + 11)}_{f(x)} + \underbrace{(-2x^2 - x - 5)}_{h(x)} = \underbrace{(2x^2 + x + 5)}_{g(x)} + \underbrace{(-2x^2 - x - 5)}_{h(x)}$$

Simplificando, temos:  $x^2 - 5x + 6 = 0$  (2)

Decorre que (1) é equivalente a (2), portanto:  $S_1 = S_2 = \{2, 3\}$ .

Na prática, aplicamos esta propriedade com o seguinte enunciado: “Em toda equação polinomial, transpor um termo de um membro para outro, trocando o sinal do seu coeficiente, não altera o conjunto solução”:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

2ª) multiplicar os dois membros pelo mesmo número complexo  $k(k \neq 0)$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow k \cdot f(x) = k \cdot g(x)$$

Exemplo:

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{1}{8} = 0 \text{ e } 6x^2 - 1 = 0 \text{ são equivalentes, pois a } 2^\text{ª} \text{ foi obtida da } 1^\text{ª} \text{ através}$$

de uma multiplicação por 8.

**82.** Na resolução de uma equação polinomial procuramos sempre transformá-la em outra, equivalente e muito simples, em que o conjunto solução possa ser obtido com maior facilidade. Assim, empregando as operações descritas no item anterior, é possível transformar qualquer equação  $f(x) = g(x)$  numa equação equivalente  $P(x) = f(x) - g(x) = 0$ , isto é, toda equação polinomial é redutível à forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

**83.** Quando transformamos uma equação polinomial para a forma  $P(x) = 0$ , podem ocorrer dois casos imediatos:

1º)  $P(x)$  é identicamente nula, isto é, estamos diante da equação

$$0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + \dots + 0 \cdot x + 0 = 0$$

que é uma sentença verdadeira para todo número complexo que seja colocado no lugar de  $x$ ; portanto:

$$S = \mathbb{C}$$

2º)  $P(x)$  é constante e não nula, isto é, estamos diante da equação

$$0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + \dots + 0 \cdot x + k = 0$$

que é uma sentença falsa para todo número complexo que seja colocado no lugar de  $x$ ; portanto:

$$S = \emptyset$$

Exemplos:

1º) Resolver  $(x - 1)(x^2 + 1) + x^2 = x^3 + x - 1$

Temos:  $x^3 - x^2 + x - 1 + x^2 = x^3 + x - 1$

Isto é:  $(x^3 + x - 1) - (x^3 + x - 1) = 0$

Portanto:  $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0 \Rightarrow S = \mathbb{C}$

2º) Resolver  $x(x - 1)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$

Temos:  $x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$

Isto é:  $(x^3 - 3x^2 + 2x) - (x^3 - 3x^2 + 2x - 7) = 0$

Portanto:  $0x^3 + 0x^2 + 0x + 7 = 0 \Rightarrow S = \emptyset$

Daqui por diante, excluiríamos esses dois casos imediatos; portanto, só consideraremos as equações polinomiais  $P(x) = 0$  em que o grau de  $P$  é maior do que zero.

### III. Número de raízes

**84.** Como toda equação polinomial pode ser colocada na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

é evidente que as seguintes proposições são equivalentes:

- (1)  $r$  é raiz da equação  $P(x) = 0$
- (2)  $r$  é raiz da função polinomial  $P(x)$
- (3)  $r$  é raiz do polinômio  $P$

e as três proposições são sintetizadas por  $P(r) = 0$ .

Diremos também que a equação  $P(x) = 0$  é de grau  $n$  se, e só se,  $P(x)$  e  $P$  são de grau  $n$ .

## 85. Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.)

Todo polinômio  $P$  de grau  $n \geq 1$  admite ao menos uma raiz complexa.

Admitiremos a validade deste teorema sem demonstração.

## 86. Teorema da decomposição

Todo polinômio  $P$  de grau  $n$  ( $n \geq 1$ )

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

pode ser decomposto em  $n$  fatores do primeiro grau, isto é:

$$P = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

em que  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  são as raízes de  $P$ .

Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única.

Demonstração:

1ª) parte: existência

a) Sendo  $P$  um polinômio de grau  $n \geq 1$ , podemos aplicar o T.F.A. e  $P$  tem ao menos uma raiz  $r_1$ . Assim,  $P(r_1) = 0$  e, de acordo com o teorema de D'Alembert,  $P$  é divisível por  $x - r_1$ :

$$P = (x - r_1) \cdot Q_1 \quad (1)$$

em que  $Q_1$  é polinômio de grau  $n - 1$  e coeficiente dominante  $a_n$ . Se  $n = 1$ , então  $n - 1 = 0$  e  $Q_1$  é polinômio constante; portanto,  $Q_1 = a_n$  e  $P = a_n(x - r_1)$ , ficando demonstrado nosso teorema.

b) Se  $n \geq 2$ , então  $n - 1 \geq 1$  e o T.F.A. é aplicável ao polinômio  $Q_1$ , isto é,  $Q_1$  tem ao menos uma raiz  $r_2$ . Assim,  $Q_1(r_2) = 0$  e  $Q_1$  é divisível por  $x - r_2$ :

$$Q_1 = (x - r_2) \cdot Q_2 \quad (1')$$

$$\text{Substituindo (1') em (1) resulta: } P = (x - r_1)(x - r_2) \cdot Q_2 \quad (2)$$

em que  $Q_2$  é polinômio de grau  $n - 2$  e coeficiente dominante  $a_n$ . Se  $n = 2$ , isto é,  $n - 2 = 0$ , então  $Q_2 = a_n$  e  $P = a_n(x - r_1)(x - r_2)$ , ficando demonstrado nosso teorema.

c) Após  $n$  aplicações sucessivas do T.F.A. chegamos na igualdade:

$$P = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) \cdot Q_n$$

em que  $Q_n$  tem grau  $n - n = 0$  e coeficiente dominante  $a_n$ ; portanto,  $Q_n = a_n$  e

$$P = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

2ª) parte: unicidade

Vamos supor que  $P$  admita duas decomposições:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

$$P = a'_m(x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3) \dots (x - r'_m)$$

Supondo reduzidos e ordenados os dois segundos membros, temos:

$$a_n x^n - a_n S_1 \cdot x^{n-1} + \dots a'_m x^m - a'_m S'_1 \cdot x^{m-1} + \dots$$

e, pela definição de igualdade de polinômios, temos necessariamente:

$$n = m$$

e

$$a_n = a'_m$$

Ficamos com a igualdade:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3) \dots (x - r'_n) \quad (3)$$

Atribuindo a  $x$  o valor de  $r_1$ , temos:

$$0 = (r_1 - r'_1)(r_1 - r'_2)(r_1 - r'_3) \dots (r_1 - r'_n)$$

e, se o produto é nulo, um dos fatores  $r_1 - r'_j$  é nulo; com uma conveniente mudança

na ordem dos fatores, podemos colocar  $r_1 = r'_1$

A igualdade (3) se transforma em:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - r_1)(x - r'_2)(x - r'_3) \dots (x - r'_n)$$

e em seguida em:

$$(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - r'_2)(x - r'_3) \dots (x - r'_n)$$

Atribuindo a  $x$  o valor  $r_2$ , temos:

$$0 = (r_2 - r'_2)(r_2 - r'_3) \dots (r_2 - r'_n)$$

e, analogamente, um dos fatores  $r_2 - r'_k$  é nulo; com uma conveniente mudança na

ordem dos fatores, podemos colocar  $r_2 = r'_2$

Continuando,  $r_i = r'_i$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

As igualdades  $m = n$ ,  $a'_m = a_n$ ,  $r'_1 = r_1$ ,  $r'_2 = r_2$ ,  $r'_3 = r_3$ , ...,  $r'_n = r_n$  são a prova da unicidade da decomposição.

## 87. Consequência do teorema da decomposição

Teorema

Toda equação polinomial de grau  $n$  ( $n \geq 1$ ) admite  $n$ , e somente  $n$ , raízes complexas.

Demonstração:

Seja a equação polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Vimos na demonstração da existência da decomposição que  $P$  admite as raízes (distintas ou não)  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ . Provamos que são só essas as raízes de  $P$  ao provarmos a unicidade da decomposição.

## 88. Exemplos:

1º) Fatorar o polinômio  $P = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$ , sabendo que suas raízes são  $1, -2, 2, -2i, 2i$ .

$$P = 5(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i)$$

2º) Qual é o conjunto solução da equação  $7(x - 1)^3(x - 2)^4(x - 3)^2 = 0$ ? De que grau é essa equação?

Temos:

$$P = 7(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 3)(x - 3);$$

as raízes de  $P$  são  $1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3$  e  $3$ , portanto a equação é do 9º grau e seu conjunto verdade é  $S = \{1, 2, 3\}$ .

## 89. Observações

1ª) Tendo em vista o teorema da decomposição, todo polinômio  $P$  de grau  $n$  ( $n \geq 1$ ) pode ser encarado como o desenvolvimento de um produto de  $n$  fatores do 1º grau e um fator constante  $a_n$ , que é coeficiente dominante em  $P$ .

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$$

2ª) Nada impede que a decomposição de  $P$  apresente fatores iguais. Associando os fatores idênticos da decomposição de  $P$ , obtemos:

$$P = a_n(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}(x - r_3)^{m_3} \dots (x - r_p)^{m_p}$$

em que  $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_p = n$  e  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p$  são dois a dois distintos.

Neste caso,  $P$  é divisível separadamente pelos polinômios  $(x - r_1)^{m_1}, (x - r_2)^{m_2}, \dots, (x - r_p)^{m_p}$ .

## EXERCÍCIOS

**259.** Dada a equação polinomial  $(x - 1)(x^3 - 4x + a) = (x^2 - 1)^2$ ,

a) coloque-a na forma  $P(x) = 0$ ;

b) Obtenha  $a$  para que 2 seja uma das raízes da equação.

### Solução

a) Desenvolvemos os dois membros:

$$x(x^3 - 4x + a) - (x^3 - 4x + a) = (x^2 - 1)(x^2 - 1)$$

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + (4 + a)x - a = x^4 - 2x^2 + 1$$

e transpomos:

$$\cancel{x^4} - x^3 - 4x^2 + (4 + a)x - a - \cancel{x^4} + 2x^2 - 1 = 0$$

$$-x^3 - 2x^2 + (4 + a)x - (a + 1) = 0$$

$$\underbrace{x^3 + 2x^2 - (4 + a)x + (a + 1)}_{P(x)} = 0$$

b) 2 é raiz se, e só se,  $P(2) = 0$ , então:

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^3 + 2(2)^2 - (4 + a)2 + (a + 1) = \cancel{8} + 8 - \cancel{8} - 2a + a + 1 = \\ &= 9 - a = 0 \Rightarrow a = 9 \end{aligned}$$

Resposta:  $x^3 + 2x^2 - (4 + a)x + (a + 1) = 0$  e  $a = 9$ .

**260.** Determine  $m$  de modo que  $-2$  seja raiz da equação

$$x^3 + (m + 2)x^2 + (1 + m)x - 2 = 0.$$

**261.** Resolva em  $\mathbb{C}$  as seguintes equações polinomiais:

- a)  $(x + 1)(x^2 - x + 1) = (x - 1)^3$   
 b)  $(x + 2)(x + 3) + (x - 2)(1 - x) = 4(1 + 2x)$   
 c)  $(x^2 + 1)(x^4 - 1) - (x^2 - 1)(x^4 + 1) = 2(x^4 - x^2 - 1) + 3$

**262.** Determine o grau e o conjunto solução das equações no universo  $\mathbb{C}$ :

- a)  $5(x - 1)(x - 7) = 0$   
 b)  $3(x + 4)^2(2x - 5)^3 = 0$   
 c)  $11(x^2 - 2)^5 = 0$

**263.** Uma das raízes da equação  $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 0$  é 1. Designando-se por  $x_4$  a maior das raízes dessa equação, calcule  $5x_4^3$ .

**264.** Qual o valor de  $a$  se o número complexo  $z = 1 + i$  é uma das raízes da equação  $x^8 = a$ ?

**265.** Quais as soluções da equação  $Q(x) = 0$ , em que  $Q(x)$  é o quociente do polinômio  $x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 24$  por  $x^2 - 6x + 5$ ?

**266.** Se  $a$  e  $b$  são raízes do polinômio  $P(x)$ , o que se pode afirmar sobre o grau de  $P(x)$ ?

**267.** Resolva, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$ , sabendo que duas raízes são  $-1$  e  $3$ .

### Solução

Vamos dividir  $P(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6$  por  $(x + 1)(x - 3)$ :

1	0	-5	-10	-6	-1
1	-1	-4	-6	0	3
1	2	2	0		

Temos que  $P(x) = (x + 1)(x - 3)(x^2 + 2x + 2)$ , portanto as demais raízes vêm de  $x^2 + 2x + 2 = 0$ , isto é,  $x = -1 \pm i$ .

Resposta:  $S = \{-1, 3, -1 + i, -1 - i\}$ .

**268.** Resolva, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $6x^3 + 7x^2 - 14x - 15 = 0$ , sabendo que uma das raízes é  $-1$ .

- 269.** O polinômio  $P(x) = x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$  é tal que  $P(1) = 0$ . Quais os outros valores de  $x$  que o anulam?
- 270.** Determine todas as raízes da equação  $P(x) = 0$ , sendo  $P(x) = 9x^3 - 36x^2 + 29x - 6$ . Sabe-se que esse polinômio é divisível por  $x - 3$ .
- 271.** a) Calcule as raízes quadradas do número complexo  $2i$ .  
b) Determine as raízes da equação  $z^2 - (3 + 5i)z - 4 + 7i = 0$ .
- 272.** Dê uma equação do 3º grau cujas raízes são 1, 2 e 3.
- 273.** Determine o polinômio  $P(x)$  do 3º grau cujas raízes são 0, 1 e 2, sabendo que  $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ .
- 274.** Decomponha o polinômio  $-x^3 + 4x^2 + 7x - 10$  em um produto de fatores do primeiro grau.
- 275.** Decomponha em fatores do primeiro grau:  
a)  $6x^2 - 5xy + y^2$   
b)  $x^4 + 4$  (no campo complexo)
- 276.** O polinômio  $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$  é divisível por  $g_1(x) = -2x^2 + \sqrt{5}x$  e por  $g_2(x) = x^2 - x - 2$ . Quantas raízes reais possui o polinômio  $p(x)$ ?
- 277.** Se  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ ,  $I$  é a matriz identidade da ordem  $n$ , então o determinante da matriz  $(A - xI)$  é um polinômio de grau  $n$  na variável  $x$ , cujas raízes são chamadas valores próprios de  $A$ . Determine os valores próprios da matriz 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
- 278.** Qual ou quais das afirmações abaixo são verdadeiras?  
a) Seja  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ . Então,  $P(x) = 0$  para todo  $x$  real  $\Leftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ .  
b) Sejam  $P(x) = (ax + 2)x + bx + 4$  e  $Q(x) = x^2 + 5x + c$ . Então,  $P(x) = Q(x)$  para todo  $x$  real  $\Leftrightarrow a = 1, b = 3$  e  $c = 4$ .  
c) Todo polinômio  $P(x)$  do grau  $n$  admite no máximo  $n$  raízes reais.

## IV. Multiplicidade de uma raiz

### 90. Exemplo preliminar

Consideremos a equação polinomial  $(x - 3)(x - 1)^2(x - 4)^3 = 0$ , que apresenta seis raízes, sendo uma raiz igual a 3, duas raízes iguais a 1 e três raízes iguais a 4.

Dizemos que 3 é raiz simples, 1 é raiz dupla e 4 é raiz tripla da equação dada.

### 91. Multiplicidade

Dizemos que  $r$  é raiz de *multiplicidade*  $m$  ( $m > 1$ ) da equação  $P(x) = 0$  se, e somente se,

$$P = (x - r)^m \cdot Q \text{ e } Q(r) \neq 0$$

isto é,  $r$  é raiz de multiplicidade  $m$  de  $P(x) = 0$  quando o polinômio  $P$  é divisível por  $(x - r)^m$  e não é divisível por  $(x - r)^{m+1}$ , ou seja, a decomposição de  $P$  apresenta exatamente  $m$  fatores iguais a  $x - r$ .

Quando  $m = 1$ , dizemos que  $r$  é raiz simples; quando  $m = 2$ , dizemos que  $r$  é raiz dupla; quando  $m = 3$ , dizemos que  $r$  é raiz tripla, etc.

Exemplos:

1º) A equação  $x^4(x + 5)^7 = 0$  admite as raízes 0 e  $-5$  com multiplicidades 4 e 7, respectivamente, e, embora a equação seja do 11º grau, seu conjunto solução tem só dois elementos, portanto  $S = \{0, -5\}$ .

2º) A equação  $(x - a)^n = 0$  admite só a raiz  $a$  com multiplicidade  $n$ , isto é, seu conjunto solução é  $S = \{a\}$ .

## EXERCÍCIOS

**279.** Determine todas as raízes e respectivas multiplicidades nas equações:

- $3(x + 4)(x^2 + 1) = 0$
- $7(2x - 3)^2(x + 1)^3(x - 5) = 0$
- $4(x - 10)^5(2x - 3) = 4(x - 10)^5(x - 1)$
- $(x^2 + x + 1)^3(7x - 14i)^5 = 0$

**280.** Qual é o grau de uma equação polinomial  $P(x) = 0$  cujas raízes são 3, 2,  $-1$  com multiplicidades 7, 6 e 10, respectivamente?

**Solução**

$$P(x) = k(x - 3)^7(x - 2)^6(x + 1)^{10} \text{ em que } (k \in \mathbb{C} \text{ e } k \neq 0)$$

Resposta: grau 23.

**281.** Forme a equação cujas raízes são 2,  $-3$ ,  $1 + i$  e  $1 - i$ , com multiplicidade 1.

**Solução**

A equação é  $k \cdot (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) = 0$ , isto é,

$$k \cdot (x - 2)(x + 3)(x - 1 - i)(x - 1 + i) = 0$$

e desenvolvendo temos:

$$k \cdot (x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12) = 0 \text{ com } k \neq 0$$

**282.** Forme uma equação polinomial cujas raízes são  $-2$ ,  $-1$ ,  $1$  e  $4$  com multiplicidade 1.

**283.** Construa uma equação algébrica cujas raízes são  $2$ ,  $3$ ,  $\sqrt{3}$  e  $-\sqrt{3}$  com multiplicidade 1.

**284.** Construa uma equação algébrica cujas raízes são  $1$ ,  $i$  e  $-i$  com multiplicidade 1, 2 e 2, respectivamente.

**285.** Qual é a multiplicidade da raiz  $r$  na equação polinomial  $P(x) = 0$ , nos seguintes casos?

1º)  $P(x) = x^7 - 5x^6 + 6x^5$  e  $r = 0$

2º)  $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$  e  $r = 1$

**Solução**

$$1^\circ) P(x) = x^5(x^2 - 5x + 6) = (x - 0)^5 \underbrace{(x^2 - 5x + 6)}_{Q(x)}$$

Como  $Q(0) \neq 0$ , resulta que 0 é raiz com multiplicidade 5.

2º) Vamos dividir  $P(x)$  sucessivas vezes por  $x - 1$ :

1	-2	1	-1	2	-1	1
1	-1	0	-1	1	0	1
1	0	0	-1	0		1
1	1	1	0			1
1	2	3	≠ 0			

Temos  $P(x) = (x - 1)^3 \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{Q(x)}$

Como  $Q(1) = 3 \neq 0$ , resulta que 1 é raiz tripla.

Resposta: 5 e 3.

**286.** Resolva a equação  $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = 0$ , sabendo que 2 é sua raiz dupla.

**287.** Se, na equação  $x^3 - 75x + 250 = 0$ ,  $m$  é raiz dupla e  $n = -2m$  é a outra raiz, ache  $m$  e  $n$ .

### Solução

A equação dada é redutível à forma

$$(x - m)^2(x + 2m) = 0$$

isto é, desenvolvendo:

$$x^3 - 3m^2x + 2m^3 = 0$$

portanto, devemos ter:

$$3m^2 = 75 \text{ e } 2m^3 = 250$$

e isso acarreta  $m = 5$  e  $n = -10$ .

Resposta:  $m = 5$  e  $n = -10$ .

**288.** Qual das equações abaixo possui raiz de multiplicidade 3?

- a)  $x^3 - 1 = 0$                       c)  $x^4 - 4x^2 = 0$   
 b)  $(x - 2)^4 = 0$                     d)  $(x - 1)^3(x + 1) = 0$

**289.** Qual é a multiplicidade da raiz  $x = 1$  da equação  $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ ?

- 290.** Uma das raízes do polinômio  $P(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$  é  $x = 1$ . Qual o produto das outras raízes?
- 291.** Qual a proposição correta sobre as raízes da equação  $x^4 - 20x^2 + 36 = 0$ ?
- Duas são complexas e duas são reais.
  - São todas racionais.
  - Formam uma progressão aritmética.
- 292.** Sabendo que  $P(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24$  tem uma raiz dupla  $x = 2$ , qual o domínio da função  $f(x) = \log [P(x)]$ ?
- 293.** Se  $x_1 = -2$  é raiz dupla da equação  $2x^3 + 7x^2 + 4x + K = 0$ , calcule o valor de  $K$ .
- 294.** Quais os valores de  $a$  e  $b$  para que a equação  $x^4 + (3a - b)x^3 + (2b - 4)x^2 + (ab + 4)x + a + b = 0$  tenha uma raiz dupla igual a zero?
- 295.** Quais os valores de  $m$  e  $n$  para que a equação:  
 $x^7 - 5x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 + (m - 5n)x^2 + \left(\frac{3}{5}m - n + 2\right)x + (5 - m \cdot n) = 0$   
 admita duas, e apenas duas, raízes nulas?
- 296.** Sabendo que 0 é raiz de multiplicidade 3 da equação  
 $x^5 - 3x^4 + 4x^3 + \left(12b + \frac{a}{3}\right)x^2 + (a - 3b + 13)x + (ab + 4) = 0$ ,  
 calcule  $a + b$ .
- 297.** Qual deve ser o valor de  $m$  para que a equação algébrica  
 $x^3 - (4 + m)x^2 + (4 + 4m)x - 4m = 0$   
 admita o valor 2 como raiz dupla?

