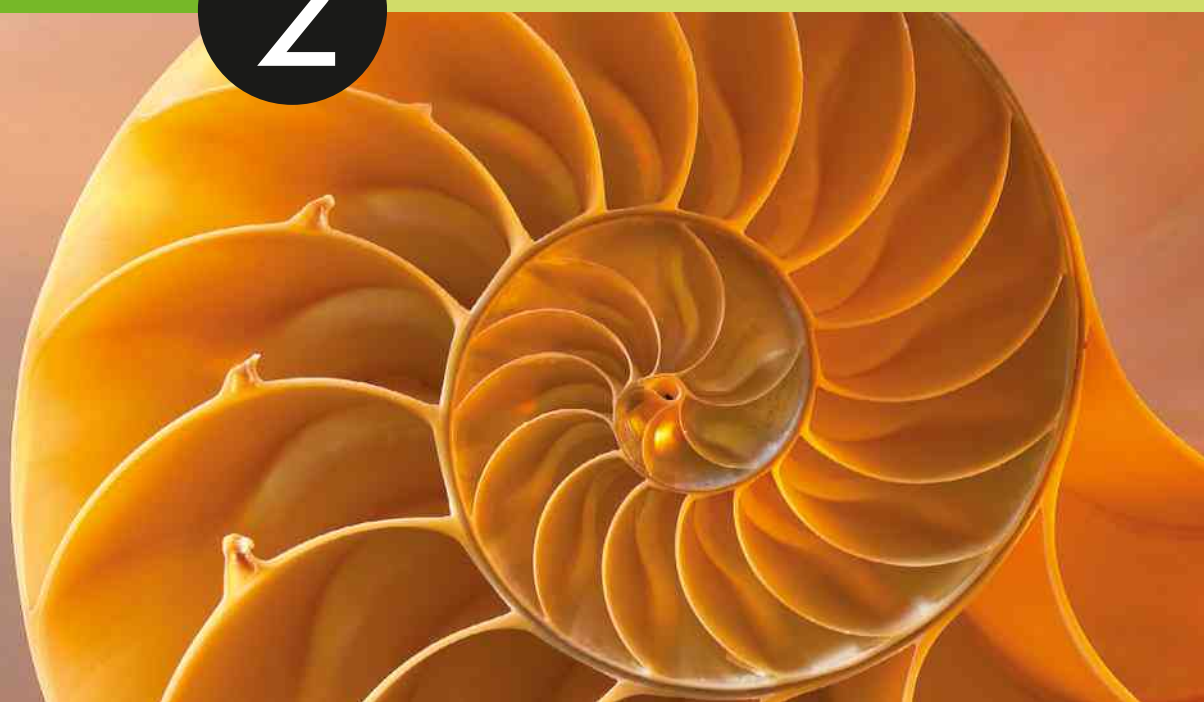


GELSON IEZZI  
OSVALDO DOLCE  
CARLOS MURAKAMI

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

## Logaritmos

2



# CAPÍTULO III

## Logaritmos

### I. Conceito de logaritmo

**38.** Lembremos que no estudo de equações e inequações exponenciais, feito anteriormente, só tratamos dos casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Se queremos resolver a equação  $2^x = 3$ , sabemos que  $x$  assume um valor entre 1 e 2, pois  $2^1 < 2^x = 3 < 2^2$ , mas com os conhecimentos adquiridos até aqui não sabemos qual é esse valor nem o processo para determiná-lo.

A fim de que possamos resolver esse e outros problemas, vamos iniciar neste capítulo o estudo de logaritmos.

### 39. Definição

Sendo  $a$  e  $b$  números reais e positivos, com  $a \neq 1$ , chama-se **logaritmo** de  $b$  na base  $a$  o expoente que se deve dar à base  $a$  de modo que a potência obtida seja igual a  $b$ .

Em símbolos: se  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a \neq 1$  e  $b > 0$ , então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Em  $\log_a b = x$ , dizemos:

$a$  é a **base** do logaritmo,  $b$  é o **logaritmando** e  $x$  é o **logaritmo**.

**40.** Exemplos:

1º)  $\log_2 8 = 3$ , pois  $2^3 = 8$

2º)  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ , pois  $3^{-2} = \frac{1}{9}$

3º)  $\log_5 5 = 1$ , pois  $5^1 = 5$

4º)  $\log_7 1 = 0$ , pois  $7^0 = 1$

5º)  $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ , pois  $4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

6º)  $\log_{0,2} 25 = -2$ , pois  $(0,2)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$

Com as restrições impostas ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a \neq 1$  e  $b > 0$ ), dados  $a$  e  $b$ , existe um único  $x = \log_a b$ .

