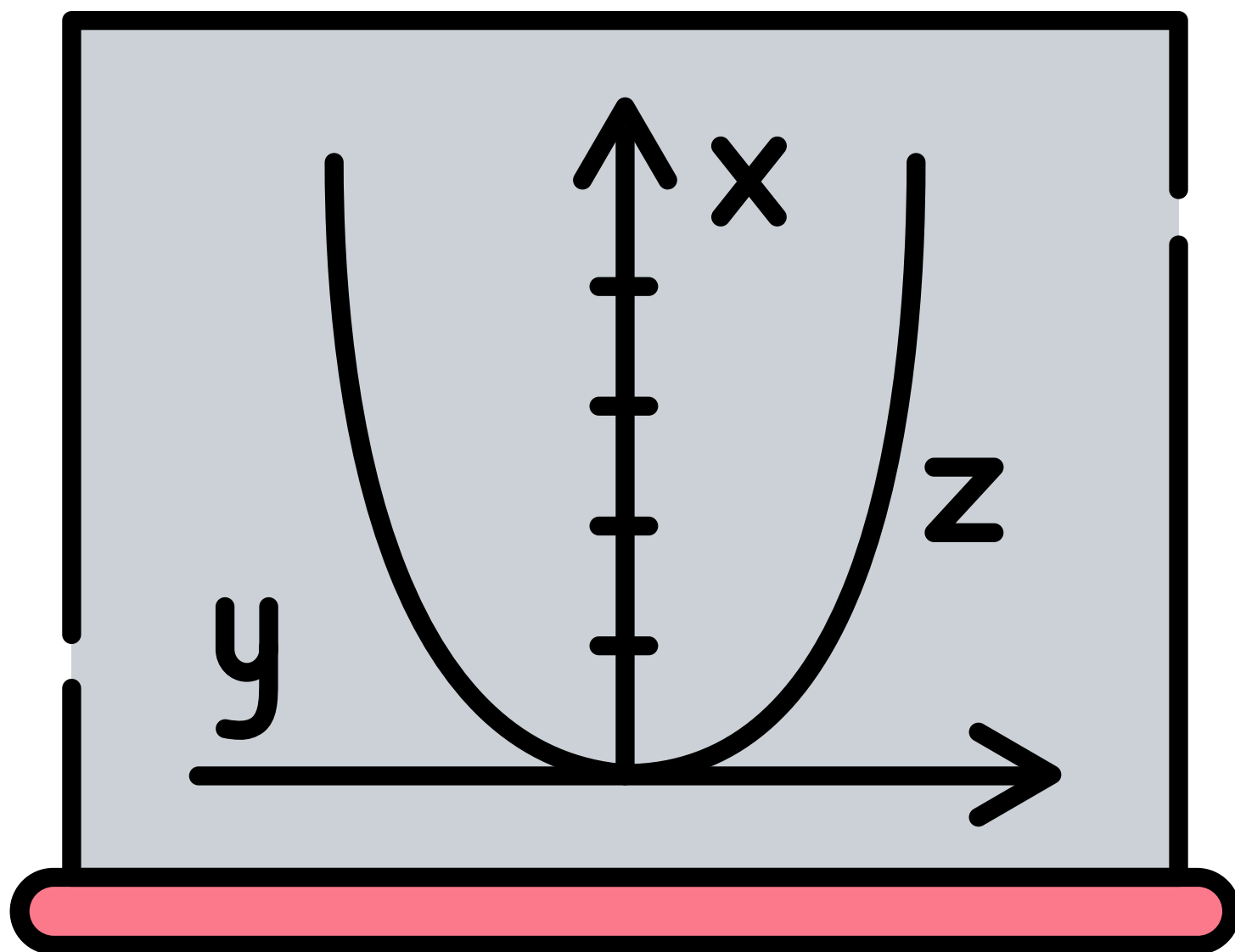


1º Ano



JORGE OLIVEIRA

Copyright © 2021 de Jorge Oliveira

Todos os direitos reservados.

Este e-book ou qualquer parte dele não pode ser reproduzido ou usado sem autorização expressa, por escrito, do autor ou editor, exceto pelo uso de citações em uma resenha ou trabalho acadêmico.

Sobre o Autor.

Professor de matemática, atuando em diversos níveis educacionais, além de cursos preparatórios diversos. Especialista em modelagem matemática.

<https://linktr.ee/SuperAulas>



Sumário

CONJUNTOS

Conjuntos numéricos

Intervalos reais

Coordenadas Cartesianas e Produto Cartesiano

FUNÇÕES

Definição de função

Domínio, contradomínio e imagem

Gráficos de funções

Crescimento e decrescimento de funções

Tipos de funções

FUNÇÃO AFIM

Definição e gráficos de função afim

Zero da função afim

Análise do gráfico da função afim

Inequações produto e quociente

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição e gráficos de função quadrática

Raízes ou zeros da função quadrática

Estudo da parábola

Inequações quadráticas

FUNÇÃO MODULAR

Definição e gráficos de função modular

Equações modulares

Inequações modulares

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição e gráficos de função exponencial

Equação exponencial

Inequação exponencial

FUNÇÃO LOGARITMICA

Definição e Propriedades

Gráficos de função logarítmica

Equações logarítmicas

Inequações logarítmicas

FUNÇÃO COMPOSTA

Composição entre funções

FUNÇÃO INVERSA

Definição e condição de existência

Determinação da função inversa

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PA)
PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS (PG)

ESTATÍSTICA

População e Amostra
Tipos de Gráficos
Medidas de Tendência Central

TRIGONOMETRIA

Relações Métricas
Relações Trigonométricas

$\cup$ união
 $\cap$ interseção
 $\in$ pertence
 $\notin$ não pertence
 $\#$ cardinalidade

$\emptyset$ vazio
 $\exists$ existe
 $\nexists$ não existe
 $\forall$ para todo
 $\therefore$ portanto

Símbolos Matemáticos

$\supset$ contém
 $\not\supset$ não contém
 $\Leftrightarrow$ se e somente se
 $\rightarrow$ se ... então (implica)

$\nmid$ não divide
 $\mid$ divide
 $\subset$ está contido
 $\not\subset$ não está contido

Conjunto é um conceito primitivo, uma coleção de objetos, sendo esses objetos reais ou abstratos, e esses são chamados de elementos do conjunto.

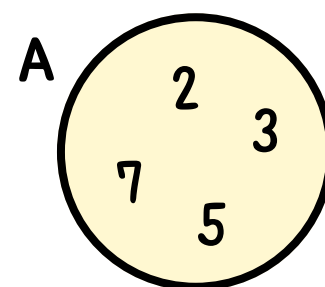
Dois conjuntos são iguais quando todo elemento de um é também elemento do outro. Um conjunto sem elementos, é chamado de **vazio**, simbolizado por $\emptyset$ ou $\{ \}$.

Exemplo: Conjunto dos números primos menores que 9:

$A = \{x | x \in \mathbb{N}, \text{ é primo menor que } 9\}$

$A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$

Representação
por extensão



Digrama de
Venn-Euler

Conjuntos

Se x é um elemento de um conjunto A , dizemos que x **pertence** a A ou $x \in A$. Caso x não seja um elemento do conjunto A , dizemos que ele **não pertence** a A ou $x \notin A$.

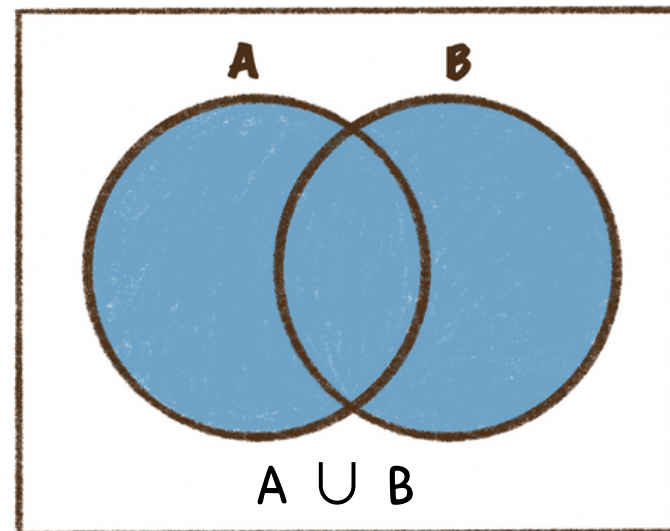
Um conjunto é **finito** se é vazio ou se é possível se contar os elementos desse conjunto. Conjuntos que não são finitos são ditos infinitos.

Conjuntos

União ($\cup$)

Dados dois conjuntos A e B, a união é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

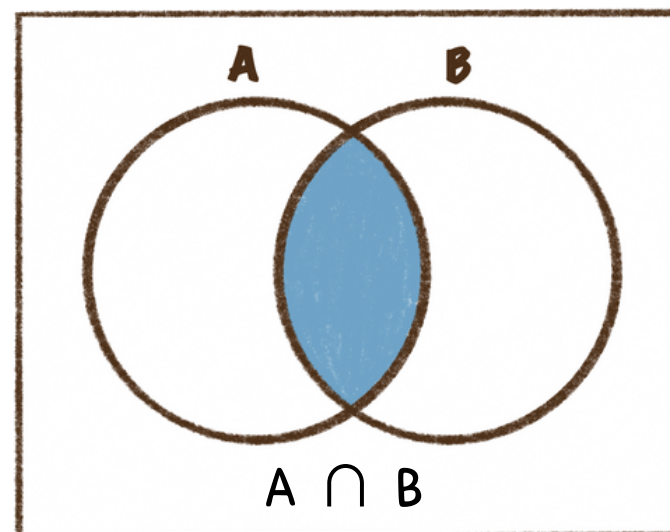
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



intersecção ($\cap$)

Dados dois conjuntos A e B, a intersecção é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B, simultaneamente.

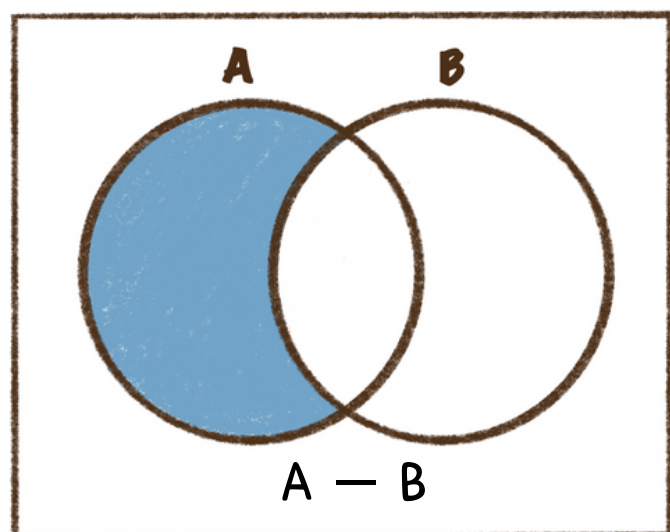
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Diferença ($-$)

A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos A que não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



IMPORTANTE

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

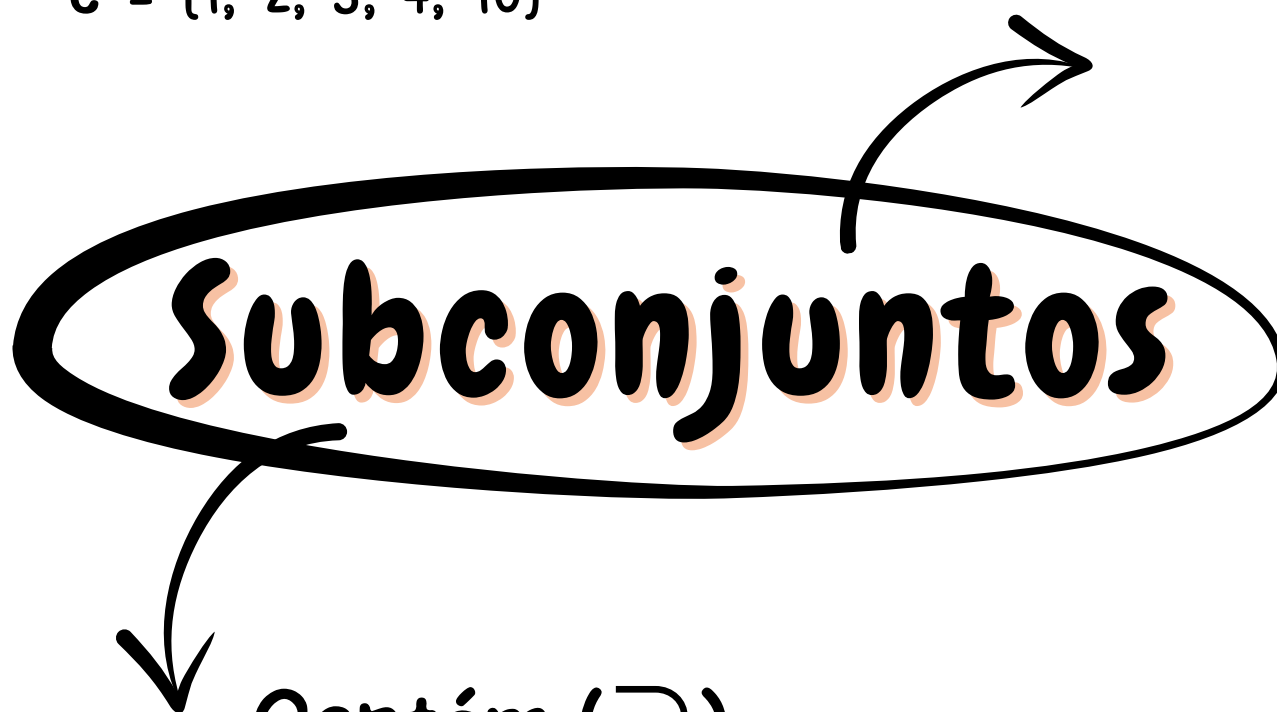
Definição

Um conjunto A é subconjunto de B , se todo elemento de A for também elemento de B .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 10\}$$



Contém ($\supset$)

Se $B \subset A$ podemos dizer que $A \supset B$ ("A contém B"). De modo análogo, se $B \not\subset A$ podemos dizer que $A \not\supset B$ ("A não contém B").

Dados A , B e C acima temos:

$$A \supset B$$

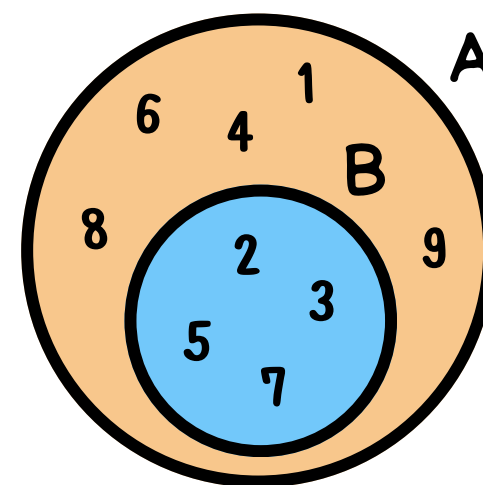
$$A \not\supset C$$

$$B \subset A$$

$$C \not\subset A$$

Está Contido ($\subset$)

A notação $B \subset A$, indica que B está contido em A ou que B é subconjunto de A . De modo análogo, a notação $C \not\subset A$, indica que C não está contido em A .



B é subconjunto de A

Importante

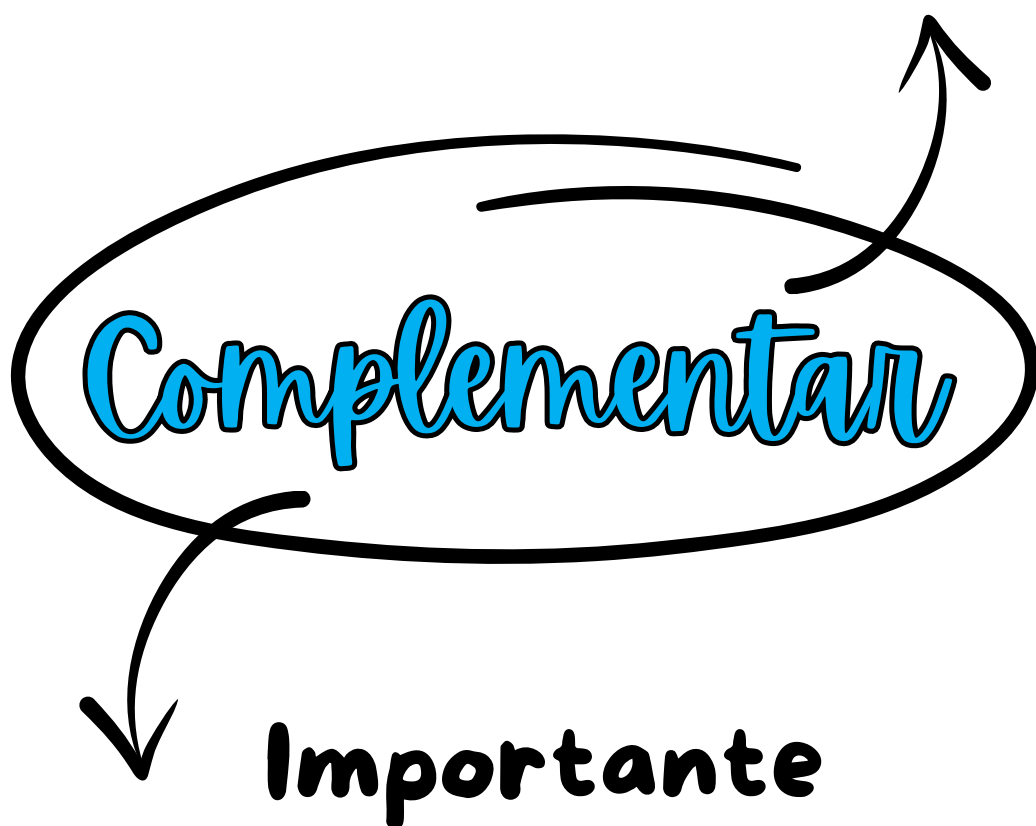
(1) Vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

$$\emptyset \subset A, \forall A$$

(2) Se A possuir n elementos, então o número N de subconjuntos de A será $N = 2^n$.

O que é?

Dados dois conjuntos A e B , tais que $B \subset A$, chamamos o conjunto $A - B$, de complementar de B em relação a A , ou seja o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B .

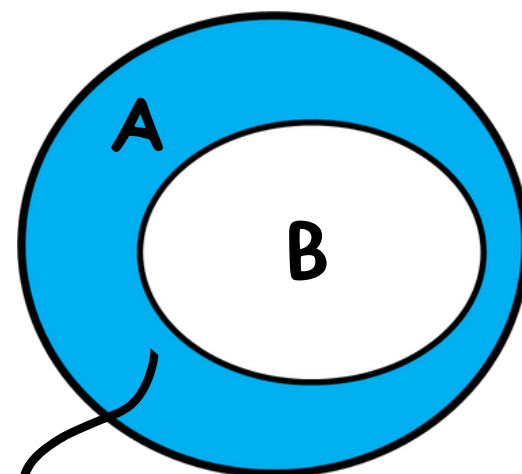


(1) Se $A = B$, $C_A^B = C_B^A = \emptyset$.

(2) $\bar{A} = A^c$ é o complementar de A em relação ao universo (U):

$$\bar{A} = A^c = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

Simbolicamente



$$C_A^B = A - B$$

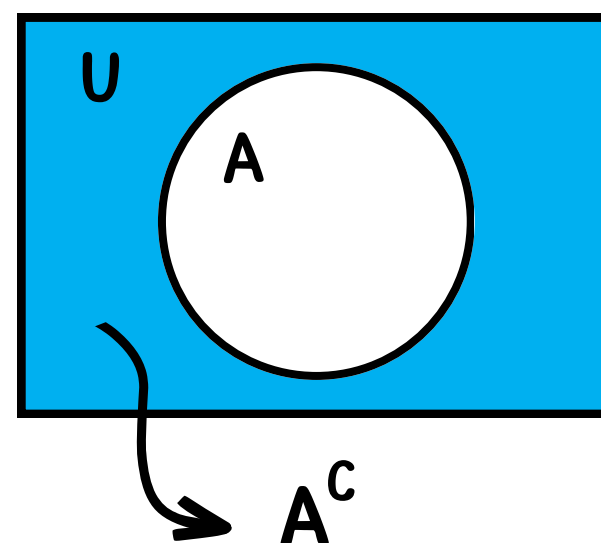
Exemplo:

(1) Dados os conjuntos:

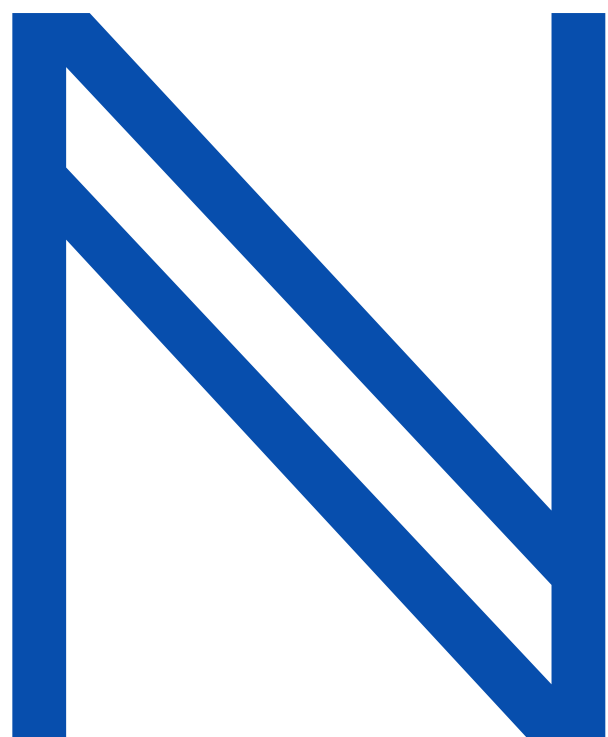
$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{c, d, e\}$$

$$C_A^B = A - B = \{a, b\}$$



Para qualquer número natural, há outro número natural que é maior que o anterior.



