

GELSON IEZZI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Trigonometria

3

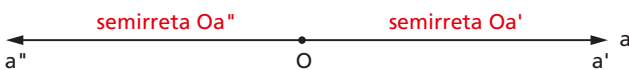


CAPÍTULO I

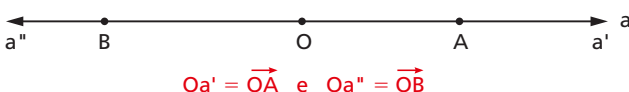
Revisão inicial de geometria

1. Semirreta

Semirreta é cada uma das partes em que uma reta fica dividida por um de seus pontos.



Outra forma de representar:



$$Oa' = \vec{OA} \text{ e } Oa'' = \vec{OB}$$

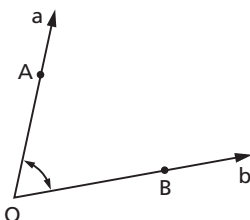
2. Ângulo

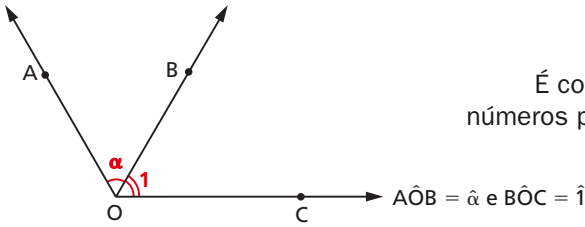
Ângulo é a reunião de duas semirretas de mesma origem mas não contidas na mesma reta.

lados do ângulo: \vec{OA} e \vec{OB}

vértice do ângulo: O

ângulo: $\begin{cases} a\hat{O}b \text{ ou } A\hat{O}B \\ b\hat{O}a \text{ ou } B\hat{O}A \\ \hat{O} \end{cases}$



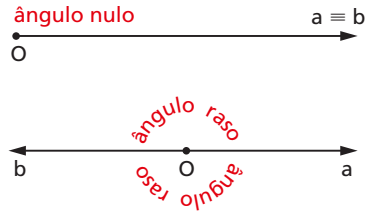


É comum escrevermos letras ou números para representar ângulos.

3. Ângulo nulo e ângulo raso

Em particular, se Oa e Ob coincidem, dizemos que elas determinam um **ângulo nulo**.

Se as semirretas são opostas, dizemos que determinam dois **ângulos rasos**.

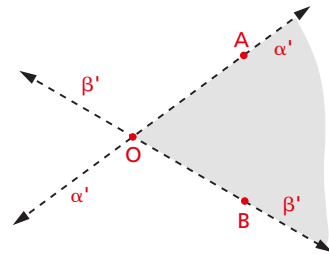


4. Interior de ângulo — ponto interno

Interior do ângulo $A\hat{O}B$ é a interseção de dois semiplanos abertos, a saber:

- α' com origem na reta \vec{OA} e que contém o ponto B e
- β' com origem na reta \vec{OB} e que contém o ponto A .

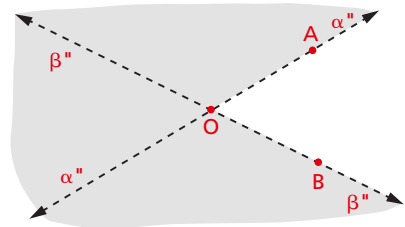
$\text{Interior de } A\hat{O}B = \alpha' \cap \beta'$



Os **pontos do interior** de um ângulo são **pontos internos** ao ângulo.

5. Exterior de ângulo — ponto externo

Exterior do ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto dos pontos que não pertencem nem ao ângulo $A\hat{O}B$ nem ao seu interior.



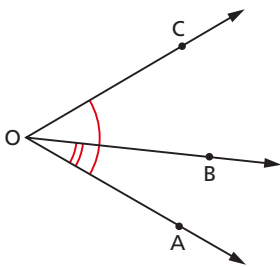
O exterior de $\hat{A}OB$ é a reunião de dois semiplanos abertos, a saber:
 α'' com origem na reta \overleftrightarrow{OA} e que não contém o ponto B e
 β'' com origem na reta \overleftrightarrow{OB} e que não contém o ponto A.

$$\text{Exterior de } \hat{A}OB = \alpha'' \cup \beta''$$

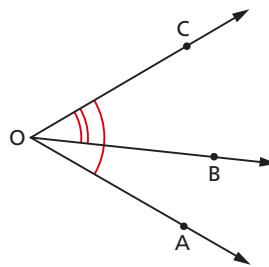
Os **pontos do exterior** de um ângulo são **pontos externos** ao ângulo.

6. Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes

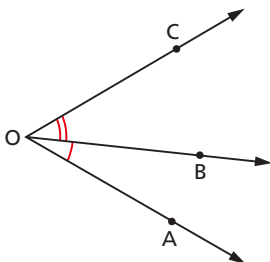
Dois ângulos são consecutivos se um lado de um deles é também lado do outro.



$\hat{A}OB$ e $\hat{A}OC$ são consecutivos
 (\overrightarrow{OA} é lado comum)



$\hat{A}OC$ e $\hat{B}OC$ são consecutivos
 (\overrightarrow{OC} é lado comum)



$\hat{A}OB$ e $\hat{B}OC$ são consecutivos
 (\overrightarrow{OB} é lado comum)

Neste caso, em particular, os ângulos, além de consecutivos, são **adjacentes** porque não têm pontos internos comuns.

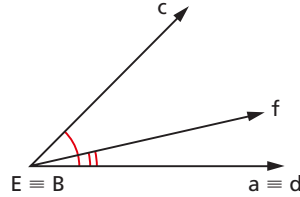
$$\hat{A}OB \text{ e } \hat{B}OC \text{ são adjacentes}$$

7. Comparação de ângulos — congruência

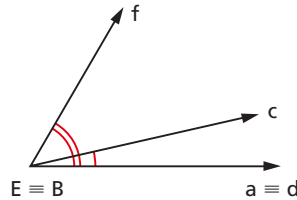
Dados dois ângulos $\hat{a}Bc$ e $\hat{d}E\hat{f}$, podemos transportar o ângulo $\hat{d}E\hat{f}$ sobre $\hat{a}Bc$, de tal forma que a semirreta Ed coincida com a semirreta Ba .