## V. Relações entre coeficientes e raízes (Relações de Girard)

### 92. Equação do 2º grau

Consideremos a equação:

$$(1) ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

cujas raízes são  $r_1$  e  $r_2$ .

Vimos que essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$(2) a(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

Temos a identidade:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2), \forall x$$

Isto é:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2, \forall x$$

Portanto:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } r_1r_2 = \frac{c}{a}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação do 2º grau.

### 93. Equação do 3º grau

Consideremos a equação:

$$(1) ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

cujas raízes são  $r_1, r_2$  e  $r_3$ .

Vimos que essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$(2) a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

Temos a identidade:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3), \forall x$$

Isto é:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x - r_1r_2r_3, \forall x$$

Portanto:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}, \quad r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{c}{a} \text{ e } r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação do 3º grau.

### 93. Equação de grau $n$ qualquer

Vamos agora deduzir as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial de grau  $n$  ( $n \geq 1$ ).

Dada a equação

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

cujas raízes são  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  temos a identidade:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = \\ &= a_n x^n - a_n \underbrace{(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n)}_{S_1} x^{n-1} + \\ &+ a_n \underbrace{(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n)}_{S_2} x^{n-2} - \\ &- a_n \underbrace{(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n)}_{S_3} x^{n-3} + \dots + \\ &+ (-1)^h a_n S_h x^{n-h} + \dots + (-1)^n a_n \underbrace{(r_1 r_2 r_3 \dots r_n)}_{S_n}, \quad \forall x \end{aligned}$$

portanto, aplicando a condição de igualdade:

$$\begin{aligned} S_1 &= r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + \dots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 &= r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\dots \dots \dots \\ S_h &= \left( \begin{array}{c} \text{soma de todos os } C_{n,h} \text{ produtos} \\ \text{de } h \text{ raízes da equação} \end{array} \right) = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} \\ &\dots \dots \dots \\ S_n &= r_1 r_2 r_3 \dots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

são as **relações entre coeficientes e raízes** da equação  $P(x) = 0$ , também chamadas relações de Girard.

## 95. Aplicações

1ª) Calcular a soma e o produto das raízes da equação

$$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Temos:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{3}{2} \quad r_1 r_2 r_3 r_4 = (-1)^4 \frac{a_0}{a_4} = \frac{6}{2} = 3$$

2ª) Se  $\{r_1, r_2, r_3\}$  é o conjunto solução da equação

$$2x^3 + 5x^2 + 8x + 11 = 0, \text{ calcular } r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

Temos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{5}{2}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{8}{2} = 4$$

$$r_1 r_2 r_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{11}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto: } r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 &= (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) = \\ &= \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2(4) = \frac{25}{4} - 8 = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

3ª) Resolver a equação  $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ , sabendo que a soma de duas raízes é 1.

Temos:

$$(1) r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 6$$

$$(3) r_1 r_2 r_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -10$$

$$(2) r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{a_1}{a_3} = 3$$

$$(4) r_1 + r_2 = 1$$

$$(4) \text{ em (1)} \Rightarrow 1 + r_3 = 6 \Rightarrow r_3 = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) r_1 r_2 = -\frac{10}{5} = -2 \\ (4) r_1 + r_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{r_1 = -1 \text{ e } r_2 = 2}_{\text{(ou vice-versa)}}, \text{ portanto } S = \{-1, 2, 5\}.$$

**96.** Observação

As  $n$  relações de Girard para uma equação polinomial de grau  $n$  não são suficientes para obter  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ . Se tentarmos o cálculo de  $r_1$ , por exemplo, após várias substituições, obteremos a equação

$$\underbrace{a_n r_1^n + a_{n-1} r_1^{n-1} + a_{n-2} r_1^{n-2} + \dots + a_1 r_1 + a_0}_{P(r_1)} = 0$$

que equivale à equação dada.

Exemplo:

Resolver  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ .

(1)  $r_1 + r_2 + r_3 = 6$ ; (2)  $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = 3$ ; (3)  $r_1 r_2 r_3 = -10$

Temos: (2)  $r_1(r_2 + r_3) + r_2 r_3 = 3 \Rightarrow \underbrace{r_1(6 - r_1)}_{\text{de (1)}} + \underbrace{\frac{-10}{r_1}}_{\text{de (3)}} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1^2(6 - r_1) - 10 = 3r_1 \Rightarrow r_1^3 - \underbrace{6r_1^2 + 3r_1 + 10}_{P(r_1)} = 0 \quad (??)$

Quando é dada uma condição para as raízes (por exemplo, soma de duas raízes é 1), então é possível obter o conjunto solução, como vimos no item 95 - 3ª.

## EXERCÍCIOS

**298.** Se  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são as raízes da equação  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ , calcule o valor de  $x_1 + x_2 + x_3$ .

**299.** Calcule a soma e o produto das raízes das seguintes equações:

a)  $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$

b)  $x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 11x + 1 = 0$

c)  $2x^3 + 4x^2 + 7x + 10i = 0$

**300.** Se o conjunto solução da equação  $x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0$  é  $S = \{a, b, c, d\}$ , calcule, em função de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ , o número

$$y = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

### Solução

Pelas relações de Girard, temos:  $abcd = \delta$  e  $abc + abd + acd + bcd = \gamma$ .

$$\text{Assim, temos: } y = \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

$$\text{Resposta: } y = \frac{\gamma}{\delta}.$$

**301.** Se  $a, b, c$  são raízes da equação  $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ , calcule  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .

**302.** Calcule a soma dos inversos das raízes da equação  $x^3 - 7x^2 + 4x - 1 = 0$ .

**303.** Se  $a, b, c$  e  $d$  são as raízes da equação  $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ , qual é o valor da expressão:

$$E = \frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc}?$$

**304.** Sendo  $\{a, b, c\}$  a solução da equação  $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$ , calcule o valor da expressão  $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ .

### Solução

Aplicando as relações de Girard, temos:

$$(1) a + b + c = -\frac{a_2}{a_3} = \frac{3}{2} \qquad (3) abc = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{1}{2}$$

$$(2) ab + ac + bc = \frac{a_1}{a_3} = \frac{5}{2}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2[(ab)(bc) + (bc)(ca) + (ab)(ca)] = \\ &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(b + c + a) = \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4} + \frac{6}{4} = \frac{31}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Resposta: } \frac{31}{4}.$$

**305.** Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação  $x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 4x - 7 = 0$ .

**306.** Calcule a soma dos quadrados e a soma dos cubos das raízes da equação  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ .

**Solução**

Pelas relações de Girard, temos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = p, \quad r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = q, \quad r_1r_2r_3 = r$$

$$\text{Façamos } X = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \quad \text{e} \quad Y = r_1^3 + r_2^3 + r_3^3.$$

$$\text{Temos: } X = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = p^2 - 2p$$

$$pX = (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) =$$

$$= Y + r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_1^2r_3 + r_1r_3^2 + r_2^2r_3 + r_2r_3^2 =$$

$$= Y + r_1r_2(r_1 + r_2) + r_1r_3(r_1 + r_3) + r_2r_3(r_2 + r_3) =$$

$$= Y + r_1r_2(p - r_3) + r_1r_3(p - r_2) + r_2r_3(p - r_1) =$$

$$= Y + p(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) - 3r_1r_2r_3 = Y + pq - 3r$$

$$\text{portanto } Y = p(p^2 - 2q) - pq + 3r = p^3 - 3pq + 3r$$

$$\text{Resposta: } X = p^2 - 2q \quad \text{e} \quad Y = p^3 - 3pq + 3r.$$

**307.** Seja a equação do 4º grau com  $q, r, s$  e  $t$  reais,  $x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$  tal que  $L, M, N, P$  são raízes reais dessa equação.

Qual o valor de:

$$\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}?$$

**308.** Sendo  $a, b, c$  as raízes da equação  $x^3 + x - 1 = 0$ , calcule o valor de

$$\log \left( \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right).$$

**309.** Se  $a, b$  e  $c$  são raízes da equação  $x^3 - rx + 20 = 0$ , em que  $r$  é um número real, qual o valor de  $a^3 + b^3 + c^3$ ?

**310.** Resolva a equação  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ , sabendo que uma raiz é igual à soma das outras duas.

**311.** Resolva a equação  $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$ , sabendo que uma raiz é igual ao dobro da soma das outras duas.

**312.** Resolva a equação  $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$ , sabendo que uma raiz é o quádruplo da soma das outras duas.

- 313.** Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  as raízes da equação  $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$  e sabendo que  $a > 0$  e  $c = -a$ , qual o valor de  $a + b$ ?
- 314.** Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $a < b < c$ , as raízes da equação  $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ . Sabendo que uma raiz é a diferença entre as outras duas, qual o valor de  $a - b + c$ ?
- 315.** Sejam  $a < b < c$  as raízes da equação  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ . Calcule o valor de  $a + 2b + c$ , sabendo que  $a + c = -1$ .
- 316.** Calcule as raízes da equação  $x^3 + 4x^2 - 11x + k = 0$ , sabendo que a soma de duas raízes vale  $-7$ .
- 317.** Resolva a equação  $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$ , sabendo que tem raízes iguais duas a duas.
- 318.** Resolva a equação  $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ , sabendo que uma raiz é igual à diferença das outras duas.
- 319.** Resolva a equação  $x^3 + 5x^2 - 12x - 36 = 0$ , sabendo que uma raiz é igual ao produto das duas.
- 320.** Determine as raízes da equação  $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ , sabendo que o produto de duas delas é igual à unidade.
- 321.** Resolva a equação  $5x^4 - 26x^3 - 18x^2 + 32x - 8 = 0$ , sabendo que o produto de duas raízes é 2.
- 322.** O produto de duas raízes da equação  $x^3 + bx^2 + 2x + d = 0$  é igual a 2 e a soma das mesmas raízes é diferente de zero. Qual é a 3ª raiz?
- 323.** O produto de duas raízes da equação  $2x^3 - 19x^2 + 37x - 14 = 0$  é 1. Qual é a soma das duas maiores raízes da equação?
- 324.** Resolva a equação  $x^3 + 7x^2 - 6x - 72 = 0$ , sabendo que a razão entre duas raízes é  $\frac{3}{2}$ .
- 325.** Resolva a equação  $5x^3 - 37x^2 + 90x - 72 = 0$ , sabendo que uma raiz é média harmônica das duas outras.
- 326.** Quais os valores de  $a$  e  $b$  se as equações  $x^3 + ax^2 + 18 = 0$  e  $x^3 + bx + 12 = 0$  têm duas raízes comuns?
- 327.** Determine  $m$  de modo que a equação  $x^3 + mx - 2 = 0$  tenha uma raiz dupla.

- 328.** Resolva a equação  $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ , sabendo que suas raízes estão em P.A.

**Solução**

Pelas relações de Girard, temos:

$$(1) r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 9$$

$$(2) r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{a_1}{a_3} = 23$$

$$(3) r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3} = 15$$

e pela condição do problema temos:

$$(4) r_1 + r_3 = 2r_2$$

Substituindo (4) em (1) resulta:  $3r_2 = 9 \Rightarrow r_2 = 3$

Temos, então:

$$(1) r_1 + r_3 = 6 \quad \text{e} \quad (3) r_1 \cdot r_3 = 5$$

portanto  $r_1$  e  $r_3$  são raízes da equação  $y^2 - 6y + 5 = 0$ , isto é,  $r_1 = 1$  e  $r_3 = 5$ .

Resposta:  $S = \{1, 3, 5\}$ .

- 329.** Resolva a equação  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ , sabendo que suas raízes estão em P.A.

- 330.** Sendo  $c$  a maior das três raízes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da equação  $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ , e sabendo que uma delas é a média aritmética das outras duas, qual o valor de  $a + b + 4c$ ?

- 331.** Resolva a equação  $64x^3 - 56x^2 + 14x - 1 = 0$ , sabendo que suas raízes estão em P.G.

**Solução**

Pelas relações de Girard, temos:

$$(1) r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = \frac{7}{8}$$

$$(2) r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{7}{32}$$

$$(3) r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3} = \frac{1}{64}$$

e pela condição do problema, temos:

$$(4) r_1 \cdot r_3 = r_2^2$$

Substituindo (4) em (2), temos:

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = r_1 r_2 + r_2^2 + r_2 r_3 = r_2(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{7}{32}$$

$$\text{então } r_2 \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32} \Rightarrow r_2 = \frac{1}{4}$$

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, vamos dividir

$$64x^3 - 56x^2 + 14x - 1 \text{ por } x - \frac{1}{4}:$$

64	-56	14	-1	$\frac{1}{4}$
64	-40	4	0	

e recaímos na equação  $64x^2 - 40x + 4 = 0$  cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1}{2} \text{ e } r_3 = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Resposta: } S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\}.$$

**332.** As raízes da equação  $x^3 - 6x^2 + Kx + 64 = 0$  são números reais em progressão geométrica. Qual o valor de  $K$ ?

**333.** Resolva a equação  $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$ , sabendo que existem duas raízes simétricas.

### Solução

Temos:

$$(1) r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_3}{a_4} = 4$$

$$(2) r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = \frac{a_2}{a_4} = -1$$

$$(3) r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -\frac{a_1}{a_4} = -16$$

$$(4) r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{a_0}{a_4} = -12$$

$$(5) r_1 + r_2 = 0 \text{ (condição do problema)}$$

Comparando (1) e (5), resulta:

$$(r_1 + r_2) + r_3 + r_4 = 4 \Rightarrow r_3 + r_4 = 4 \quad (6)$$

Substituindo (5) em (3), resulta:

$$r_1 r_2 \underbrace{(r_3 + r_4)}_4 + r_3 r_4 \underbrace{(r_1 + r_2)}_0 = -16 \Rightarrow r_1 r_2 = -4 \quad (7)$$

Substituindo este último resultado em (4), vem:

$$(r_1 r_2) r_3 r_4 = -12 \Rightarrow -4 r_3 r_4 = -12 \Rightarrow r_3 r_4 = 3 \quad (8)$$

De (6) e (8) resulta que  $r_3$  e  $r_4$  são as raízes da equação  $y^2 - 4y + 3 = 0$ , isto é,  $r_3 = 1$  e  $r_4 = 3$ .

De (5) e (7) resulta que  $r_1$  e  $r_2$  são as raízes da equação  $y^2 - 4 = 0$ , isto é,  $r_1 = 2$  e  $r_2 = -2$ .

Resposta:  $S = \{2, -2, 1, 3\}$ .

- 334.** Resolva a equação  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ , sabendo que duas raízes são simétricas.
- 335.** Determine a condição para que a equação  $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$  tenha duas raízes simétricas.
- 336.** Resolva a equação  $x^3 - 3x^3 - 4x + 12 = 0$ , sabendo que duas raízes são simétricas.
- 337.** Quais os valores de  $h$  para que a equação  $x^3 + hx^2 + (2h + 1)x + 1 = 0$  admita duas raízes opostas?
- 338.** Qual é a relação entre  $a, b, c$  para que a equação  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  tenha duas raízes simétricas?
- 339.** Determine as raízes  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  do polinômio  $x^3 - px^2 + qx - r$ , dado que  $\alpha + \beta = 0$ .
- 340.** Resolva a equação  $2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6 = 0$ , sabendo que existem duas raízes recíprocas.

### Solução

Temos:

$$(1) \quad r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = -7$$

$$(3) \quad r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4 = -\frac{19}{2}$$

$$(4) r_1 r_2 r_3 r_4 = -3$$

$$(5) r_1 = \frac{1}{r_2} \text{ (condição do problema)}$$

$$\text{De (5) em (4) resulta } r_3 r_4 = -3 \text{ (4')}$$

$$\text{De (5) em (3) resulta } r_1 r_2 (r_3 + r_4) + r_3 r_4 (r_1 + r_2) = -\frac{19}{2}$$

$$\text{isto é, } 1 \cdot (r_3 + r_4) - 3 \underbrace{\left( \frac{1}{2} - r_3 - r_4 \right)}_{(1)} = -\frac{19}{2}, \text{ ou melhor: } r_3 + r_4 = -2 \text{ (3')}$$

Resolvendo o sistema (3'), (4') resulta  $r_3 = 1$  e  $r_4 = -3$  (ou vice-versa).

Então, temos o sistema:

$$\begin{cases} (1) r_1 + r_2 = \frac{5}{2} \text{ que fornece } r_1 = 2 \text{ e } r_2 = \frac{1}{2} \text{ (ou vice-versa).} \\ (5) r_1 r_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Resposta: } S = \left\{ 2, \frac{1}{2}, 1, -3 \right\}.$$

**341.** Resolva a equação  $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ , sabendo que admite uma raiz com multiplicidade 2.

### Solução

Temos:

$$(1) r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 1$$

$$(2) r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{a_1}{a_3} = -8$$

$$(3) r_1 r_2 r_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -12$$

$$(4) r_1 = r_2 \text{ (condição do problema)}$$

$$\text{De (4) em (1) resulta } 2r_1 + r_3 = 1 \text{ (1')}$$

$$\text{De (4) em (2) resulta } r_1^2 + 2r_1 r_3 = -8 \text{ (2')}$$

Eliminando  $r_3$  por substituição de (1') em (2'), temos:

$$r_1^2 + 2r_1(1 - 2r_1) = -8 \Rightarrow 3r_1^2 - 2r_1 - 8 = 0, \text{ portanto}$$

$$r_1 = 2 \text{ ou } r_1 = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{se } r_1 = 2, \text{ então } \begin{cases} (1') r_3 = 1 - 2r_1 = -3 \\ (3) r_3 = -\frac{12}{r_1^2} = -3 \end{cases}$$

$$\text{se } r_1 = -\frac{4}{3}, \text{ então } \begin{cases} (1') r_3 = 1 - 2r_1 = \frac{11}{3} \\ (3) r_3 = -\frac{12}{r_1^2} = -\frac{27}{4} \end{cases} \curvearrowright ?$$

Resposta:  $S = \{2, -3\}$ .

**342.** Resolva a equação  $8x^4 - 28x^3 + 18x^2 + 27x - 27 = 0$ , sabendo que uma das raízes tem multiplicidade 3.

**343.** Calcule a área do triângulo cujos lados são as raízes da equação  $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , em que os reais  $\alpha, \beta, \gamma$  são dados.

**Solução 1**

Pela fórmula de Hierão, um triângulo de lados  $r_1, r_2, r_3$  e semiperímetro

$$p = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{2} \text{ apresenta área:}$$

$$S = \sqrt{p(p - r_1)(p - r_2)(p - r_3)}$$

portanto

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p[p^3 - (r_1 + r_2 + r_3)p^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)p - r_1r_2r_3]} = \\ &= \sqrt{-\frac{\alpha}{2} \left[ -\frac{\alpha^3}{8} - (-\alpha) \cdot \frac{\alpha^2}{4} + \beta \left( -\frac{\alpha}{2} \right) - (-\gamma) \right]} = \sqrt{-\frac{\alpha^4}{16} + \frac{\alpha^2\beta}{4} - \frac{\alpha\gamma}{2}} \end{aligned}$$

**Solução 2**

Temos  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$

$$\text{então } S = \sqrt{p(p - r_1)(p - r_2)(p - r_3)} = \sqrt{p \cdot P(p)} =$$

$$= \sqrt{-\frac{\alpha}{2} \cdot \left[ -\frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^3}{4} - \frac{\alpha\beta}{2} + \gamma \right]}$$

$$\text{Resposta: } S = \sqrt{-\frac{\alpha^4}{16} + \frac{\alpha^2\beta}{4} - \frac{\alpha\gamma}{2}}.$$

- 344.** A soma de duas raízes da equação  $x^4 + 2x^3 + px^2 + qx + 2 = 0$  é  $-1$  e o produto das outras duas raízes é  $1$ . Calcule  $p$  e  $q$  e resolva a equação.
- 345.** Determine a condição para que as raízes da equação  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  formem uma P.G.

**Solução**

Temos:

(1)  $r_1 + r_2 + r_3 = -p$

(2)  $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = q$

(3)  $r_1r_2r_3 = -r$

(4)  $r_1r_3 = r_2^2$  (condição do problema)

De (4) em (3) resulta  $r_2^3 = -r$  (3')

De (4) em (2) resulta  $r_1r_2 + r_2^2 + r_2r_3 = q$ ,

portanto,  $r_2(r_1 + r_2 + r_3) = q$ , ou melhor,  $r_2(-p) = q$  (2')

Substituindo (3') em (2'), vem:  $\sqrt[3]{-r} \cdot (-p) = q$ , isto é,  $-r \cdot (-p)^3 = q^3$ .

Resposta:  $q^3 = rp^3$ .

- 346.** Determine  $m$  para que a equação  $x^3 - 7x + m = 0$  tenha uma raiz igual ao dobro de uma outra e, em seguida, resolva a equação.
- 347.** Ache a condição para que a equação  $x^3 + px + q = 0$  tenha uma das raízes igual à soma dos inversos das outras duas.
- 348.** Dada a equação  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ , prove que:  
 a) se as raízes estão em P.G., então  $p^2s = r^2$ .  
 b) se as raízes estão em P.A., então  $p^3 - 4pq + 8r = 0$ .
- 349.** Numa equação do terceiro grau, o primeiro coeficiente é  $1$ , o segundo é igual a  $2$ , o terceiro é desconhecido e o último é  $8$ . Sabendo que essa equação tem as três raízes em P.G., determine as raízes e escreva a equação.
- 350.** Determine  $p$  e  $q$  de modo que a equação  $x^4 + px^3 + 2x^2 - x + q = 0$  apresente duas raízes recíprocas entre si e as outras duas raízes com soma igual a  $1$ .
- 351.** Determine  $m$  e  $k$  de modo que a cada raiz  $\alpha$  da equação  $mx^4 + 8x^3 + 13x^2 + kx + 1 = 0$  corresponda o número  $-\frac{1}{\alpha}$ , também raiz da mesma equação.

**352.** Sendo  $a, b, c$  raízes da equação  $x^3 - 3x + 54 = 0$ , calcule  $\log\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ .

**353.** Prove que, se  $a$  e  $b$  são raízes da equação  $x^2 - px + B^m = 0$ , teremos:

$$\log_b a^a + \log_b b^b + \log_b a^b + \log_b b^a = mp.$$

## VI. Raízes complexas

**97.** Vamos expor aqui algumas propriedades que relacionam entre si as raízes complexas e não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais e ajudam a determinar as raízes da equação.