NATURAIS

O conjunto de números naturais é fechado na adição e multiplicação.

é o conjunto formado pelos elementos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

Naturais não nulos

Adição

para a e b naturais tem-se:

$$(a + b) \in \mathbb{N}$$

$$a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \in \mathbb{N}$$

$$a + 0 = a$$

Multiplicação

para a e b naturais tem-se:

$$(a \times b) \in \mathbb{N}$$

$$a \times b = b \times a$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \in \mathbb{N}$$

$$a \times 1 = a$$

O conjunto de números inteiros é fechado na adição, subtração e multiplicação.



INTEIROS

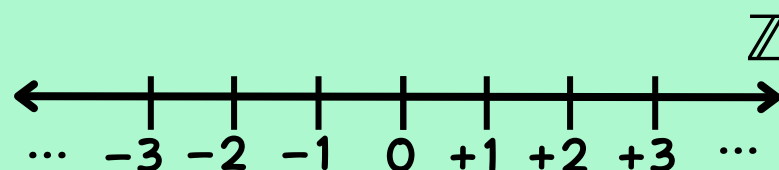
O **módulo** ($| |$) ou **valor absoluto** de um número é o valor desse número sem considerar seu sinal.

é o conjunto formado pelos números naturais com seus respectivos opostos (negativos).

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

Reta Numérica



Dois inteiros são simétricos, quando eles têm o mesmo algarismo e sinais opostos.

Subconjuntos

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$$

Importante

$$\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = 0$$

Soma/Subtrção

Sinais iguais:

some e conserve o sinal.

Sinais diferentes:

subtraia e dê ao resultado o sinal do número maior (módulo).

Potenciação

a) $(-)^{\text{par}} = +$

b) $(-)^{\text{ímpar}} = -$

c) $(+)^n = +$

d) $(-x)^{\text{par}} \neq -x^{\text{par}}$
 $x \neq 0$

Regras de Sinais

importante

$$\begin{aligned} -(-a) &= (-1) \cdot (-a) \\ -(-a) &= +a \end{aligned}$$

importante

$$(0)^{\text{não nulo}} = 0$$

Divisão/Multiplicação

Sinais iguais
resultado $+$

Sinais diferentes
resultado $-$

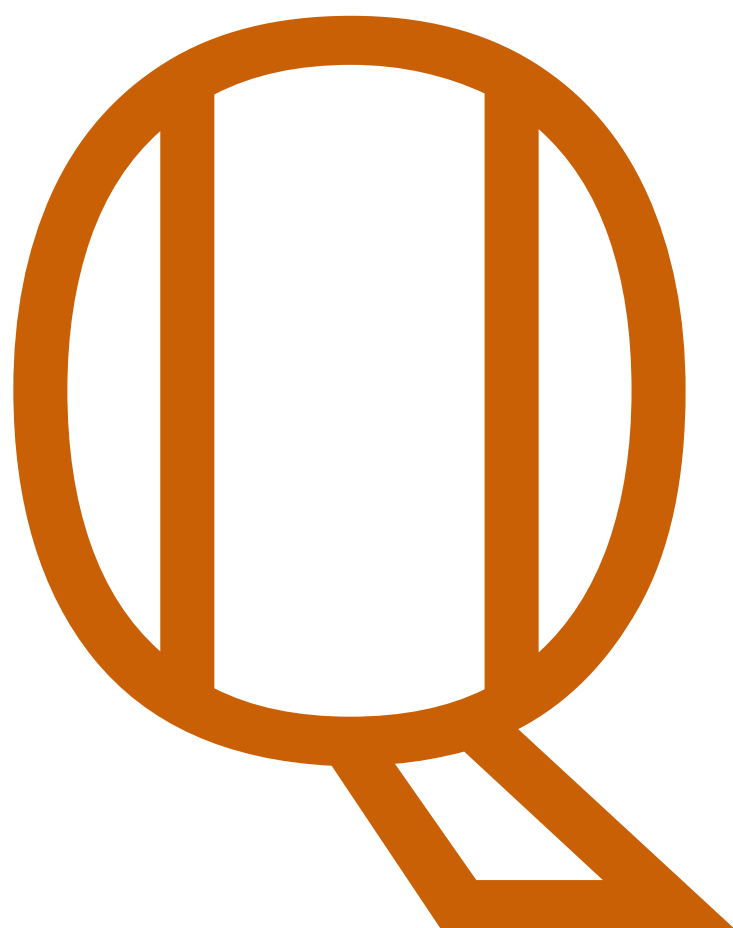
Radiciação

$$\text{ímpar} \sqrt{(-)} = -$$

$$\text{par} \sqrt{(+)} = +$$

$$\text{par} \sqrt{(-)} = \text{número complexo}$$

O conjunto dos números racionais é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero)...



RACIONAIS

... os decimais exatos, as dízimas periódicas e os inteiros, são todos números racionais.

É todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$ de dois números inteiros, um numerador a e um denominador não nulo b .

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Subconjuntos

- $\mathbb{Q}^*$: Racionais não nulos
- $\mathbb{Q}_+$: Racionais não negativos
- $\mathbb{Q}_-$: Racionais não positivos

Tipos de fração

Fração própria $\frac{a}{b}$ ($a < b$)

Fração imprópria $\frac{a}{b}$ ($a > b$)

Fração aparente $\frac{a}{b}$ ($a = n \cdot b$)
 n inteiro

O conjunto dos números irracionais não é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

I

IRRACIONAIS

Pitágoras (580–500 a.C) já sabia que não existia um número racional x com a propriedade que:

$$x^2 = 2$$

É o conjunto formado por números ditos irracionais. Dizemos que um número é irracional quando ele não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros. Eles são números reais mas não racionais.

Exemplos

$$\sqrt{2} = 1,414213\dots$$

$$e = 2,71828182845\dots$$

$$\pi = 3,14159265\dots$$

$$\sqrt{5} = 2,236067977\dots$$

Atenção

Se $a \in \mathbb{I}$ e $r \in \mathbb{Q}$, então, os números abaixo são irracionais:

$$1) -a \in \mathbb{I}$$

$$3) (a - r) \in \mathbb{I}$$

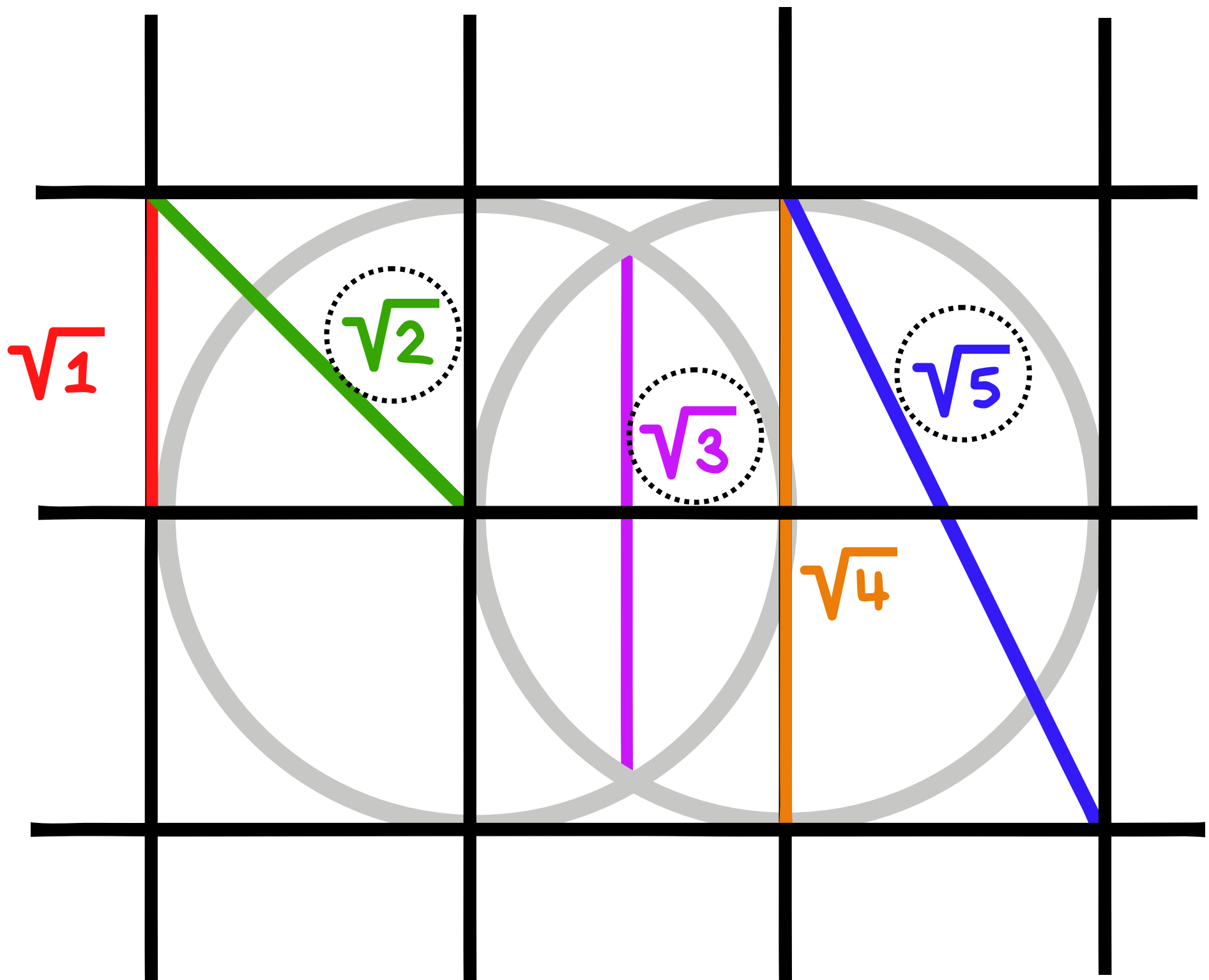
$$2) a^{-1} \in \mathbb{I}$$

$$4) (a + r) \in \mathbb{I}$$

$$3) (a + r) \in \mathbb{I}$$

$$5) (a \div r) \in \mathbb{I}$$
$$r \neq 0$$

ALGUNS IRRACIONAIS



O conjunto dos números reais é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

R

REAIS

Os reais representam a ideia do contínuo, podendo representar comprimentos de segmentos de reta. Assim, este conjunto pode ser representado na reta real.

O conjunto dos números reais resulta da união de dois outros conjuntos numéricos, os racionais e os irracionais, ou seja:

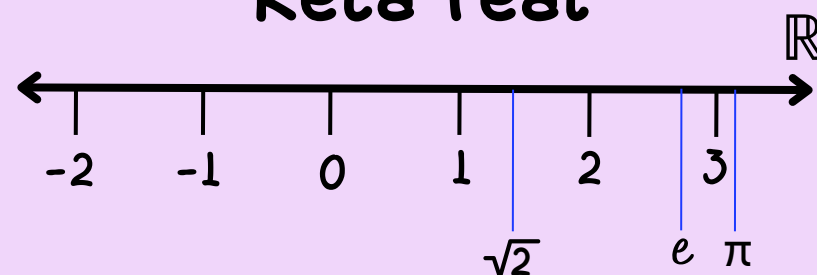
$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$$

Relação de inclusão

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- (1) Todo natural é inteiro;
- (2) Todo inteiro é racional;
- (3) Todo racional é real.

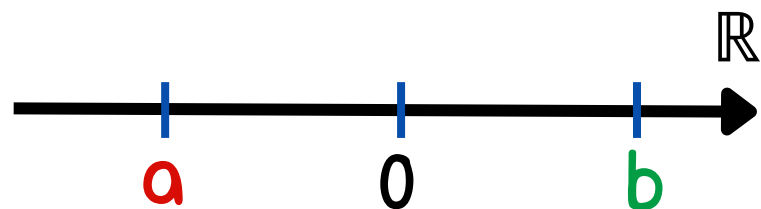
Reta real



Os reais representam o conjunto de todas as abscissas dos pontos numa reta numérica.

REPRESENTAÇÃO EM $\mathbb{R}$

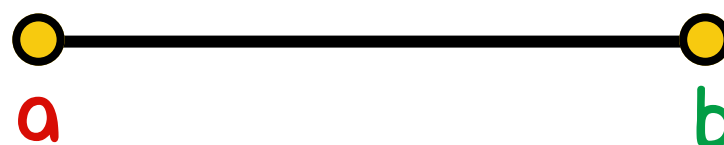
Qualquer número real pode ser representado como um ponto da reta real ($\mathbb{R}$).



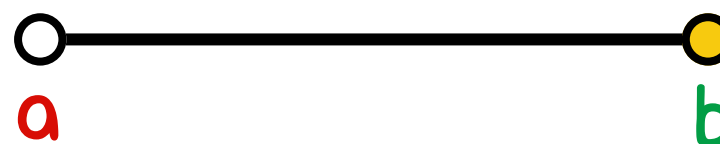
neste caso temos:

$$a < 0 \text{ e } b > 0$$

1º caso: $[a ; b]$



2º caso: $]a ; b]$



Intervalos Reais

3º caso: $]a ; b[$



4º caso: $]-\infty ; b]$



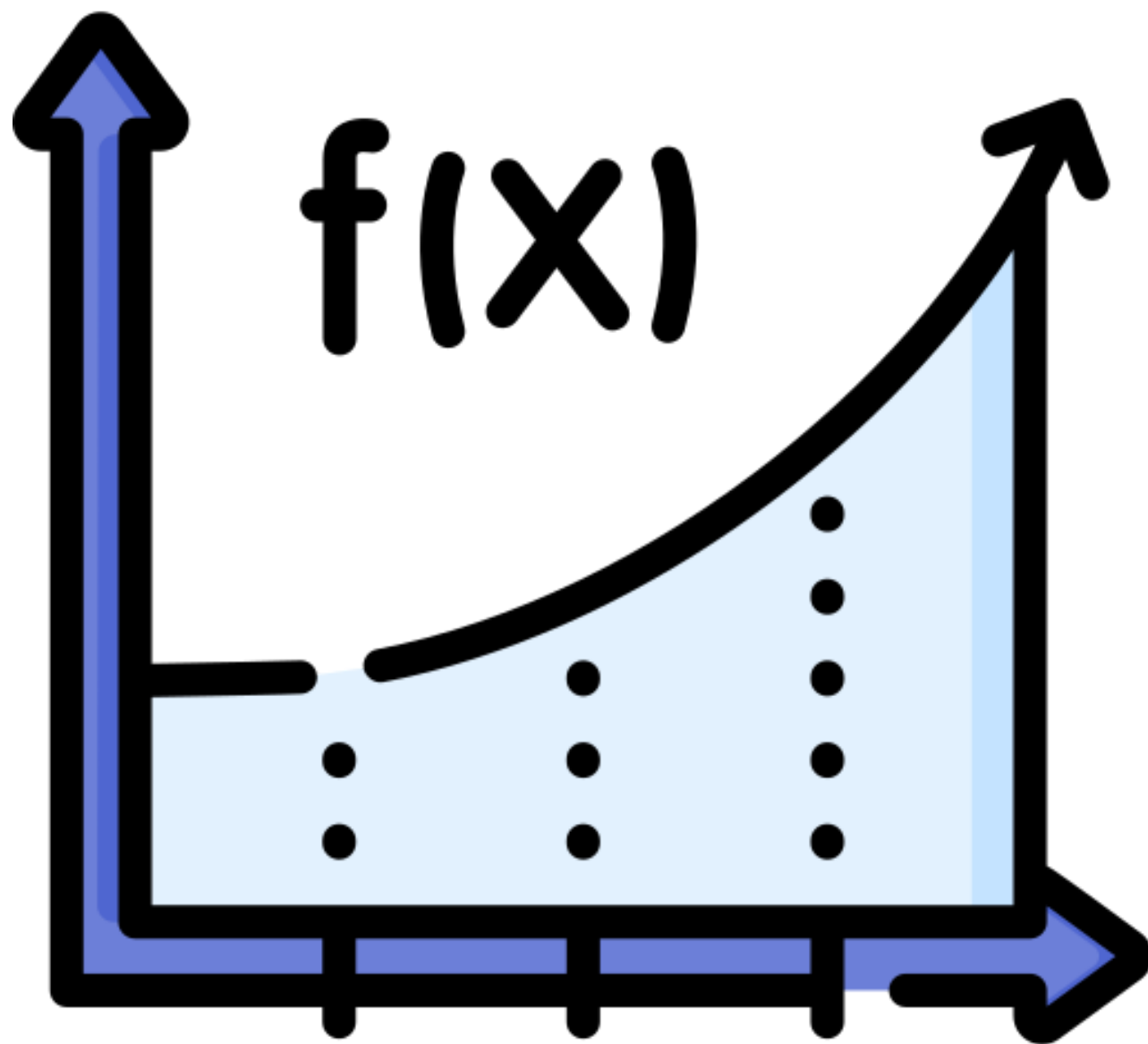
5º caso: $[a ; +\infty[$



6º caso: $]a ; +\infty[$



Funções



O QUE É

É um sistema de coordenadas constituído por dois eixos perpendiculares, (x e y), usado em matemática para localizar pontos no plano.

DEFINIÇÕES

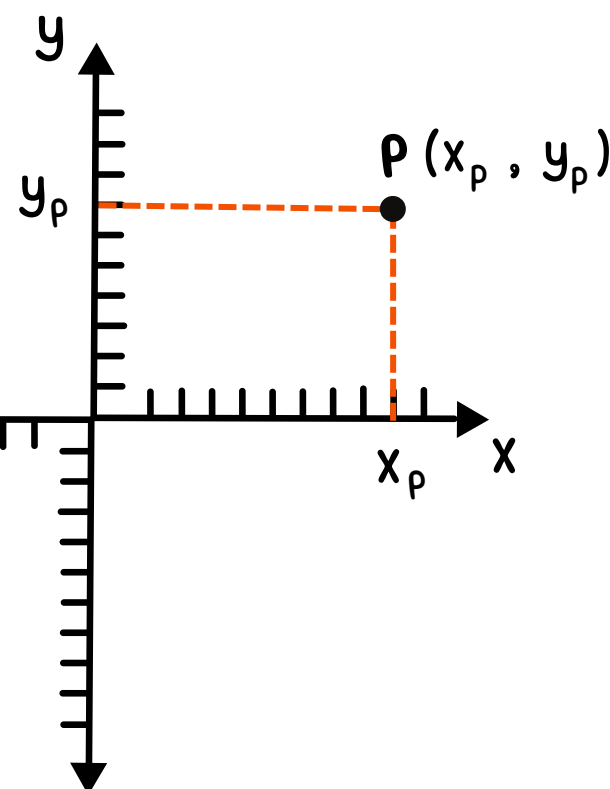
O - Origem

Ox - Eixo das abscissas

Oy - Eixo das ordenadas

Na origem, os eixos se encontram, determinando 4 ângulos retos.

Plano Cartesiano



COORDENADAS

São os números reais x_p e y_p , geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_p, y_p) .

QUADRANTES

São as 4 regiões do o plano, determinadas pelos os eixos. Qualquer ponto do plano estará em um dos quadrantes.