Surgem, então, três hipóteses:

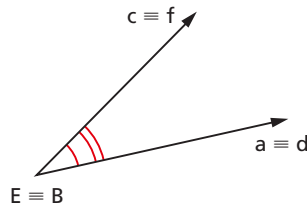
- 1ª) $E\hat{f}$ é semirreta interna a $\hat{a}Bc$
Então $\hat{a}Bc > \hat{d}E\hat{f}$



- 2ª) $E\hat{f}$ é semirreta externa a $\hat{a}Bc$
Então $\hat{a}Bc < \hat{d}E\hat{f}$

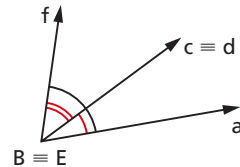
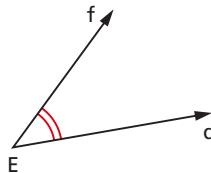
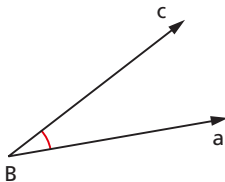


- 3ª) $E\hat{f}$ coincide com Bc
Então $\hat{a}Bc \equiv \hat{d}E\hat{f}$
Neste caso, os ângulos $\hat{a}Bc$ e $\hat{d}E\hat{f}$ são **congruentes** (símbolo \equiv).



8. Soma de ângulos

Dados dois ângulos $\hat{a}Bc$ e $\hat{d}E\hat{f}$, transportamos $\hat{d}E\hat{f}$ de tal forma que $Ed \equiv Bc$ e $E\hat{f}$ seja externa a $\hat{a}Bc$, isto é, que $\hat{a}Bc$ e $\hat{d}E\hat{f}$ sejam adjacentes.



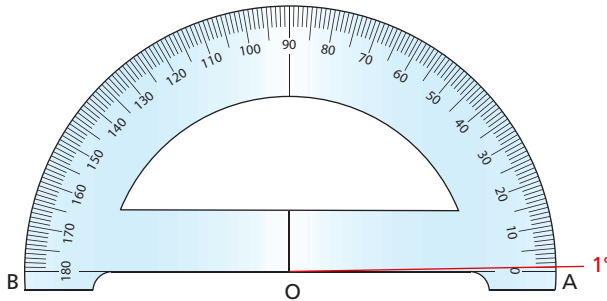
$$\hat{a}B\hat{f} = \hat{a}Bc + \hat{d}E\hat{f}$$

O ângulo $\hat{a}B\hat{f}$ assim obtido chama-se **ângulo soma** de $\hat{a}Bc$ e $\hat{d}E\hat{f}$.

9. Unidade de medida de ângulos

Consideremos um ângulo raso $A\hat{O}B$.

Podemos dividir esse ângulo em 180 partes iguais.



Chama-se **ângulo de 1°** (um grau) o ângulo que corresponde a $\frac{1}{180}$ do ângulo raso.

Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**.

Um **minuto ($1'$)** é o ângulo correspondente a $\frac{1}{60}$ do ângulo de um grau.

$$1' = \frac{1^\circ}{60}$$

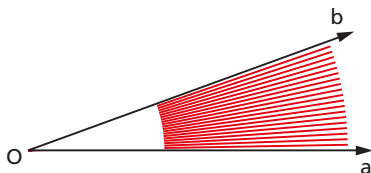
Um **segundo ($1''$)** é o ângulo correspondente a $\frac{1}{60}$ do ângulo de um minuto.

$$1'' = \frac{1'}{60}$$

10. Medida de um ângulo

Medir um ângulo significa verificar quantas unidades de medida (1°) cabem no ângulo dado.

Exemplo:



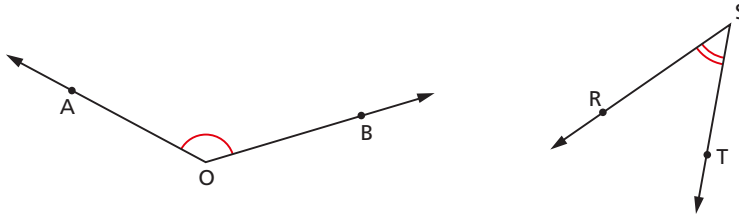
A medida do ângulo $a\hat{O}b$ [$m(a\hat{O}b)$] é:

$$m(a\hat{O}b) = 20 \cdot 1^\circ = 20^\circ$$

11. Ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 180° .

Um deles é o **suplemento** do outro.

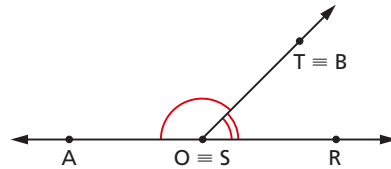


$$m(\widehat{A\hat{O}B}) + m(\widehat{R\hat{S}T}) = 180^\circ$$

$\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{R\hat{S}T}$ são suplementares.

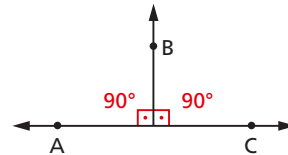
$\widehat{A\hat{O}B}$ é o suplemento de $\widehat{R\hat{S}T}$.

$\widehat{R\hat{S}T}$ é o suplemento de $\widehat{A\hat{O}B}$.



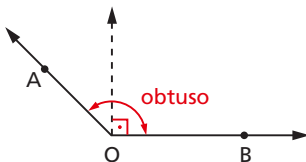
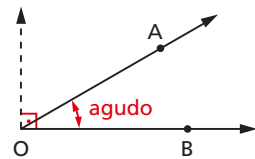
12. Ângulo reto

Se dois ângulos são adjacentes, suplementares e têm medidas iguais, então cada um deles é chamado **ângulo reto** e sua medida é 90° .



13. Ângulo agudo e ângulo obtuso

O ângulo cuja medida é menor que 90° é chamado **ângulo agudo**.