### 98. Raízes conjugadas

Teorema

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo  $z = \alpha + \beta i$  ( $\beta \neq 0$ ), então essa equação também admite como raiz o número  $\bar{z} = \alpha - \beta i$ , conjugado de  $z$ .

Demonstração:

Seja a equação  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  de coeficientes reais que admite a raiz  $z$ , isto é,  $P(z) = 0$ .

Provemos que  $\bar{z}$  também é raiz dessa equação, isto é,  $P(\bar{z}) = 0$ :

$$\begin{aligned} P(\bar{z}) &= a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + a_{n-2} (\bar{z})^{n-2} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = \\ &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + a_{n-2} \bar{z}^{n-2} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = \\ &= \bar{a}_n \bar{z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \bar{a}_{n-2} \bar{z}^{n-2} + \dots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0} = \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0. \end{aligned}$$

### 99. Multiplicidade da raiz conjugada

Teorema

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz  $z = \alpha + \beta i$  ( $\beta \neq 0$ ) com multiplicidade  $p$ , então essa equação admite a raiz  $z = \alpha - \beta i$  com multiplicidade  $p$ .

Demonstração:

Suponhamos que a equação  $P(x) = 0$  com coeficientes reais admite a raiz  $z = \alpha + \beta i$  ( $\beta \neq 0$ ) com multiplicidade  $p$  e a raiz  $\bar{z} = \alpha - \beta i$  com multiplicidade  $p'$  ( $p' \neq p$ ). Provemos que isso leva a uma contradição.

Seja  $m$  o menor dos números  $p$  e  $p'$ . Como o polinômio  $P$  é divisível por  $(x - z)^p$  e  $(x - \bar{z})^{p'}$ ,  $P$  é divisível por  $(x - z)^m$  e  $(x - \bar{z})^m$ . Sendo  $z \neq \bar{z}$ , resulta que  $P$  é divisível por  $(x - z)^m \cdot (x - \bar{z})^m$ , então:

$$P = [(x - z)^m \cdot (x - \bar{z})^m] \cdot Q = [(x - z)(x - \bar{z})]^m \cdot Q = [x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}]^m \cdot Q = [x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)]^m \cdot Q$$

Como  $P$  e  $[x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$  têm coeficientes reais, decorre que  $Q$  tem todos os coeficientes reais. São possíveis dois casos:

1º caso:  $m = p < p'$

$P = (x - z)^m \cdot (x - \bar{z})^m \cdot Q = (x - z)^p \cdot (x - z)^{p'} \cdot Q$  e, como  $p$  é a multiplicidade da raiz  $z$ , decorre que  $Q$  não é divisível por  $(x - z)$ . Mas  $Q$  deve ter ainda  $p' - p$  fatores  $x - \bar{z}$ , pois  $p' > p$ .

Portanto  $Q$  não é divisível por  $x - z$  e é divisível por  $x - \bar{z}$ . Isto é absurdo por contrariar o teorema anterior,

2º caso:  $m = p' < p$

$P = (x - z)^m \cdot (x - \bar{z})^m \cdot Q = (x - z)^p \cdot (x - \bar{z})^{p'} \cdot Q$  e, como  $p'$  é a multiplicidade da raiz  $\bar{z}$ , decorre que  $Q$  não é divisível por  $(x - \bar{z})$ . Mas  $Q$  deve ter ainda  $p - p'$  fatores  $x - z$ , pois  $p > p'$ .

Portanto  $Q$  não é divisível por  $x - \bar{z}$  e é divisível por  $x - z$ . Isto também é absurdo por contrariar o teorema anterior.

Para evitar contradição, temos necessariamente  $p = p'$ .

## 100. Observações

1ª) Os dois teoremas anteriores só se aplicam a equações polinomiais de coeficientes **reais**. Por exemplo, a equação  $x^2 - ix = 0$  tem como raízes  $0$  e  $i$ , entretanto não admite a raiz  $-i$ , conjugada de  $i$ .

2ª) Como a toda raiz complexa  $z = \alpha + \beta i$  ( $\beta \neq 0$ ) de uma equação com coeficientes reais  $P(x) = 0$  corresponde uma outra raiz  $\bar{z} = \alpha - \beta i$ , com igual multiplicidade, decorre que o número de raízes complexas não reais de  $P(x) = 0$  é necessariamente par.

3ª) Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então ela admite um número ímpar de raízes reais. Assim, por exemplo, toda equação  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  (com  $a, b, c, d$  reais) tem uma ou três raízes reais, pois o número de raízes complexas e não reais é par.

## 101. Aplicações

1ª) Determinar o menor grau que pode ter uma equação polinomial de coeficientes reais para admitir  $1, i$  e  $1 + i$  como raízes.

Tal equação terá no mínimo 5 raízes:  $1, i, -i, 1 + i, 1 - i$  e, portanto, terá no mínimo grau 5.

2ª) Formar uma equação polinomial de grau mínimo e coeficientes reais que admita 0 como raiz simples, 1 como raiz dupla e  $2 - 3i$  como raiz tripla.

Tal equação terá também  $2 + 3i$  como raiz tripla, portanto a solução é:

$$k(x - 0)(x - 1)^2(x - 2 + 3i)^3(x - 2 - 3i)^3 = 0, \text{ em que } k \in \mathbb{R} \text{ e } k \neq 0.$$

3ª) Resolver a equação  $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 3 = 0$ , sabendo que uma das raízes é  $i\sqrt{3}$ .

Temos, então, que  $-i\sqrt{3}$  também é raiz; portanto, o 1º membro é divisível por  $(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) = x^2 + 3$ .

$$\text{Dividindo, recaímos em } (x^2 + 3)(x^2 + x - 1) = 0$$

e obtemos as duas raízes restantes:

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

## EXERCÍCIOS

**354.** Obtenha a equação de menor grau que tem como raízes  $i, 2i$  e  $3i$  e apresenta coeficientes reais.

### Solução

Toda equação polinomial com coeficientes reais que admite a raiz complexa  $z$  também admite a raiz  $\bar{z}$ ; portanto, as raízes da equação procurada são:  $i, -i, 2i, -2i, 3i$  e  $-3i$ .

A equação é:

$$k(x - i)(x + i)(x - 2i)(x + 2i)(x - 3i)(x + 3i) = 0$$

$$k(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9) = 0$$

Resposta:  $k(x^6 + 14x^4 + 49x^2 + 36) = 0$  com  $k \neq 0$ .

- 355.** Forme uma equação algébrica de coeficientes reais, com grau mínimo, de modo que  $0$ ,  $1 + i$  e  $i$  sejam raízes simples.
- 356.** Qual é o grau mínimo de um polinômio de coeficientes reais, sabendo que  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = -1 + i$  são raízes?
- 357.** Os coeficientes do polinômio  $p$  são reais e sabe-se que ele possui 3 raízes, duas das quais são  $0$  e  $i(i^2 = -1)$ . Como  $p$  pode ser expresso?
- 358.** Os números complexos  $1 + i$ ,  $1 + i^2$  e  $2 - i$  são raízes do polinômio  $p$  de coeficientes reais. O que se pode afirmar sobre o grau de  $p$ ?
- 359.** Resolva a equação  $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ .
- 360.** Resolva a equação  $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = 0$ , sabendo que uma das raízes é  $2 + i\sqrt{3}$ .

### Solução

Como a equação tem todos os coeficientes reais, resulta que outra raiz é  $2 - i\sqrt{3}$  (conjugada de  $2 + i\sqrt{3}$ ). Assim, o polinômio dado é divisível por

$$(x - 2 - i\sqrt{3})(x - 2 + i\sqrt{3}),$$

isto é, por  $x^2 - 4x + 7$ :

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 8x + 35 \quad | \quad x^2 - 4x + 7 \\ -x^4 + 4x^3 - 7x^2 \quad \quad \quad | \quad x^2 + 4x + 5 \\ \hline 4x^3 - 11x^2 + 8x + 35 \\ -4x^3 + 16x^2 - 28x \quad \quad \quad | \\ \hline 5x^2 - 20x + 35 \\ -5x^2 + 20x - 35 \\ \hline 0 \end{array}$$

A equação dada se escreve:  $(x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 5) = 0$

e as raízes de  $x^2 + 4x + 5 = 0$  são as que faltam. Portanto:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Resposta:  $S = \{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}, -2 + i, -2 - i\}$ .

- 361.** Resolva a equação  $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ , sabendo que uma das raízes é  $2 + 3i$ .
- 362.** Construa uma equação polinomial do 6º grau e de coeficientes reais que admita  $1, 2$  e  $i$  como raízes simples e  $0$  como raiz dupla.
- 363.** Sabe-se que a equação algébrica  $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ , em que  $a, b, c, d$  são números reais, admite  $1$  como raiz dupla e  $i$  (unidade imaginária) como raiz simples. Calcule os valores de  $a, b, c$  e  $d$ .
- 364.** A equação  $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$ , em que  $m$  e  $n$  são números reais, admite  $1 + i$  como raiz. Quais os valores de  $m$  e  $n$ ?
- 365.** Determine  $a$  e  $b$  (reais) de modo que a equação  $2x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$  admita a raiz  $2 + i$ .
- 366.** Resolva a equação  $x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ , sabendo que  $i$  é uma das raízes da equação e tem multiplicidade  $3$ .
- 367.** Uma raiz de uma equação do terceiro grau com coeficientes reais é  $1 + 2i$  e a soma das demais raízes é  $3 - 2i$ . Determine as raízes dessa equação.
- 368.** É dado o polinômio  $P(x) = x^4 + Cx^2 + Dx + E$  com  $C, D, E$  números reais. Sabe-se que o número complexo  $(0, 1)$  é raiz de  $P(x) = 0$  e que dividindo  $P(x)$  por  $Q(x)$  obtém-se quociente  $Q_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$  e por resto  $15$ . Determine  $P(x)$  e as raízes de  $P(x) = 0$ .

## VII. Raízes reais

**102.** Dada uma equação polinomial  $P(x) = 0$  com coeficientes reais, vamos desenvolver uma teoria que permite determinar o número de raízes reais que a equação admite num certo intervalo dado  $]a; b[$ .

**103.** Seja  $P(x) = 0$  uma equação polinomial com coeficientes reais. Indiquemos por  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p$  suas raízes reais e por  $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_q, \bar{z}_q$  suas raízes complexas e não reais.

Pelo teorema da decomposição, temos:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_p) \cdot [(x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2) \dots (x - z_q)(x - \bar{z}_q)] \quad (1)$$

Vamos efetuar o produto correspondente a duas raízes complexas conjugadas  $z_1 = \alpha + \beta i$  e  $\bar{z}_1 = \alpha - \beta i$ . Por exemplo:

$$\begin{aligned} (x - z_1)(x - \bar{z}_1) &= x^2 - (z_1 + \bar{z}_1)x + z_1\bar{z}_1 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = \\ &= (x - \alpha)^2 + \beta^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Verificamos que o produto é positivo para todo valor real dado a  $x$ . Como o polinômio:

$$Q = \underbrace{(x - z_1)(x - \bar{z}_1)} \underbrace{(x - z_2)(x - \bar{z}_2)} \dots \underbrace{(x - z_q)(x - \bar{z}_q)}$$

é o produto de  $q$  fatores do tipo que acabamos de analisar, concluímos que  $Q$  assume valor numérico positivo para todo  $x$  real e a expressão (1) fica:

$$P = a_n \cdot Q \cdot (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_p)$$

com  $Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 104. Teorema de Bolzano

Sejam  $P(x) = 0$  uma equação polinomial com coeficientes reais e  $]a; b[$  um intervalo real aberto.

1º) Se  $P(a)$  e  $P(b)$  têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes da equação em  $]a; b[$ .

2º) Se  $P(a)$  e  $P(b)$  têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em  $]a; b[$ .

Demonstração:

Notemos que, se  $r_i$  é interna ao intervalo  $]a; b[$ , então  $a < r_i < b$ , isto é:

$$\left. \begin{array}{l} a - r_i < 0 \\ b - r_i > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a - r_i)(b - r_i) < 0$$

Notemos também que, se  $r_e$  é externa ao intervalo  $]a; b[$ , por exemplo, se  $a < b < r_e$ , resulta:

$$\left. \begin{array}{l} a - r_e < 0 \\ b - r_e < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a - r_e)(b - r_e) > 0$$

Calculemos agora o produto  $P(a) \cdot P(b)$ :

$$P(a) \cdot P(b) = [a_n \cdot Q(a) \cdot (a - r_1)(a - r_2) \dots (a - r_p)] a_n \cdot Q(b) \cdot (b - r_1)(b - r_2) \dots (b - r_p) = \\ = a_n^2 \cdot [Q(a) \cdot Q(b)] \cdot [(a - r_1)(b - r_1)] [(a - r_2)(b - r_2)] \dots [(a - r_p)(b - r_p)] \quad (2)$$

Verificamos que  $P(a) \cdot P(b)$  é um produto de  $p + 2$  fatores numéricos, a saber:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{um fator é } a_n^2 > 0 \\ \text{um fator é } Q(a) \cdot Q(b) > 0, \text{ pois } Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ p \text{ fatores do tipo } (a - r_m)(b - r_m), \text{ em que } r_m \text{ é raiz real da equação dada} \end{array} \right.$$

Assim, os únicos fatores negativos do segundo membro da relação (2) são os fatores correspondentes às raízes de  $P(x) = 0$  internas ao intervalo  $]a; b[$ , o que permite concluir a existência de duas possibilidades.

1ª) Quando  $P(a)$  e  $P(b)$  têm mesmo sinal, isto é,  $P(a) \cdot P(b) > 0$ , existe um número par de fatores negativos do tipo  $(a - r_i)(b - r_i)$  e, portanto, existe um número par de raízes reais da equação  $P(x) = 0$  que são internas ao intervalo  $]a; b[$ .

2ª) Quando  $P(a)$  e  $P(b)$  têm sinais contrários, isto é,  $P(a) \cdot P(b) < 0$ , existe um número ímpar de fatores negativos do tipo  $(a - r_i)(b - r_i)$  e, portanto, existe um número ímpar de raízes reais da equação  $P(x) = 0$  que são internas ao intervalo  $]a; b[$ .

## 105. Aplicações

1ª) Quantas raízes reais a equação  $x^3 + 5x^2 - 3x + 4 = 0$  pode apresentar no intervalo  $]0, 1[$ ?

Temos  $P(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 4$ , então:

$$P(0) = 0^3 + 5(0)^2 - 3(0) + 4 = 4 > 0$$

$$P(1) = 1^3 + 5(1)^2 - 3(1) + 4 = 7 > 0$$

Como  $P(0)$  e  $P(1)$  são positivos, a equação pode ter duas ou nenhuma raiz real no intervalo dado.

2ª) Quantas raízes reais a equação  $x^3 - 3x^2 + 7x + 1$  pode apresentar no intervalo  $] -1, 1[$ ?

Temos  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$ , então:

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 7(-1) + 1 = -10 < 0$$

$$P(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 7(1) + 1 = 6 > 0$$

Como  $P(-1)$  e  $P(1)$  têm sinais contrários, a equação pode ter uma ou três raízes reais no intervalo dado.

3ª) Determinar  $m$  de modo que a equação:

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + (m - 3) = 0$$

tenha ao menos uma raiz real compreendida entre 0 e 2.

A condição para isso é que  $P(0)$  e  $P(2)$  tenham sinais opostos. Temos:

$$P(0) = m - 3 \text{ e } P(2) = m + 3$$

Portanto:

$$P(0) \cdot P(2) < 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 3$$

## 106. Interpretação geométrica

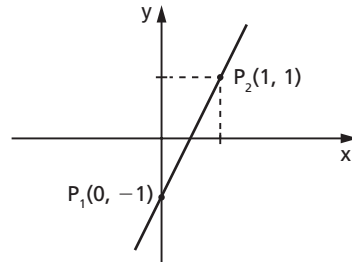
Se  $y = P(x)$  é uma função polinomial de coeficientes reais e variável real  $x$ , podemos, a cada par  $(x, y)$  da função, associar um ponto do plano cartesiano e, assim, obter o seu gráfico.

### 107. Exemplos:

1º) Gráfico de  $y = 2x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Considerando que dois pontos distintos determinam uma reta, vamos atribuir a  $x$  dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de  $y = 2x - 1$ .

$x$	$y = 2x - 1$
0	-1
1	1



Obtemos  $P_1(0, -1)$  e  $P_2(1, 1)$  e traçamos a reta  $P_1P_2$ , que é precisamente o gráfico da função dada.

2º) Gráfico de  $y = x^2 - 6x + 8$ ,  $x \in \mathbb{R}$

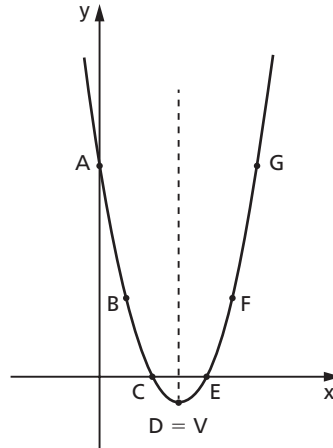
O gráfico desta função é uma parábola com a concavidade voltada para cima, eixo de simetria vertical, vértice no ponto  $V$  tal que

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 3 \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -1$$

e corta o eixo dos  $x$  nos pontos que têm como abscissas as raízes da equação  $y = 0$ , isto é, nos pontos  $(2, 0)$  e  $(4, 0)$ .

Fazendo a tabela:

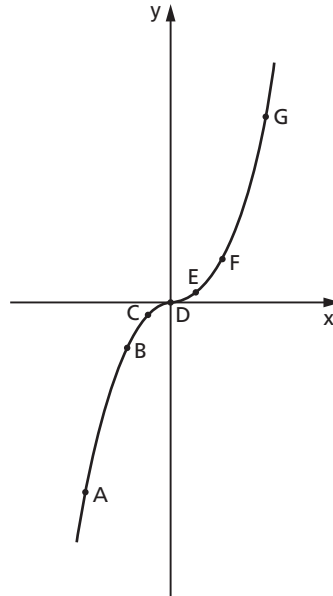
x	y	ponto
0	8	A
1	3	B
2	0	C
3	-1	D = V
4	0	E
5	3	F
6	8	G



3º) Gráfico de  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Vamos inicialmente construir a tabela:

x	$x^3$	ponto
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{27}{8}$	A
-1	-1	B
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	C
0	0	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	E
1	1	F
$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{8}$	G



Nestas condições, pesquisar as raízes reais de uma equação polinomial  $P(x) = 0$  é localizar (quantos e onde) os pontos em que o gráfico cartesiano da função  $y = P(x)$  intercepta o eixo das abscissas ( $y = 0$ ).

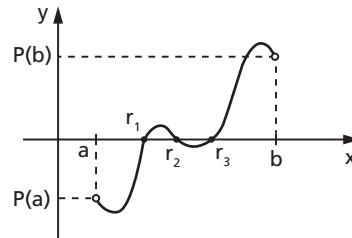
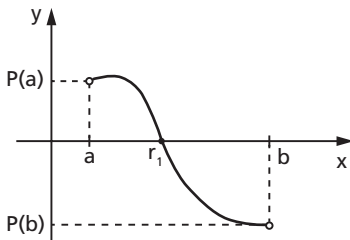
Assim, o teorema de Bolzano comporta uma interpretação geométrica baseada, em resumo, no seguinte:

sinal de  $P(a) =$  sinal de  $P(b) \Rightarrow$  número par de raízes reais

sinal de  $P(a) \neq$  sinal de  $P(b) \Rightarrow$  número ímpar de raízes reais

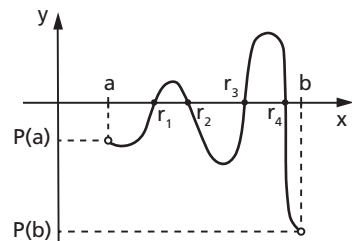
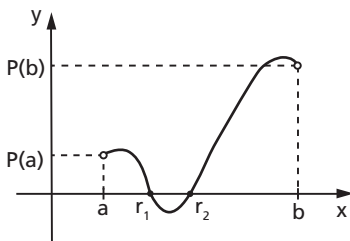
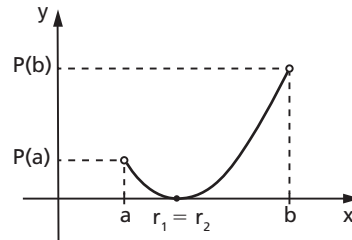
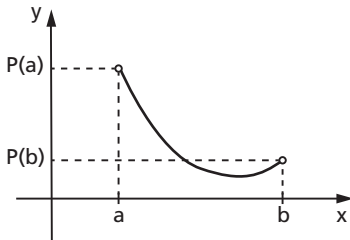
Exemplo:

sinal de  $P(a) \neq$  sinal de  $P(b)$



número ímpar de raízes

sinal de  $P(a) =$  sinal de  $P(b)$



número par de raízes

## EXERCÍCIOS

**369.** Qual das equações seguintes tem pelo menos uma raiz  $r$ , que satisfaz  $1 < r < 2$ ?

a)  $x^5 + 2x^3 + x + 1 = 0$

b)  $x^5 - 3x^2 + x - 4 = 0$

c)  $2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$

d)  $x^3 - 9x + 4 = 0$

e)  $x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x + 20 = 0$

**370.** Considere a equação  $P(x) = 0$ , com coeficientes reais e o intervalo  $] -1, 2[$ . Se  $P(-1) > 0$  e  $P(2) > 0$ , qual das proposições abaixo é correta?

a) Existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais de  $P(x) = 0$  em  $] -1, 2[$ .

b) Nunca existem raízes reais da equação em  $] -1, 2[$ .

**371.** Pelo menos quantas raízes reais possui a equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ?

**372.** A equação  $x^n - 1 = 0$ , em que  $n$  é um número natural maior que 5, tem para  $n$  par:

a) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e  $(n - 2)$  raízes complexas.

b) 1 raiz positiva,  $(n - 1)$  raízes não reais.

**373.** Uma das raízes do polinômio  $x^3 + 4x^2 + x - 6$  é 1. O que se pode afirmar sobre as outras duas raízes?

**374.** Uma das raízes da equação  $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$  é  $-1$ .

Determine  $m$  para que as outras raízes sejam reais.