O QUE É

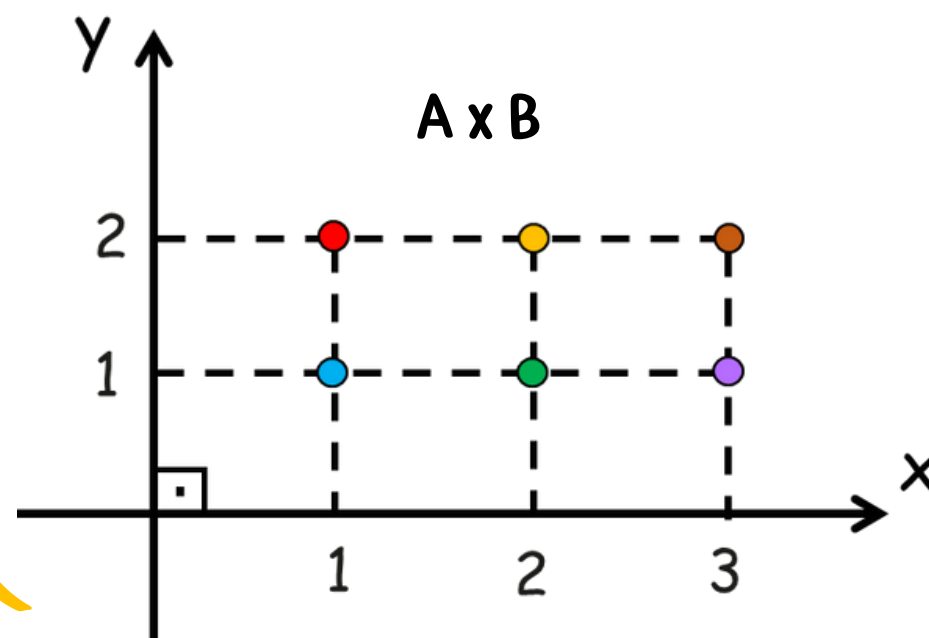
Dados A e B dois conjuntos não vazios, define-se produto cartesiano de A por B o conjunto $A \times B$:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

EXEMPLO

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, temos: $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ e $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$, note que: se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$

Produto Cartesiano



IMPORTANTE

- (1) Se A ou B for o conjunto vazio, $A \times B$ é um o conjunto vazio.
- (2) Se A e B forem infinitos, então $A \times B$ é um conjunto infinito.

IMPORTANTE

- (3) Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$.
- (4) Se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos respectivamente, então $A \times B$ é finito e tem m.n elementos.

O QUE É?

Sejam A e B dois conjuntos não vazios, define-se relação binária (R), um subconjunto de $A \times B$, regido por uma dada lei de formação.

$$R \subset A \times B$$

EXEMPLO

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, temos: $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$, o conjunto $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$ é: $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$, é uma relação binária de A em B.

Domínio de R = $\{1, 2\}$
Imagem de R = $\{1, 2\}$

Relação Binária

GRÁFICO

A representação no plano cartesiano de R será:

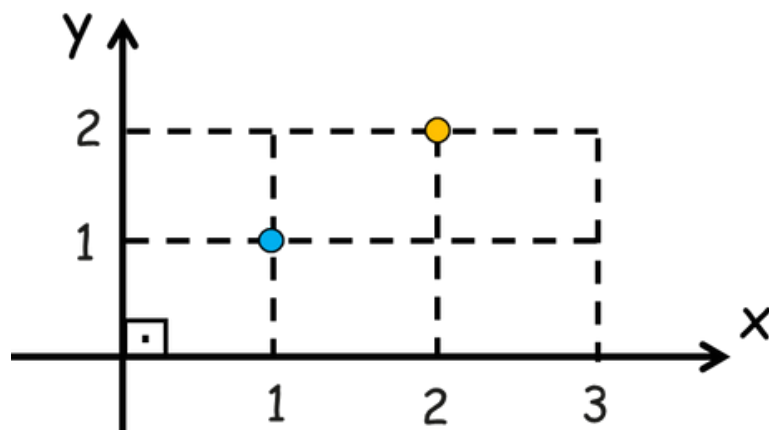
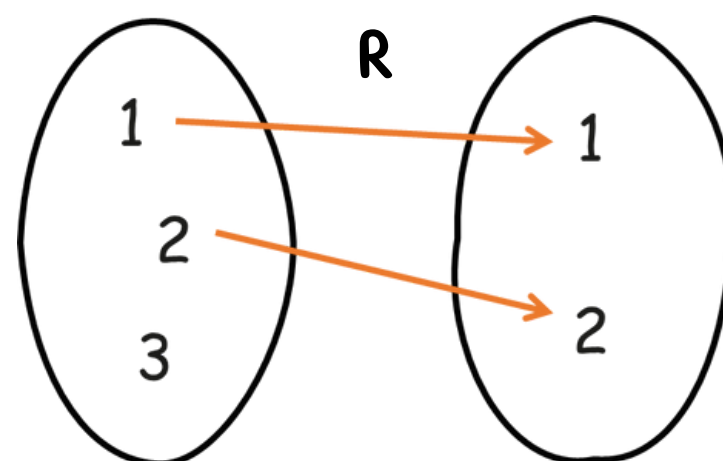
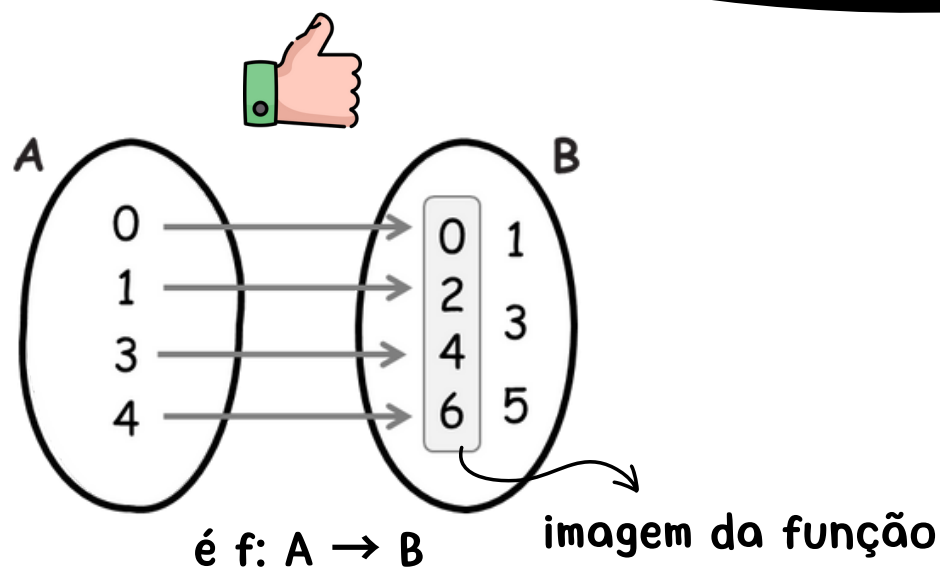
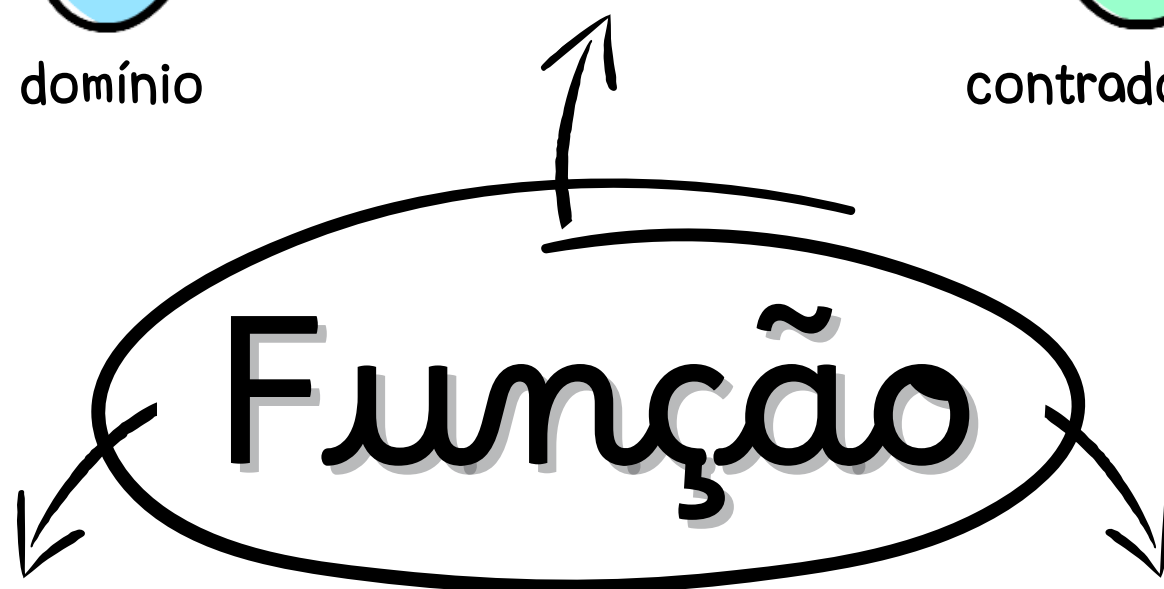
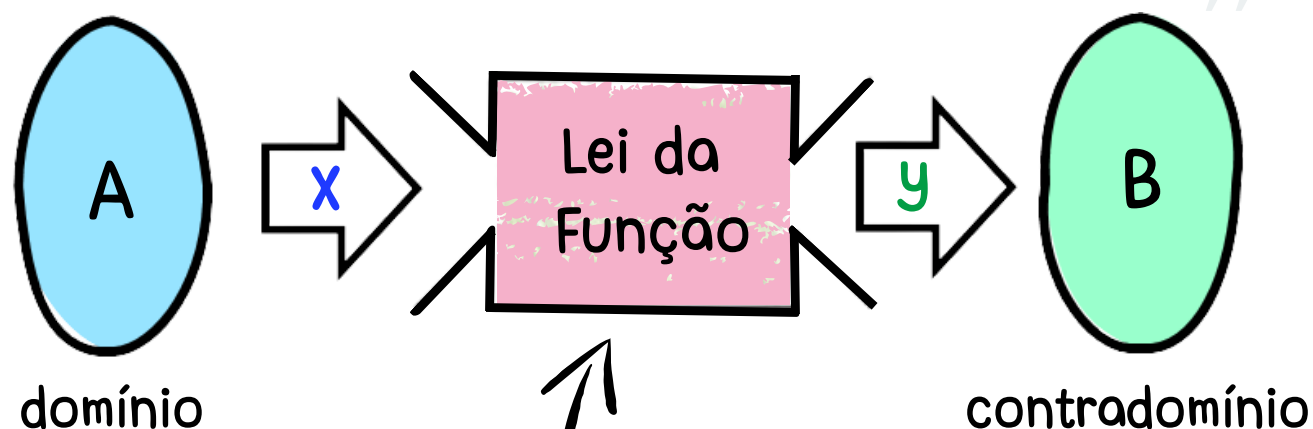


DIAGRAMA DE FLECHAS

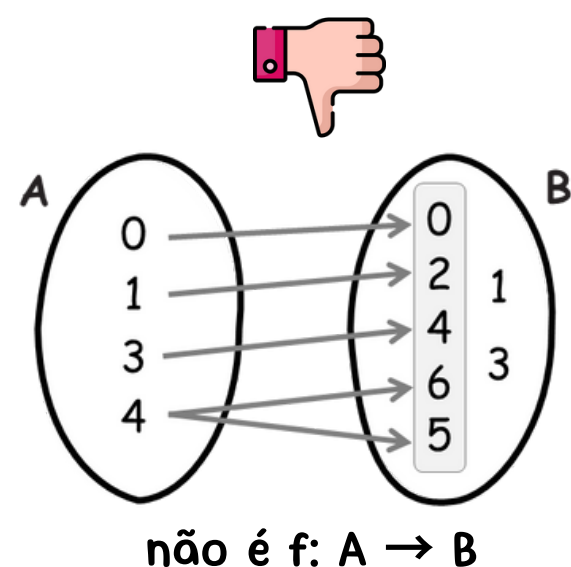


$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$$

“Uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x , corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y .”



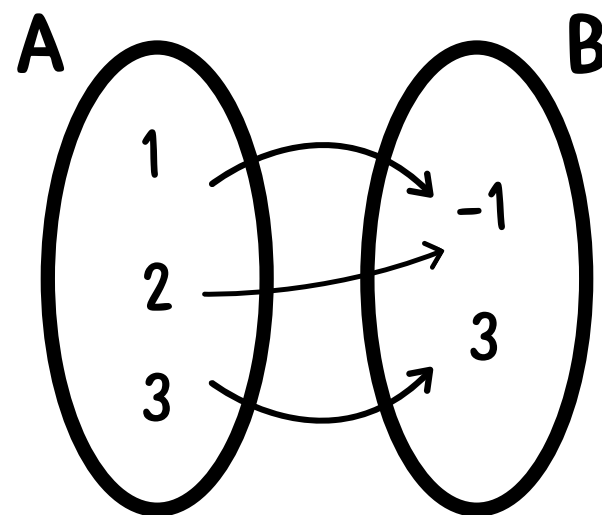
Todos os elementos de A só se relacionam uma vez.



Existe elemento de A que se relaciona mais de uma vez.

Sobrejetora

Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora, quando para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.



sobrejetora

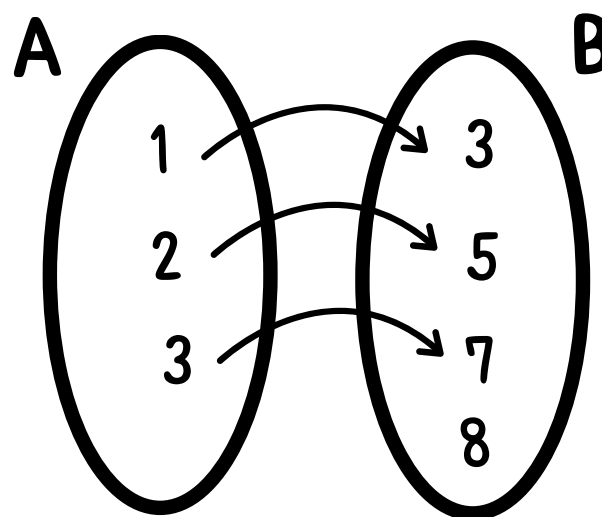
Tipos de função

Bijetora

Uma função $f: A \rightarrow B$ é chamada de bijetora (ou bijetiva) quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Injetora

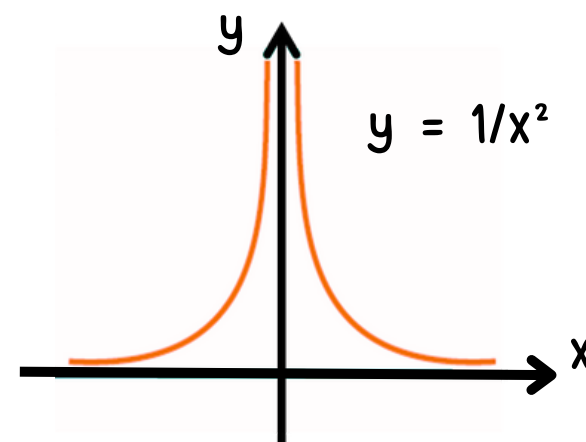
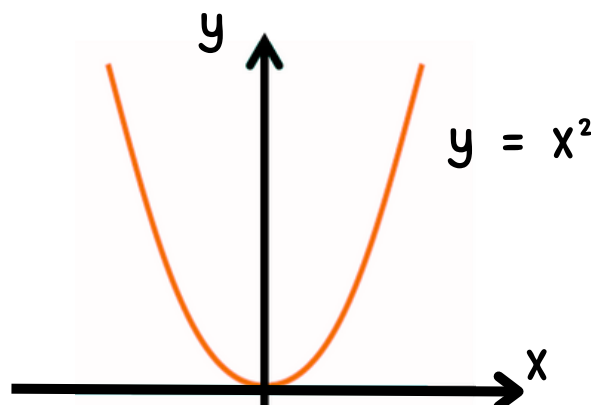
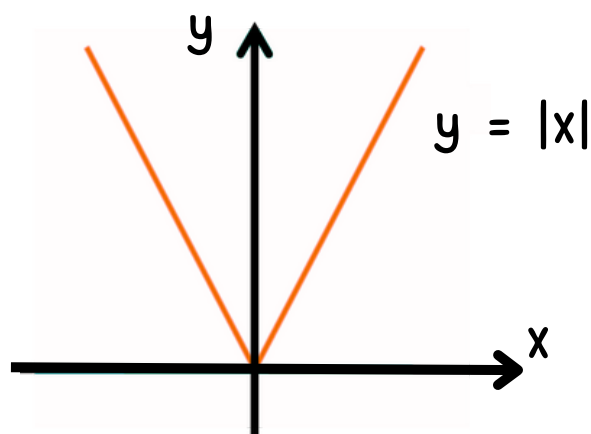
Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora quando para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.



injetora

Par

Uma função f é dita **par**, se $\forall x \in D, f(x) = f(-x)$.



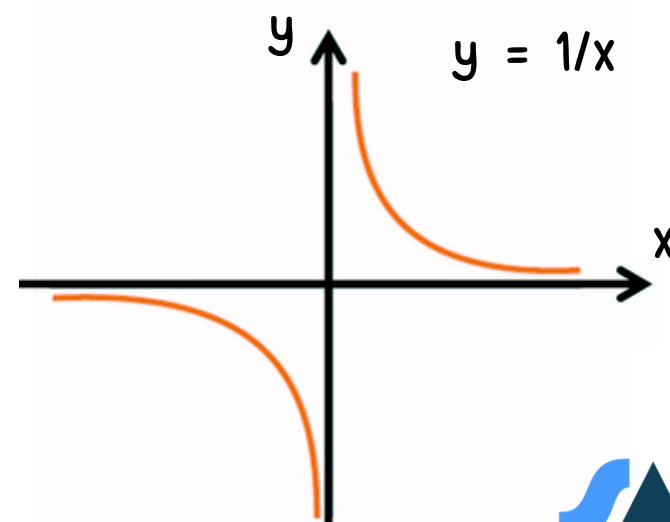
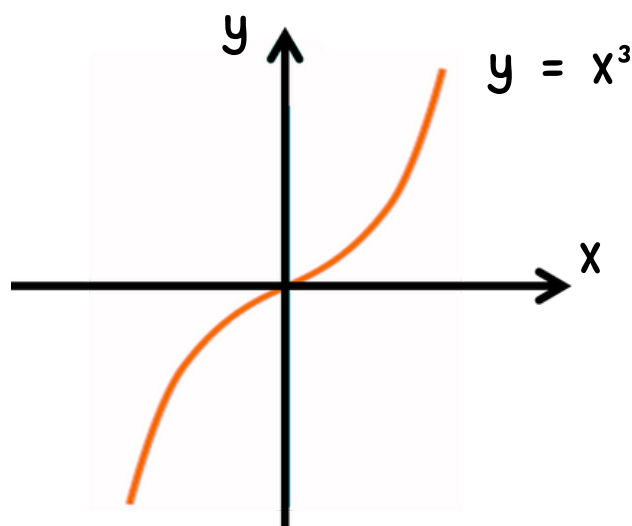
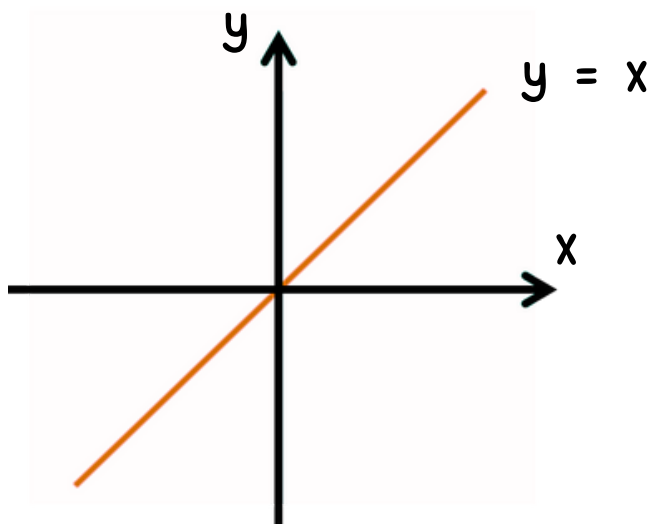
Paridade da função

Na função **PAR** o eixo de simetria do gráfico é $0y$.

Na função **ÍMPAR** o eixo de simetria do gráfico é $0x$.