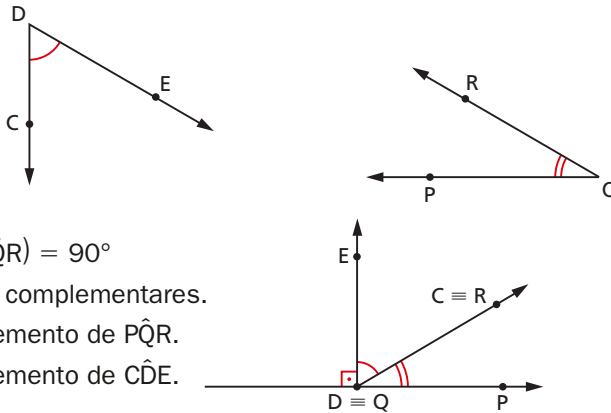


Chama-se **obtusos** o ângulo cuja medida está entre 90° e 180° .

14. Ângulos complementares

Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma de suas medidas é 90° .

Um deles é o **complemento** do outro.



$$m(\widehat{CDE}) + m(\widehat{PQR}) = 90^\circ$$

\widehat{CDE} e \widehat{PQR} são complementares.

\widehat{CDE} é o complemento de \widehat{PQR} .

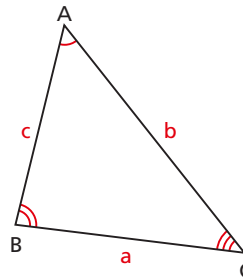
\widehat{PQR} é o complemento de \widehat{CDE} .

15. Triângulo

Três pontos A, B e C, não colineares, determinam três segmentos de reta: \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} .

A reunião dos segmentos de reta \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} é chamada **triângulo** ABC.

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$



Elementos do triângulo ABC:

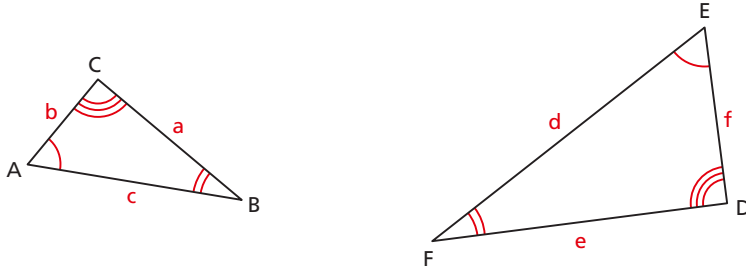
vértices: A, B, C

lados: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC}

medidas dos lados: $m(\overline{AB}) = c$ (ou $AB = c$), $m(\overline{BC}) = a$ (ou $BC = a$), $m(\overline{AC}) = b$ (ou $AC = b$).

ângulos: \widehat{BAC} , \widehat{ABC} , \widehat{ACB} (internos)

16. Semelhança de triângulos



Dois triângulos são semelhantes (símbolo \sim) se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Observação:

Dois lados homólogos são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

Para os dois triângulos acima, os pares de lados homólogos são: a e e ; b e f ; c e d .

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{E} \\ \hat{B} \equiv \hat{F} \\ \hat{C} \equiv \hat{D} \\ \frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{d} \end{cases}$$

OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria plana

9



CAPÍTULO III

Ângulos

I. Introdução

25. Região convexa

Um conjunto de pontos Σ é convexo (ou é uma região convexa) se, e somente se, dois pontos distintos quaisquer, A e B, de Σ são extremidades de um segmento \overline{AB} contido em Σ , ou se Σ é unitário, ou se Σ é vazio.

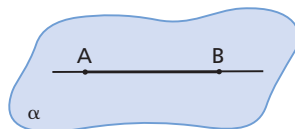
Exemplos:

1º) Uma reta r é um conjunto de pontos convexo, pois



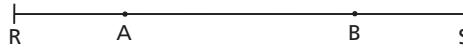
$$\forall A, \forall B, \forall r (A \neq B, A \in r, B \in r \Rightarrow \overline{AB} \subset r)$$

2º) Um plano α é uma região convexa, pois, se A e B são dois pontos distintos de α , o segmento \overline{AB} está contido em α .



$$\forall A, \forall B, \forall \alpha (A \neq B, A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \Rightarrow \overline{AB} \subset \alpha)$$

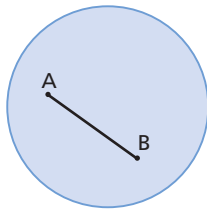
3º) Um segmento de reta também é uma figura convexa:



$$\forall A, \forall B, \forall \overline{RS} \ (A \neq B, A \in \overline{RS}, B \in \overline{RS} \Rightarrow \overline{AB} \subset \overline{RS})$$

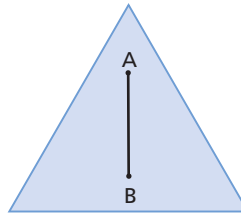
4º) Temos a seguir três figuras ainda não definidas que são convexas:

Σ_1



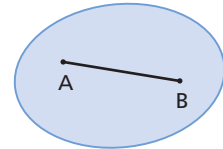
$\overline{AB} \subset \Sigma_1$
região convexa

Σ_2



$\overline{AB} \subset \Sigma_2$
conjunto de pontos convexo

Σ_3

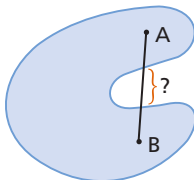


$\overline{AB} \subset \Sigma_3$
figura convexa

26. Se uma região não é convexa, ela é uma região **côncava**.

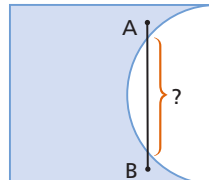
Exemplos:

Σ'



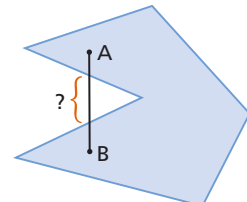
$\overline{AB} \not\subset \Sigma'$
 Σ' é côncava

Σ''



$\overline{AB} \not\subset \Sigma''$
 Σ'' é côncava

Σ'''

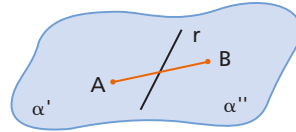


$\overline{AB} \not\subset \Sigma'''$
 Σ''' é côncava

27. Postulado da separação dos pontos de um plano

Uma reta r de um plano α separa este plano em dois conjuntos de pontos, α' e α'' , tais que:

- a) $\alpha' \cap \alpha'' = \emptyset$
- b) α' e α'' são convexos.
- c) $A \in \alpha', B \in \alpha'' \Rightarrow \overline{AB} \cap r \neq \emptyset$



Os pontos de α que não pertencem à reta r formam dois conjuntos tais que:

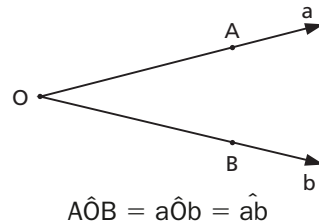
- cada um deles é convexo;
- se A pertence a um deles e B pertence ao outro, então o segmento \overline{AB} intercepta a reta r .