**375.** Mostre que a equação  $1000x^5 + 20x^2 - 1 = 0$  admite uma raiz positiva inferior a  $\frac{1}{5}$ .

**Solução**

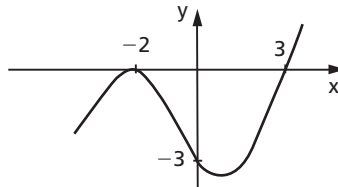
Façamos  $P(x) = 1000x^5 + 20x^2 - 1$  e calculemos  $P(0)$  e  $P\left(\frac{1}{5}\right)$ :

$$P(0) = 1000(0)^5 + 20(0)^2 - 1 = -1 < 0$$

$$P\left(\frac{1}{5}\right) = 1000\left(\frac{1}{5}\right)^5 + 20\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 1 = \frac{1000 + 2500 - 3125}{3125} = \frac{375}{3125} > 0$$

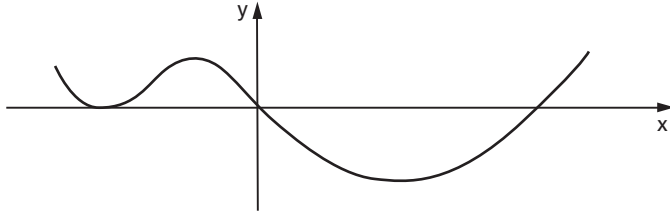
Como  $P(0) \cdot P\left(\frac{1}{5}\right) < 0$ , resulta que  $P$  apresenta um número ímpar de raízes reais no intervalo  $\left]0; \frac{1}{5}\right[$  (teorema de Bolzano).

- 376.** Quantas são as raízes reais da equação  $x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$ , no intervalo  $]0; 3[$ ?
- 377.** Dada a função polinomial  $f(x) = x^3 + 2x$ , construa seu gráfico cartesiano e, a partir daí, estabeleça o número de raízes reais da equação  $f(x) = 0$ .
- 378.** Determine  $\alpha$  de modo que a equação  $x^3 + x^2 + 5x + \alpha = 0$  tenha ao menos uma raiz real no intervalo  $] -2; 0[$ .
- 379.** Qual é o valor de  $k$  para que a função  $y = x^3 - 2x^2 + 3x - k$  tenha um zero entre 2 e 3?
- 380.** Qual é o conjunto dos valores de  $k$ , para os quais  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$  tem um ou três zeros reais entre 1 e 2?
- 381.** Quais os valores de  $b$  para que a equação  $2x^4 + bx^3 - bx - 2 = 0$  tenha quatro soluções reais e distintas?
- 382.** O polinômio de grau 3 cujo gráfico está esboçado na figura abaixo tem:
- uma raiz igual a  $-2$ , uma raiz igual a 3 e uma raiz complexa.
  - termo independente igual a  $-3$ .
  - uma raiz real e duas complexas.



Qual das proposições acima é correta?

**383.** O gráfico abaixo é o de um polinômio cujos zeros reais estão todos no trecho desenhado.



Qual das proposições abaixo, sobre o polinômio acima, é correta?

- a) Pode ser do 3º grau.
- b) Pode ser do 5º grau.
- c) Pode ser do 6º grau.

**384.** Um polinômio  $P$  do 5º grau com coeficientes reais tem duas raízes imaginárias. Sabendo que  $P(-2) = -1$ ,  $P(-1) = 2$ ,  $P(0) = -4$ ,  $P(1) = -7$  e  $P(2) > 0$ , diga quantas são as raízes reais de  $P$  e em que intervalo estão.

## VIII. Raízes racionais

**108.** Vamos desenvolver aqui um raciocínio que permite estabelecer se uma equação polinomial de coeficientes inteiros admite raízes racionais e, em caso positivo, vamos obter tais raízes.

### 109. Teorema das raízes racionais

Se uma equação polinomial

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  ( $a_n \neq 0$ ), de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional  $\frac{p}{q}$ , em que  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+^*$  e  $p$  e  $q$  são primos entre si, então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .

Demonstração:

Se  $\frac{p}{q}$  é uma raiz de  $P(x) = 0$ , temos:

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando a equação por  $q^n$ , temos:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Isolando  $a_n p^n$  e, depois,  $a_0 q^n$ , temos:

$$(1) a_n p^n = -q[a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}]$$

$$(2) a_0 q^n = -p[a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}]$$

Como  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, p$  e  $q$  são todos inteiros, decorre que:

$$\alpha = [a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_0 q^{n-1}] \text{ é inteiro e}$$

$$\beta = [a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}] \text{ é inteiro.}$$

Assim, retomando (1) e (2), vem:

$$(1) \frac{a_n p^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z} \text{ e } (2) \frac{a_0 q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z}$$

Isso significa que:

(1)  $a_n p^n$  é divisível por  $q$  e, como  $p^n$  e  $q$  são primos entre si,  $a_n$  é divisível por  $q$ .

(2)  $a_0 q^n$  é divisível por  $p$  e, como  $q^n$  e  $p$  são primos entre si,  $a_0$  é divisível por  $p$ .

## 110. Aplicações

1ª) Quais são as raízes racionais da equação.

$$2x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 30x - 12 = 0?$$

As possíveis raízes racionais dessa equação têm a forma  $\frac{p}{q}$ , em que  $p$  é divisor de  $-12$  e  $q$  é divisor positivo de 2, isto é:

$$p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12\} \text{ e } q \in \{1, 2\}$$

Assim, se a equação tiver raízes racionais, essas raízes estão no conjunto:

$$\left\{ -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

que foi obtido da tabela:

$\frac{p}{q}$	$p$	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-6	6	-12	12
1		-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-6	6	-12	12
2		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	2	-3	3	-6	6

Fazendo a verificação para os 16 elementos do conjunto, vemos que as únicas raízes racionais são 2 e  $\frac{1}{2}$ , pois:

$$P(2) = 2(2)^6 - 5(2)^5 + 4(2)^4 - 5(2)^3 - 10(2)^2 + 30(2) - 12 = \\ = 128 - 160 + 64 - 40 - 40 + 60 - 12 = 0$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \\ + 30\left(\frac{1}{2}\right) - 12 = \frac{1}{32} - \frac{5}{32} + \frac{1}{4} - \frac{5}{8} - \frac{5}{2} + 15 - 12 = \\ = \frac{1 - 5 + 8 - 20 - 80 + 96}{32} = 0$$

e para os demais elementos  $P(x) \neq 0$ .

2ª) Quais são as raízes inteiras da equação  $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$ ?

Temos:

$$p \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\} \quad \text{e} \quad q = 1$$

então  $\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}$ .

Fazendo as verificações:

$P(-1) = -4$ ,  $P(1) = -8$ ,  $P(-3) = 0$ ,  $P(3) = 36$ ,  $P(-9) = -468$  e  $P(9) = 936$  portanto, a única raiz inteira é  $-3$ .

### 111. Observações

1ª) O teorema anterior só se aplica a equações polinomiais de coeficientes inteiros (todos). Não é suficiente que o coeficiente dominante ( $a_n$ ) e o termo independente ( $a_0$ ) sejam inteiros.

Assim, por exemplo, a equação  $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$  apresenta as raízes racionais 2 e  $\frac{1}{2}$  enquanto o teorema anterior (aplicado erradamente) preveria apenas como possíveis raízes 1 e  $-1$ .

2ª) Se a equação  $P(x) = 0$ , com coeficientes inteiros e  $a_0 \neq 0$ , admite uma raiz inteira  $r = \frac{r}{1}$ , então  $r$  é divisor de  $a_0$  (termo independente de  $P$ ).

Assim, as possíveis raízes inteiras de  $7x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 6 = 0$  são  $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$ .

3ª) Se a equação  $P(x) = 0$ , com coeficientes inteiros e coeficiente dominante unitário ( $a_n = 1$ ), admite uma raiz racional  $\frac{p}{q}$ , então essa raiz é necessariamente inteira, pois  $q = 1$ .

Assim, por exemplo, qualquer raiz racional da equação

$$x^4 + 11x^3 - 7x^2 + 4x - 8 = 0$$

é necessariamente inteira, pois está no conjunto  $\{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$ .

## EXERCÍCIOS

- 385.** a) Quais são os divisores de 12?  
 b) Quais são os divisores positivos de 5?  
 c) Quais são as possíveis raízes racionais da equação  
 $5x^7 + 4x^5 + 2x^3 + x + 12 = 0$ ?

- 386.** Quais das frações abaixo podem ser raízes da equação:  
 $16x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 45 = 0$  ( $a, b, c, d, e$  inteiros)?

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{10}, \frac{5}{11}, \frac{7}{12}, \frac{11}{13}, \frac{9}{15}, \frac{13}{16}$$

- 387.** Quais são as raízes inteiras da equação  $x^3 - 9x^2 + 22x - 24 = 0$ ?

### Solução

Como o coeficiente de  $x^3$  é 1, as possíveis raízes inteiras da equação são os divisores de  $-24$ , isto é:

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24, -24.$$

Calculando o valor de  $P$  nesses números, temos:

$$P(1) \neq 0, P(-1) \neq 0, P(2) \neq 0, P(-2) \neq 0,$$

$$P(3) \neq 0, P(-3) \neq 0, P(4) \neq 0, P(-4) \neq 0,$$

$$\text{mas } P(6) = 0.$$

Dividindo  $P$  por  $x - 6$ :

1	-9	22	-24	6
1	-3	4	0	

recaímos na equação  $x^2 - 3x + 4 = 0$  cujas raízes são complexas e não inteiras.

Resposta: 6.

**388.** Quais as possíveis raízes inteiras da equação  $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$ ?

**389.** A equação  $x^m + a_1 \cdot x^{m-1} + \dots + a_m = 0$  admite raízes reais fracionárias? Por quê? Eventualmente, quais são as raízes reais inteiras?

**390.** Pesquise as raízes inteiras da equação  $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ .

**391.** Resolva a equação  $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$ .

**Solução**

Vamos inicialmente pesquisar raízes racionais da equação. Se  $\frac{p}{q}$  é raiz, então  $p \in \{1, -1, 3, -3\}$  e  $q \in \{1, 2\}$

portanto  $\frac{p}{q} \in \left\{1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$ .

Fazendo  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ , temos:

$P(1) \neq 0, P(-1) \neq 0, P(-3) \neq 0$

mas  $P(3) = 0$  e  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , portanto  $P$  é divisível por  $(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ :

2	-5	-2	-4	3	3
2	1	1	-1	0	$\frac{1}{2}$
2	2	2	0		

e recaímos em  $2x^2 + 2x + 2 = 0$ , cujas raízes são

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{4} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta:  $S = \left\{3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ .

**392.** Resolva a equação  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ .

**393.** Determine as raízes da equação  $x^5 - 8x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$ .

- 394.** Resolva:  $2x^6 + x^5 - 13x^4 + 13x^2 - x - 2 = 0$ .
- 395.** Determine as raízes da equação  $x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3x - 4 = 0$ .
- 396.** Resolva a equação  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ , sabendo que as raízes são números inteiros e consecutivos.
- 397.** A equação  $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$  admite uma raiz igual a  $i$ . Qual a proposição correta?
- A equação não admite raiz real.
  - A equação admite, como raiz, um número racional.
- 398.** Quais as raízes da equação  $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$ ?
- 399.** Resolva a equação  $15x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = 0$ .
- 400.** Resolva a equação  $x^5 - x^4 - 82x^3 - 281x^2 - 279x - 198 = 0$ .
- 401.** Qual é o número de raízes inteiras da equação  $x^6 + 8x^4 + 21x^2 + 60 = 0$ ?
- 402.** Determine as raízes da equação  $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$ .
- 403.** Resolva a equação  $5x^3 - 37x^2 + 90x - 72 = 0$ , sabendo que admite raízes inteiras.
- 404.** Sabe-se que o número complexo  $i$  é solução da equação  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ . Quantas raízes reais racionais possui essa equação?
- 405.** As equações  $(x - a)(x - b) = 0$  e  $x^2 - 2 = 0$ , em que  $a, b$  são números racionais, podem ou não ter raízes comuns? Justifique.
- 406.** Resolva a equação  $4\binom{x}{3} - 5\binom{x}{2} = 5$ , em que  $\binom{n}{p}$  indica o quociente  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ .
- 407.** Resolva a equação  $\frac{A_{x+2,4}}{A_{x-1,2}} = 70$ , em que  $A_{n,p}$  indica o quociente  $\frac{n!}{(n-p)!}$ .
- 408.** a) Qual a equação do terceiro grau, com coeficientes reais, que possui a raiz real 5 e a raiz complexa  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ ?
- b) Determine quatro inteiros consecutivos  $n - 2, n - 1, n, n + 1$ , tais que o cubo do maior seja igual à soma dos cubos de cada um dos três outros.
- 409.** Resolva a equação  $2^{8x} + 14 \cdot 2^{6x} - 96 \cdot 2^{4x} - 896 \cdot 2^{2x} + 2048 = 0$ .

GELSON IEZZI

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

## Trigonometria

3



# CAPÍTULO XI

## Equações

### I. Equações fundamentais

**150.** Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções trigonométricas da variável real  $x$  e sejam  $D_1$  e  $D_2$  os seus respectivos domínios. Resolver a equação trigonométrica  $f(x) = g(x)$  significa determinar o conjunto  $S$ , denominado **conjunto solução** ou **conjunto verdade**, dos números  $r$  para os quais  $f(r) = g(r)$  é uma sentença verdadeira. Observemos que uma condição necessária para que certo  $r$  seja uma solução da equação dada é que  $r \in D_1$  e  $r \in D_2$ .

**151.** Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações seguintes:

$$1^a) \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$$

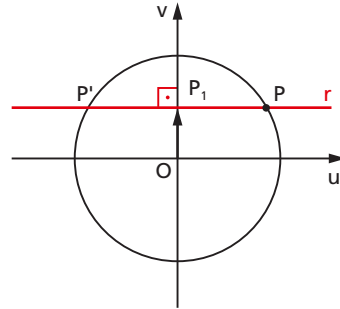
$$2^a) \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \beta$$

$$3^a) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

denominadas, por esse motivo, **equações fundamentais**. Assim, antes de tudo, é necessário saber resolver as equações fundamentais para poder resolver qualquer outra equação trigonométrica.

## II. Resolução da equação $\sin \alpha = \sin \beta$

**152.** Se  $\sin \alpha = \sin \beta = OP_1$ , então as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  no ciclo estão sobre a reta  $r$  que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto  $P_1$ , isto é, estão em  $P$  ou  $P'$ .



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma imagem, isto é, são **côngruos**

ou

2ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são **suplementares**.

**153.** Em resumo, temos:

$$\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

## EXERCÍCIOS

**290.** Resolva as seguintes equações, para  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$       e)  $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

b)  $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}$       f)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\sin x = 0$       g)  $\sin x = 1$

d)  $\sin x = \frac{1}{2}$       h)  $\sin x = -1$

**Solução**

$$\text{a) } \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi \right\}$$

$$\text{b) } \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \}$$

$$\text{d) } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

$$\text{e) } \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

$$f) \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

g)  $\operatorname{sen} x = 1 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$ , então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

h)  $\operatorname{sen} x = -1 = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$ , então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

**291.** Resolva as equações abaixo, no domínio  $\mathbb{R}$ :

a)  $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4}$

c)  $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

b)  $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

d)  $2 \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen} x$

**Solução**

a)  $\operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}$  e, então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

b)  $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0$  ou  $\operatorname{sen} x = 1$ , então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

$$c) \operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \text{ ou } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}, \text{ então:}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

$$d) 2 \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 1 - \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\text{resolvendo: } \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1 \text{ ou } -\frac{1}{2}$$

recaímos em equações fundamentais

$$\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

**292.** Resolva as equações abaixo:

$$a) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$$

$$e) \operatorname{sen} x + \cos 2x = 1$$

$$b) \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f) \operatorname{cosec} x = 2$$

$$c) \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$g) 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$h) 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$d) 2 \cdot \operatorname{sen} x - \operatorname{cosec} x = 1$$

$$i) 3 \cdot \operatorname{tg} x = 2 \cdot \cos x$$

$$j) \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen} x$$

**293.** Determine os valores de  $x$  que satisfazem a equação:

$$4 \operatorname{sen}^4 x - 11 \operatorname{sen}^2 x + 6 = 0$$

**294.** Resolva as seguintes equações:

$$a) \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$$

$$c) \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d) \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$$

**Solução**

$$a) \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\}$$

$$b) \operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

$$c) \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \right\}$$

$$d) \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

**295.** Determine  $x \in \mathbb{R}$  tal que:

a)  $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x$    b)  $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x$

**296.** Resolva, em  $\mathbb{R}$ , a equação:

$$2 \operatorname{sen} x |\operatorname{sen} x| + 3 \operatorname{sen} x = 2$$

**297.** Resolva o sistema  $\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 0 \\ x-y = \pi \end{cases}$

### III. Resolução da equação $\cos \alpha = \cos \beta$

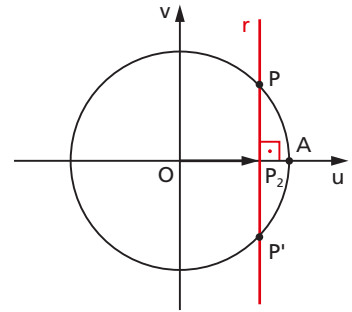
**154.** Se  $\cos \alpha = \cos \beta = OP_2$ , então as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  no ciclo estão sobre a reta  $r$  que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto  $P_2$ , isto é, estão em  $P$  ou  $P'$ .

Há, portanto, duas possibilidades:

1ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma imagem, isto é, são côngruos

ou

2ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são **replementares**.



**155.** Em resumo, temos:

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pm \beta + 2k\pi$$

## EXERCÍCIOS

**298.** Resolva, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes equações:

a)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$       e)  $\cos x = -1$

b)  $\sec x = \sec \frac{2\pi}{3}$       f)  $\cos x = \frac{1}{2}$

c)  $\cos x = 0$       g)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d)  $\cos x = 1$       h)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Solução**

$$a) \cos x = \cos \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{5} + 2k\pi \right\}$$

$$b) \sec x = \sec \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

$$c) \cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$d) \cos x = 1 = \cos 0$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \}$$

$$e) \cos x = -1 = \cos \pi$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \}$$

$$f) \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

$$g) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

$$h) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

**299.** Resolva as equações abaixo, no conjunto  $\mathbb{R}$ .

- a)  $4 \cdot \cos^2 x = 3$       c)  $\sin^2 x = 1 + \cos x$   
 b)  $\cos^2 x + \cos x = 0$       d)  $\cos 2x + 3 \cdot \cos x + 2 = 0$

**Solução**

a)  $\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , então

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

b)  $\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$  ou  $\cos x = -1$ , então

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \right\}$$

c)  $1 - \cos^2 x = 1 + \cos x \Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$   
 e recaímos no anterior.

d)  $(2 \cdot \cos^2 x - 1) + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos x + 1 = 0$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow \cos x = -1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$

então  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

**300.** Resolva, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes equações:

- a)  $\cos x = -\frac{1}{2}$       f)  $4 \cos x + 3 \sec x = 8$   
 b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$       g)  $2 - 2 \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$   
 c)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$       h)  $2 \sin^2 x + 6 \cos x = 5 + \cos 2x$   
 d)  $\sec x = 2$       i)  $1 + 3 \operatorname{tg}^2 x = 5 \sec x$   
 e)  $2 \cos^2 x = \cos x$       j)  $\left(4 - \frac{3}{\sin^2 x}\right) \left(4 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 0$

**301.** Resolva as seguintes equações, em  $\mathbb{R}$ :

- a)  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$       c)  $\cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$   
 b)  $\cos 2x = \cos x$       d)  $\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

**Solução**

$$\text{a) } \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ então:}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \right\}$$

$$\text{b) } \cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -x + 2k\pi \end{cases} \quad \text{então:}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

$$\text{c) } \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ então:}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

$$\text{d) } \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 = \cos 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi, \text{ então:}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

**302.** Resolva as seguintes equações, em  $\mathbb{R}$ :

$$\text{a) } \cos 3x - \cos x = 0 \quad \text{b) } \cos 5x = \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$$

**303.** Dada a equação  $(\sin x + \cos y)(\sec x + \operatorname{cosec} y) = 4$ ,

$$\text{a) resolva-a se: } x = y \quad \text{b) resolva-a se: } \sin x = \cos y$$

**304.** Resolva a equação  $\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x = 3$ .

**305.** Resolva a equação

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$$

**306.** Para que valores de  $t$  o sistema  $\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y = \log_{10} t^2 \end{cases}$  admite solução?

## IV. Resolução da equação $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$

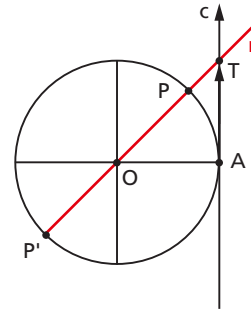
**156.** Se  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = AT$ , então as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  estão sobre a reta  $r$  determinada por  $O$  e  $T$ , isto é, estão em  $P$  ou  $P'$ .

Há, portanto, duas possibilidades:

1ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm a mesma imagem, isto é, são côngruos

ou

2ª)  $\alpha$  e  $\beta$  têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, isto é, são **explementares**.