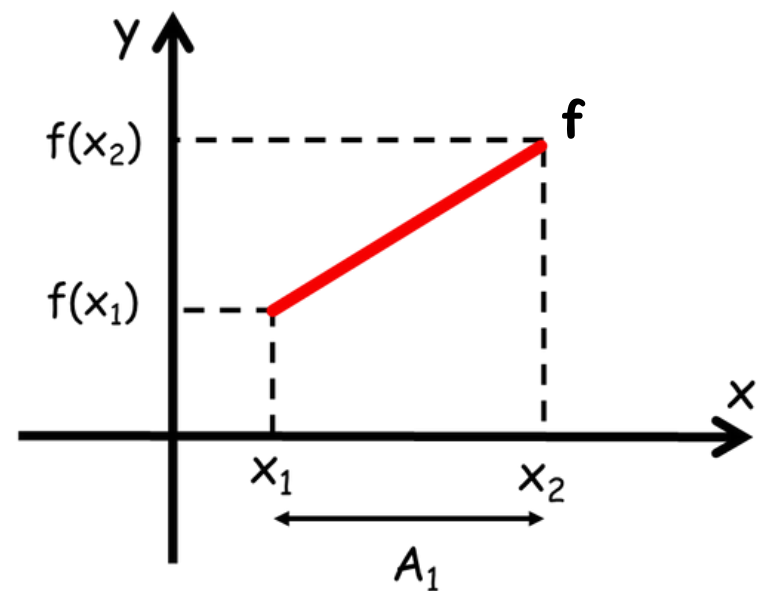
Ímpar

Uma função f é dita **Ímpar**, se $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.



Crescente

Uma função é crescente se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 do seu domínio, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. Ou seja, se aumentarmos o valor x , o valor de y também aumenta.



f é **crescente** em A_1

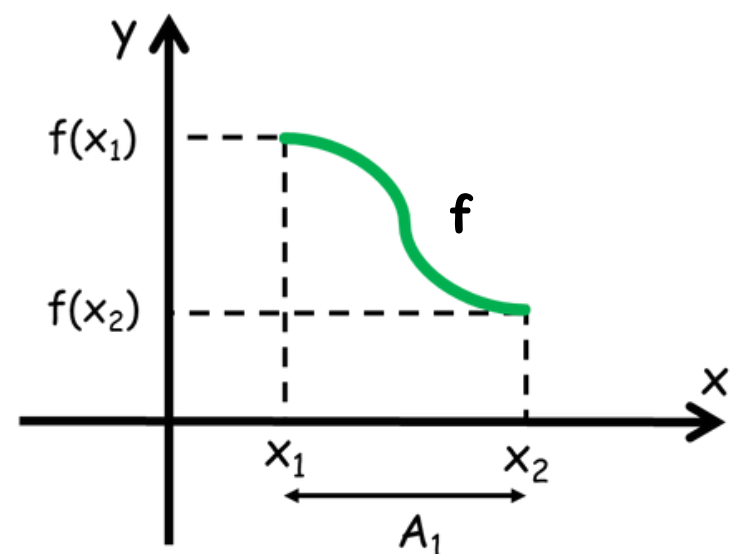
Importante

Ao estudarmos o crescimento da função, devemos levar em consideração que seu gráfico não tenha sofrido inflexão, nesse intervalo analisado.

Crescimento da função

Decrescente

Uma função é decrescente se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 do seu domínio, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$. Ou seja, se aumentarmos o valor x , o valor de y diminui.



f é **decrescente** em A_1

Definição

é toda função dada por:

$$f(x) = ax + b$$

$$a \neq 0$$

Crescimento

$a > 0$ crescente

$a < 0$ decrescente

Importante

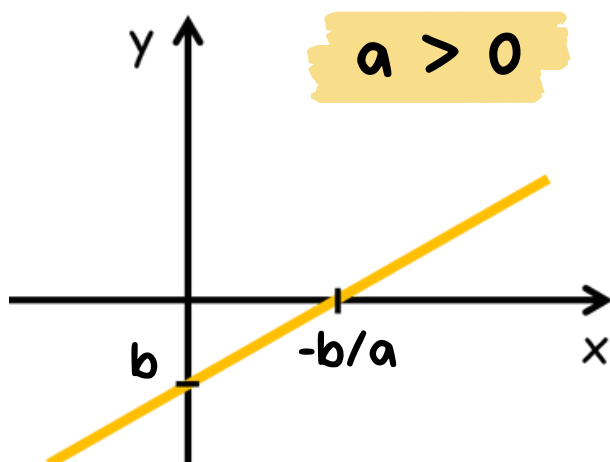
Se $b = 0$, a função é dita linear e seu gráfico passa pela origem.

Função Afim

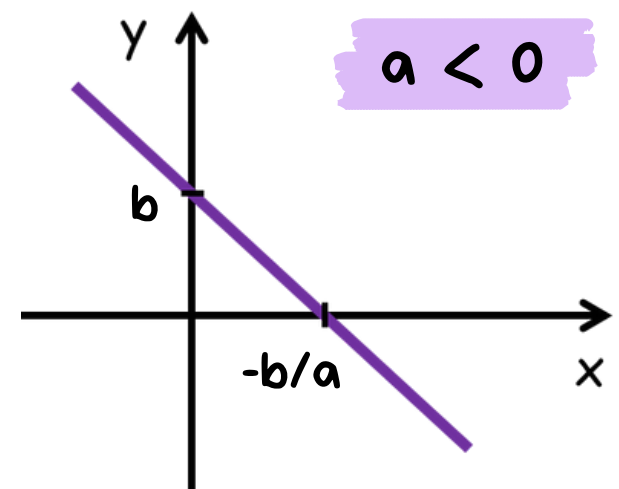
Importante

$D = \mathbb{R}$ $Im = \mathbb{R}$
domínio imagem

Gráfico



Gráfico



O QUE É?

Estudar o sinal de uma função f é examinar se a ordenada de cada ponto é positiva, nula ou negativa.

A função afim é definida por:

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$$

Importante

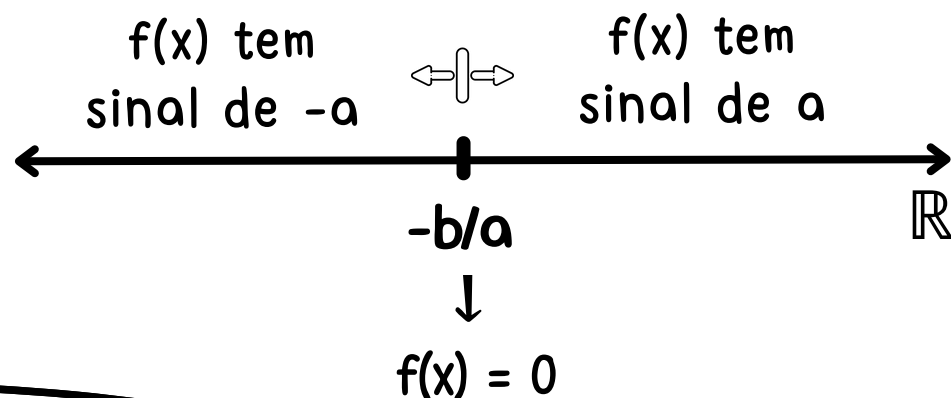
$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0$$

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -b/a$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -b/a$$

DISPOSITIVO PRÁTICO

Os sinais da função afim podem ser determinados a partir do seguinte dispositivo prático:

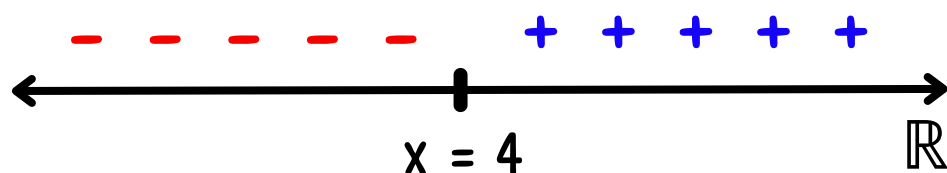


**Sinais
Função Afim**

EXEMPLO

Estudar os sinais da função $f(x) = x/2 - 2$.

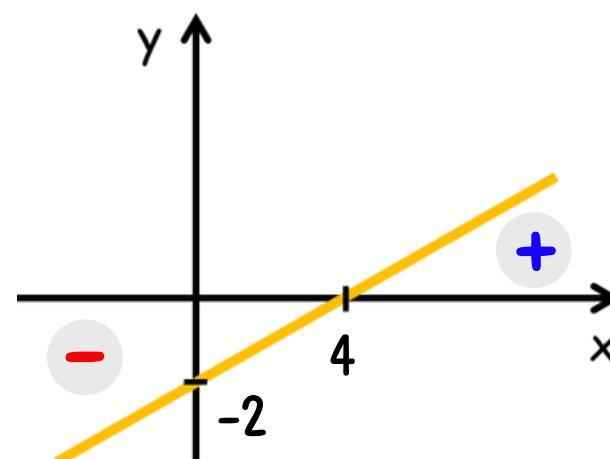
$$f(x) = 0 \Rightarrow x/2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$



- $f(x) > 0$ se $x > 4$
- $f(x) < 0$ se $x < 4$

GRÁFICO

Para $f(x) = x/2 - 2$, temos:



Inequações do 1º grau

Inequações produto

1) Resolver em $\mathbb{R}$: $(x + 2)(2x - 1) > 0$.

solução: inicialmente estudar os sinais das funções f e g .

$$f(x) = x + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - 1$$

(i) Determinando as raízes:

$$x + 2 = 0 \quad \text{e} \quad 2x - 1 = 0$$

$f \downarrow$

$g \downarrow$

$$x = -2 \quad \text{e} \quad x = -1/2$$

(ii) Quadro de sinais:

	-2	$1/2$	x
$f(x)$	-	+	+
$g(x)$	-	-	+
$f(x) \cdot g(x)$	+	-	+

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1/2\}$$

Inequações quociente

2) Resolver em $\mathbb{R}$: $\frac{2x + 1}{x + 2} \geq 0$

solução: inicialmente estudar os sinais das funções f e g , lembrando que o denominador da fração não pode ser nulo.

(i) Determinando as raízes:

$$2x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad x + 2 = 0$$

$f \downarrow$

$g \downarrow$

$$x = -1/2 \quad \text{e} \quad x = -2$$

(ii) Quadro de sinais:

	-2	$-1/2$	x
$f(x)$	-	-	+
$g(x)$	-	+	+
$f(x)/g(x)$	+	-	+

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq -1/2\}$$

Equação do 2º grau

o que é

É toda equação que pode ser escrito sob a forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a \neq 0$$

Resolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad (\Delta \geq 0)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

Raízes

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Soma

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Produto

Demonstração

Resolutiva

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \quad (\times 4a)$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Finalmente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a relação $b^2 - 4ac$ é chamada discriminante, e é simbolizado por Δ .

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

Exemplo

Resolva a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$ em $\mathbb{R}$.

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4.1.15$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2.1} \begin{cases} \nearrow x = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

Definição

é toda função dada por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a \neq 0$$

Concavidade

O gráfico é uma parábola que tem concavidade:

- para cima, se $a > 0$
- para baixo, se $a < 0$

Vértice

$$V = (x_v, y_v)$$

$$x_v = -b/2a = \frac{x' + x''}{2}$$

$$y_v = -\Delta/4a = f(x_v)$$

Importante

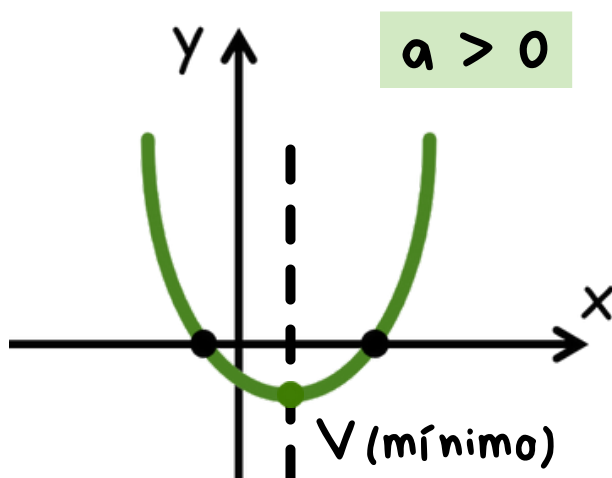
$$\Delta > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = -b/2a$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

Função Quadrática

Gráfico

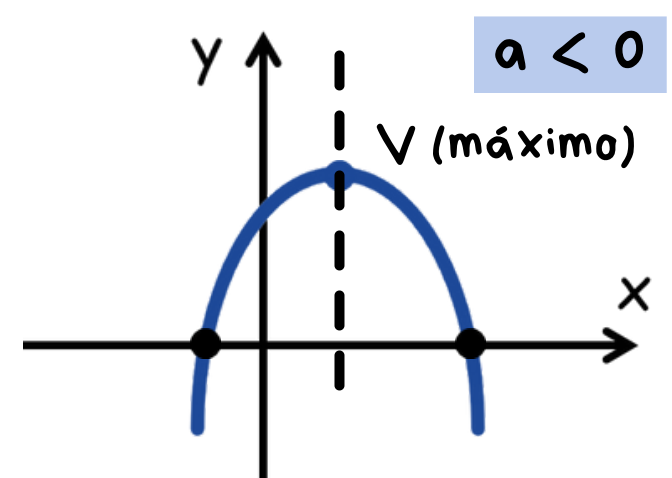


$$I_m = [-\Delta/4a ; +\infty[$$

$$D = \mathbb{R}$$

(domínio)

Gráfico



$$I_m =]-\infty ; -\Delta/4a]$$

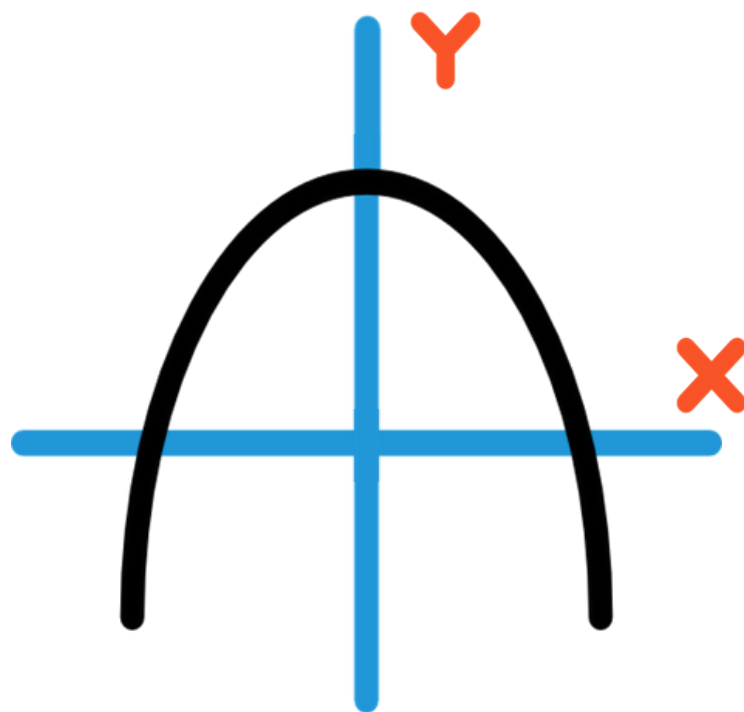
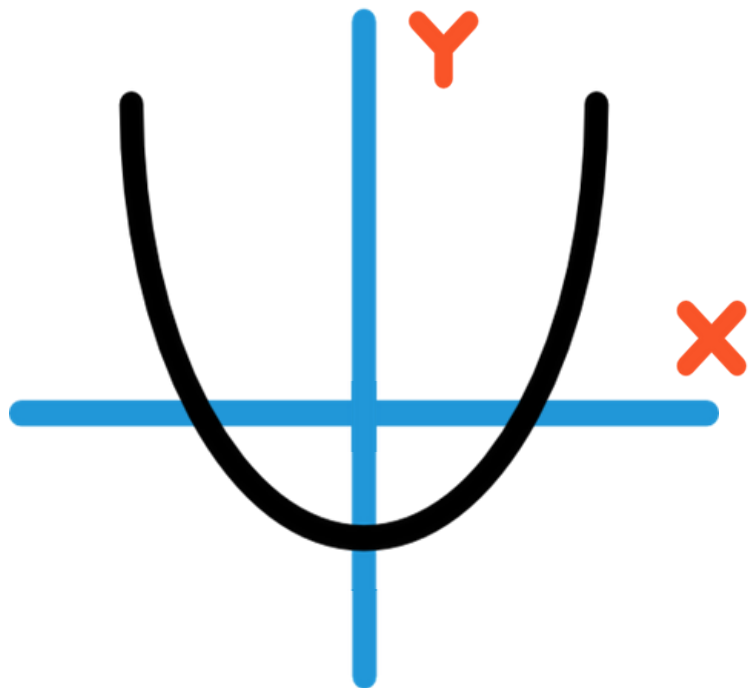
Concavidade da Parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$a \neq 0$$