A operação pela qual se determina o logaritmo de  $b$  ( $b \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ ) numa dada base  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$  e  $0 < a \neq 1$ ) é chamada **logaritmação** e o resultado dessa operação é o **logaritmo**.

**II. Antilogaritmo****41. Definição**

Sejam  $a$  e  $b$  números reais positivos com  $a \neq 1$ ; se o logaritmo de  $b$  na base  $a$  é  $x$ , então  $b$  é o **antilogaritmo** de  $x$  na base  $a$ .

Em símbolos, se  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a \neq 1$  e  $b > 0$ , então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = \text{antilog}_a x$$

Exemplos:

1º)  $\text{antilog}_3 2 = 9$ , pois  $\log_3 9 = 2$

2º)  $\text{antilog}_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{1}{8}$ , pois  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

3º)  $\text{antilog}_2 (-2) = \frac{1}{4}$ , pois  $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

## EXERCÍCIOS

**134.** Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a)  $\log_2 \frac{1}{8}$

b)  $\log_8 4$

c)  $\log_{0,25} 32$

**Solução**

a)  $\log_2 \frac{1}{8} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$

b)  $\log_8 4 = x \Rightarrow 8^x = 4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

c)  $\log_{0,25} 32 = x \Rightarrow (0,25)^x = 32 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 32 \Rightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Rightarrow -2x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

**135.** Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a)  $\log_4 16$

e)  $\log_7 \frac{1}{7}$

i)  $\log_9 \frac{1}{27}$

b)  $\log_3 \frac{1}{9}$

f)  $\log_{27} 81$

j)  $\log_{0,25} 8$

c)  $\log_{81} 3$

g)  $\log_{125} 25$

k)  $\log_{25} 0,008$

d)  $\log_{\frac{1}{2}} 8$

h)  $\log_{\frac{1}{4}} 32$

l)  $\log_{0,01} 0,001$

**136.** As indicações  $R_1$  e  $R_2$ , na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left( \frac{M_1}{M_2} \right)$$

em que  $M_1$  e  $M_2$  medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a  $R_1 = 8$  e outro correspondente a  $R_2 = 6$ . Calcule a razão  $\frac{M_1}{M_2}$ .

**137.** Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a)  $\log_2 \sqrt{2}$

d)  $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32}$

g)  $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{27}$

b)  $\log_{\sqrt[3]{7}} 49$

e)  $\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt[4]{5}$

h)  $\log_{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{\sqrt{8}}$

c)  $\log_{100} \sqrt[3]{10}$

f)  $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9}$

i)  $\log_{\sqrt[3]{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

**138.** Determine o conjunto verdade da equação  $\log_{\frac{3}{5}} \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = x$ .

**139.** Calcule a soma S nos seguintes casos:

a)  $S = \log_{100} 0,001 + \log_{1,5} \frac{4}{9} - \log_{1,25} 0,64$

b)  $S = \log_8 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} 8 - \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$

c)  $S = \log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt{\frac{1}{27}} - \log_{\sqrt[3]{0,5}} \sqrt{8} + \log_{\sqrt[3]{100}} \sqrt[6]{0,1}$

**140.** Calcule o valor de S:

$$S = \log_4 (\log_3 9) + \log_2 (\log_{81} 3) + \log_{0,8} (\log_{16} 32)$$

**141.** Calcule:

a)  $\text{antilog}_3 4$

b)  $\text{antilog}_{16} \frac{1}{2}$

c)  $\text{antilog}_3 -2$

d)  $\text{antilog}_{\frac{1}{2}} -4$

**142.** Determine o valor de x na equação  $y = 2^{\log_3 (x+4)}$  para que y seja igual a 8.

### III. Conseqüências da definição

**42.** Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para  $0 < a \neq 1, b > 0$ .

1ª) “O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a 0.”

$$\log_a 1 = 0$$

2ª) “O logaritmo da base em qualquer base é igual a 1.”

$$\log_a a = 1$$

3ª) “A potência de base  $a$  e expoente  $\log_a b$  é igual a  $b$ .”

$$a^{\log_a b} = b$$

A justificação dessa propriedade está no fato de que o logaritmo de  $b$  na base  $a$  é o expoente que se deve dar à base  $a$  para a potência obtida ficar igual a  $b$ .