28. Semi-plano — definição

Cada um dos dois conjuntos (α' e α'') é chamado **semi-plano** aberto.
 Os conjuntos $r \cup \alpha'$ e $r \cup \alpha''$ são semiplanos.
 A reta r é a origem de cada um dos semiplanos.
 α' e α'' são semiplanos opostos.

II. Definições

29. Chama-se **ângulo** à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).



$$A\hat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

O ponto O é o vértice do ângulo.

As semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do ângulo.

30. **Interior** do ângulo $A\hat{O}B$ é a interseção de dois semiplanos abertos, a saber:

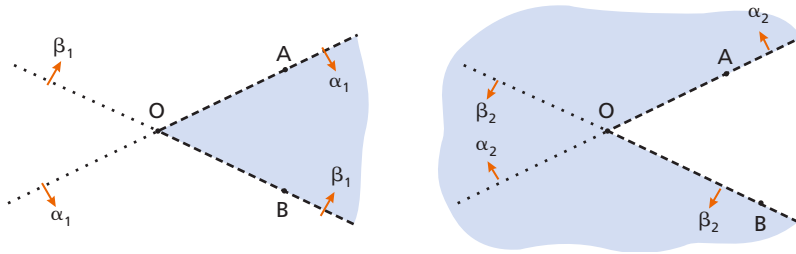
- α_1 , com origem na reta \overleftrightarrow{OA} e que contém o ponto B ;
- β_1 , com origem em \overleftrightarrow{OB} e que contém o ponto A .

$$\text{Interior de } A\hat{O}B = \alpha_1 \cap \beta_1.$$

O interior de um ângulo é convexo.

Os pontos do interior de um ângulo são pontos **internos** ao ângulo.

A reunião de um ângulo com seu interior é um **setor angular** ou **ângulo completo** e também é conhecido por “ângulo convexo”.



31. Exterior do ângulo $\hat{A}OB$ é o conjunto dos pontos que não pertencem nem ao ângulo $\hat{A}OB$ nem ao seu interior.

O exterior de $\hat{A}OB$ é a reunião de dois semiplanos abertos, a saber:

- α_2 , com origem na reta \overleftrightarrow{OA} e que não contém o ponto B (oposto ao α_1);
- β_2 , com origem na reta \overleftrightarrow{OB} e que não contém o ponto A (oposto ao β_1).

Exterior de $\hat{A}OB = \alpha_2 \cup \beta_2$.

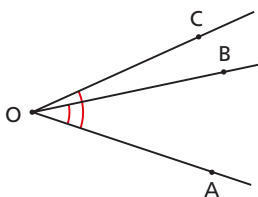
O exterior de um ângulo é côncavo.

Os pontos do exterior de um ângulo são pontos **externos** ao ângulo.

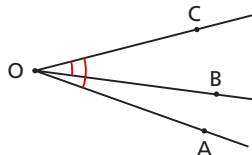
A reunião do ângulo com seu exterior também é conhecida por “ângulo côncavo”.

32. Ângulos consecutivos

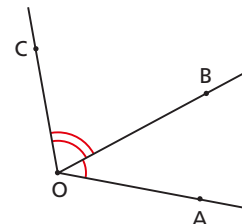
Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles é também lado do outro (um lado de um deles coincide com um lado do outro).



$\hat{A}OB$ e $\hat{A}OC$ são consecutivos
(\overrightarrow{OA} é o lado comum)



$\hat{A}OC$ e $\hat{B}OC$ são consecutivos
(\overrightarrow{OC} é o lado comum)

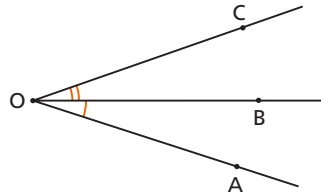


$\hat{A}OB$ e $\hat{B}OC$ são consecutivos
(\overrightarrow{OB} é o lado comum)

33. Ângulos adjacentes

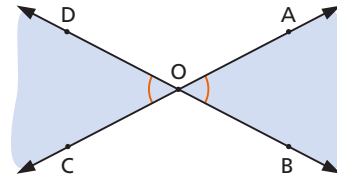
Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não têm pontos internos comuns.

$\hat{A}OB$ e $\hat{B}OC$ são ângulos adjacentes.



34. Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.



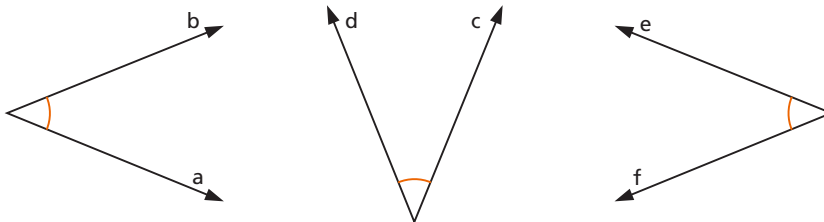
$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} \text{ e } \vec{OC} \text{ opostas} \\ \vec{OB} \text{ e } \vec{OD} \text{ opostas} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}OB \text{ e } \hat{C}OD \text{ são opostos pelo vértice.}$

Notemos que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

III. Congruência e comparação

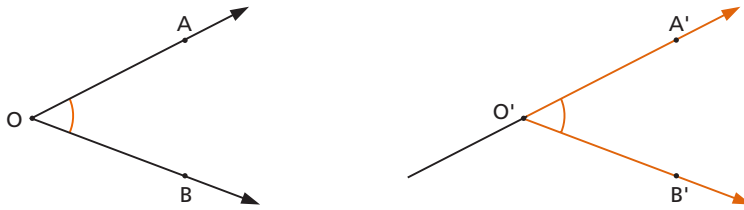
35. A **congruência** (símbolo \equiv) entre ângulos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

- 1º) Reflexiva. Todo ângulo é congruente a si mesmo: $\hat{a}b \equiv \hat{a}b$.
- 2º) Simétrica. Se $\hat{a}b \equiv \hat{c}d$, então $\hat{c}d \equiv \hat{a}b$.
- 3º) Transitiva. Se $\hat{a}b \equiv \hat{c}d$ e $\hat{c}d \equiv \hat{e}f$, então $\hat{a}b \equiv \hat{e}f$.