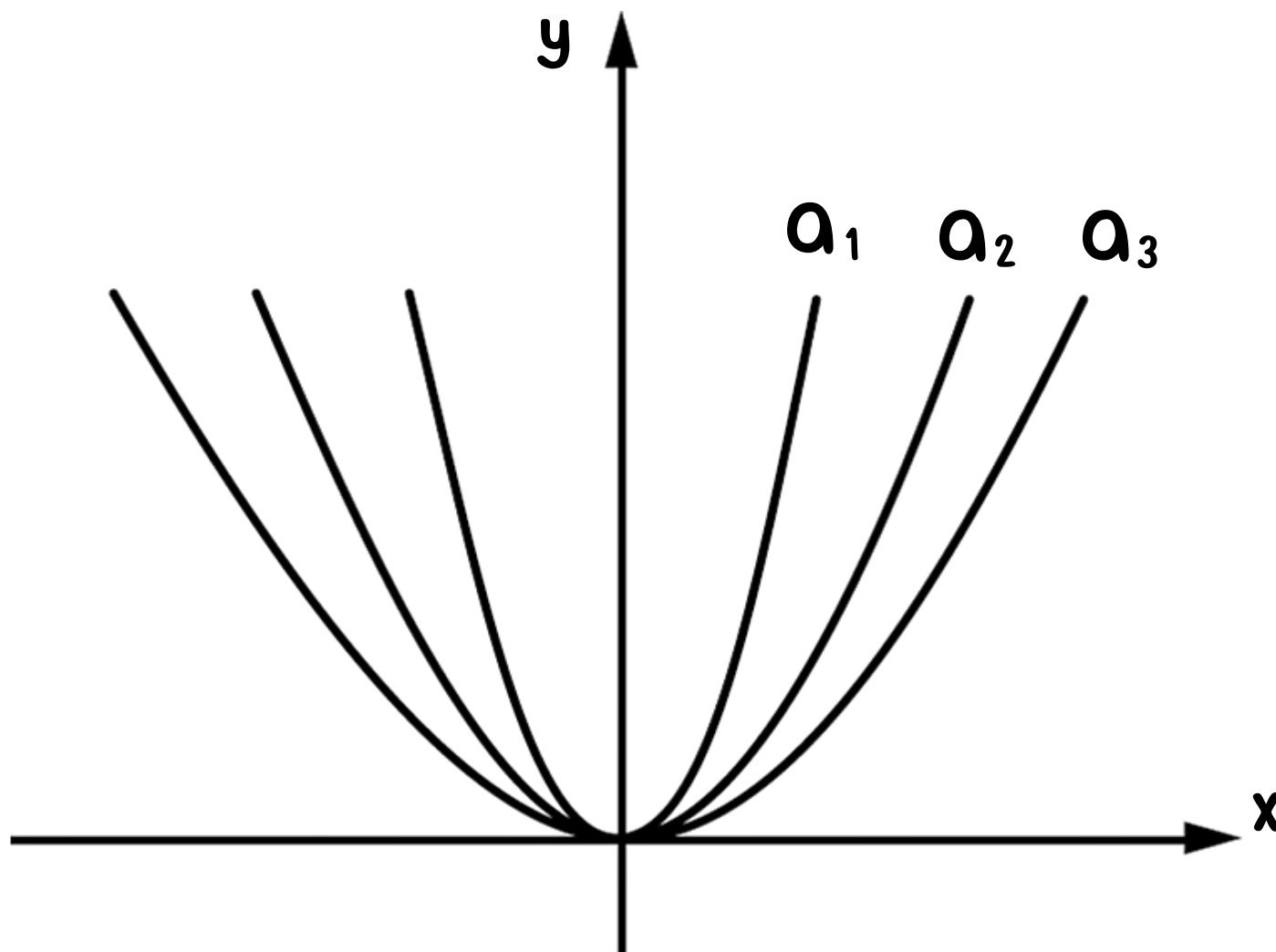
$$a > 0$$

$$a < 0$$



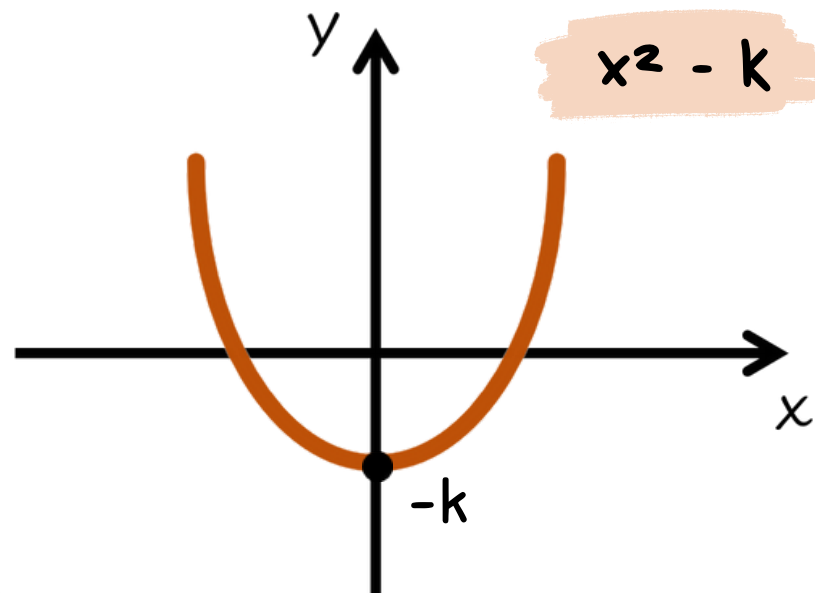
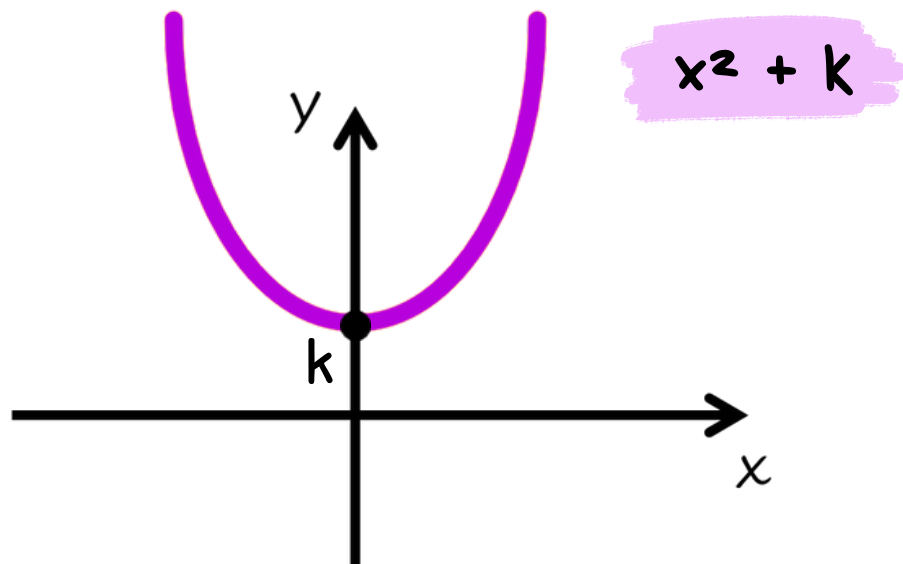
Abertura da Parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$

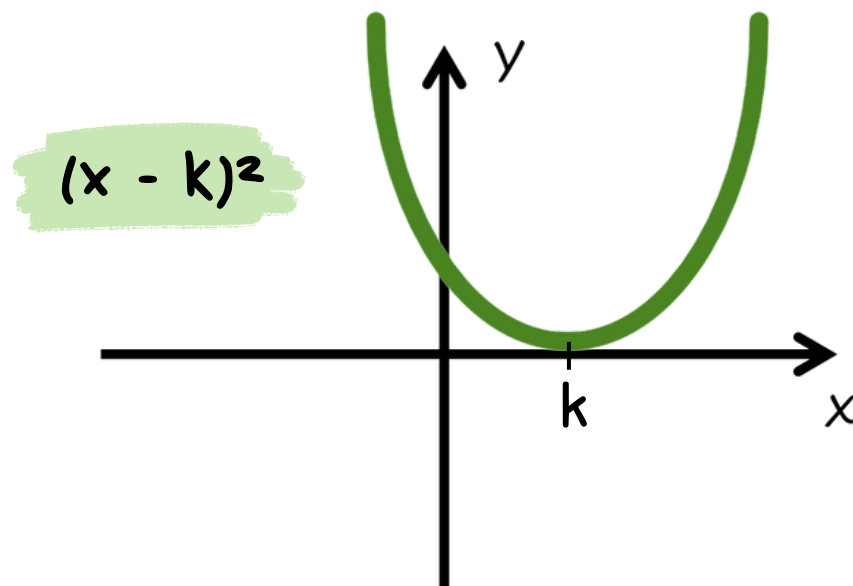
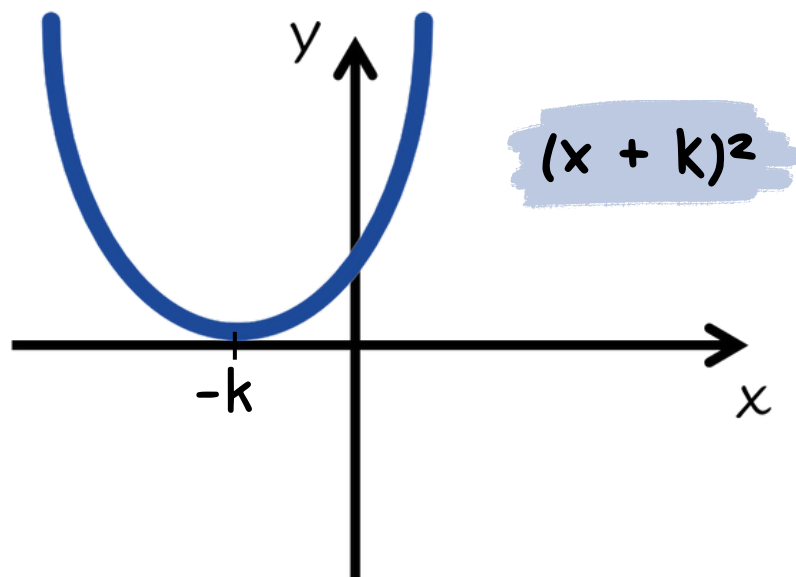
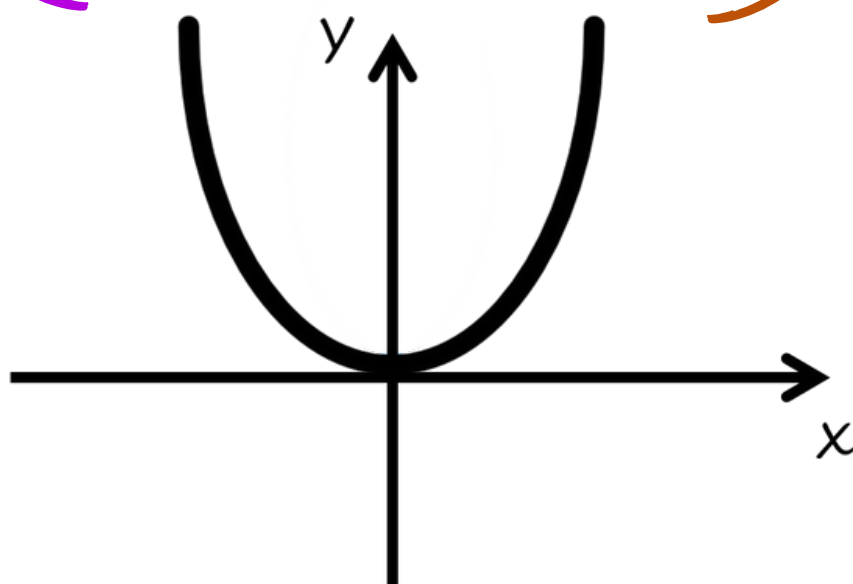


$$a_1 > a_2 > a_3$$

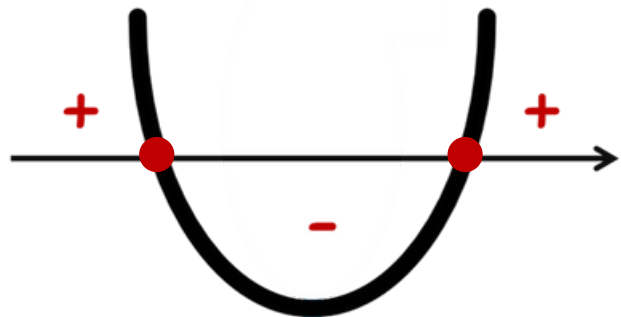
$$a \neq 0$$



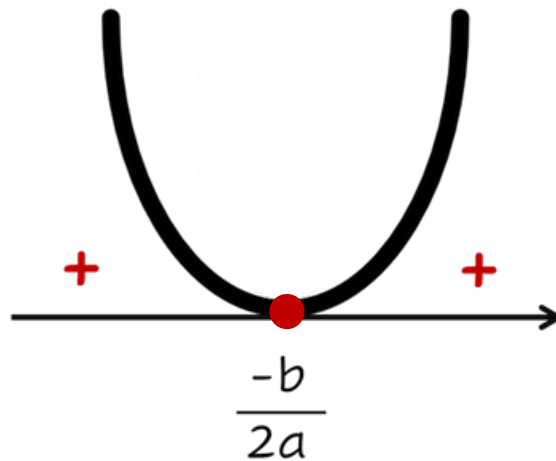
$f(x) = x^2$



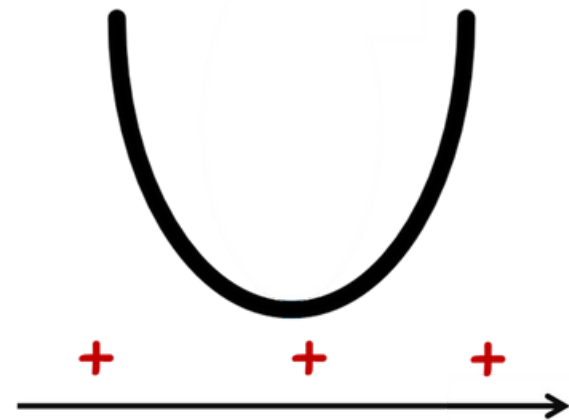
$$a > 0$$



$$\Delta > 0$$



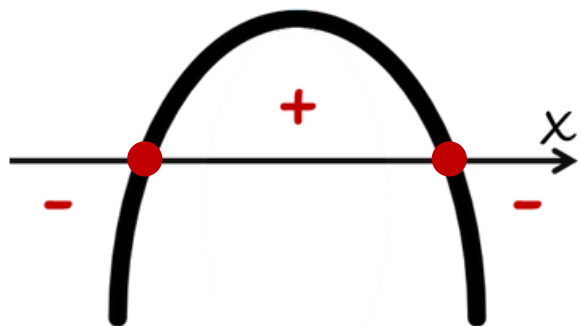
$$\Delta = 0$$



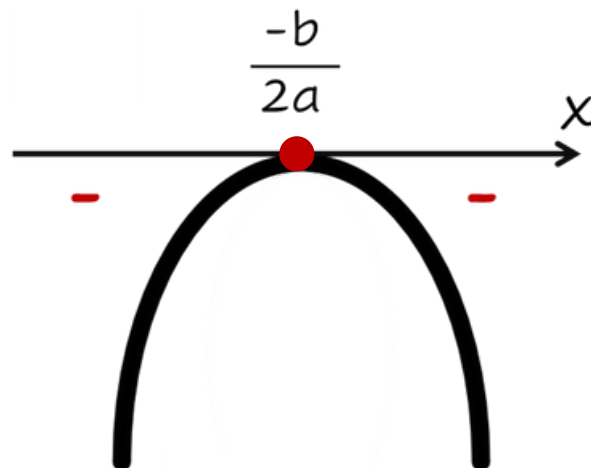
$$\Delta < 0$$

Sinais da Função Quadrática

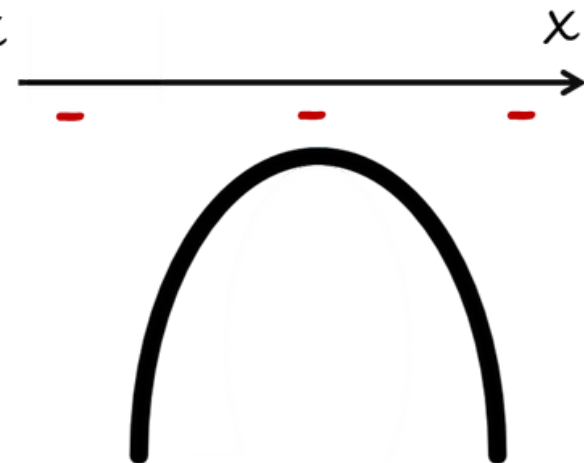
$$a < 0$$



$$\Delta > 0$$



$$\Delta = 0$$



$$\Delta < 0$$

Exemplo 1

1) Resolver em $\mathbb{R}$: $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

solução: para resolver a inequação basta fazer o estudo do sinal da função $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

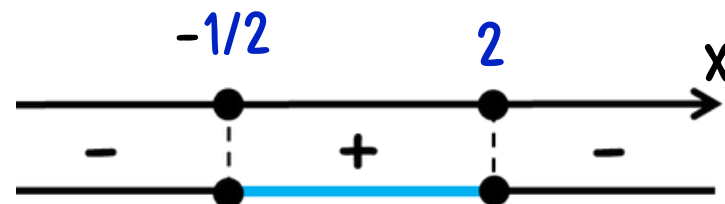
(i) Determinando as raízes:

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0,$$

$$x = -1/2 \text{ ou } x = 2$$

(ii) Quadro de sinais:

para $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$, temos:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/2 \leq x \leq 2\}$$

Inequações do 2º grau

----->

Atenção: Para se determinar corretamente o conjunto solução (S), é fundamental observar que o denominador da fração não pode ser nulo.

Exemplo 2

2) Resolver em $\mathbb{R}$: $\frac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)} \leq 0$.

(i) Determinando as raízes:

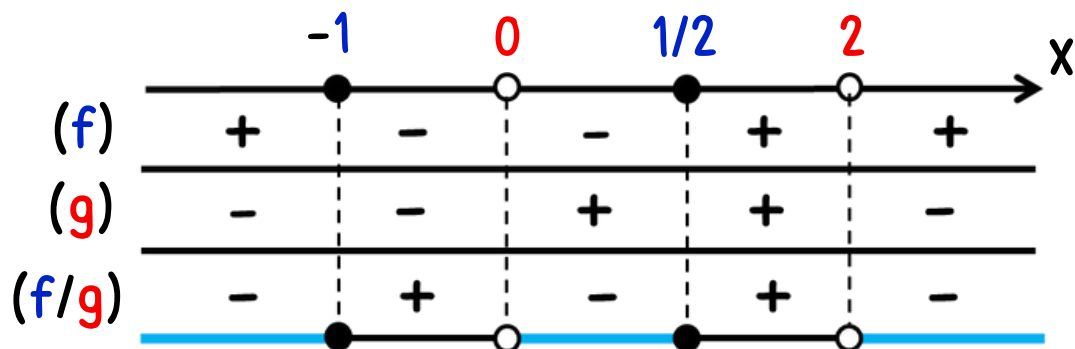
f: $2x^2 + x - 1 = 0,$

$$x = -1 \text{ ou } x = 1/2$$

g: $-x^2 + 2x = 0,$

$$x = 0 \text{ ou } x = 2$$

(ii) Quadro de sinais:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 0 < x \leq 1/2 \text{ ou } x > 2\}$$

Exemplo 1

1) Resolver em $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 - 3x} < 2$.

(i) Neste caso eleve ambos os membros ao quadrado e resolva normalmente:

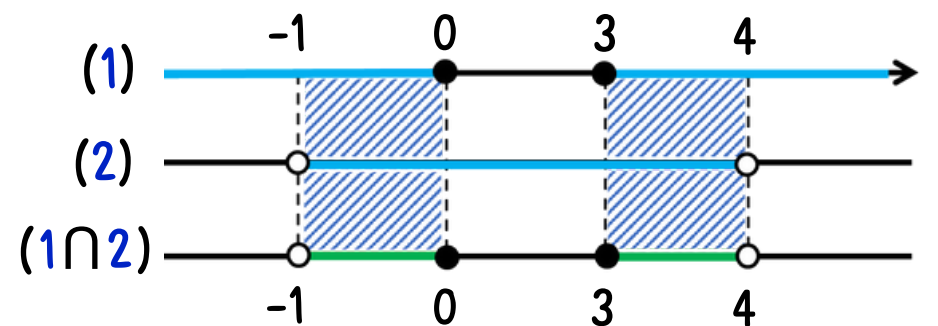
$$(\sqrt{x^2 - 3x})^2 < (2)^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 3x < 4$$

$$0 \leq x^2 - 3x < 4$$

(ii) Resolvendo a inequação simultânea temos:

$$\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3 & (1) \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow -1 < x < 4 & (2) \end{cases}$$

(ii) Quadro de sinais:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ e } 3 \leq x < 4\}$$

Inequação Irracional

Exemplo 2

2) Resolver em $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

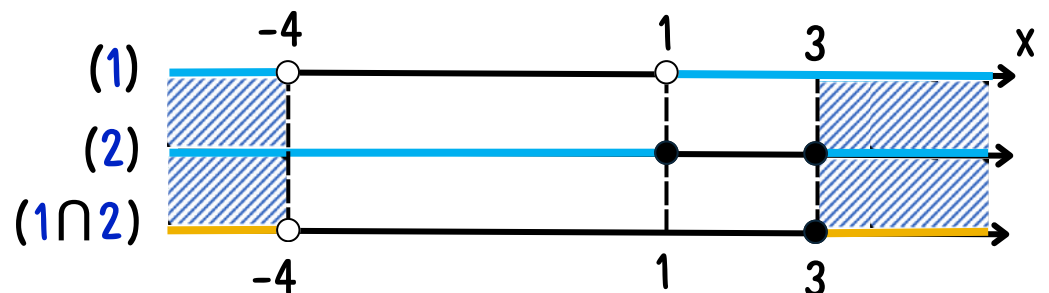
(i) elevando ambos os membros ao quadrado temos

$$2x^2 - x - 1 > x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

(ii) Resolvendo a inequação simultânea temos:

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 > x^2 - 4x + 3 & (1) \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

a solução final será:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x \geq 3\}$$



o que é?