**157.** Em resumo, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$$

## EXERCÍCIOS

**307.** Resolva as equações seguintes:

- |                                       |   |  |
|---------------------------------------|---|--|
| a) $\operatorname{tg} x = 1$          | d) $\operatorname{tg} x = 0$                    | g) $\operatorname{tg} 3x = 1$                    |
| b) $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$ | e) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$            | h) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$ |
| c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$  | f) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$ |  |

### Solução

a)  $\operatorname{tg} x = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ , então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

b)  $\cotg x = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ , então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$$

c)  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$ , então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\}$$

d)  $\operatorname{tg} x = 0 = \operatorname{tg} 0$ , então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

e)  $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  
então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

f)  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x \Rightarrow 2x = x + k\pi$ ,  
então:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$$

g)  $\operatorname{tg} 3x = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  
então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \right\}$$

h)  $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x \Rightarrow 5x = 3x + k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

Notemos que, se  $k$  for ímpar, então não existe  $\operatorname{tg} 5x$  e  $\operatorname{tg} 3x$ , portanto:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \text{ par} \right\}$$

**308.** Resolva as equações abaixo:

a)  $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cdot \operatorname{cos} x = 0$     c)  $\operatorname{tg} x + \cotg x = 2$

b)  $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{cos}^2 x$     d)  $\operatorname{sec}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x$

**Solução**

$$a) \operatorname{sen} x = \sqrt{3} \cdot \cos x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$$

$$b) \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1,$$

$$\text{então: } \operatorname{tg} x = 1 \text{ ou } \operatorname{tg} x = -1$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\}$$

$$c) \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1, \text{ então:}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

$$d) \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0,$$

$$\text{então: } \operatorname{tg} x = 0 \text{ ou } \operatorname{tg} x = 1$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

**309.** Resolva as equações abaixo:

$$a) \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$$

$$f) \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = 0$$

$$b) \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \frac{5\pi}{6}$$

$$g) \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$c) 3 \cdot \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$h) \operatorname{tg} 4x = 1$$

$$d) \operatorname{cotg} x = 0$$

$$i) \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$e) \operatorname{cotg} x = -1$$

$$j) \operatorname{tg}^2 2x = 3$$

**310.** Resolva as equações abaixo:

a)  $\sec^2 x = 2 \cdot \operatorname{tg} x$

b)  $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

c)  $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 2x \cdot \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

d)  $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{sen} 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$

**311.** Resolva a equação  $\operatorname{cotg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$ .

**312.** Para quais valores de  $p$  a equação  $\operatorname{tg} p x = \operatorname{cotg} p x$  tem  $x = \frac{\pi}{2}$  para raiz.

**313.** Se  $a$  é a menor raiz positiva da equação  $(\operatorname{tg} x - 1)(4 \operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$ , calcule o valor de  $\operatorname{sen}^4 a - \cos^2 a$ .

**314.** Determine as raízes da equação  $x^2 - (2 \operatorname{tg} a)x - 1 = 0$ .

## V. Equações clássicas

Apresentaremos neste item algumas equações tradicionais em Trigonometria, sugerindo métodos para fazê-las recair nas equações fundamentais.

**158.  $a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ )**

### Método 1

Fazemos a mudança de variável  $\operatorname{sen} x = u$  e  $\cos x = v$  e resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} au + bv = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Tendo calculado  $u$  e  $v$ , determinamos os possíveis valores de  $x$ .

**Método 2**

Fazendo  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \theta$ , temos:

$$a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \operatorname{cos} x = c \Rightarrow \operatorname{sen} x + \frac{b}{a} \cdot \operatorname{cos} x = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{cos} x = \frac{c}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \cdot \operatorname{cos} x = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{cos} x = \frac{c}{a} \cdot \operatorname{cos} \theta \Rightarrow \operatorname{sen}(x + \theta) = \frac{c}{a} \cdot \operatorname{cos} \theta$$

e, assim, calculamos  $x + \theta$ .

**Método 3**

Fazendo  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , temos  $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$  e  $\operatorname{cos} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , então:

$$a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \operatorname{cos} x = c \Rightarrow a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + b \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2at + b - bt^2 = c + ct^2 \Rightarrow (c+b)t^2 - 2at + (c-b) = 0$$

e recaímos em uma equação do 2º grau em  $t$ . Observemos que este método falha se  $\pi + 2k\pi$  for solução da equação, caso em que a substituição  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = t$  não tem sentido.



## EXERCÍCIOS

**315.** Resolva a equação  $\sqrt{3} \cdot \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x = 1$ , em  $\mathbb{R}$ :

**Solução**

Método 1

Fazendo  $\operatorname{sen} x = u$  e  $\operatorname{cos} x = v$ , temos:

$$\begin{cases} u + v \cdot \sqrt{3} = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

De (1) vem  $u = 1 - v \cdot \sqrt{3}$  que, substituída em (2), acarreta:

$$(1 - v \cdot \sqrt{3})^2 + v^2 = 1 \Rightarrow 4v^2 - 2\sqrt{3} \cdot v = 0$$

$$\text{então } \begin{cases} v = 0 \\ \text{ou} \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{portanto } \begin{cases} u = 1 - 0 \cdot \sqrt{3} = 1 \\ \text{ou} \\ u = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Existem, assim, duas possibilidades:

$$\cos x = 0, \text{ sen } x = 1 \text{ e } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ sen } x = -\frac{1}{2} \text{ e } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Método 2

$$\text{sen } x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \text{sen } x + \text{tg } \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } x + \frac{\text{sen } \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Método 3

$$\text{sen } x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t + \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot t^2 = 1 + t^2 \Rightarrow (1 + \sqrt{3})t^2 - 2t + (1 - \sqrt{3}) = 0$$

Então:

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} = 1 \text{ ou } -2 + \sqrt{3}$$

Existem, assim, duas possibilidades:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ e } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2 + \sqrt{3}, \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ e } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

**316.** Resolva as seguintes equações, em  $\mathbb{R}$ :

a)  $\operatorname{sen} x + \cos x = -1$

b)  $\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} x - \cos x = -\sqrt{3}$

**317.** Determine  $x$  tal que  $x \in \mathbb{R}$  e  $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ .

### Solução

Fazendo  $\operatorname{sen} x = u$  e  $\cos x = v$ , temos:

$$\begin{cases} u + v = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ em } (2): u^2 + (1 - u)^2 = 1 \Rightarrow 2u^2 - 2u = 0$$

Existem, então, duas possibilidades:

$$u = 0 \text{ e } v = 1 - u = 1 \text{ ou } u = 1 \text{ e } v = 1 - u = 0$$

$$\text{portanto } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \right\}.$$

**318.** Obtenha as soluções das equações abaixo.

a)  $\operatorname{sen} 4x + \cos 4x = 1$

b)  $|\operatorname{sen} x| + |\cos x| = 1$

**319.** Resolva no conjunto dos números reais a equação  $\operatorname{sen} 2x = 1 - \cos 2x$ .

**320.** Discuta a equação em  $x$ :  $m \cdot \operatorname{sen} x + \cos x = m$ .

**Solução**

Fazendo  $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$  e  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , temos:

$$m \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = m \Rightarrow 2mt + 1 - t^2 = m + mt^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+1) \cdot t^2 - 2mt + (m-1) = 0$$

Esta última equação tem solução real se, e somente se, apresentar  $\Delta \geq 0$ .

Então:

$$\Delta = 4m^2 - 4(m+1)(m-1) = 4 \geq 0, \text{ o que ocorre para todo } m \text{ real.}$$

**321.** Discuta, segundo  $m$ , as equações seguintes:

a)  $m \cdot \cos x - (m+1) \cdot \operatorname{sen} x = m$

b)  $\operatorname{sen} x + \cos x = m$

**159.**  $\sum \operatorname{sen} f_i(x) = 0$  ou  $\sum \cos f_i(x) = 0$

O método de resolução consiste em transformar a soma em produto e estudar as possibilidades de anulamento de cada fator.

## EXERCÍCIOS

**322.** Resolva as equações, em  $\mathbb{R}$ :

a)  $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x = 0$       c)  $\operatorname{sen} 4x - \cos x = 0$

b)  $\cos 6x + \cos 2x = 0$       d)  $\cos 3x + \operatorname{sen} 2x = 0$

**Solução**

a)  $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} 6x \cdot \cos x = 0$

1ª possibilidade:  $\operatorname{sen} 6x = 0 \Rightarrow 6x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6}$

$$2^{\text{a}} \text{ possibilidade: } \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$b) \cos 6x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x = 0$$

$$1^{\text{a}} \text{ possibilidade: } \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

$$2^{\text{a}} \text{ possibilidade: } \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

$$c) \sin 4x - \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin \left( \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left( \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$1^{\text{a}} \text{ possibilidade: } \sin \left( \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$$

$$2^{\text{a}} \text{ possibilidade: } \cos \left( \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

$$d) \cos 3x + \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2x \right) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left( \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$1^{\text{a}} \text{ possibilidade: } \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2^{\text{a}} \text{ possibilidade: } \cos \left( \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \right\}$$

**323.** Resolva as equações, em  $\mathbb{R}$ :

a)  $\text{sen } mx + \text{sen } nx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$

b)  $\text{cos } ax + \text{cos } bx = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R}^*)$

c)  $\text{sen } 2x = \text{cos} \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

**324.** Resolva as seguintes equações, em  $\mathbb{R}$ :

a)  $\text{sen } x + \text{sen } 3x + \text{sen } 4x + \text{sen } 6x = 0$

b)  $\text{cos } 3x + \text{cos } 7x = \text{cos } 5x$

**Solução**

$$\begin{aligned} \text{a) } & (\text{sen } 6x + \text{sen } 4x) + (\text{sen } 3x + \text{sen } x) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2 \cdot \text{sen } 5x \cdot \text{cos } x + 2 \cdot \text{sen } 2x \cdot \text{cos } x = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \text{cos } x \cdot (\text{sen } 5x + \text{sen } 2x) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2 \cdot \text{cos } x \cdot \text{sen } \frac{7x}{2} \cdot \text{cos } \frac{3x}{2} = 0 \end{aligned}$$

1ª possibilidade:  $\text{cos } x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

2ª possibilidade:  $\text{sen } \frac{7x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7}$

3ª possibilidade:  $\text{cos } \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & (\text{cos } 7x + \text{cos } 3x) - \text{cos } 5x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \text{cos } 5x \cdot \text{cos } 2x - \text{cos } 5x = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2 \cdot \text{cos } 5x \left( \text{cos } 2x - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

1ª possibilidade:  $\text{cos } 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$

2ª possibilidade:  $\text{cos } 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$$

**325.** Resolva as equações:

a)  $\text{sen } 5x + \text{sen } x = 2 \cdot \text{sen } 3x$

b)  $\text{cos } x + \text{cos } (2x + a) + \text{cos}(3x + 2a) = 0$

c)  $\text{sen } 7x + \text{cos } 3x = \text{cos } 5x - \text{sen } x$

**326.** Determine  $x$  tal que  $x \in \mathbb{R}$  e  $\cos^2(x + a) + \cos^2(x - a) = 1$ .

**327.** Determine  $x$  tal que  $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 1$ .

**328.** Determine o ângulo  $x$ , medido em radianos, que satisfaz a igualdade:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**329.** Dado o sistema

$$\begin{cases} \sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \\ \sin x + \cos y = 2 \end{cases}$$

a) mostre que o par  $(x_0, y_0)$ , com  $x_0 = 2\pi$  e  $y_0 = \frac{\pi}{2}$ , não é solução do sistema;

b) resolva o sistema, determinando todas as soluções  $(x, y)$ .

**330.** Resolva, em  $\mathbb{R}$ ,  $\sin x \cdot \cos x + \sin x + \cos x + 1 = 0$ .

## 160. $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ ( $a \in \mathbb{R}$ )

Para resolver esta equação basta aplicar a identidade

$$\sin^4 x + \cos^4 x \equiv 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}, \text{ pois:}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= 1^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$$

Temos, então:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a \Rightarrow 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = a \Rightarrow \sin^2 2x = 2(1 - a).$$

Notemos que só existe solução se  $0 \leq 2(1 - a) \leq 1$ , isto é, se

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

**161.  $\text{sen}^6 x + \text{cos}^6 x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )**

Resolver esta equação aplicando a identidade:

$$\text{sen}^6 x + \text{cos}^6 x \equiv 1 - \frac{3 \text{sen}^2 2x}{4}, \text{ pois:}$$

$$\begin{aligned} \text{sen}^6 x + \text{cos}^6 x &= (\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x)(\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x + \text{cos}^4 x) = \\ &= (\text{sen}^4 x + \text{cos}^4 x) - \text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x = \left(1 - \frac{\text{sen}^2 2x}{2}\right) - \frac{\text{sen}^2 2x}{4} = \\ &= 1 - \frac{3 \cdot \text{sen}^2 2x}{4} \end{aligned}$$

Temos, então:

$$\text{sen}^6 x + \text{cos}^6 x = a \Rightarrow 1 - \frac{3 \cdot \text{sen}^2 2x}{4} = a \Rightarrow \text{sen}^2 2x = \frac{4 - 4a}{3}$$

Notemos que só existe solução se  $0 \leq \frac{4 - 4a}{3} \leq 1$ , isto é, se

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 1$$



## EXERCÍCIOS

**331.** Resolva a equação  $\text{sen}^4 x + \text{cos}^4 x = \frac{3}{4}$ , em  $\mathbb{R}$ .

**Solução**

Decorre da teoria que:

$$\text{sen}^2 2x = 2 \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

portanto  $\text{sen} 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  e então:

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \right\}$$

**332.** Resolva a equação  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$ .

**Solução**

Decorre da teoria que:

$$\sin^2 2x = \frac{4}{3} \cdot (1 - a) = \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{7}{16}\right) = \frac{3}{4}$$

portanto  $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  e então:

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

**333.** Resolva as seguintes equações para  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$       d)  $\sin^6 \frac{x}{2} + \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{7}{16}$

b)  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$       e)  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

c)  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

# CAPÍTULO XII

## Inequações

### I. Inequações fundamentais

**162.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções trigonométricas da variável real  $x$ . Resolver a inequação  $f(x) < g(x)$  significa obter o conjunto  $S$ , denominado conjunto solução ou conjunto verdade, dos números  $r$  para os quais  $f(r) < g(r)$  é uma sentença verdadeira.

Quase todas as inequações trigonométricas podem ser reduzidas a inequações de um dos seguintes seis tipos:

$$1^{\text{a}}) \operatorname{sen} x > m$$

$$2^{\text{a}}) \operatorname{sen} x < m$$

$$3^{\text{a}}) \operatorname{cos} x > m$$

$$4^{\text{a}}) \operatorname{cos} x < m$$

$$5^{\text{a}}) \operatorname{tg} x > m$$

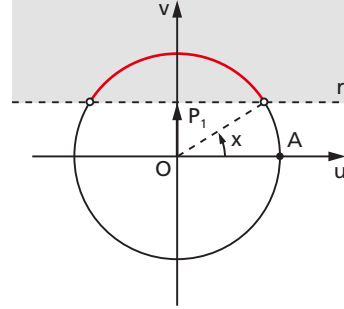
$$6^{\text{a}}) \operatorname{tg} x < m$$

em que  $m$  é um número real dado. Por esse motivo, essas seis são denominadas **inequações fundamentais**. Assim, é necessário saber resolver as inequações fundamentais para poder resolver outras inequações trigonométricas.

## II. Resolução de $\sin x > m$

**163.** Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto  $P_1$  tal que  $OP_1 = m$ . Traçamos por  $P_1$  a reta  $r$  perpendicular ao eixo. As imagens dos reais  $x$  tais que  $\sin x > m$  estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de  $r$ .

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais  $x$  pode pertencer, tomando o cuidado de partir de  $A$  e percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.



### 164. Exemplo de inequação $\sin x > m$

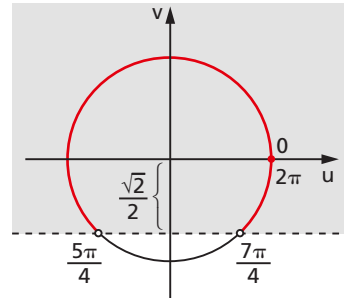
Resolver a inequação  $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , em  $\mathbb{R}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \right\}$$

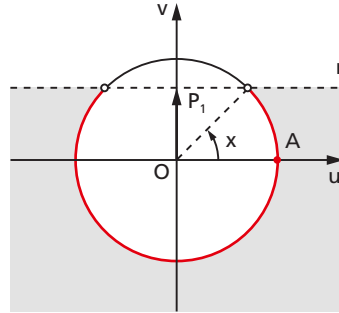
Notemos que escrever  $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$  estaria errado pois,

como  $\frac{7\pi}{4} > \frac{5\pi}{4}$ , não existe  $x$  algum neste intervalo.

### III. Resolução de $\text{sen } x < m$

**165.** Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto  $P_1$  tal que  $OP_1 = m$ . Traçamos por  $P_1$  a reta  $r$  perpendicular ao eixo. As imagens dos reais  $x$  tais que  $\text{sen } x < m$  estão na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de  $r$ .

Finalmente, partindo de  $A$  e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



### 166. Exemplo de inequação $\text{sen } x < m$

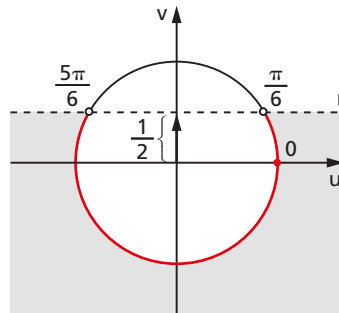
Resolver a inequação  $\text{sen } x < \frac{1}{2}$ , em  $\mathbb{R}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \right\}$$

## EXERCÍCIOS

**334.** Resolva a inequação  $0 \leq \text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Solução**

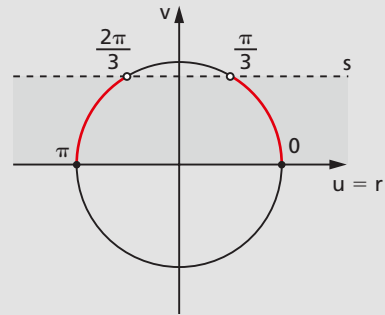
A imagem de  $x$  deve ficar na interseção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre  $r$  e  $s$ . Temos, então:

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \right\}$$



**335.** Resolva a inequação  $\sin x \geq 0$ , sendo  $x \in \mathbb{R}$ .

**336.** Resolva a inequação  $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , em  $\mathbb{R}$ .

**337.** Resolva a inequação  $-\frac{1}{2} \leq \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**338.** Resolva a inequação  $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , em  $\mathbb{R}$ .

**Solução**

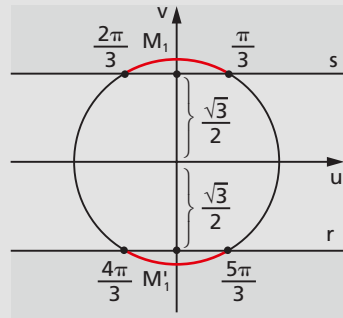
$$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

A imagem de  $x$  deve ficar na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de  $r$  ou com o semiplano situado acima de  $s$ .

Assim, temos:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$



**339.** Resolva a inequação  $|\operatorname{sen} x| \leq \frac{1}{2}$ , em  $\mathbb{R}$ .

**340.** Resolva a inequação  $|\operatorname{sen} x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**341.** Resolva a inequação  $2 \operatorname{sen}^2 x < \operatorname{sen} x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Solução**

$$2 \operatorname{sen}^2 x < \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$$

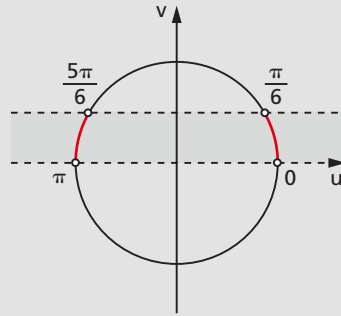
Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \right\}$$



**342.** a) Para quais valores de  $x$  existe  $\log_2 (2 \operatorname{sen} x - 1)$ ?

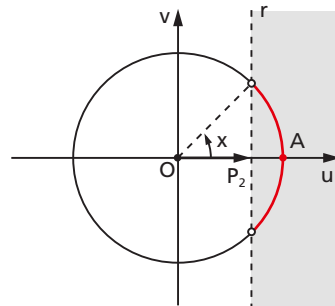
b) Resolva a equação, em  $\mathbb{R}$ :

$$\log_2 (2 \operatorname{sen} x - 1) = \log_4 (3 \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 2)$$

## IV. Resolução de $\cos x > m$

**167.** Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto  $P_2$  tal que  $OP_2 = m$ . Traçamos por  $P_2$  a reta  $r$  perpendicular ao eixo. As imagens dos reais  $x$  tais que  $\cos x > m$  estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à direita de  $r$ .

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



### 168. Exemplo de inequação $\cos x > m$

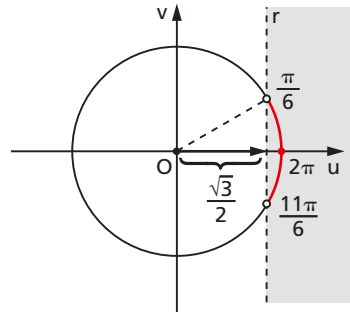
Resolver a inequação  $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

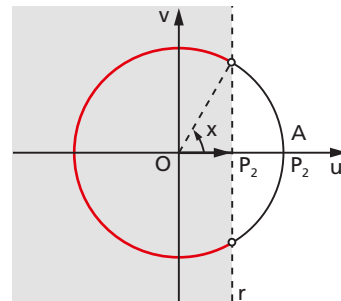


$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \right\}$$

## V. Resolução de $\cos x < m$

**169.** Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto  $P_2$  tal que  $OP_2 = m$ . Traçamos por  $P_2$  a reta  $r$  perpendicular ao eixo. As imagens dos reais  $x$  tais que  $\cos x < m$  estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à esquerda de  $r$ .

Completamos o problema descrevendo os intervalos que convêm.



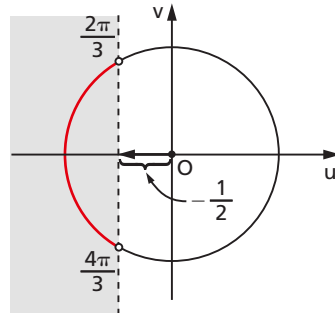
### 170. Exemplo de inequação $\cos x < m$

Resolver a inequação  $\cos x < -\frac{1}{2}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$



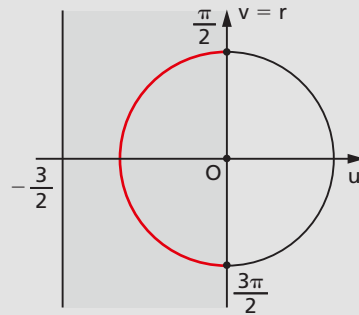
## EXERCÍCIOS

**343.** Resolva a inequação  $-\frac{3}{2} \leq \cos x \leq 0$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Solução**

A imagem de  $x$  deve ficar na interseção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre  $r$  e  $s$ . Temos, então:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$



**344.** Resolva a inequação  $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ , em  $\mathbb{R}$ .

**345.** Resolva a inequação  $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**346.** Resolva a inequação  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**347.** Resolva a inequação  $|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , em  $\mathbb{R}$ .