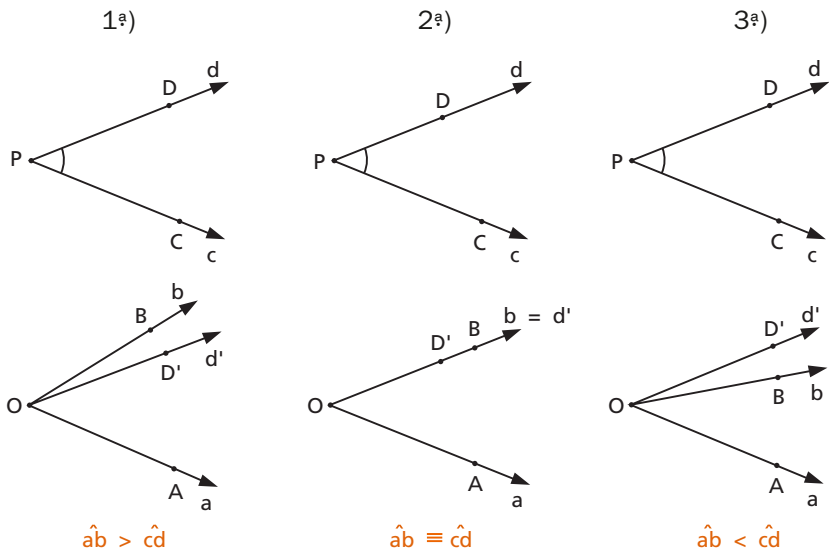
4º) **Postulado do transporte de ângulos**

Dados um ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, e num dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $\widehat{A'O'B'}$ congruente ao ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$.



36. Comparação de ângulos

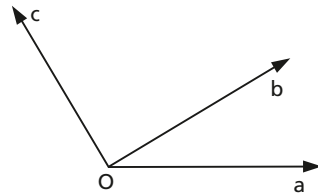
Dados dois ângulos, $\widehat{A\hat{O}B}$ (ou $\widehat{a\hat{O}b}$ ou \widehat{ab}) e $\widehat{C\hat{P}D}$ (ou $\widehat{c\hat{P}d}$ ou \widehat{cd}), pelo postulado do transporte podemos obter, no semiplano que tem origem em \overrightarrow{OA} e contém B, uma semirreta $\overrightarrow{OD'}$ ($\widehat{Od'}$ ou $\widehat{d'}$) tal que $\widehat{ad'} \equiv \widehat{cd}$. Temos três hipóteses a considerar:



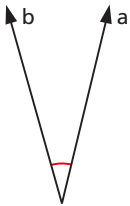
- 1ª) A semirreta d' é interna a $\hat{a}b$ (d' tem pontos internos a $\hat{a}b$). Neste caso, dizemos que $\hat{a}b$ é maior que $\hat{c}d$ ($\hat{a}b > \hat{c}d$).
- 2ª) A semirreta d' coincide com b ($\vec{OD}' = \vec{OB}$). Neste caso, $\hat{a}b$ é congruente a $\hat{c}d$ ($\hat{a}b \equiv \hat{c}d$).
- 3ª) A semirreta d' é externa a $\hat{a}b$. Neste caso, dizemos que $\hat{a}b$ é menor que $\hat{c}d$ ($\hat{a}b < \hat{c}d$).

37. Adição de ângulos

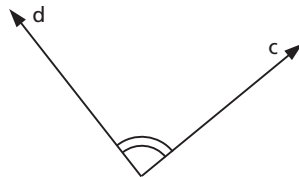
Se a semirreta \vec{Ob} é interna ao ângulo $a\hat{O}c$, o ângulo $a\hat{O}c$ é soma dos ângulos $a\hat{O}b$ e $b\hat{O}c$.
 $\hat{a}c = \hat{a}b + \hat{b}c$



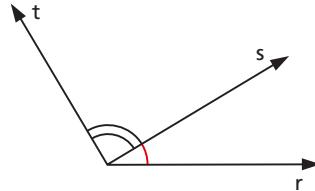
Dados dois ângulos, $\hat{a}b$ e $\hat{c}d$, se existem $\hat{r}s \equiv \hat{a}b$ e $\hat{st} \equiv \hat{c}d$ tais que s é interna a $\hat{r}t$, dizemos que o ângulo $\hat{r}t$ é a **soma** de $\hat{a}b$ e $\hat{c}d$.



$$\hat{r}t = \hat{a}b + \hat{c}d$$

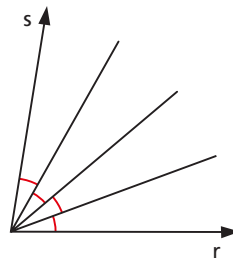
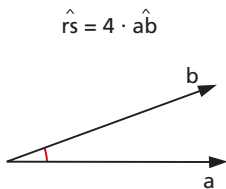


$$\hat{r}t = \hat{r}s + \hat{st}$$



O ângulo $\hat{r}s$ que é soma de n ângulos $\hat{a}b$, se existir, é chamado **múltiplo** de $\hat{a}b$ segundo n ($\hat{r}s = n \cdot \hat{a}b$).