Seja f uma função de A em B e g uma função de B em C , chama-se **função composta** de g e f à função h de A em C , em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

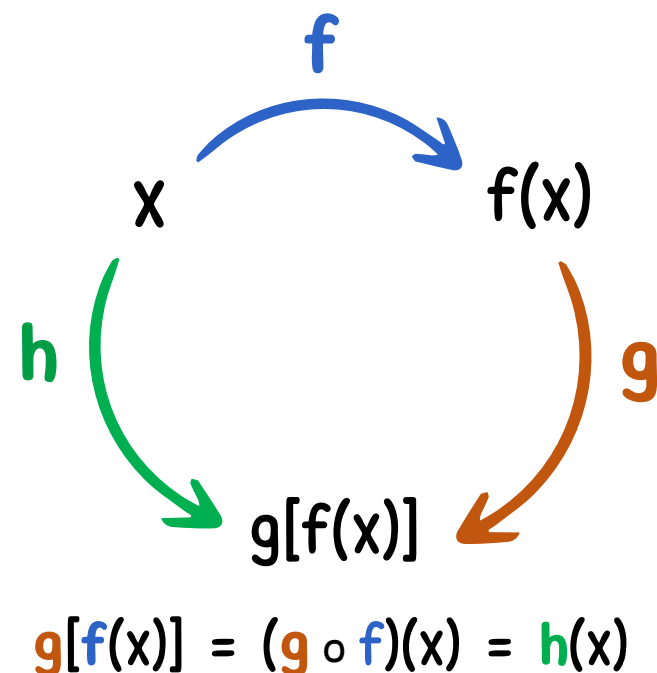
- (i) $x \rightarrow f$ obtém-se $f(x)$;
- (ii) $f(x) \rightarrow g$ obtém-se $g[f(x)] = h(x)$.

$$g[f(x)] = (g \circ f)(x)$$

(lê-se: “ g composta com f ”)



Diagrama



Função Composta



Exemplo

Dados $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$. Determine x para que $f \circ g(x) = 16$.

solução: $f \circ g(x) = g^2 + 4g - 5$ daí temos:

$$f \circ g(x) = (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5$$

$$f \circ g(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

finalmente:

$$f \circ g(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2$$

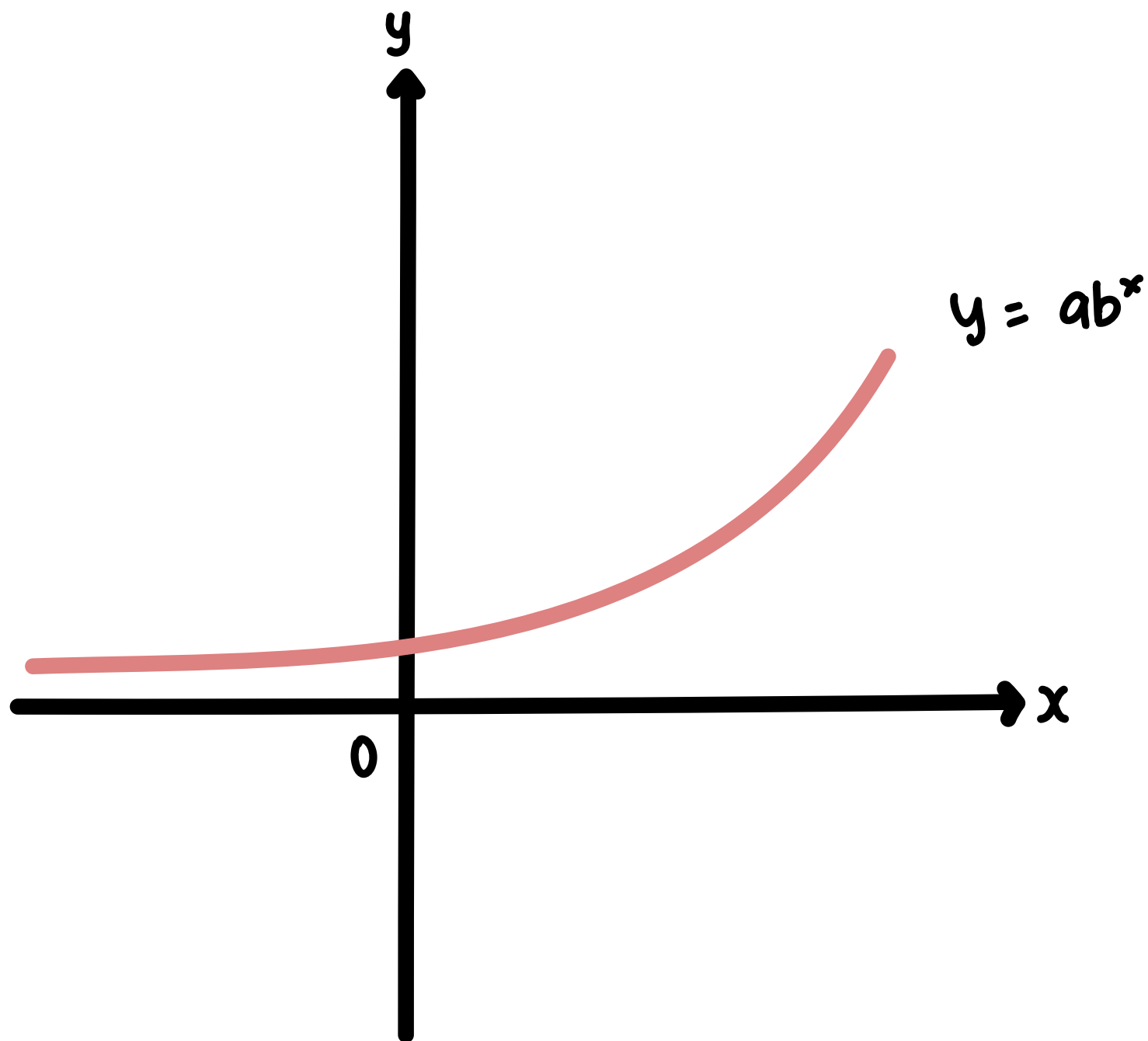
$$S = \{-2, 3\}$$



Importante

- (i) A composta $f \circ g$ só está definida quando o contradomínio de g for igual ao domínio da f .
- (ii) Em geral $f \circ g \neq g \circ f$, ou seja a composição de funções não é comutativa.
- (iii) É possível que somente uma das funções $f \circ g$ ou $g \circ f$ esteja definida.

Exponenciais



$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potenciação

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n$$

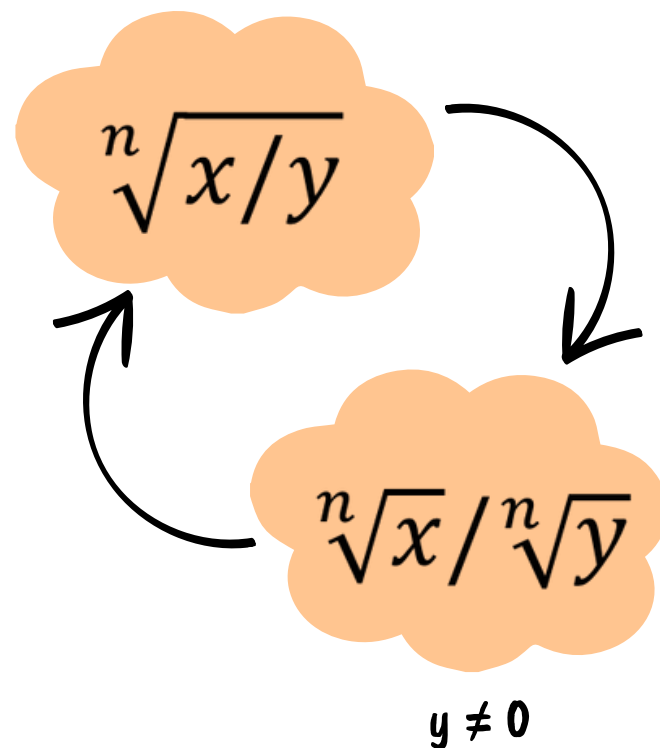
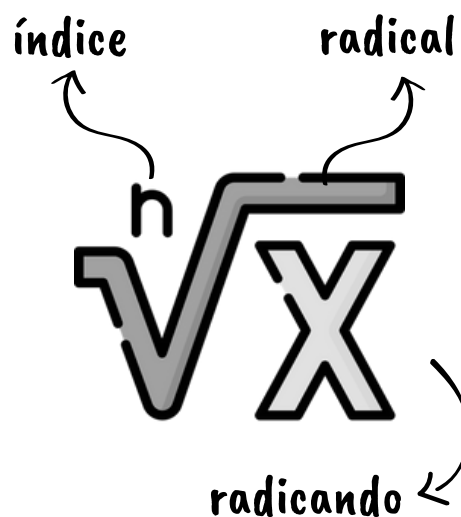
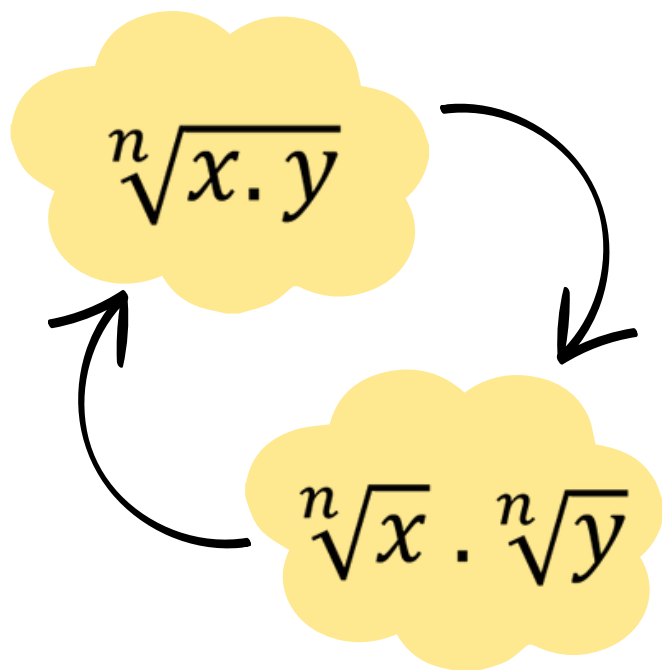
$$(ab)^n = a^n \times b^n$$

$$\rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

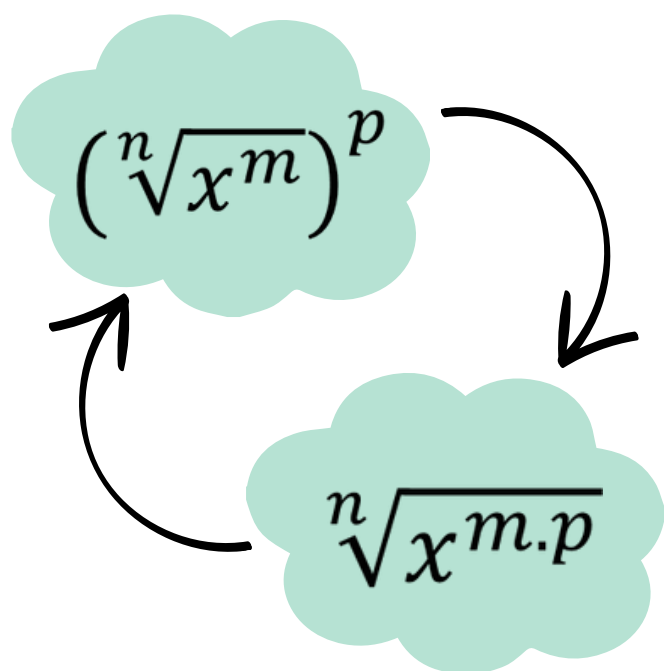
$$\rightarrow a^0 = 1$$

$$\rightarrow a^1 = a$$

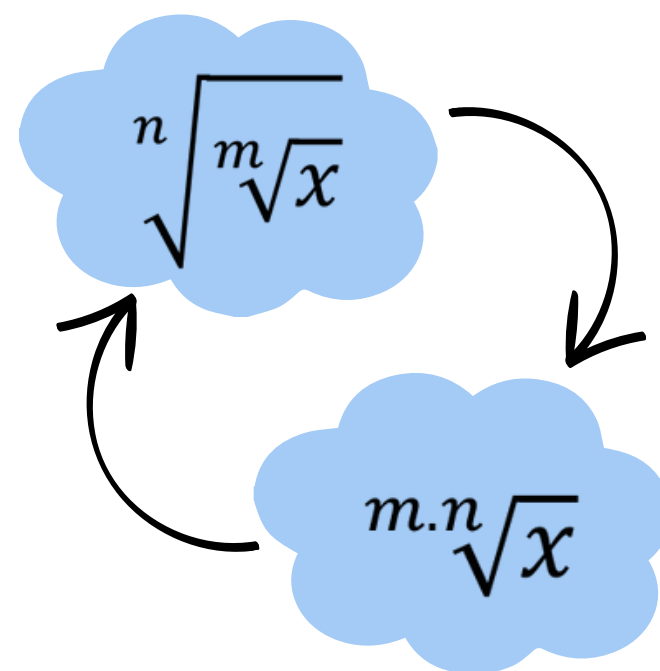
$$\rightarrow 0^0 \text{ (indeterminado)}$$



Radiciação



$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x^n} &= |x| && \text{se } n \text{ par} \\ \sqrt[n]{x^n} &= x && \text{se } n \text{ ímpar} \\ \sqrt[n]{-} &\notin \mathbb{R} && \text{par} \end{aligned}$$



O que é?

Dado um número real a , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos **função exponencial** de base a , a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número a^x .

$$f(x) = a^x \begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ I_f = \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Crescimento

Para a função exponencial definida base a temos:

$$f(x) = a^x \Rightarrow \begin{cases} a > 1, \text{ a função } f \text{ é} \\ \text{crescente em } \mathbb{R}. \\ 0 < a < 1, \text{ a função } f \\ \text{é decrescente em } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Atenção

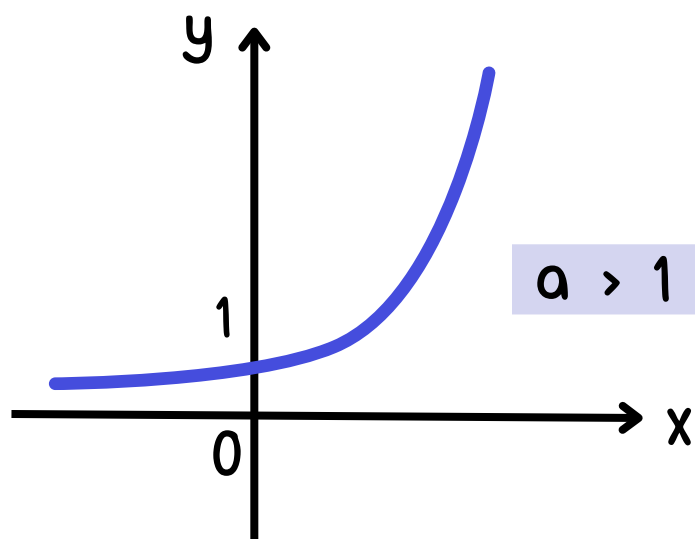
$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$
O gráfico da função corta o eixo y no ponto de ordenada 1;

Função Exponencial

Importante

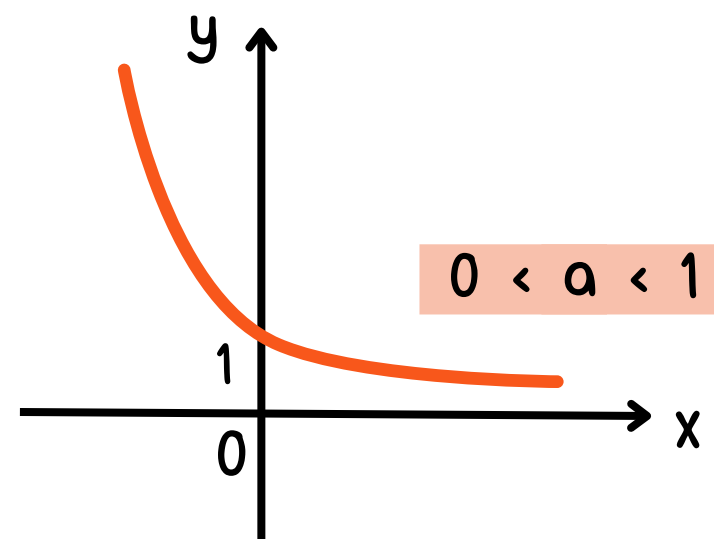
A curva que representa o gráfico da função, está acima do eixo dos x , pois a^x é sempre positivo.

Gráfico



$$y = a^x$$

Gráfico



O que são?

São equações em que a incógnita está no expoente.

Exemplos:

(a) $2^x = 8$

(b) $(\sqrt{3})^x = 81$

(c) $9^x - 3^x = 72$

Equações Exponenciais

Resolução

3) Resolver em $\mathbb{R}$, $2^{x+3} + 2^{x+2} = 2^{x+1}$.

$$2^{x+3} + 2^{x+2} = 2^{x+1} \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^2 = 2^x \cdot 2^1$$

fazendo $2^x = t$, teremos:

$$8t + 4t = 2t + 80 \Rightarrow t = 8$$

$$2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$$

Resolução

Sua resolução se dá pelo método da redução a uma base comum.

1) Resolver em $\mathbb{R}$, $2^x = 8$.

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

2) Resolver em $\mathbb{R}$, $(\sqrt{3})^x = 81$.

$$(\sqrt{3})^x = 81 \Rightarrow (3^{1/2})^x = 3^4$$

$$x/2 = 4 \Rightarrow x = 8$$

Atenção

Em algumas equações, a solução será encontrada através de outra incógnita, chamada de incógnita auxiliar.

Resolução

4) Resolver em $\mathbb{R}$, $x^{x^2 - 5x + 6} = 1$.

i) se $x = 0 \Rightarrow 0^2 = 1$ (falso)

ii) se $x = 1 \Rightarrow 1^2 = 1$ (verdadeiro)

iii) Sendo $0 < a \neq 1$, temos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$

$$S = \{1, 2, 3\}$$

O que são?

Assim como em equações exponenciais, a resolução das inequações utilizaremos o método da redução a uma base comum, de modo que:

(i) se $a > 1$ e $a^b > a^c \Leftrightarrow b > c$.

(ii) se $0 < a < 1$ e $a^b > a^c \Leftrightarrow b < c$.

Inequações Exponenciais

Exemplo 3

4) Resolver em $\mathbb{R}$, $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$.

$$3^{2x} \cdot 3^2 - 3^x \cdot 3^3 - 3^x + 3 > 0$$

$$9 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 3 > 0$$

fazendo $3^x = y$, temos:

$$9y^2 - 28y + 3 > 0$$

Exemplo 1

1) Resolver em $\mathbb{R}$, $2^x > 128$.

$$2^x > 128 \Rightarrow 2^x > 2^7 \Rightarrow x > 7$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$$

2) Resolver em $\mathbb{R}$, $(3/5)^x \geq 125/27$

$$(3/5)^x \geq 125/27 \Rightarrow (3/5)^x \geq (3/5)^{-3}$$
$$x \leq -3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$$

Exemplo 2

3) Resolver em $\mathbb{R}$, $(\sqrt[3]{2})^x > (\sqrt[4]{8})$.

$$2^{\frac{x}{3}} > 2^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{x}{3} > \frac{3}{4}$$

$$4x > 9 \Rightarrow x > 9/4$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 9/4\}$$

...

$$9y^2 - 28y + 3 > 0$$

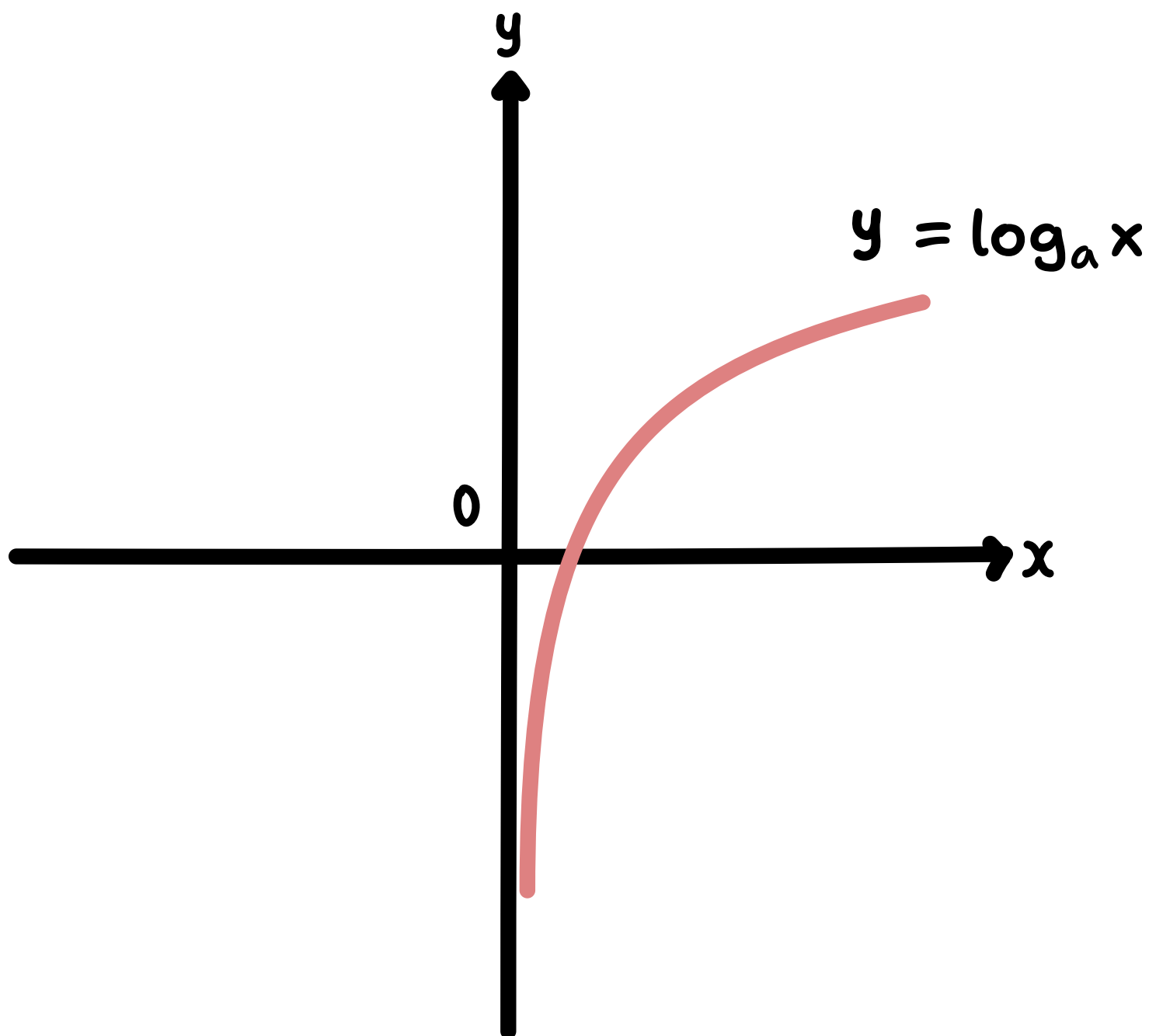
$$y < 1/9 \text{ ou } y > 3$$

$$3^x < 3^{-2} \Leftrightarrow x < -2$$

$$3^x > 3^1 \Leftrightarrow x > 1$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$$

Logaritmos



definição

$$\log_b^a = c \Rightarrow b^c = a$$

importante

$$0 < b \neq 1$$

$$a > 0$$

logaritmos

propriedades

$$\checkmark \log_b(m.n) = \log_b m + \log_b n$$

$$\checkmark \log_b(m/n) = \log_b m - \log_b n$$

$$\checkmark \log_b(m)^q = q.\log_b m$$

mudança de base

$$\checkmark \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

consequência

$$\log_{b^m} a = (1/m).\log_b a$$

Definição

é toda função dada por:

$$f(x) = \log_b x$$

$$0 < b \neq 1, (b \in \mathbb{R})$$

Crescimento

$b > 1$ crescente

$0 < b < 1$ decrescente

Importante

Seu gráfico corta o eixo ox no ponto de abscissa $x = 1$.