4ª) “Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos forem iguais.”

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Demonstração:

$$\log_a b = \log_a c \quad \begin{array}{c} \text{(definição} \\ \Leftrightarrow \\ \text{de logaritmo)} \end{array} \quad a^{\log_a c} = b \quad \begin{array}{c} \text{(terceira} \\ \Leftrightarrow \\ \text{consequência)} \end{array} \quad c = b$$

## EXERCÍCIOS

**143.** Calcule o valor de:

a)  $8^{\log_2 5}$

b)  $3^{1+\log_3 4}$

### Solução

a)  $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$

b)  $3^{1+\log_3 4} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 4} = 3 \cdot 4 = 12$

**144.** Calcule o valor de:

a)  $3^{\log_3 2}$

d)  $8^{\log_4 5}$

g)  $8^{1+\log_2 3}$

b)  $4^{\log_2 3}$

e)  $2^{1+\log_2 5}$

h)  $9^{2-\log_3 \sqrt{2}}$

c)  $5^{\log_{25} 2}$

f)  $3^{2-\log_3 6}$

**145.** Calcule:

a)  $\text{antilog}_2 (\log_2 3)$

b)  $\text{antilog}_3 (\log_3 5)$

**146.** Se  $A = 5^{\log_{25} 2}$ , determine o valor de  $A^3$ .

**147.** Determine o valor de  $A$  tal que  $4^{\log_2 A} + 2A - 2 = 0$ .

## IV. Sistemas de logaritmos

**43.** Chamamos de **sistema de logaritmos** de base  $a$  o conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ). Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais e positivos é o sistema de logaritmos na base 2.

Entre a infinidade de valores que pode assumir a base  $e$ , portanto, entre a infinidade de sistemas de logaritmos, existem dois sistemas de logaritmos particularmente importantes:

a) **sistema de logaritmos decimais** — é o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos vulgares ou de Briggs, referência a Henry Briggs, matemático inglês (1556-1630), quem primeiro destacou a vantagem dos logaritmos de base 10, tendo publicado a primeira tábua (tabela) dos logaritmos de 1 a 1 000 em 1617.

Indicaremos o logaritmo decimal pela notação  $\log_{10} x$  ou simplesmente  $\log x$ .

b) **sistema de logaritmos neperianos** — é o sistema de base  $e$  ( $e = 2,71828\dots$  número irracional), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome *neperiano* vem de John Napier, matemático escocês (1550-1617), autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. O nome “natural” se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base  $e$ .

Indicaremos o logaritmo neperiano pelas notações  $\log_e x$  ou  $\ell n x$ . Em algumas publicações também encontramos as notações  $Lg x$  ou  $L x$ .

## EXERCÍCIOS

**148.** Seja  $x$  o número cujo logaritmo na base  $\sqrt[3]{9}$  é igual a 0,75. Determine o valor de  $x^2 - 1$ .

- 149.** O logaritmo de um número na base 16 é  $\frac{2}{3}$ . Calcule o logaritmo desse número na base  $\frac{1}{4}$ .
- 150.** Determine o número cujo logaritmo na base  $a$  é 4 e na base  $\frac{a}{3}$  é 8.
- 151.** Calcule o logaritmo de 144 no sistema de base  $2\sqrt{3}$ .
- 152.** Determine a base do sistema de logaritmos no qual o logaritmo de  $\sqrt{2}$  vale  $-1$ .

## V. Propriedades dos logaritmos

Vejamos agora as propriedades que tornam vantajoso o emprego de logaritmos nos cálculos.

### 44. 1ª) Logaritmo do produto

“Em qualquer base  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores.”

Em símbolos:

$$\begin{array}{l} \text{Se } 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } c > 0, \text{ então} \\ \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c. \end{array}$$

Demonstração:

Fazendo  $\log_a b = x$ ,  $\log_a c = y$  e  $\log_a (b \cdot c) = z$ , provemos que  $z = x + y$ .