**348.** Resolva a inequação  $|\cos x| > \frac{5}{3}$ , em  $\mathbb{R}$ .

**349.** Resolva a inequação  $\cos 2x + \cos x \leq -1$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

### Solução

$$\cos 2x + \cos x \leq -1 \Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 1) + \cos x \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 0$$

Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

**350.** Resolva a inequação  $4 \cos^2 x < 3$ , em  $\mathbb{R}$ .

**351.** Resolva a inequação  $\cos 2x \geq \cos x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

**352.** Resolva a inequação  $\sin x + \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

### Solução

$$\sin x + \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x + \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{1}{2}$$

Fazendo  $x - \frac{\pi}{4} = y$ , temos a inequação  $\cos y \geq \frac{1}{2}$ . Examinando o ciclo, vem:

$$2k\pi \leq y < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \leq y < 2\pi + 2k\pi$$

como  $x = y + \frac{\pi}{4}$ , vem:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \leq x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

**353.** Resolva a inequação  $\sin x + \cos x < 1$ , em  $\mathbb{R}$ .

**354.** Determine o domínio da função real  $f$  dada por  $f(x) = \sqrt{\frac{\cos 2x}{\cos x}}$ , em  $\mathbb{R}$ .

**Solução**

I) Devemos ter  $\frac{\cos 2x}{\cos x} \geq 0$ .

II) Fazendo  $\cos x = y$ , temos:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2y^2 - 1}{y} \geq 0$$

III) Fazendo o quadro de sinais:

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	→
$2y^2 - 1$		+	-	-	+
$y$		-	-	+	+
$\frac{2y^2 - 1}{y}$		-	+	-	+

concluimos que o quociente é positivo para:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y < 0 \text{ ou } y \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV) Examinando o ciclo trigonométrico, temos:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \right\}$$

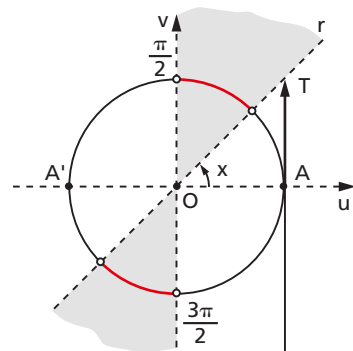
**355.** Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \\ \operatorname{cos} x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

## VI. Resolução de $\operatorname{tg} x > m$

**171.** Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto  $T$  tal que  $AT = m$ . Traçamos a reta  $r = OT$ . As imagens dos reais  $x$  tais que  $\operatorname{tg} x > m$  estão na interseção do ciclo com o ângulo  $r\hat{O}V$ .

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



### 172. Exemplo de inequação $\operatorname{tg} x > m$

Resolver a inequação  $\operatorname{tg} x > 1$ , em  $\mathbb{R}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

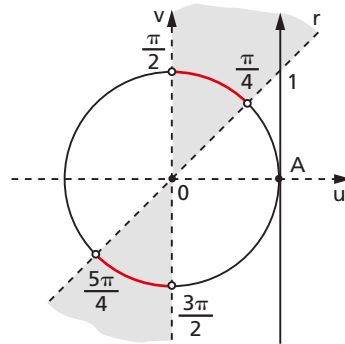
ou

$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

que podem ser resumidos em:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

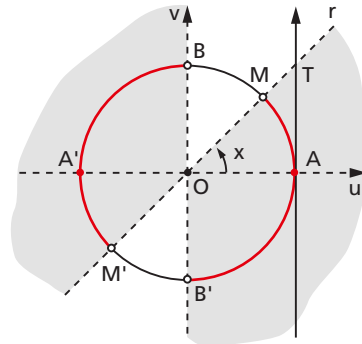
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$



## VII. Resolução de $\operatorname{tg} x < m$

**173.** Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que  $AT = m$ . Traçamos a reta  $r = \vec{OT}$ . As imagens dos reais  $x$  tais que  $\operatorname{tg} x < m$  estão na interseção do ciclo com o ângulo  $\widehat{vÔr}$ .

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



### 174. Exemplo de inequação $\operatorname{tg} x < m$

Resolver a inequação  $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ , em  $\mathbb{R}$ .

Procedendo conforme foi indicado, temos:

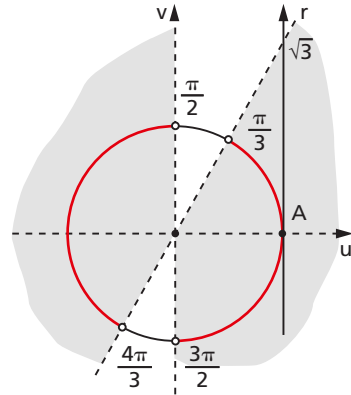
$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \right\}$$

## EXERCÍCIOS

**356.** Resolva a inequação  $|\operatorname{tg} x| \leq 1$ , para  $x \in \mathbb{R}$ .

### Solução

$$|\operatorname{tg} x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$$

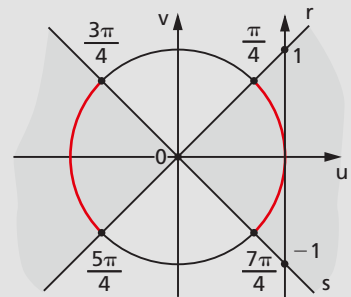
A imagem de  $x$  deve ficar na interseção do ciclo com ângulo  $\hat{r}\hat{o}s$ . Temos, então:

$$0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leq x < 2\pi + 2k\pi \right\}$$

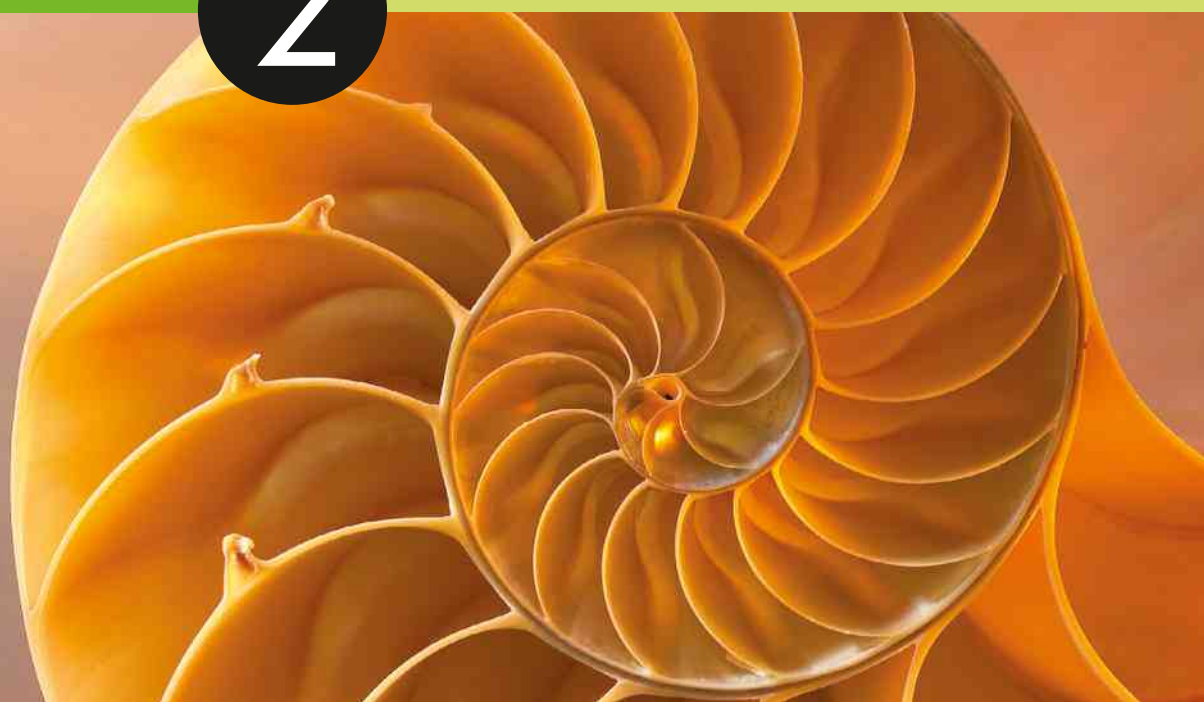


GELSON IEZZI  
OSVALDO DOLCE  
CARLOS MURAKAMI

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

## Logaritmos

2



# CAPÍTULO V

## Equações exponenciais e logarítmicas

### I. Equações exponenciais

**61.** Como havíamos dito quando do primeiro estudo das equações exponenciais, voltamos novamente a esse assunto.

Abordaremos agora as equações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base pela simples aplicação das propriedades das potências.

A resolução de uma equação desse tipo baseia-se na definição de logaritmo, isto é, se  $0 < a \neq 1$  e  $b > 0$ , tem-se:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

## EXERCÍCIOS

**223.** Resolva as equações:

a)  $2^x = 3$

b)  $5^{2x-3} = 3$

**Solução**

a)  $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$

$$S = \{\log_2 3\}$$

b)  $5^{2x-3} = 3 \Rightarrow \frac{5^{2x}}{5^3} = 3 \Rightarrow 25^x = 375 \Rightarrow x = \log_{25} 375$

$$S = \{\log_{25} 375\}$$

**224.** Resolva as equações:

a)  $5^x = 4$

e)  $5^{4x-3} = 0,5$

b)  $3^x = \frac{1}{2}$

f)  $3^{2x+1} = 2$

c)  $7^{\sqrt{x}} = 2$

g)  $7^{2-3x} = 5$

d)  $3^{(x^2)} = 5$

**225.** Resolva a equação  $a^x = b$ , com  $a > 1$  e  $b > 1$ .**226.** O crescimento de certa cultura de bactérias obedece à função  $X(t) = Ce^{kt}$ , em que  $X(t)$  é o número de bactérias no tempo  $t \geq 0$ ;  $C$  e  $k$  são constantes positivas ( $e$  é a base do logaritmo neperiano). Verificando que o número inicial de bactérias  $X(0)$  duplica em 4 horas, quantas delas se pode esperar no fim de 6 horas?**Solução**

$$X(t) = Ce^{kt} \xrightarrow{t=0} X(0) = C \cdot e^0 = C$$

$$X(4) = C \cdot e^{4k} = 2C \quad (\text{duplica em 4 horas})$$

$$\therefore e^{4k} = 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{4} = \ln \sqrt[4]{2}$$

Então, para  $t = 6$ , vem:

$$X(6) = C \cdot e^{6 \ln \sqrt[4]{2}} = C \cdot e^{\ln \sqrt{2^3}} = C \cdot 2\sqrt{2}$$

Resposta: Ao final de 6 horas, o número de bactérias é  $2\sqrt{2}$  vezes o valor inicial.**227.** Uma substância radioativa está em processo de decaimento, de modo que no instante  $t$  a quantidade não decaída é  $A(t) = A(0) \cdot e^{-3t}$ , em que  $A(0)$  indica a quantidade da substância no instante  $t = 0$ . Calcule o tempo necessário para que a metade da quantidade inicial se decaia.

**228.** A lei de decaimento do rádioio no tempo  $t \geq 0$  é dada por  $M(t) = Ce^{-kt}$ , em que  $M(t)$  é a quantidade de rádioio no tempo  $t$ ;  $C$  e  $k$  são constantes positivas ( $e$  é a base do logaritmo neperiano). Se a metade da quantidade primitiva  $M(0)$  decai em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

**229.** Resolva a equação  $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$ .

**Solução**

$$2^{3x-2} = 3^{2x+1} \Rightarrow \frac{2^{3x}}{2^2} = 3^{2x} \cdot 3 \Rightarrow \frac{(2^3)^x}{(3^2)^x} = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{8^x}{9^x} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^x = 12 \Rightarrow x = \log_{\frac{8}{9}} 12$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{8}{9}} 12 \right\}$$

**230.** Resolva as equações:

a)  $2^x = 3^{x+2}$

c)  $5^{x-1} = 3^{4-2x}$

b)  $7^{2x-1} = 3^{3x+4}$

**231.** Resolva as equações:

a)  $3^x = 2^x + 2^{x+1}$

b)  $5^x + 5^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

c)  $2^{x+1} - 2^x = 3^{x+2} - 3^x$

**232.** Resolva a equação  $2^{3x+2} \cdot 3^{2x-1} = 8$ .

**233.** Resolva as equações:

a)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

d)  $3^{2x+1} - 3^{x+1} + 2 = 0$

b)  $4^x - 6 \cdot 2^x + 5 = 0$

e)  $4^{x+1} - 2^{x+4} + 15 = 0$

c)  $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$

f)  $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$

**234.** Resolva a equação  $4^x + 6^x = 9^x$ .

**235.** Resolva a equação  $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$ .

**236.** Resolva a equação  $a^{4x} + a^{2x} = 1$ , supondo  $0 < a \neq 1$ .

**237.** Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 40 \\ 64^{x+y} = 12 \end{cases}$$

## II. Equações logarítmicas

Podemos classificar as equações logarítmicas em três tipos:

### 62. 1º tipo: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

É a equação que apresenta, ou é redutível a, uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ).

A resolução de uma equação desse tipo baseia-se na quarta consequência da definição.

Não nos devemos esquecer das condições de existência do logaritmo, isto é, a base do logaritmo deverá ser positiva e diferente de 1 e o logaritmando deverá ser positivo. Assim sendo, os valores encontrados na resolução da equação só serão considerados soluções de equação logarítmica proposta se forem valores que satisfaçam as condições de existência do logaritmo.

Esquemáticamente, temos:

$$\begin{aligned} &\text{Se } 0 < a \neq 1, \text{ então} \\ &\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) > 0. \end{aligned}$$

### 63. Exemplos:

1º) Resolver a equação  $\log_2 (3x - 5) = \log_2 7$ .

#### Solução

$$\log_2 (3x - 5) = \log_2 7 \Rightarrow 3x - 5 = 7 > 0$$

Resolvendo

$$3x - 5 = 7 \Rightarrow x = 4$$

$x = 4$  é solução da equação proposta e não há necessidade de verificarmos, pois  $7 > 0$  é satisfeita para todo  $x$  real.

$$S = \{4\}$$

2º) Resolver a equação  $\log_3 (2x - 3) = \log_3 (4x - 5)$ .

#### Solução

$$\log_3 (2x - 3) = \log_3 (4x - 5) \Rightarrow 2x - 3 = 4x - 5 > 0$$

Resolvendo

$$2x - 3 = 4x - 5 \Rightarrow x = 1$$

$x = 1$  não é solução da equação proposta, pois, fazendo  $x = 1$  em  $4x - 5$ , encontramos  $4 \cdot 1 - 5 = -1 < 0$ ; logo, a equação proposta não tem solução. Chegaríamos à mesma conclusão se, em vez de fazer  $x = 1$  em  $4x - 5$ , o fizéssemos em  $2x - 3$ , já que  $2x - 3 = 4x - 5$ .

$$S = \emptyset$$

3º) Resolver a equação  $\log_5 (x^2 - 3x - 10) = \log_5 (2 - 2x)$ .

**Solução**

$$\log_5 (x^2 - 3x - 10) = \log_5 (2 - 2x) \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x > 0.$$

Resolvendo

$$x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -3$$

$x = 4$  não é solução, pois, fazendo  $x = 4$  em  $2 - 2x$ , encontramos  $2 - 2 \cdot 4 = -6 < 0$ .

$x = -3$  é a solução, pois, fazendo  $x = -3$  em  $2 - 2x$ , encontramos  $2 - 2 \cdot (-3) = 8 > 0$ .

$$S = \{-3\}$$

## 64. 2º tipo: $\log_a f(x) = \alpha$

É a equação logarítmica que apresenta, ou é redutível a, uma igualdade entre um logaritmo e um número real.

A resolução de uma equação desse tipo é simples; basta aplicarmos a definição de logaritmo.

Esquemáticamente, temos:

Se  $0 < a \neq 1$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

$$\log_a f(x) = \alpha \Rightarrow f(x) = a^\alpha.$$

Não precisamos nos preocupar com a condição de existência do logaritmo; sendo  $0 < a \neq 1$ , temos  $a^\alpha > 0$  para todo  $\alpha$  real e conseqüentemente  $f(x) = a^\alpha > 0$ .

**65.** Exemplos:1º) Resolver a equação  $\log_2 (3x + 1) = 4$ .**Solução**

$$\log_2 (3x + 1) = 4 \Rightarrow 3x + 1 = 2^4 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

$$S = \{5\}$$

2º) Resolver a equação  $\log_3 (x^2 + 3x - 1) = 2$ .**Solução**

$$\log_3 (x^2 + 3x - 1) = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -5$$

$$S = \{2, -5\}$$

3º) Resolver a equação  $\log_2 [1 + \log_3 (1 - 2x)] = 2$ .**Solução**

$$\log_2 [1 + \log_3 (1 - 2x)] = 2 \Rightarrow 1 + \log_3 (1 - 2x) = 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 (1 - 2x) = 3 \Rightarrow 1 - 2x = 3^3 \Rightarrow x = -13$$

$$S = \{-13\}$$

**66. 3º tipo: incógnita auxiliar**

São as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

**67.** Exemplos:1º) Resolver a equação  $\log_2^2 x - \log_2 x = 2$ .**Solução**

A equação proposta é equivalente à equação

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$

Fazendo  $\log_2 x = y$ , temos:  $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$  ou  $y = -1$ .

Mas  $y = \log_2 x$ , então:

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ 4, \frac{1}{2} \right\}$$

2º) Resolver a equação  $\frac{2 + \log_3 x}{\log_3 x} + \frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} = 2$ .

### Solução

Fazendo  $\log_3 x = y$ , temos:

$$\frac{2 + y}{y} + \frac{y}{1 + y} = 2 \Rightarrow (2 + y)(1 + y) + y^2 = 2y(1 + y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 3y + 2 = 2y^2 + 2y \Rightarrow y = -2$$

Mas  $y = \log_3 x$ , então:  $\log_3 x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ .

$$S = \left\{ \frac{1}{9} \right\}$$

## EXERCÍCIOS

**238.** Resolva as equações:

a)  $\log_4 (3x + 2) = \log_4 (2x + 5)$

b)  $\log_3 (5x - 6) = \log_3 (3x - 5)$

c)  $\log_2 (5x^2 - 14x + 1) = \log_2 (4x^2 - 4x - 20)$

d)  $\log_{\frac{1}{3}} (3x^2 - 4x - 17) = \log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 5x + 3)$

e)  $\log_4 (4x^2 + 13x + 2) = \log_4 (2x + 5)$

f)  $\log_{\frac{1}{2}} (5x^2 - 3x - 11) = \log_{\frac{1}{2}} (3x^2 - 2x - 8)$

**239.** Resolva as equações:

a)  $\log_5 (4x - 3) = 1$

b)  $\log_{\frac{1}{2}} (3 + 5x) = 0$

- c)  $\log_{\sqrt{2}} (3x^2 + 7x + 3) = 0$   
 d)  $\log_4 (2x^2 + 5x + 4) = 2$   
 e)  $\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 9x + 4) = -2$   
 f)  $\log_3 (x - 1)^2 = 2$   
 g)  $\log_4 (x^2 - 4x + 3) = \frac{1}{2}$

**240.** Aumentando um número  $x$  em 16 unidades, seu logaritmo na base 3 aumenta em 2 unidades. Determine  $x$ .

**241.** Determine o valor de  $x$  para que  $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \cdot \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{32} = \frac{5}{3}$ .

**242.** Resolva as equações:

- a)  $\log_3 (\log_2 x) = 1$   
 b)  $\log_{\frac{1}{2}} [\log_3 (\log_4 x)] = 0$   
 c)  $\log_{\frac{1}{4}} \{\log_3 [\log_2 (3x - 1)]\} = 0$   
 d)  $\log_2 [1 + \log_3 (1 + \log_4 x)] = 0$   
 e)  $\log_{\sqrt{2}} \{2 \cdot \log_3 [1 + \log_4 (x + 3)]\} = 2$   
 f)  $\log_3 [1 + 2 \cdot \log_2 (3 - \log_4 x^2)] = 1$   
 g)  $\log_2 [2 + 3 \cdot \log_3 (1 + 4 \cdot \log_4 (5x + 1))] = 3$

**243.** Resolva a equação:  $\log_3 [\log_2 (3x^2 - 5x + 2)] = \log_3 2$ .

**244.** Resolva as equações:

- a)  $x^{\log_x (x+3)} = 7$   
 b)  $x^{\log_x (x-5)^2} = 9$   
 c)  $x^{\log_x (x+3)^2} = 16$   
 d)  $(\sqrt[3]{x})^{\log_x (x^2+2)} = 2 \cdot \log_3 \sqrt{27}$

**245.** Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x^y - x^{-y} = 1 \\ \log_2 y = \sqrt{x} \end{cases}$$

**246.** Resolva as equações:

- a)  $\log_4^2 x - 2 \cdot \log_4 x - 3 = 0$   
 b)  $6 \cdot \log_2^2 x - 7 \cdot \log_2 x + 2 = 0$   
 c)  $\log x (\log x - 1) = 6$   
 d)  $\log_2 x (2 \cdot \log_2 x - 3) = 2$   
 e)  $2 \cdot \log_4^2 x + 2 = 5 \cdot \log_4 x$   
 f)  $\log^3 x = 4 \cdot \log x$

**247.** Determine a solução real da equação  $\sqrt[3]{x} - \sqrt[2x]{3} = 2$ .

**Sugestão:**  $\frac{1}{x} = 2y$ .

**248.** Resolva as equações:

a)  $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$

b)  $\frac{3 + \log_2 x}{\log_2 x} + \frac{2 - \log_2 x}{3 - \log_2 x} = \frac{5}{2}$

c)  $\frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} + \frac{\log_3 x + 2}{\log_3 x + 3} = \frac{5}{4}$

d)  $\frac{1 - \log x}{2 + \log x} - \frac{1 + \log x}{2 - \log x} = 2$

e)  $\frac{1 - \log_2 x}{2 - \log_2 x} - \frac{2 - \log_2 x}{3 - \log_2 x} = \frac{4 - \log_2 x}{5 - \log_2 x} - \frac{5 - \log_2 x}{6 - \log_2 x}$

**249.** Resolva a equação  $\log_x (2x + 3) = 2$ .

**Solução**

$$\log_x (2x + 3) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 & (1) \\ e \\ 2x + 3 = x^2 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo (2), temos:

$$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1.$$

Somente  $x = 3$  é solução, pois deve satisfazer (1).

$$S = \{3\}$$

**250.** Resolva as equações:

a)  $\log_x (3x^2 - 13x + 15) = 2$

b)  $\log_x (4 - 3x) = 2$

c)  $\log_{(x-2)} (2x^2 - 11x + 16) = 2$

d)  $\log_{\sqrt{x}} (2x^2 + 5x + 6) = 4$

e)  $\log_{(x-1)} (x^3 - x^2 + x - 3) = 3$

f)  $\log_{(x+2)} (x^3 - 7x^2 + 8x + 11) = 3$

g)  $\log_{(2-x)} (2x^3 - x^2 - 18x + 8) = 3$

**251.** Resolva a equação  $\log_{(x+1)} (x^2 + x + 6) = 3$ .

**252.** Resolva a equação  $\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3)$ .

**Solução**

$$\log_{(x+3)}(5x^2 - 7x - 9) = \log_{(x+3)}(x^2 - 2x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x + 3 \neq 1 \\ e \\ 5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$5x^2 - 7x - 9 = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{3}{4};$$

$x = 2$  não é solução, pois, fazendo  $x = 2$  em  $x^2 - 2x - 3$ , encontramos  $2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3 < 0$ .