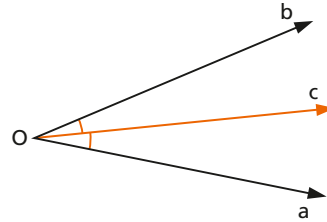
Se $\hat{a}b = n \cdot \hat{c}d$, dizemos que $\hat{c}d$ é **submúltiplo** de $\hat{a}b$ segundo n .



38. Bissetriz de um ângulo

Definição

Uma semirreta Oc interna a um ângulo $a\hat{O}b$ é **bissetriz** do ângulo $a\hat{O}b$ se, e somente se, $a\hat{O}c \equiv b\hat{O}c$.

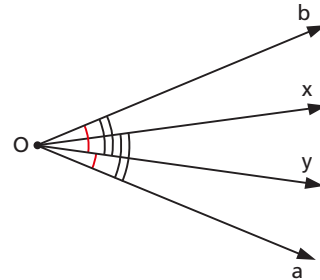
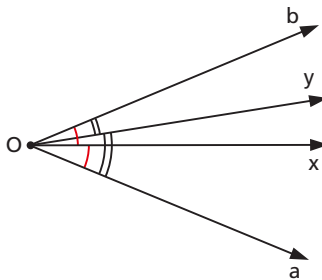


A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

Unicidade da bissetriz

Se Ox e Oy distintas ($Ox \neq Oy$) fossem bissetrizes de $a\hat{O}b$, teríamos:

$$a\hat{O}x \equiv b\hat{O}x \quad (1) \quad \text{e} \quad a\hat{O}y \equiv b\hat{O}y \quad (2)$$



$$\left. \begin{array}{l} Ox \text{ interna a } a\hat{O}y \Rightarrow \hat{a}y > \hat{a}x \\ \text{e} \\ Oy \text{ interna a } x\hat{O}b \Rightarrow \hat{x}b > \hat{y}b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{a}y > \hat{a}x \equiv \hat{x}b > \hat{y}b \\ \text{o que é absurdo, de acordo com (2)} \end{array}$$

ou

$$\left. \begin{array}{l} Oy \text{ interna a } a\hat{O}x \Rightarrow \hat{a}x > \hat{a}y \\ \text{e} \\ Ox \text{ interna a } y\hat{O}b \Rightarrow \hat{y}b > \hat{x}b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{a}x > \hat{a}y \equiv \hat{y}b > \hat{x}b \\ \text{o que é absurdo, de acordo com (1)} \end{array}$$

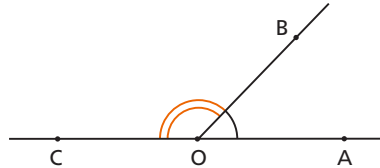
Logo, a bissetriz de um ângulo é única.

A “existência” da bissetriz está provada no item 57.

IV. Ângulo reto, agudo, obtuso — Medida

39. Ângulo suplementar adjacente

Dado o ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, a semirreta \vec{OC} oposta à semirreta \vec{OA} e a semirreta \vec{OB} determinam um ângulo $\widehat{B\hat{O}C}$ que se chama **ângulo suplementar adjacente** ou **suplemento adjacente** de $\widehat{A\hat{O}B}$.

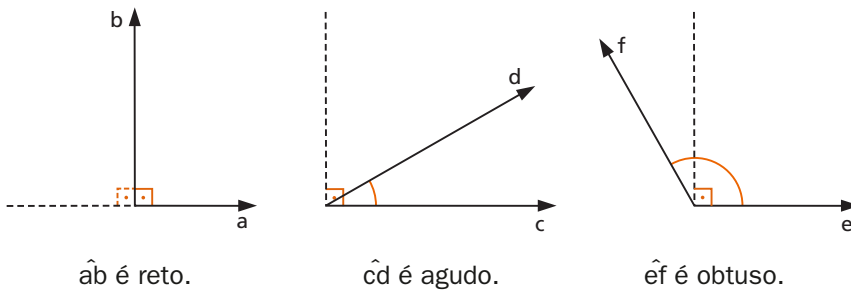


40. Ângulos: reto, agudo, obtuso

Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.

Ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.



41. Medida de um ângulo — amplitude

A medida de um ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ será indicada por $m(\widehat{A\hat{O}B})$.

A medida de um ângulo é um número real positivo associado ao ângulo de forma tal que:

1º) Ângulos **congruentes** têm medidas iguais e, reciprocamente, ângulos que têm medidas iguais são **congruentes**.

$$\widehat{A\hat{O}B} \equiv \widehat{C\hat{P}D} \Leftrightarrow m(\widehat{A\hat{O}B}) = m(\widehat{C\hat{P}D})$$

2º) Se um ângulo é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$\widehat{A\hat{O}B} > \widehat{C\hat{P}D} \Leftrightarrow m(\widehat{A\hat{O}B}) > m(\widehat{C\hat{P}D})$$

3º) A um **ângulo soma** está associada uma medida que é a soma das medidas dos ângulos parcelas.

$$\hat{r}\hat{t} \equiv \hat{a}\hat{b} + \hat{c}\hat{d} \Rightarrow m(\hat{r}\hat{t}) = m(\hat{a}\hat{b}) + m(\hat{c}\hat{d})$$

À medida de um ângulo dá-se o nome de **amplitude** do ângulo.

Em geral, associa-se um número a um ângulo estabelecendo a razão (quociente) entre este ângulo e outro ângulo tomado como unidade.

42. Unidades de medida de ângulos

Ângulo de um grau (1°) é o ângulo submúltiplo segundo 90 (noventa) de um ângulo reto.

$$\text{ângulo de um grau} = \frac{\text{ângulo reto}}{90}$$

Um ângulo reto tem 90 graus (90°).

A medida de um ângulo agudo é menor que 90° (um ângulo agudo tem menos de 90°).

A medida de um ângulo obtuso é maior que 90° (um ângulo obtuso tem mais de 90°).

A medida α de um ângulo é tal que:

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ$$

Ângulo de um minuto ($1'$) é o ângulo submúltiplo segundo 60 (sessenta) do ângulo de um grau.

$$1' = \frac{1^\circ}{60}$$

Um grau tem 60 minutos ($60'$).