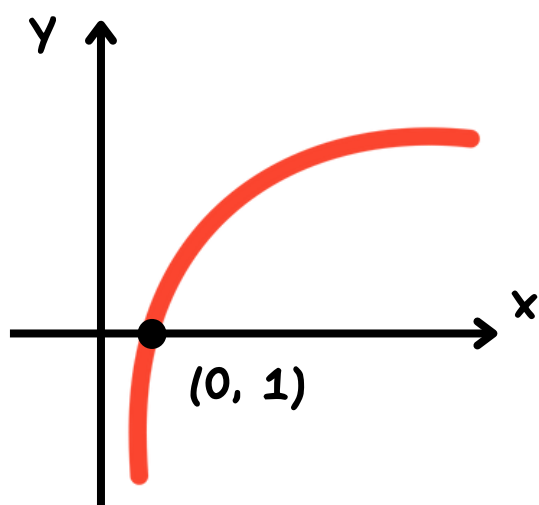
Função logarítmica

Importante

$D = \mathbb{R}_+^*$ $Im = \mathbb{R}$
domínio imagem

Gráfico

$$b > 1$$

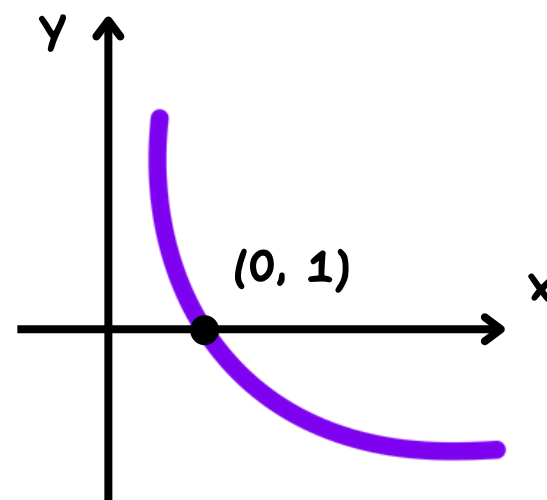


$$f(x) = \log_b x$$

$$f^{-1}(x) = b^x$$

Gráfico

$$0 < b < 1$$



O que é?

É toda equação que apresenta incógnita no logaritmo.

Podem ser classificadas em três tipos principais:

1) $\log_b f(x) = \log_b g(x)$

2) $\log_b f(x) = k$

3) Exige inicialmente uso de uma incógnita auxiliar.

Exemplo 1

1) Resolver em $\mathbb{R}$:

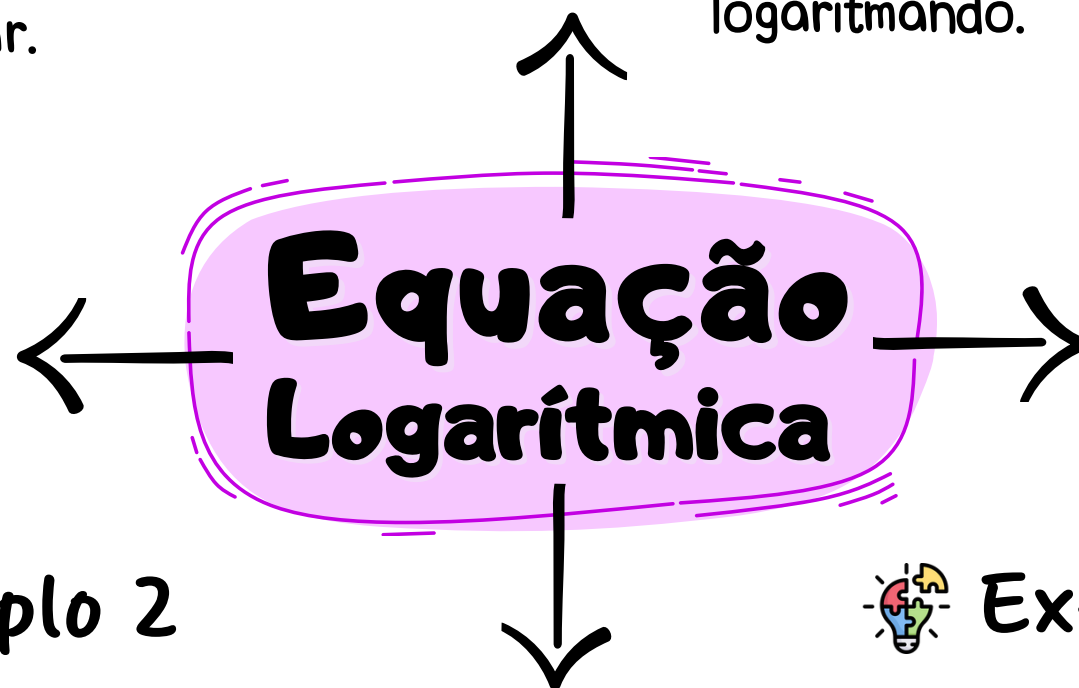
$$\log_5(x^2 - 3x - 10) = \log_5(2 - 2x)$$

Devemos ter:

$$x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$
$$x = 4 \text{ ou } x = -3$$

$x = 4$ não é solução, pois ao substituirmos $x = 4$ obteremos -6 no logaritmando.

$$S = \{-3\}$$



Exemplo 2

3) Resolver em $\mathbb{R}$:

$$\log_2(3x - 5) = \log_2 10$$

A condição de existência (CE) do logaritmo será:

$$3x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5/3 \text{ (CE)}$$

$$\log_2(3x - 5) = \log_2 10 \Leftrightarrow 3x - 5 = 10$$

$$3x - 5 = 10 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5.$$

$$S = \{5\}$$

Exemplo 3

2) Resolver em $\mathbb{R}$:

$$\log_2^2 x + \log_2 x = 2$$

Chamamos $\log_2 x = y \Rightarrow y^2 - y = 2$

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -1$$

$$\log_2 x = y \begin{cases} \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4 \\ \log_2 x = -1 \Rightarrow x = 1/2 \end{cases}$$

$$S = \{1/2, 4\}$$

O que é?

É toda inequação que apresenta incógnita no logaritmo.

Podem ser classificadas em três tipos principais:

(1) $\log_b f(x) > \log_b g(x)$

(2) $\log_b f(x) \geq k$

(3) Exige uso de uma incógnita auxiliar.

Atenção

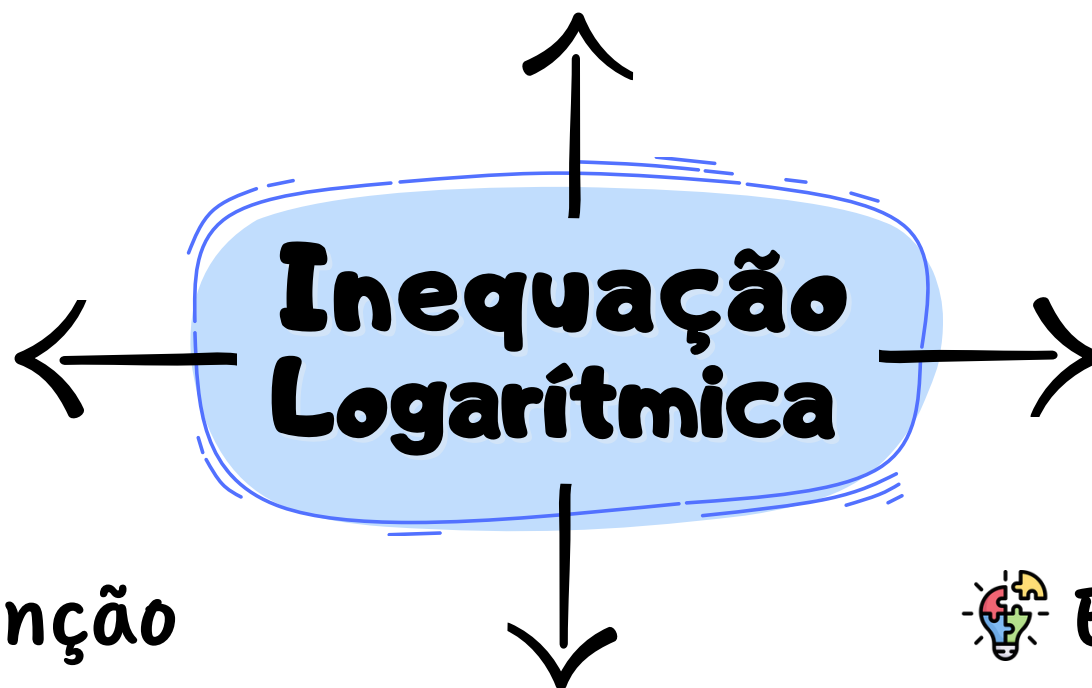
Da definição e da condição de existência dos logaritmos, temos:

(i) Se $b > 1$, então:

$$\log_b f(x) > \log_b g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0.$$

(ii) Se $0 < b < 1$, então:

$$\log_b f(x) > \log_b g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x).$$



Atenção

Para o tipo (2) temos:

$$\log_b f(x) > k \begin{cases} f(x) > b^k, & \text{se } b > 1 \\ 0 < f(x) < b^k, & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b f(x) < k \begin{cases} 0 < f(x) < b^k, & \text{se } b > 1 \\ f(x) > b^k, & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Exemplo

1) Resolver em $\mathbb{R}$:

$$\log_2(2x - 1) < \log_2 6.$$

Como a base é maior que 1, devemos obedecer a regra (i):

$$0 < 2x - 1 < 6 \Rightarrow 1/2 < x < 7/2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/2 < x < 7/2\}$$

Definição

é toda função dada por:

$$f(x) = \log_b x$$

$$0 < b \neq 1, (b \in \mathbb{R})$$

Crescimento

$b > 1$ crescente

$0 < b < 1$ decrescente

Importante

Seu gráfico corta o eixo ox no ponto de abscissa $x = 1$.

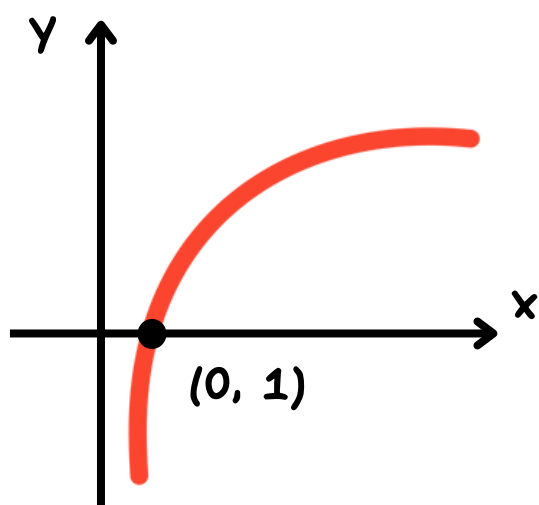
Função logarítmica

Importante

$D = \mathbb{R}_+^*$ $Im = \mathbb{R}$
domínio imagem

Gráfico

$$b > 1$$

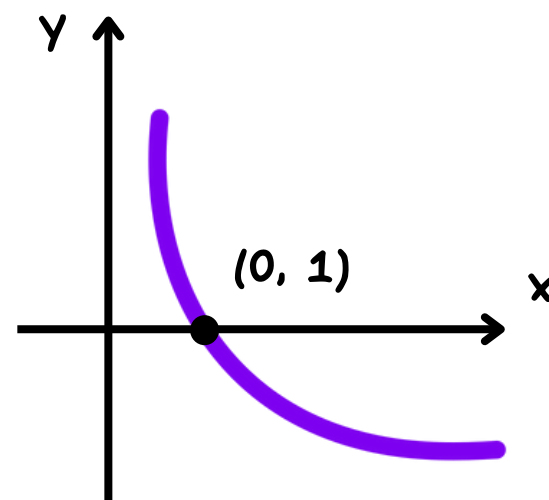


$$f(x) = \log_b x$$

$$f^{-1}(x) = b^x$$

Gráfico

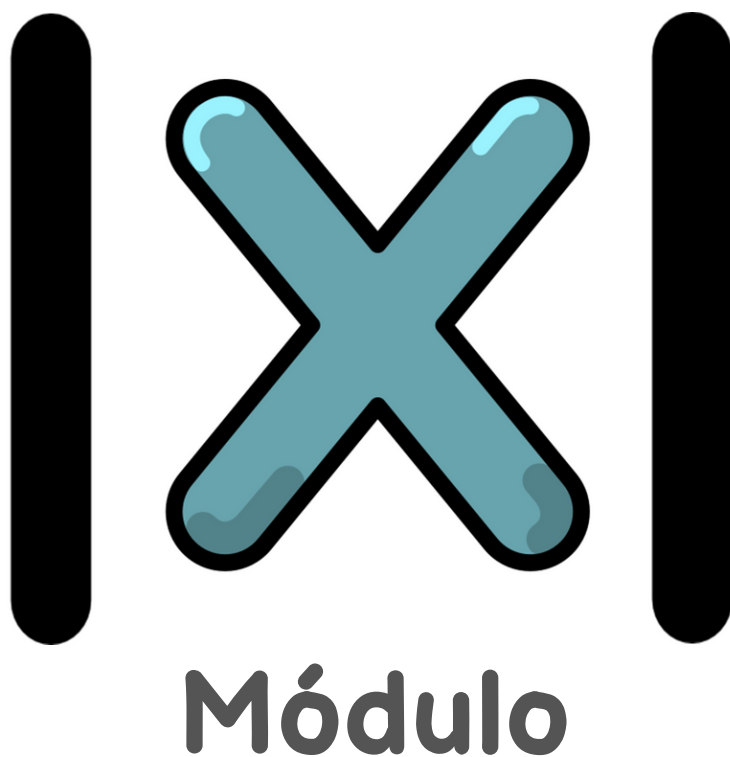
$$0 < b < 1$$



Definição

Sendo $x \in \mathbb{R}$, define-se módulo ou valor absoluto de x , que se indica por $|x|$, a seguinte relação:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



De modo simplificado

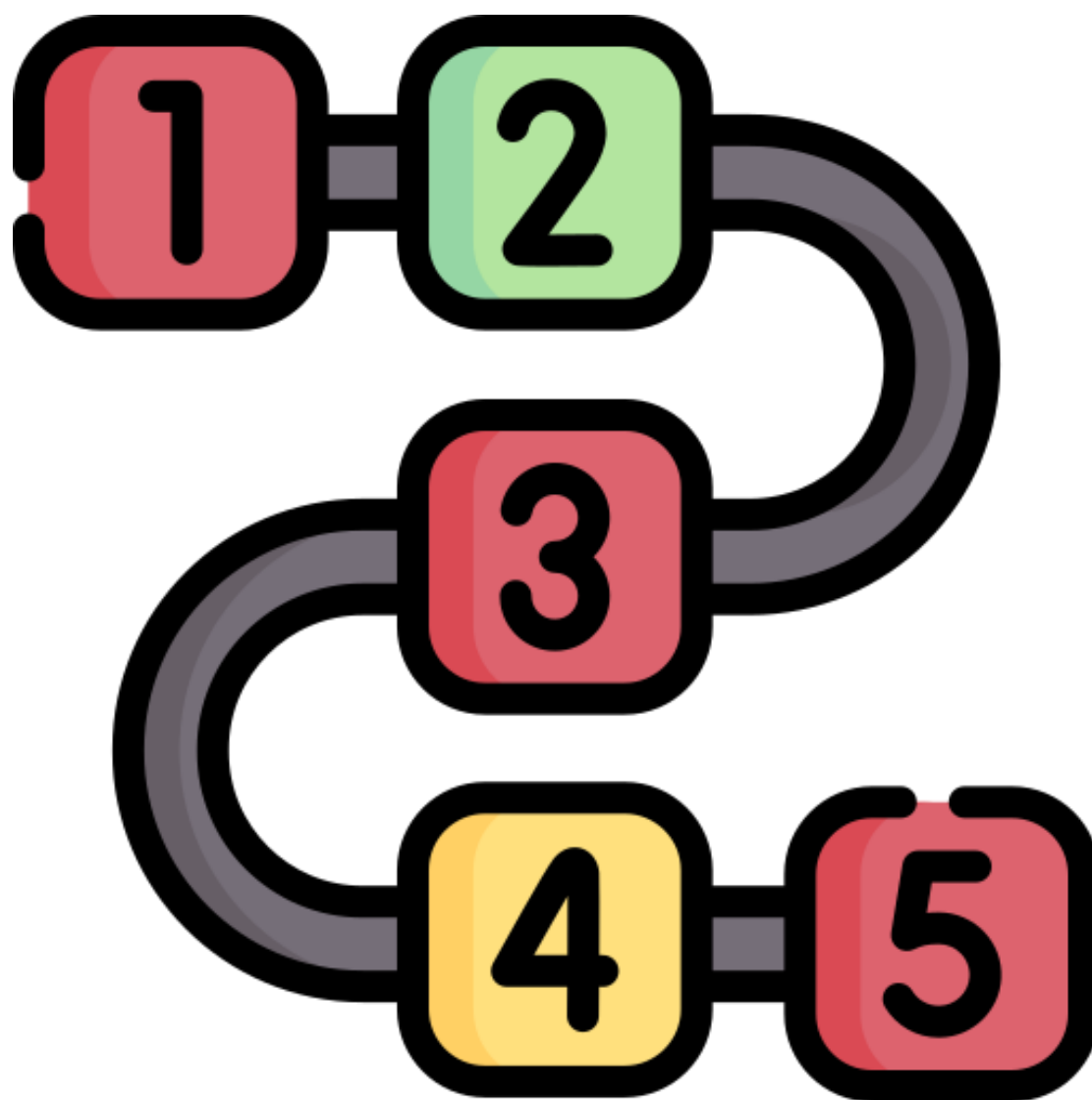
- i) o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número
- ii) o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

Propriedades

- 1º) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- 2º) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 3º) $|x| \cdot |y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- 4º) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
- 5º) $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

- 6º) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- 7º) $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- 8º) $|x| \leq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- 9º) $|x| \geq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$

Sequências



Termo Geral

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

r = razão da PA

P.A.

Progressão
Aritmética

Termo médio

$$PA = (a, b, c) \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

b é o termo médio

RAZÃO

$$PA = (a, b, c)$$

$$r = b - a = c - b$$

Soma dos termos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Termo Geral

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

q = razão da PG

RAZÃO

$$PG = (a, b, c)$$

$$q = b/a = c/b$$

P.G.