$x = -\frac{3}{4}$  é solução, pois, fazendo  $x = -\frac{3}{4}$  em  $x^2 - 2x - 3$  e em  $x + 3$ , encontramos, respectivamente:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 3 = -\frac{15}{16} < 0$$

$$S = \emptyset$$

**253.** Resolva as equações:

a)  $\log_x(4x - 3) = \log_x(2x + 1)$

b)  $\log_x(5x + 2) = \log_x(3x + 4)$

c)  $\log_{(x+1)}(3x + 14) = \log_{(x+1)}(2 - x)$

d)  $\log_{(x+5)}(3x^2 - 5x - 8) = \log_{(x+5)}(2x^2 - 3x)$

e)  $\log_{(2x-4)}(5x^2 - 15x + 7) = \log_{(2x-4)}(x^2 - 3x + 2)$

f)  $\log_{(x+2)}(3x^2 - 8x - 2) = \log_{(x+2)}(2x^2 - 5x + 2)$

**254.** Resolva as equações:

a)  $\log_x^2(5x - 6) - 3 \cdot \log_x(5x - 6) + 2 = 0$

b)  $\log_x^2(x + 1) = 2 + \log_x(x + 1)$

c)  $2 \cdot \log_{(3x-2)}^2(4 - x) - 5 \cdot \log_{(3x-2)}(4 - x) + 2 = 0$

**255.** Resolva as equações:

a)  $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$

b)  $\log_3(2x - 1)^2 - \log_3(x - 1)^2 = 2$

**Solução**

a) Antes de aplicarmos qualquer propriedade operatória, devemos estabelecer as condições de existência para os logaritmos.

Assim sendo, devemos ter:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ e \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 1 \quad (1)$$

Resolvendo a equação proposta para  $x > 1$ , temos:

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3 \Rightarrow \log_2[(x + 1)(x - 1)] = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x + 1)(x - 1) = 2^3 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Somente  $x = 3$  é solução, pois satisfaz a condição (1).

$$S = \{3\}$$

b) Estabelecendo a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x - 1)^2 > 0 \\ e \\ (x - 1)^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \quad (1)$$

Resolvendo a equação proposta para  $x \neq \frac{1}{2}$  e  $x \neq 1$ , temos:

$$\log_3(2x - 1)^2 - \log_3(x - 1)^2 = 2 \Rightarrow \log_3 \frac{(2x - 1)^2}{(x - 1)^2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2x - 1)^2}{(x - 1)^2} = 3^2 \Rightarrow \left| \frac{2x - 1}{x - 1} \right| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x - 1}{x - 1} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x - 1}{x - 1} = -3 \Rightarrow 2x - 1 = -3(x - 1) \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{array} \right.$$

Os dois valores encontrados são soluções, pois satisfazem a condição (1).

$$S = \left\{ 2, \frac{4}{5} \right\}$$

**256.** Determine as raízes da equação

$$\log\left(x + \frac{1}{3}\right) + \log\left(x - \frac{1}{3}\right) = \log \frac{24}{9}.$$

- 257.** Determine a solução real da equação  $\log 2^x + \log (1 + 2^x) = \log 6$ .
- 258.** Determine a raiz real da equação  $x + \log (1 + 2^x) = x \cdot \log 5 + \log 6$ .
- 259.** Resolva as equações:
- $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x + 3) = 4$
  - $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 2) = 2$
  - $\log x + \log (x - 21) = 2$
  - $\log_2 (5x - 2) - \log_2 x - \log_2 (x - 1) = 2$
  - $\log_3 (5x + 4) - \log_3 x - \log_3 (x - 2) = 1$
  - $\log_{\frac{1}{2}} (3x + 2)^2 - \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3)^2 = -4$
  - $\log_{36} (x + 2)^2 + \log_{36} (x - 3)^2 = 1$
- 260.** Resolva a equação  $(0, 4)^{\log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log x^3}$ .
- 261.** Resolva a equação  $\log_2 (9^{x-1} + 7) - \log_2 (3^{x-1} + 1) = 2$ .
- 262.** Resolva as equações:
- $\frac{\log_3 (2x)}{\log_3 (4x - 15)} = 2$
  - $\frac{\log_2 (35 - x^3)}{\log_2 (5 - x)} = 3$
  - $\frac{\log (\sqrt{x + 1} + 1)}{\log \sqrt[3]{x - 40}} = 3$
- 263.** Resolva a equação  $\frac{1}{2} \log_3 (x - 16) - \log_3 (\sqrt{x} - 4) = 1$ .
- 264.** Resolva a equação  $\log_3 (4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = 2 \cdot \log_3 (2^{x+2} - 3)$ .
- 265.** Resolva a equação  $\log_2 (x - 2) + \log_2 (3x - 2) = \log_2 7$ .

### Solução

Vamos estabelecer, inicialmente, a condição de existência dos logaritmos, isto é:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow x > 2 \quad (1)$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\log_2(x-2) + \log_2(3x-2) = \log_2 7 \Rightarrow \log_2[(x-2)(3x-2)] = \log_2 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-2)(3x-2) = 7 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

Somente  $x = 3$  é solução, pois satisfaz a condição (1).

$$S = \{3\}$$

**266.** Resolva as equações:

a)  $\log_2(x+4) + \log_2(x-3) = \log_2 18$

b)  $\log_5(1-x) + \log_5(2-x) = \log_5(8-2x)$

c)  $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-5) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-3)$

d)  $\log(2x+1) + \log(4x-3) = \log(2x^2-x-2)$

e)  $\log_2(4-3x) - \log_2(2x-1) = \log_2(3-x) - \log_2(x+1)$

f)  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+13x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{3}}(x+3) = \log_{\frac{1}{3}}(3x-1)$

g)  $\log(2x^2+4x-4) + \operatorname{colog}(x+1) = \log 4$

**267.** Resolva a equação  $2 \cdot \log(\log x) = \log(7-2 \cdot \log x) - \log 5$ .

**268.** Resolva a equação  $\log \sqrt{7x+5} + \frac{1}{2} \log(2x+7) = 1 + \log \frac{9}{2}$ .

**269.** Resolva as equações:

a)  $\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x}$

c)  $\log_8 x^3 = 5 + \frac{12}{\log_8 x}$

b)  $\log^{-1} x = 2 + \log x^{-1}$

**270.** Resolva a equação  $\log_3(3^x-1) \cdot \log_3(3^{x+1}-3) = 6$ .

**271.** Resolva as equações:

a)  $\log^2 x^3 - 20 \cdot \log \sqrt{x} + 1 = 0$

b)  $\log_x 5\sqrt{5} - 1,25 = \log_x^2 \sqrt{5}$

c)  $\frac{\log_8 \left( \frac{8}{x^2} \right)}{\log_8^2 x} = 3$

**272.** Resolva a equação  $x^2 + x \cdot \log 5 - \log 2 = 0$ .

**273.** Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \end{cases}$$

### Solução

Aplicando a propriedade dos logaritmos na segunda equação, temos:  
 $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 12 \Rightarrow \log_2 (xy) = \log_2 12 \Rightarrow xy = 12.$

O sistema proposto fica então reduzido às equações

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

cujas soluções são  $x = 3$  e  $y = 4$  ou  $x = 4$  e  $y = 3$ .  
 $S = \{(3, 4), (4, 3)\}$

**274.** Resolva os seguintes sistemas de equações:

a)  $\begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 4^{x-y} = 8 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ 2 \cdot \log x - \log y = 2 \cdot \log 2 + \log 3 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512 \\ \log \sqrt{xy} = 1 + \log 2 \end{cases}$

**275.** Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(x+y)} = 5^{\log_5(x-y)} \\ \log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**276.** Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 x + \operatorname{colog}_3 y = 1 \end{cases}$$

**Solução**

Lembrando que  $\text{colog}_3 y = -\log_3 y$  e fazendo a substituição  $\log_3 x = a$  e  $\log_3 y = b$  no sistema proposto, temos:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 1$$

Mas  $a = \log_3 x$  e  $b = \log_3 y$ , então:

$$\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$$

$$\log_3 y = 1 \Rightarrow y = 3$$

$$S = \{(9, 3)\}$$

**277.** Resolva os seguintes sistemas de equações:

$$\text{a) } \begin{cases} 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 0 \\ 4 \cdot \log x + 3 \cdot \log y = 17 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2 \cdot \log_2 x + 3 \cdot \log_2 y = 27 \\ 5 \cdot \log_2 x - 2 \cdot \log_2 y = 1 \end{cases}$$

**278.** Resolva os sistemas de equações:

$$\begin{cases} \log_2(xy) \cdot \log_2\left(\frac{x}{y}\right) = -3 \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5 \end{cases}$$

**279.** Resolva a equação  $4 \cdot x^{\log_2 x} = x^3$ .

**Solução**

Aplicando o logaritmo de base 2 a ambos os membros, temos:

$$4 \cdot x^{\log_2 x} = x^3 \Rightarrow \log_2(4 \cdot x^{\log_2 x}) = \log_2 x^3 \Rightarrow \log_2 4 +$$

$$+ (\log_2 x) \cdot (\log_2 x) = 3 \cdot \log_2 x \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 3 \cdot \log_2 x + 2 = 0$$

Fazendo  $\log_2 x = y$ , temos:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = 2.$$

Mas  $y = \log_2 x$ , então:

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$S = \{2, 4\}$$

**280.** Resolva os seguintes sistemas de equações:

$$\text{a) } 9 \cdot x^{\log_3 x} = x^3$$

$$\text{c) } 16^{\log_x 2} = 8x$$

$$\text{e) } 3^2 \cdot \log_x 3 = x^{\log_x 3x}$$

$$\text{b) } x^{\log x} = 100 \cdot x$$

$$\text{d) } 9^{\log_{\sqrt{x}} 3} = 27x$$

**281.** Resolva a equação  $2^{\log_x(x^2 - 6x + 9)} = 3^{2 \cdot \log_x \sqrt{x} - 1}$ .

**282.** Resolva as equações:

a)  $\log(x^{\log x}) = 1$

c)  $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

b)  $x^{\log x - 1} = 100$

**283.** Resolva as equações:

a)  $x^3 \cdot \log^2 x^{-\frac{2}{3}} \cdot \log x = 100 \sqrt[3]{10}$

b)  $x^{\log_3^3 x - \log_3 x^3} = 3^{-3 \cdot \log_2 \sqrt{2}^4 + 8}$

c)  $x^{\log^2 x - 3 \cdot \log x + 1} = 1000$

**284.** Resolva a equação  $\log_x(2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4$ .

**285.** Resolva a equação  $3 + \log_x\left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2}\right) = 2x$ .

**286.** Resolva os sistemas de equações:

a)  $\begin{cases} x \cdot y = 16 \\ \log_2 x = 2 + \log_2 y \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x \cdot y = 32 \\ x^{\log_2 y} = 64 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$

**287.** Resolva equação  $\log_2(x - 2) = \log_2(x^2 - x + 6) + \log_{\frac{1}{2}}(2x + 1)$ .

**Solução**

Estabelecendo inicialmente a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\left. \begin{aligned} x - 2 > 0 &\Rightarrow x > 2 \\ x^2 - x + 6 > 0 &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x + 1 > 0 &\Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x > 2 \quad (1)$$

Aplicando as propriedades e transformando os logaritmos à base 2, temos:

$$\begin{aligned} \log_2(x - 2) &= \log_2(x^2 - x + 6) + \log_{2^{-1}}(2x + 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(x - 2) &= \log_2(x^2 - x + 6) - \log_2(2x + 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(x - 2) &= \log_2 \frac{x^2 - x + 6}{2x + 1} \Rightarrow x - 2 = \frac{x^2 - x + 6}{2x + 1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 &= x^2 - x + 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \text{ (não convém)} \end{cases} \\ S &= \{4\} \end{aligned}$$

**288.** Resolva as equações:

a)  $\log_3(x + 2) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 6) = \log_3(2x - 5)$

b)  $\log_2(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}}(5 - x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{2}}(x - 1) = \log_2(8 - x)$

c)  $\log_3(x^2 - 2x + 2) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) = \log_3(x - 4)$

**289.** Resolva a equação  $\log_2^2 x - 9 \cdot \log_8 x = 4$ .

**Solução**

$$\log_2^2 x - 9 \cdot \log_8 x = 4 \Rightarrow \log_2^2 x - 9 \cdot \log_{2^3} x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x - 4 = 0.$$

Fazendo  $\log_2 x = y$ , temos:

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \text{ ou } y = -1, \text{ mas } y = \log_2 x, \text{ então:}$$

$$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ 16, \frac{1}{2} \right\}$$

**290.** Resolva as equações:

a)  $\log_3^2 x - 5 \cdot \log_9 x + 1 = 0$

b)  $\log_2^2 x - \log_8 x^8 = 1$

c)  $\log_3^2 x = 2 + \log_9 x^2$

**291.** Resolva as equações:

a)  $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \cdot \log_4 \sqrt{\frac{2}{x}} = 2$

b)  $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \cdot \log_4 x - 2} = 4$

**292.** Resolva a equação:

$$\frac{1 + \log_2(x - 4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})} = 1$$

**293.** Resolva os sistemas de equações:

- a) 
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(y-x) + \log_2 \frac{1}{y} = -2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$
- b) 
$$\begin{cases} \log_9(x^2 + 1) - \log_3(y - 2) = 0 \\ \log_2(x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2 \end{cases}$$
- c) 
$$\begin{cases} \log_9(x^2 + 2) + \log_{81}(y^2 + 9) = 2 \\ 2 \cdot \log_4(x + y) - \log_2(x - y) = 0 \end{cases}$$
- d) 
$$\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1 \\ xy^2 = 4 \end{cases}$$
- e) 
$$\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = a \\ \log_4 x - \log_8 y = b \end{cases}$$

**294.** Resolva a equação  $\log_2 x + \log_x 2 = 2$ .

### Solução

Lembrando que  $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ , temos:  $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$ .

Fazendo  $\log_2 x = y$ , vem:

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y = 1$$

mas  $y = \log_2 x$ , então  $\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$ .

$$S = \{2\}$$

**295.** Determine o conjunto solução da equação

$$\log_4(x-3) - \log_{16}(x-3) = 1, \text{ em que } x > 3.$$

**296.** Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais,  $a > 0$  e  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ . Que relação devem satisfazer  $a$  e  $b$  para que a equação  $x^2 - x(\log_b a) + 2 \log_a b = 0$  tenha duas raízes reais e iguais?

**297.** Determine o valor de  $x$ , sabendo que  $\log_2 x = \log_{\sqrt{x}} x^2 + \log_x 2$ .

**298.** Determine o valor de  $x$ , sabendo que  $\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \neq 1$ .

**299.** Resolva a equação  $\log_x(x+1) = \log_{(x+1)} x$ , em que  $x$  é um número real.

**300.** Resolva as equações:

- a)  $\log_2 x = \log_x 2$
- b)  $\log_3 x = 1 + \log_x 9$
- c)  $\log_2 x - 8 \cdot \log_{x^2} 2 = 3$
- d)  $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \cdot \log_4 x^2 + 9 = 0$

**301.** Resolva as equações:

- a)  $\log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$
- b)  $\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0$

**302.** Resolva a equação  $1 + 2 \cdot \log_x 2 \cdot \log_4 (10 - x) = \frac{2}{\log_4 x}$ .

**303.** Resolva os sistemas de equações:

- a) 
$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ xy = 8 \end{cases}$$
- b) 
$$\begin{cases} 3 \cdot (2 \cdot \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y) = 10 \\ xy = 81 \end{cases}$$

**304.** Resolva a equação  $\frac{1}{\log_6 (x + 3)} + \frac{2 \cdot \log_{0,25} (4 - x)}{\log_2 (3 + x)} = 1$ .

**305.** Resolva a equação  $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$ .

### Solução

$$\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2 \Rightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 \frac{x}{16}} = \frac{1}{\log_2 \frac{x}{64}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{16} = \log_2 \frac{x}{64} \Rightarrow \log_2 x \cdot (\log_2 x - 4) = \log_2 x - 6$$

Fazendo  $\log_2 x = y$ , vem:

$$y(y - 4) = y - 6 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = 3$$

mas  $y = \log_2 x$ , então:

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$$

$$S = \{4, 8\}$$

**306.** Resolva as equações:

$$a) \log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$$

$$b) \log_{3x} \left( \frac{3}{x} \right) + \log_3 27x^2 = 5$$

$$c) \frac{1}{\log_x 8} + \frac{1}{\log_{2x} 8} + \frac{1}{\log_{4x} 8} = 2$$

$$d) \log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \cdot \log_{16x} x^3 + 40 \cdot \log_{4x} \sqrt{x} = 0$$

**307.** Resolva a equação

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 \cdot \log_{10} (x^2 - 3x + 2) = -2 + \log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 \cdot \log_{10} (x - 3).$$

**308.** Resolva a equação

$$x^{\log_2^+ x^2 - \log_2 (2x) - 2} + (x + 2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3.$$

**309.** Resolva as equações, sabendo que  $0 < a \neq 1$ :

$$a) \log_a (ax) \cdot \log_x (ax) = \log_{a^2} \frac{1}{a}$$

$$b) 2 \cdot \log_x a + \log_{ax} a + 3 \cdot \log_{a^2 x} a = 0$$

$$c) \log_x (ax) \cdot \log_a x = 1 + \log_x \sqrt{a}$$

$$d) \frac{\log_{a^2 \sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \cdot \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0$$

**310.** Resolva a equação, sabendo que  $a$  e  $b$  são reais positivos e diferentes de 1:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - \frac{2 \cdot \log_a x}{\log_{\frac{1}{b}} a} = \log_{\sqrt{a}} x \cdot \log_a x$$

**311.** Resolva a equação  $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1$ .

**312.** Resolva a equação, sabendo que  $0 < a \neq 1$ :  $10^{\log_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\log_a 10}$ .

**313.** Resolva a equação:

$$1 + \frac{\log (a - x)}{\log (x + b)} = \frac{2 - \log_{(a-b)} 4}{\log_{(a-b)} (x + b)}$$

sabendo que  $a > b > 0$  e  $a - b \neq 1$ .

**314.** Resolva os sistemas de equações:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + 4y^3 = 96 \\ \log_{y^2} 2 = \log_{xy} 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x \cdot \log_2 y \cdot \log_{\frac{1}{x}} 2 = y\sqrt{y} (1 - \log_x 2) \\ \log_{y^3} 2 \cdot \log_{\sqrt{2}}^x x = 1 \end{cases}$$

**315.** Resolva o sistema:  $\begin{cases} \log_2 (x + y) - \log_3 (x - y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

**316.** Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

**317.** Sendo  $a$  e  $b$  reais positivos e diferentes de 1, resolva o sistema:

$$\begin{cases} a^x \cdot b^y = ab \\ 2 \cdot \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b \end{cases}$$

**318.** Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log_{12} x \cdot (\log_2 x + \log_2 y) = \log_2 x \\ \log_2 x \cdot \log_3 (x + y) = 3 \cdot \log_3 x \end{cases}$$

**319.** Resolva os sistemas de equações para  $x > 0$  e  $y > 0$ :

$$\text{a) } \begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^6 y^3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^y = y^x \\ 2^x = 3^y \end{cases}$$

**320.** Resolva os sistemas de equações:

$$\text{a) } \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ \sqrt{x^{\log y} \cdot y^{\log x}} = y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ \sqrt[x]{(\log x \cdot \log y)^y} = 1024 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

# CAPÍTULO VI

## Inequações exponenciais e logarítmicas

### I. Inequações exponenciais

Como havíamos prometido no primeiro estudo de inequações exponenciais, voltamos novamente a esse assunto.

Enfocaremos neste capítulo as inequações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base por meio de simples aplicações das propriedades de potências.

**68.** A resolução de uma inequação desse tipo baseia-se no crescimento ou decréscimo da função logarítmica, isto é, se  $a^x > 0$ ,  $b > 0$  e  $0 < c \neq 1$ , tem-se:

$$(1) \quad a^x > b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_c a^x > \log_c b, & \text{se } c > 1 \\ \log_c a^x < \log_c b, & \text{se } 0 < c < 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad a^x < b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_c a^x < \log_c b, & \text{se } c > 1 \\ \log_c a^x > \log_c b, & \text{se } 0 < c < 1 \end{cases}$$

## EXERCÍCIOS

**321.** Resolva as inequações:

a)  $3^x > 2$

b)  $2^{3x-1} \leq \frac{1}{5}$

**Solução**

a) Tomando os logaritmos de ambos os membros da desigualdade na base 3 e mantendo a desigualdade, pois a base do logaritmo é maior que 1, temos:

$$3^x > 2 \Rightarrow \log_3 3^x > \log_3 2 \Rightarrow x \cdot \log_3 3 > \log_3 2 \Rightarrow x > \log_3 2$$

A escolha da base 3 para o logaritmo visou obter uma simplificação na resolução. Obteríamos o mesmo resultado se tomássemos os logaritmos em qualquer outra base.