Ângulo de um segundo ($1''$) é o ângulo submúltiplo segundo 60 (sessenta) do ângulo de um minuto.

$$1'' = \frac{1'}{60}$$

Um minuto tem 60 segundos ($60''$).

Ângulo de um grado (1 gr) é o ângulo submúltiplo segundo 100 (cem) de um ângulo reto.

$$\text{ângulo de um grado} = \frac{\text{ângulo reto}}{100}$$

Dos submúltiplos do grado, dois se destacam:

- o centígrado ($0,01 \text{ gr}$), também chamado minuto de grado;
- o decimígrado ($0,0001 \text{ gr}$), também chamado segundo de grado.

43. Ângulos complementares e ângulos suplementares

Dois ângulos são **complementares** se, e somente se, a soma de suas medidas é 90° . Um deles é o complemento do outro.

Dois ângulos são **suplementares** se, e somente se, a soma de suas medidas é 180° . Um deles é o suplemento do outro.

44. Ângulo nulo e ângulo raso

Pode-se estender o conceito de ângulo para se ter o **ângulo nulo** (cujos lados são coincidentes) ou o **ângulo raso** (cujos lados são semirretas opostas).

Então, a medida α de um ângulo é tal que

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

EXERCÍCIOS

29. Simplifique as seguintes medidas:

a) $30^\circ 70'$

d) $110^\circ 58' 300''$

b) $45^\circ 150'$

e) $30^\circ 56' 240''$

c) $65^\circ 39' 123''$

30. Determine as somas:

a) $30^\circ 40' + 15^\circ 35'$

b) $10^\circ 30' 45'' + 15^\circ 29' 20''$

31. Determine as diferenças:

a) $20^\circ 50' 45'' - 5^\circ 45' 30''$

c) $90^\circ 15' 20'' - 45^\circ 30' 50''$

b) $31^\circ 40' - 20^\circ 45'$

d) $90^\circ - 50^\circ 30' 45''$

32. Determine os produtos:

a) $2 \times (10^\circ 35' 45'')$

b) $5 \times (6^\circ 15' 30'')$

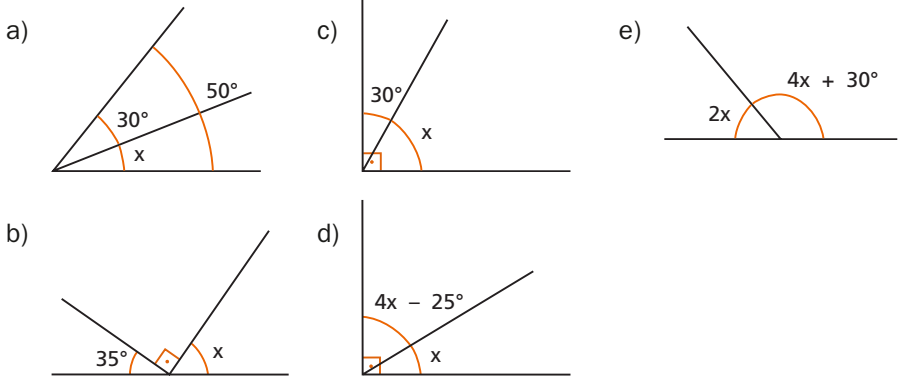
33. Determine as divisões:

a) $(46^\circ 48' 54'') : 2$

c) $(52^\circ 63' 42'') : 5$

b) $(31^\circ 32' 45'') : 3$

34. Determine o valor de x nos casos:



35. Oa e Ob são duas semirretas colineares opostas. Oc é uma semirreta qualquer. Os ângulos $a\hat{O}c$ e $c\hat{O}b$ são adjacentes? São suplementares?

36. Demonstre as proposições a seguir.

Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.

Dois ângulos o.p.v. são congruentes.

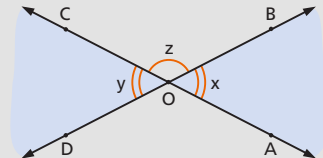
Solução

$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são o.p.v. $\Rightarrow A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$

 Hipótese Tese

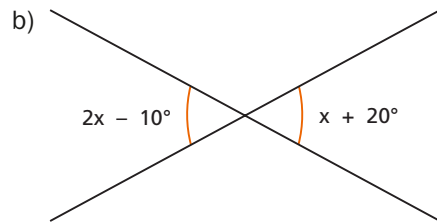
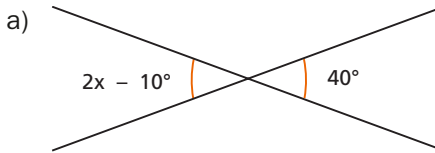
Demonstração:

Considerando $A\hat{O}B$ de medida x e $C\hat{O}D$ de medida y opostos pelo vértice e o ângulo $B\hat{O}C$ de medida z , temos:

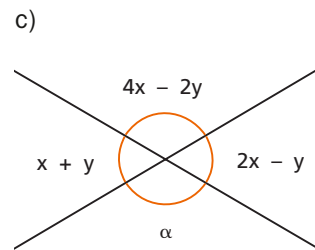
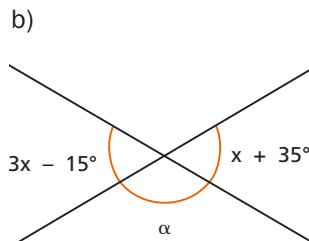
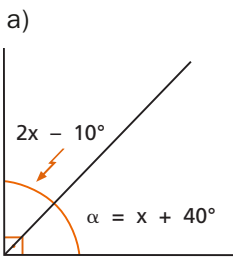


$$\left. \begin{array}{l} x + z = 180^\circ \\ y + z = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$$

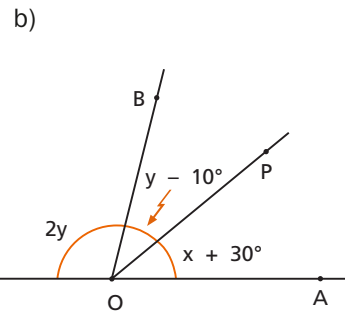
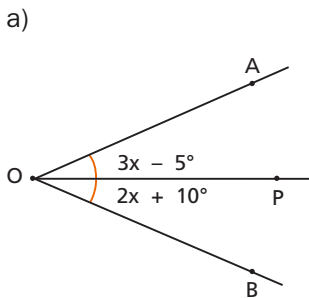
37. Determine o valor de x nos casos:



38. Determine o valor de α nos casos:



39. Se \vec{OP} é bissetriz de $\hat{A}OB$, determine x nos casos:



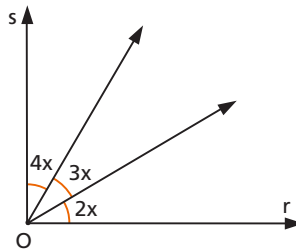
40. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

- Dois ângulos consecutivos são adjacentes.
- Dois ângulos adjacentes são consecutivos.
- Dois ângulos adjacentes são opostos pelo vértice.
- Dois ângulos opostos pelo vértice são adjacentes.
- Dois ângulos opostos pelo vértice são consecutivos.