Progressão
Geométrica

Soma dos termos

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

PG de n termos

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

PG infinita
decrescente

Termo médio

$$PG = (a, b, c) \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$$

b é o termo médio. ($a \cdot c > 0$)

PROGRESSÕES

Aritmética

termo geral

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

r = razão da PA

Soma dos termos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Termo médio

$$PA = (a, b, c) \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

Geométrica

termo geral

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

q = razão da PG

Soma dos termos

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Termo médio

$$PG = (a, b, c) \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$$

a, b e c positivos

Estatística



aritmética

$$M_a = \frac{x + y + \dots + z}{n}$$

geométrica

$$M_g = \sqrt[n]{(x) \cdot (y) \cdot \dots \cdot (z)}$$

$x, y \dots z$, positivos

ponderada

$$M_p = \frac{x.a + y.b + \dots + z.c}{a + b + \dots c}$$

harmônica

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \dots + \frac{1}{z}}$$

n = número de termos

Estatística

MÉDIA

é a razão entre a soma dos termos de uma sequência e a quantidade desses termos.

sequência 6, 8, 9, 5, 4, 7, 3

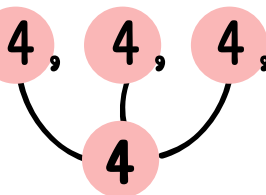
$$\text{Média} = \frac{\text{soma dos termos}}{\text{nº dos termos}} = \frac{42}{7} = 6$$

MODA

é o termo que apresenta a maior frequência na amostra.

sequência 4, 6, 8, 4, 9, 5, 4, 7, 7, 3

ordenando os termos 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9



$$\text{Moda} = 4$$

MEDIANA

é o valor que separa a metade maior e a metade menor de uma amostra,

sequências

nº de termos ímpares

3, 4, 5, 6, 7

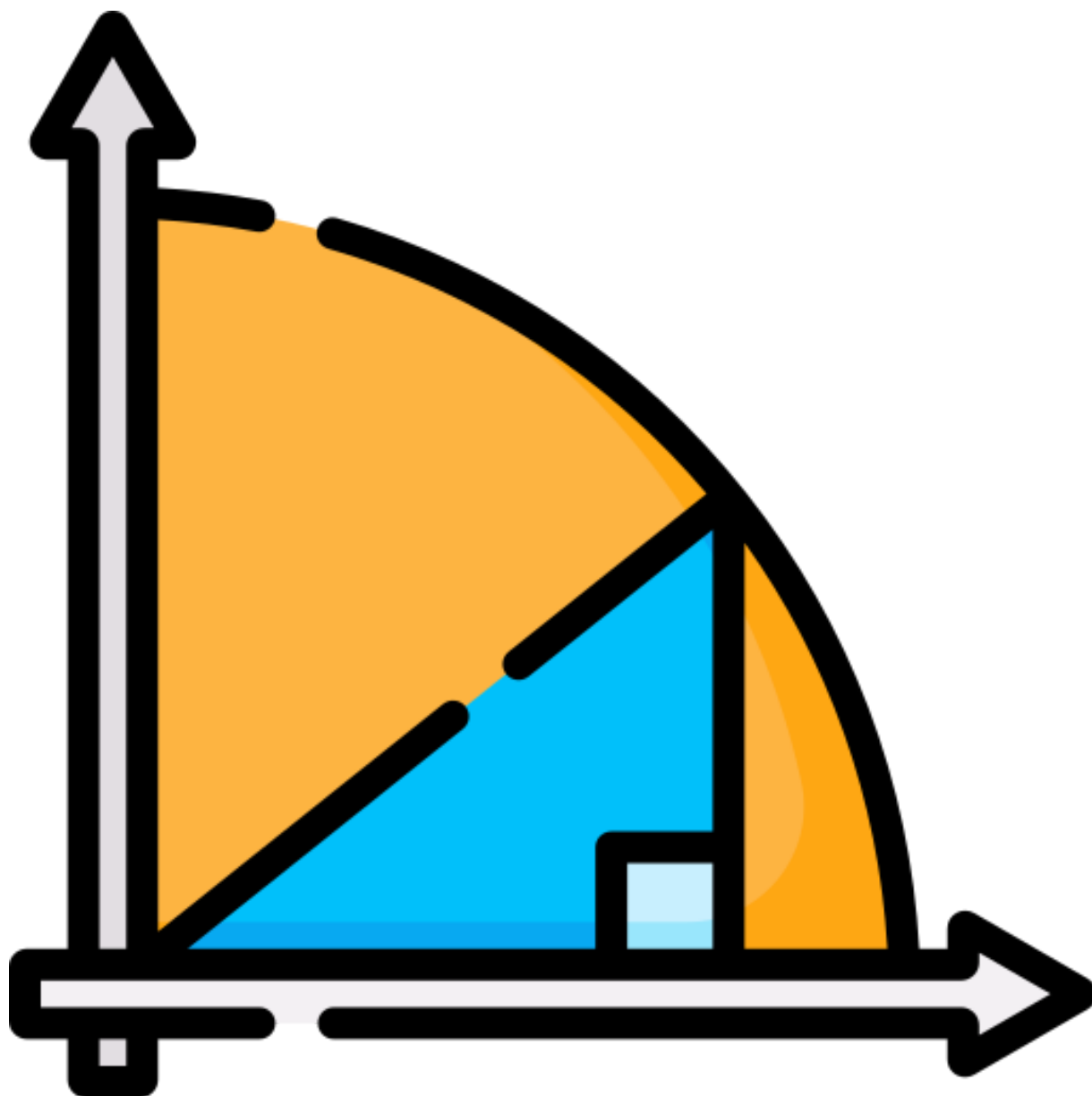
$$\text{Mediana} = 5$$

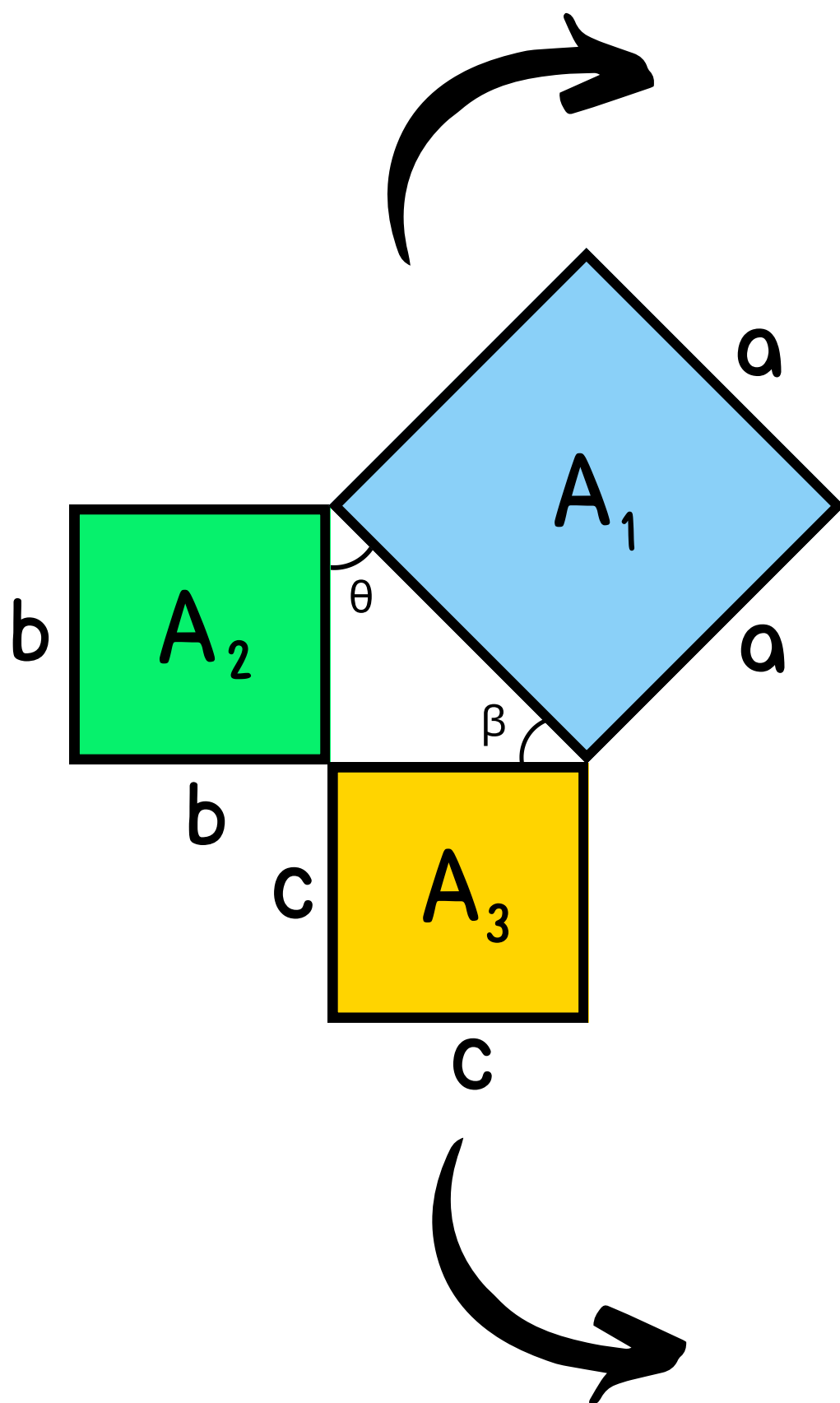
nº de termos pares

2, 3, 4, 5, 6, 7

$$\text{Mediana} = \frac{5 + 4}{2} = 4,5$$

Trigonometria





● Triângulo Retângulo

a - hipotenusa do triângulo

b e c - catetos

θ e β - ângulos agudos

Importante:

$$\theta + \beta = 90^\circ$$

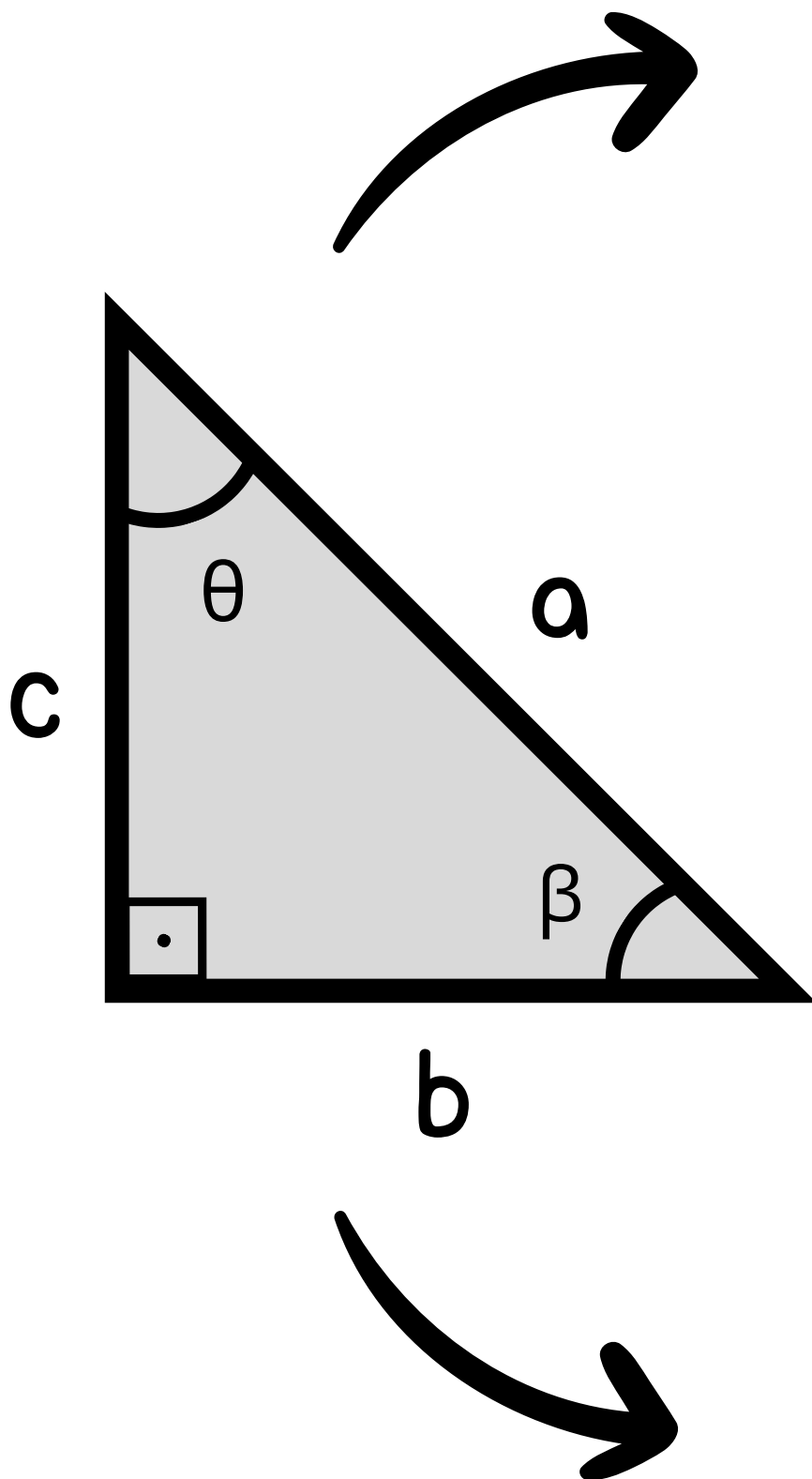
Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

$$A_1 = A_2 + A_3$$

$$a.a = b.b + c.c$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$



seno

$$\text{seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a} \quad \text{sen } \beta = \frac{c}{a}$$

Cosseno

$$\text{cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \theta = \frac{c}{a} \quad \cos \beta = \frac{b}{a}$$

tangente

$$\text{tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

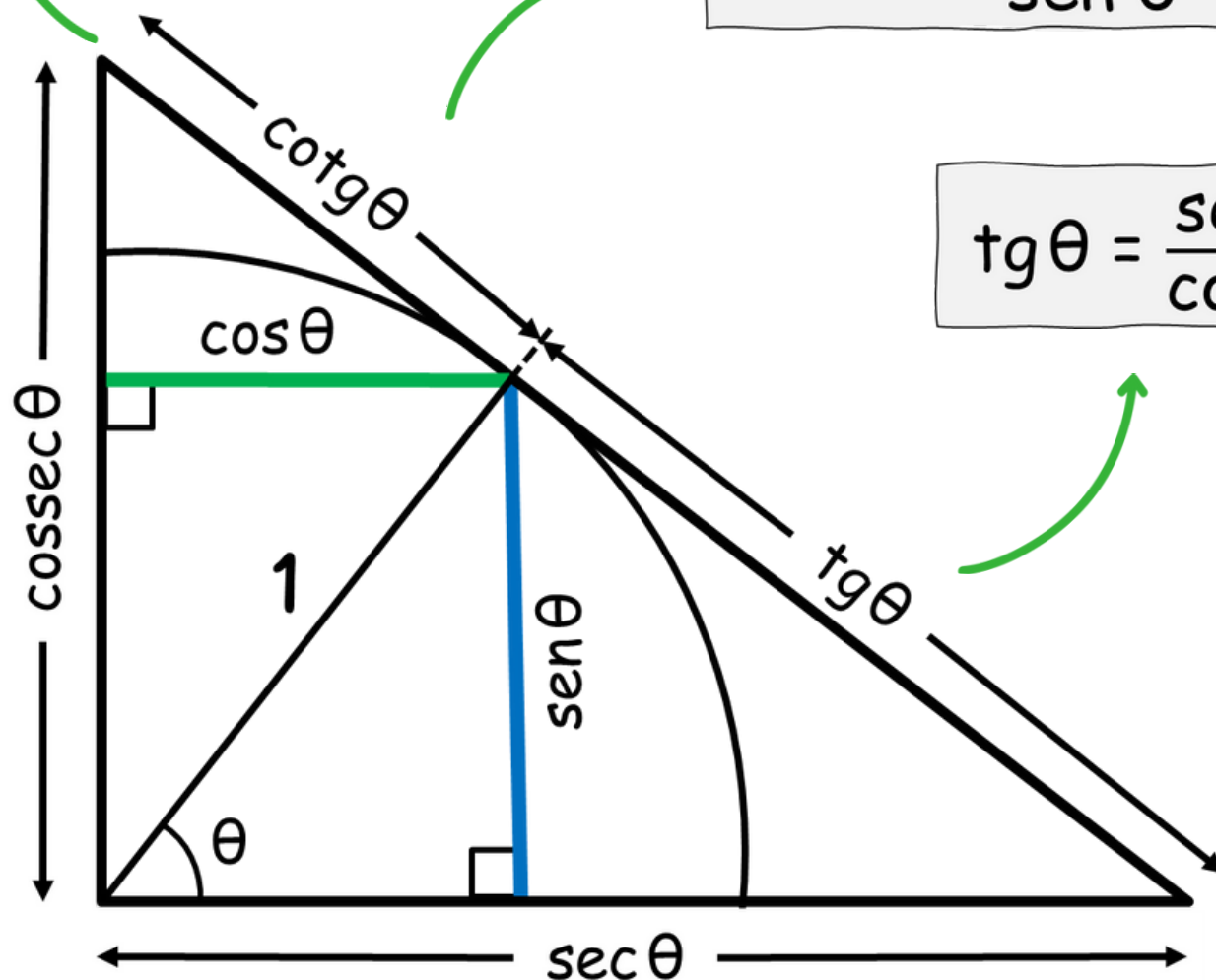
$$\text{tg } \theta = \frac{b}{c} \quad \text{tg } \beta = \frac{c}{b}$$

Relações

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cotg \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen} \theta}$$

$$\text{tg} \theta = \frac{\text{sen} \theta}{\cos \theta}$$

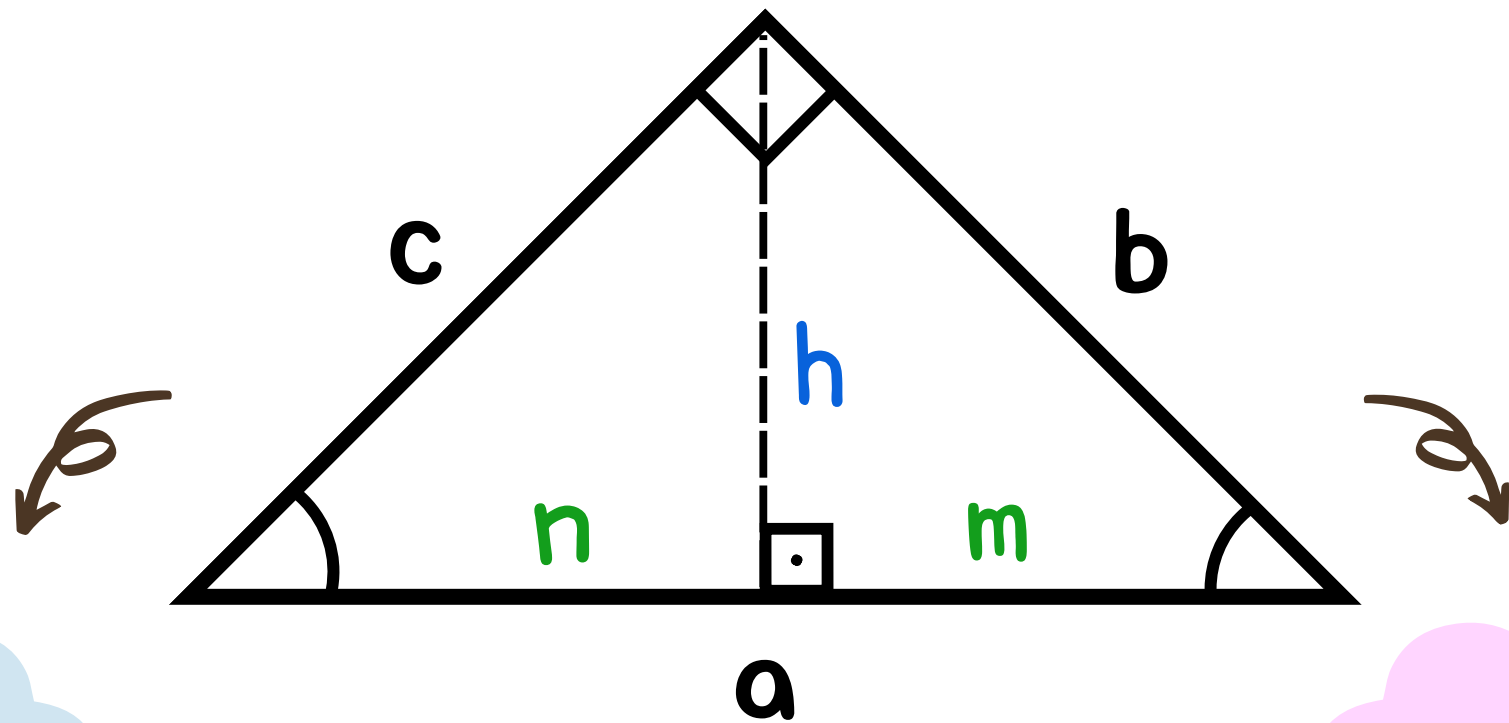


$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{cosec} \theta = \frac{1}{\text{sen} \theta}$$

Relações Métricas

TRIÂNGULO RETÂNGULO



$$c^2 = a.n$$

$$h^2 = m.n$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a.h = b.c$$

$$b^2 = a.m$$

Super Aulas

- ◆ | Matemática Criativa.
- ◆ | Mapas Mentais
- ◆ | Animações Matemáticas
- ◆ | Slides Criativos e Editáveis

site: superaulas.lojavirtualnuvem.com.br