Por exemplo, tomando os logaritmos na base  $\frac{1}{5}$  e invertendo a desigualdade, temos:

$$3^x > 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} 3^x < \log_{\frac{1}{5}} 2 \Rightarrow x \cdot \log_{\frac{1}{5}} 3 < \log_{\frac{1}{5}} 2 \xrightarrow{(\log_{\frac{1}{5}} 3 < 0)}$$

$$\Rightarrow x > \frac{\log_{\frac{1}{5}} 2}{\log_{\frac{1}{5}} 3} \Rightarrow x > \log_3 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_3 2\}$$

b)  $2^{3x-1} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2^{3x}}{2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow 8^x \leq \frac{2}{5} \Rightarrow \log_8 8^x \leq \log_8 \frac{2}{5} \Rightarrow x \leq \log_8 \frac{2}{5}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_8 \frac{2}{5}\right\}$$

**322.** Resolva as inequações:

a)  $4^x > 7$

c)  $2^{3x+2} > 9$

e)  $3^{2-3x} < \frac{1}{4}$

g)  $2^{(x^2)} \leq 5$

b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 5$

d)  $5^{4x-1} < 3$

f)  $3^{\sqrt{x}} > 4$

**323.** Resolva a inequação  $3^{2x-1} > 2^{3x+1}$ .

**Solução**

$$3^{2x-1} > 2^{3x+1} \Rightarrow \frac{3^{2x}}{3} > 2^{3x} \cdot 2 \Rightarrow \frac{(3^2)^x}{(2^3)^x} > 2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{9^x}{8^x} > 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^x > 6 \Rightarrow \log_{\frac{9}{8}}\left(\frac{9}{8}\right)^x > \log_{\frac{9}{8}} 6 \Rightarrow x > \log_{\frac{9}{8}} 6$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{9}{8}} 6\right\}$$

**324.** Resolva as inequações:

a)  $2^x > 3^{x-1}$

c)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} > 2^{4x-3}$

b)  $2^{3x-1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}$

d)  $2^{x-2} > 3^{2x-1}$

**325.** Resolva as inequações:

a)  $5^x > 3^x + 3^{x+1}$

b)  $3^x + 3^{x+1} \leq 2^x - 2^{x-1}$

c)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 3^{x+1} - 3^x$

d)  $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} < 2^{x-2} - 2^x$

e)  $2^x + 2^{x+1} - 2^{x+3} < 5^{x+2} - 5^{x-1}$

**326.** Resolva as inequações:

a)  $2^{3x+1} \cdot 5^{2x-3} > 6$

b)  $3^{2x-1} \cdot 2^{5-4x} > 5$

**327.** Resolva as inequações:

a)  $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 > 0$

d)  $4^{x+\frac{1}{2}} - 2^x - 3 \leq 0$

b)  $4^x - 2^{x+2} + 3 < 0$

e)  $25^x + 5^{x+1} + 4 \leq 0$

c)  $25^x - 5^x - 6 \geq 0$

f)  $2 \cdot 9^x + 3^{x+2} + 4 > 0$

**328.** Resolva a inequação  $9^x - 6^x - 4^x > 0$ .

**329.** Resolva a inequação  $4^x - 6 \cdot 10^x + 8 \cdot 25^x \leq 0$ .

**330.** Resolva a inequação  $4^{x+1} - 8 \cdot 6^x + 9^{x+\frac{1}{2}} \geq 0$ .

## II. Inequações logarítmicas

Assim como classificamos as equações logarítmicas em três tipos básicos, vamos também classificar as inequações logarítmicas em três tipos:

### 69. 1º tipo: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

É a inequação redutível a uma desigualdade entre dois logaritmos de mesma base  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ).

Como a função logaritmo é crescente se  $a > 1$  e decrescente se  $0 < a < 1$ , devemos considerar dois casos:

1º caso

Quando a base é maior que 1, a relação de desigualdade existente entre os logaritmandos é de mesmo sentido que a dos logaritmos. Não nos devemos esquecer de que, para existirem os logaritmos em  $\mathbb{R}$ , os logaritmandos deverão ser positivos.

Esquemáticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \text{Se } a > 1, \text{ então} \\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0. \end{array}$$

2º caso

Quando a base é positiva e menor que 1, a relação de desigualdade existente entre os logaritmandos é de sentido contrário à dos logaritmos. Também não nos podemos esquecer de que os logaritmandos deverão ser positivos para que os logaritmos sejam reais.

Esquemáticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \text{Se } 0 < a < 1, \text{ então} \\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x). \end{array}$$

Agrupando os dois casos num só esquema, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 & \text{se } a > 1 \\ \text{ou} \\ 0 < f(x) < g(x) & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

**70.** Exemplos:

 1º) Resolver a inequação  $\log_2 (2x - 1) < \log_2 6$ .

**Solução**

Observe que a base é maior que 1; logo, a desigualdade entre os logaritmandos tem o mesmo sentido que a dos logaritmos.

$$\log_2 (2x - 1) < \log_2 6 \Rightarrow 0 < 2x - 1 < 6 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2} \right\}$$

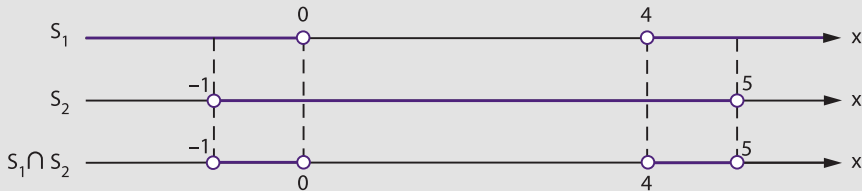
 2º) Resolver a inequação  $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 4x) > \log_{\frac{1}{3}} 5$ .

**Solução**

Observe que agora a base é menor que 1; logo, a desigualdade entre os logaritmandos tem sentido contrário à dos logaritmos.

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 4x) > \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow 0 < x^2 - 4x < 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ ou } x > 4 & (S_1) \\ \text{e} \\ x^2 - 4x < 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow -1 < x < 5 & (S_2) \end{cases}$$



$$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } 4 < x < 5\}.$$

 3º) Resolver a inequação  $\log_5 (x^2 - 2x - 6) \geq \log_5 2$ .

**Solução**

$$\log_5 (x^2 - 2x - 6) \geq \log_5 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 6 \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \text{ ou } x \geq 4$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$$

**71. 2º tipo:  $\log_a f(x) \leq k$** 

É a inequação logarítmica redutível a uma desigualdade entre um logaritmo e um número real.

Para resolvermos uma inequação desse tipo, basta notarmos que o número real  $k$  pode ser assim expresso:

$$k = k \cdot \log_a a = \log_a a^k$$

Portanto, são equivalentes as inequações

$$\log_a f(x) > k \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^k$$

e

$$\log_a f(x) < k \Leftrightarrow \log_a f(x) < \log_a a^k$$

Pelo estudo já feito no tipo anterior, temos, esquematicamente:

$$\log_a f(x) > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^k & \text{se } a > 1 \\ 0 < f(x) < a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < k \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^k & \text{se } a > 1 \\ f(x) > a^k & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

**72. Exemplos:**

1º) Resolver a inequação  $\log_3 (3x + 2) < 2$ .

**Solução**

$$\log_3 (3x + 2) < 2 \Rightarrow 0 < 3x + 2 < 3^2 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{3} \right\}$$

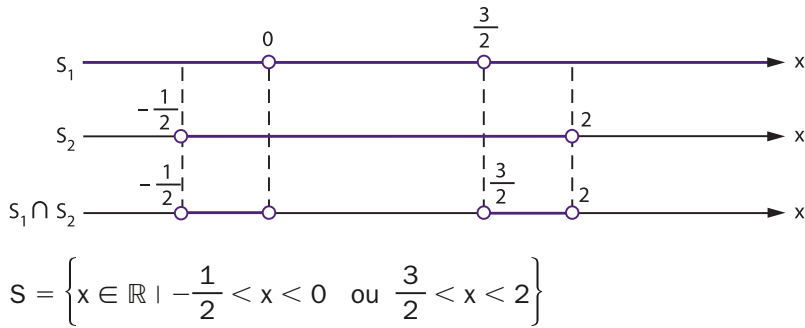
2º) Resolver a inequação  $\log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x) > -1$ .

**Solução**

$$\log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x) > -1 \Rightarrow 0 < 2x^2 - 3x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ ou } x > \frac{3}{2} & (S_1) \\ \text{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x < 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 2 & (S_2) \end{cases}$$



3º) Resolver a inequação  $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 7x + 5) \leq -2$ .

**Solução**

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 7x + 5) \leq -2 &\Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 \geq 9 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 4 \\ S &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 4 \right\} \end{aligned}$$

**73. 3º tipo: incógnita auxiliar**

São as inequações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

**74. Exemplos:**

Resolver a inequação  $\log_3^2 x - 3 \cdot \log_3 x + 2 > 0$ .

**Solução**

Fazendo  $\log_3 x = y$ , temos:

$$y^2 - 3y + 2 > 0 \Rightarrow y < 1 \text{ ou } y > 2, \text{ mas } y = \log_3 x, \text{ então:}$$

$$\log_3 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 3^1 \text{ ou } \log_3 x > 2 \Rightarrow x > 3^2 = 9$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3 \text{ ou } x > 9\}$$

## EXERCÍCIOS

**331.** Resolva as inequações:

a)  $\log_3 (5x - 2) < \log_3 4$

b)  $\log_{0,3} (4x - 3) < \log_{0,3} 5$

c)  $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} (2x + 3)$

d)  $\log_2 (2x^2 - 5x) \leq \log_2 3$

e)  $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) > \log_{\frac{1}{2}} (3x + 9)$

f)  $\log_{\frac{1}{10}} (x^2 + 1) < \log_{\frac{1}{10}} (2x - 5)$

g)  $\log (x^2 - x - 2) < \log (x - 4)$

**332.** Resolva as inequações:

a)  $\log_5 (x^2 - x) > \log_{0,2} \frac{1}{6}$

b)  $\log_{\frac{1}{2}} \left( x^2 - x - \frac{3}{4} \right) > 2 - \log_2 5$

**333.** Resolva a inequação  $\log x - \text{colog} (x + 1) > \log 12$ .

**334.** Resolva as inequações:

a)  $\log_2 (2 - x) < \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)$

b)  $\frac{1}{\log_2 x} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x + 2}}$

**335.** Resolva as inequações:

a)  $\log_2 (3x + 5) > 3$

b)  $\log_{\frac{1}{3}} (4x - 3) \geq 2$

c)  $\log_2 (x^2 + x - 2) \leq 2$

d)  $\log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 6x + 3) < 1$

e)  $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) > -4$

f)  $\log_{\frac{5}{8}} \left( 2x^2 - x - \frac{3}{8} \right) \geq 1$

g)  $\log (x^2 + 3x + 3) > 0$

h)  $\log_{0,3} (x^2 - 4x + 1) \geq 0$

**336.** Resolva a inequação  $\log_a (2x - 3) > 0$ , para  $0 < a < 1$ .

**337.** Resolva as inequações:

a)  $2 < \log_2 (3x + 1) < 4$

b)  $2 < \log_2 (3 - 2x) \leq 3$

c)  $\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} (2x) < 1$

d)  $0 < \log_3 (x^2 - 4x + 3) < 1$

**338.** Resolva a inequação  $1 \leq \log_{10} (x - 1) \leq 2$ , com  $x > 1$ .

**339.** Resolva as inequações:

a)  $|\log_2 x| > 1$

b)  $|\log_3 (x - 3)| \geq 2$

c)  $|\log x| < 1$

d)  $|2 + \log_2 x| \geq 3$

e)  $|\log_3 (x^2 - 1)| < 1$

**340.** Resolva as inequações:

a)  $3 \cdot \log_3^2 x + 5 \cdot \log_3 x - 2 \leq 0$

b)  $\log_{\frac{2}{3}} x - 3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x - 4 > 0$

c)  $\log_2^2 x < 4$

d)  $1 < \log^2 x < 3$

e)  $\log^4 x - 5 \cdot \log^2 x + 4 < 0$

f)  $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

**341.** Determine as soluções da desigualdade  $2(\log_e x)^2 - \log_e x > 6$ .

**342.** Resolva as inequações:

a)  $\log_2 x - 6 \cdot \log_x 2 + 1 > 0$

b)  $\log_2 x - \log_x 8 - 2 \geq 0$

c)  $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^5}{4}\right)^2 - 20 \cdot \log_2 x + 148 < 0$

**343.** Determine os valores de  $x$  que verificam a desigualdade

$$\frac{1}{\log_e x} + \frac{1}{\log_x e - 1} > 1.$$

**344.** Resolva a inequação  $1 - \sqrt{1 - 8(\log_{\frac{1}{4}} x)^2} < 3 \cdot \log_{\frac{1}{4}} x$ .

**345.** Resolva a inequação  $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$ .

**346.** Resolva a inequação  $\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$ , para  $0 < a < 1$ .

**347.** Resolva a inequação  $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) \leq 1$ .

### Solução

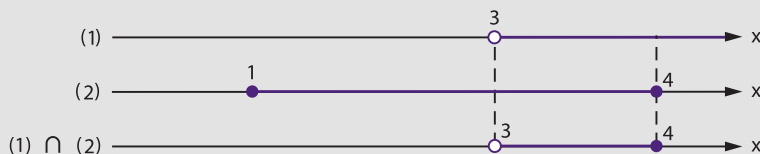
Antes de aplicarmos as propriedades operatórias dos logaritmos, devemos estabelecer a condição para a existência dos logaritmos, isto é:

$$\left. \begin{array}{l} x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ e \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 3 \quad (1)$$

Resolvendo a inequação, temos:

$$\begin{aligned} \log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1 &\Rightarrow \log_2(x-3)(x-2) \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-3)(x-2) \leq 2 &\Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \end{aligned} \quad (2)$$

A solução da inequação proposta são os valores de  $x$  que satisfazem simultaneamente (1) e (2); portanto:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 4\}$$

**348.** Resolva as inequações:

- $\log_3(3x+4) - \log_3(2x-1) > 1$
- $\log_2 x + \log_2(x+1) < \log_2(2x+6)$
- $\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$
- $\log(2x-1) - \log(x+2) < \log 3$
- $\log_3(x^2+x-6) - \log_3(x+1) > \log_3 4$
- $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \geq -2$

**349.** Determine os valores de  $x$  para os quais  $\log_{10} x + \log_{10}(x+3) < 1$ .

**350.** Resolva as inequações:

- $\log_2 \sqrt{6x+1} + \log_2 \sqrt{x+1} > \log_4 3$
- $\log_4(8x) - \log_2 \sqrt{x-1} - \log_2 \sqrt{x+1} < \log_2 3$

**351.** Resolva a inequação  $\log_4(2x^2+x+1) - \log_2(2x-1) \leq 1$ .

**352.** Resolva a inequação  $\log_2 \left[ \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \right] > 0$ .

### Solução

$$\begin{aligned} \log_2 \left[ \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \right] > 0 &\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) > 1 \Rightarrow 0 < \log_3 x < \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 < x < \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \sqrt{3}\}$$

**353.** Resolva as inequações:

a)  $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x) < 0$

d)  $\log_2 [\log_3 (\log_5 x)] > 0$

b)  $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}} x) \geq 0$

e)  $\log_{\frac{1}{2}} [\log_3 (\log_{\frac{1}{2}} x)] < 0$

c)  $\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x) \geq 1$

f)  $\log_2 [\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x)] > 1$

**354.** Determine o conjunto solução da inequação  $\log_{\frac{1}{3}} [\log_{\frac{1}{3}} x] \geq 0$ .

**355.** Sendo  $a > 1$ , resolva a inequação  $\log_a (\log_a x) < 0$ .

**356.** Se  $0 < a < 1$ , resolva a inequação  $\log_a (\log_{\frac{1}{a}} x) \leq 0$ .

**357.** Resolva a inequação  $\log_a [\log_{\frac{1}{a}} (\log_a x)] \geq 0$ , para  $a > 1$ .

**358.** Resolva a inequação  $\log_{\frac{1}{a}} [\log_a (\log_a x)] \leq 0$ , para  $0 < a < 1$ .

**359.** Resolva as inequações:

a)  $\log_2 \{1 + \log_3 [\log_2 (x^2 - 3x + 2)]\} \geq 0$

b)  $\log_{\frac{1}{3}} [\log_4 (x^2 - 5)] > 0$

c)  $\log_2 \left( \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x-1} \right) < 0$

d)  $\log_{\frac{1}{2}} \left( \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \right) \leq 0$

**360.** Determine o domínio das funções:

a)  $f(x) = \sqrt{\log_2 x}$

d)  $f(x) = \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 x)}$

b)  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$

e)  $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1}}$

c)  $f(x) = \sqrt{\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x)}$

f)  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2 - 1}}$

**361.** Determine o domínio da função  $f$  dada por  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (x - 1)}$ .

**362.** Resolva a inequação  $\sqrt{\log_a \frac{3 - 2x}{1 - x}} < 1$ .

**363.** Resolva as inequações:

$$a) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5)} > 2$$

$$c) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \left[\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]} < 1$$

$$b) 3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x)} \leq \frac{1}{81}$$

$$d) (1,25)^{1 - \log_2^2 x} < (0,64)^{2 + \log_{\sqrt{2}} x}$$

**364.** Resolva a inequação  $x^2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > \frac{1}{x}$ .

**365.** Determine os valores de  $a$  para que a equação  $x^2 - 4x + \log_2 a = 0$  admita raízes reais.

### Solução

A equação admitirá raízes reais se o discriminante da equação não for negativo ( $\Delta \geq 0$ ).

$$\Delta = 16 - 4 \cdot \log_2 a \geq 0 \Rightarrow \log_2 a \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < a < \sqrt[4]{2}$$

Resposta:  $0 < a < \sqrt[4]{2}$ .

**366.** Determine os valores de  $a$  para os quais as raízes da equação são reais:

$$a) x^2 - 2x - \log_2 a = 0$$

$$c) x^2 - x \cdot \log_3 a + 4 = 0$$

$$b) 3x^2 - 6x + \log a = 0$$

$$d) x^2 - x \cdot \log_2 a + \log_2 a = 0$$

**367.** Determine o valor de  $m$  para que a equação  $x^2 - 2x - \log_{10} m = 0$  não tenha raízes reais.

**368.** Determine o valor de  $N$  para que a equação  $x^2 - 2x + \log_{10} N = 0$  admita duas raízes de sinais contrários.

**369.** Determine o valor de  $t$  para que a equação  $4^x - (\log_e t + 3) 2^x - \log_e t = 0$  admita duas raízes reais e distintas.

**370.** Determine  $a$  para que a equação  $3x^2 - 5x + \log(2a^2 - 9a + 10) = 0$  admita raízes de sinais contrários.

**371.** Resolva as inequações:

$$a) (4 - x^2) \cdot \log_2(1 - x) \leq 0$$

$$b) (5x^2 + x - 6) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geq 0$$

**372.** Resolva a inequação  $x^{\frac{1}{\log x}} \cdot \log x < 1$ .

**373.** Resolva a inequação  $\log_x (2x^2 - 5x + 2) > 1$ .

**Solução**

Antes de resolvermos a inequação, devemos levantar a condição para a existência do logaritmo.

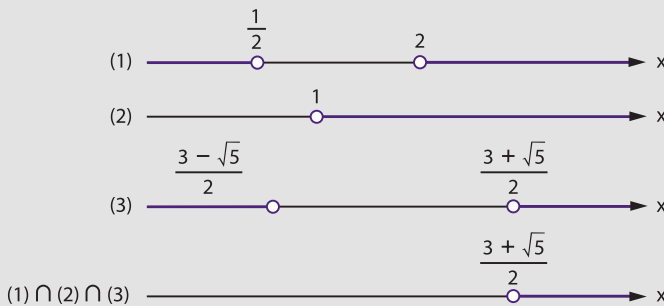
$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ e \\ 0 < x \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \quad (1)$$

Como a base  $x$  pode ser maior ou menor que 1, devemos examinar dois casos:

1º) Se  $x > 1$  (2), temos:

$$\begin{aligned} \log_x (2x^2 - 5x + 2) > 1 &\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 > x \Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

A solução neste caso é dada por:

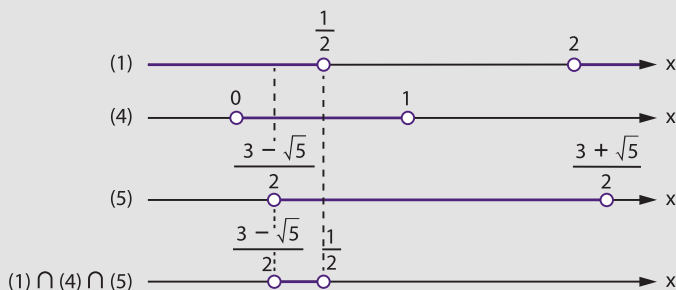


$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

2º) Se  $0 < x < 1$  (4), temos:

$$\begin{aligned} \log_x (2x^2 - 5x + 2) > 1 &\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 < x \Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 < 0 \\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (5) \end{aligned}$$

A solução neste caso é dada por:



$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2} \right\}$$

A solução da inequação proposta é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

**374.** Resolva as inequações:

a)  $\log_{x^2} (x + 2) < 1$

f)  $\log_x \frac{x + 3}{x - 1} > 1$

b)  $\log_{2x+3} x^2 < 1$

g)  $\log_{(x+6)} (x^2 - x - 2) \geq 1$

c)  $\log_{x^2} (x^2 - 5x + 4) < 1$

h)  $\log_{\left(\frac{2x+5}{2}\right)} \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0$

d)  $\log_x \frac{4x + 5}{6 - 5x} < -1$

i)  $\log_{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}} \left(\frac{x}{3}\right) > 0$

e)  $\log_{(3x^2+1)} 2 < \frac{1}{2}$

**375.** Resolva a inequação  $\log_x (2x - 1) \leq 2$ .

**376.** Para que valores de  $a$  e  $b$  se tem a desigualdade:  $\log_a (a^2 b) > \log_b \left(\frac{1}{a^5}\right)$ ?

**377.** Resolva a inequação  $\log_2 (x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) > 0$ .

**378.** Resolva a inequação  $x^{\log_a x + 1} > a^2 x$  para  $a > 1$ .