- 41.** Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
- Dois ângulos suplementares são adjacentes.
 - Dois ângulos complementares são adjacentes.
 - Dois ângulos adjacentes são complementares.
 - Os ângulos de medida 10° , 20° e 60° são complementares.
 - Os ângulos de medida 30° , 60° e 90° são suplementares.
- 42.** Os ângulos das figuras a seguir são complementares? São adjacentes?



- 43.** Calcule o valor de x no caso abaixo, em que $m(\widehat{rOs}) = 90^\circ$.



- 44.** A soma de dois ângulos adjacentes é 120° . Calcule a medida de cada ângulo, sabendo que a medida de um deles é a diferença entre o triplo do outro e 40° .
- 45.** Calcule o complemento dos seguintes ângulos:
- 25°
 - 47°
 - $37^\circ 25'$
- 46.** Calcule o suplemento dos seguintes ângulos:
- 72°
 - 141°
 - $93^\circ 15'$
- 47.** Dado um ângulo de medida x , indique:
- seu complemento;
 - seu suplemento;
 - o dobro do seu complemento;
 - a metade de seu suplemento;
 - o triplo de seu suplemento;
 - a sétima parte do complemento;
 - a quinta parte do suplemento;
 - o complemento da sua terça parte;
 - o triplo do suplemento da sua quinta parte.

- 60.** O suplemento do complemento de um ângulo excede a terça parte do complemento do dobro desse ângulo em 85° . Determine o ângulo.
- 61.** Dois ângulos são suplementares e a razão entre o complemento de um e o suplemento do outro, nessa ordem, é $\frac{1}{8}$. Determine esses ângulos.

Solução

x e y são as medidas dos ângulos.

complemento de um: $90^\circ - x$ suplemento do outro: $180^\circ - y$

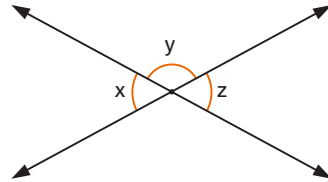
$$\begin{cases} x + y = 180^\circ \\ \frac{90^\circ - x}{180^\circ - y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 180^\circ - x \\ 720^\circ - 8x = 180^\circ - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 80^\circ \\ y = 100^\circ \end{cases}$$

Resposta: Os ângulos medem 80° e 100° .

- 62.** Dois ângulos estão na relação $\frac{4}{9}$. Sendo 130° sua soma, determine o complemento do menor.
- 63.** Determine dois ângulos suplementares, sabendo que um deles é o triplo do outro.
- 64.** Dois ângulos são suplementares. Um deles é o complemento da quarta parte do outro. Calcule esses ângulos.
- 65.** A razão entre dois ângulos suplementares é igual a $\frac{2}{7}$. Determine o complemento do menor.
- 66.** Determine o complemento de um ângulo, sabendo que a razão entre o ângulo e seu complemento é igual a $\frac{5}{4}$.
- 67.** O complemento de um ângulo está para o seu suplemento como 2 para 7. Calcule a medida do ângulo.
- 68.** O triplo do complemento de um ângulo, aumentado em 50° , é igual ao suplemento do ângulo. Determine a medida do ângulo.
- 69.** Determine as medidas de dois ângulos suplementares, sabendo que o dobro de um deles, somando com a sétima parte do outro, resulta 100° .
- 70.** A soma de um ângulo com a terça parte do seu complemento resulta 46° . Determine o suplemento desse ângulo.

71. Determine dois ângulos complementares tais que o dobro de um, aumentado da terça parte do outro, seja igual a um ângulo reto.

72. Na figura, o ângulo x mede a sexta parte do ângulo y , mais a metade do ângulo z . Calcule o ângulo y .



73. Os ângulos α e β são opostos pelo vértice. O primeiro é expresso em graus por $9x - 2$ e o segundo por $4x + 8$. Determine esses ângulos.

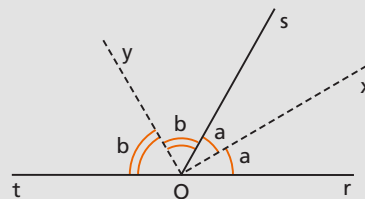
74. Cinco semirretas partem de um mesmo ponto V , formando cinco ângulos que cobrem todo o plano e são proporcionais aos números 2, 3, 4, 5 e 6. Calcule o maior dos ângulos.

75. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.

76. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares formam ângulo reto.

Solução

<p>Hipótese</p> <p>$r\hat{O}s$ e $s\hat{O}t$ adjacentes e suplementares</p> <p>Ox e Oy respectivas bissetrizes</p>	}	<p>$\Rightarrow x\hat{O}y$ é reto</p>
--	---	--



Demonstração:

Sejam a a medida de $r\hat{O}x$ e $x\hat{O}s$ e b a medida de $s\hat{O}y$ e $y\hat{O}t$.

$$a + a + b + b = 180^\circ \Rightarrow 2a + 2b = 180^\circ \Rightarrow a + b = 90^\circ \Rightarrow x\hat{O}y \text{ é reto.}$$

77. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e complementares formam um ângulo de 45° .

78. Dois ângulos adjacentes somam 136° . Qual a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes?

79. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de 52° . Se um deles mede 40° , qual é a medida do outro?