De fato:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array} \right\} \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

## 45. Observações

1ª) Esta propriedade pode ser estendida para o caso do logaritmo do produto de  $n$  ( $n \geq 2$ ) fatores reais e positivos, isto é:

Se  $0 < a \neq 1$  e  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ , então:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \dots + \log_a b_n$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução sobre  $n$ .

a) Para  $n = 2$ , é verdadeira, isto é:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

b) Suponhamos que a propriedade seja válida para  $p \geq 2$  fatores, isto é:

$$\text{Hipótese } \{\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_p$$

e mostremos que a propriedade é válida para  $(p + 1)$  fatores, isto é:

$$\text{Tese } \{\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_p + \log_a b_{p+1}$$

Temos:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro da tese} &= \log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = \\ &= \log_a [(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p) \cdot b_{p+1}] = \log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p) + \log_a b_{p+1} = \\ &= \log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_p + \log_a b_{p+1} = 2^\circ \text{ membro da tese} \end{aligned}$$

2ª) Devemos observar que, se  $b > 0$  e  $c > 0$ , então  $b \cdot c > 0$  e vale a identidade

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \text{ com } 0 < a \neq 1$$

mas, se soubermos apenas  $b \cdot c > 0$ , então teremos:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c| \text{ com } 0 < a \neq 1$$

Exemplos:

$$1^\circ) \log_5 (3 \cdot 4) = \log_5 3 + \log_5 4$$

$$2^\circ) \log_4 (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_4 2 + \log_4 3 + \log_4 5$$

$$3^\circ) \log_6 3 \cdot (-4) \cdot (-5) = \log_6 3 + \log_6 |-4| + \log_6 |-5|$$

$$4^\circ) \text{ Se } x > 0, \text{ então } \log_2 [x \cdot (x + 1)] = \log_2 x + \log_2 (x + 1).$$

$$5^\circ) \log_3 [x \cdot (x - 2)] = \log_3 x + \log_3 (x - 2) \text{ se, e somente se, } x > 0 \text{ e } x - 2 > 0, \text{ isto é, } x > 2.$$

## 46. 2ª) Logaritmo do quociente

“Em qualquer base  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.”

Em símbolos:

Se  $0 < a \neq 1$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ , então

$$\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$$

Demonstração:

Fazendo  $\log_a b = x$ ,  $\log_a c = y$  e  $\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = z$ , mostremos que  $z = x - y$ .

De fato:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a b = x \quad \Rightarrow \quad a^x = b \\ \log_a c = y \quad \Rightarrow \quad a^y = c \\ \log_a \left( \frac{b}{c} \right) = z \quad \Rightarrow \quad a^z = \frac{b}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

## 47. Observações

1ª) Fazendo  $b = 1$ , escrevemos:

$$\log_a \frac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c \Rightarrow \log_a \frac{1}{c} = -\log_a c$$

2ª) Se  $b > 0$  e  $c > 0$ , então  $\frac{b}{c} > 0$  e vale a identidade:

$$\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c \quad \text{com } 0 < a \neq 1$$

mas, se soubermos apenas que  $\frac{b}{c} > 0$ , então teremos:

$$\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a |b| - \log_a |c| \quad \text{com } 0 < a \neq 1$$

Exemplos:

$$1^{\circ}) \log_5 \left( \frac{2}{3} \right) = \log_5 2 - \log_5 3$$

$$2^{\circ}) \log \left( \frac{2 \cdot 3}{5} \right) = \log (2 \cdot 3) - \log 5 = \log 2 + \log 3 - \log 5$$

$$3^{\circ}) \log \left( \frac{2}{3 \cdot 5} \right) = \log 2 - \log (3 \cdot 5) = \log 2 - [\log 3 + \log 5] = \\ = \log 2 - \log 3 - \log 5$$

$$4^{\circ}) \text{ Se } x > 0, \text{ então } \log_2 \left( \frac{x}{x+1} \right) = \log_2 x - \log_2 (x+1).$$

$$5^{\circ}) \log_3 \frac{x+1}{x-1} = \log_3 (x+1) - \log_3 (x-1) \text{ se, e somente se,} \\ x+1 > 0 \text{ e } x-1 > 0, \text{ isto é, } x > 1.$$

## 48. Cologaritmo

Chama-se **cologaritmo** de um número  $b$  ( $b \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$ ), numa base  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$  e  $0 < a \neq 1$ ), o oposto do logaritmo de  $b$  na base  $a$ .

Em símbolos:

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, \text{ e } b > 0, \text{ então} \\ \text{colog}_a b = -\log_a b.$$

Considerando que  $\log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$ , temos:

$$\text{Se } 0 < a \neq 1 \text{ e } b > 0, \text{ então} \\ \text{colog}_a b = \log_a \frac{1}{b}.$$

Exemplos:

$$1^{\circ}) \text{ colog}_2 5 = -\log_2 5 = \log_2 \frac{1}{5}$$

$$2^{\circ}) \text{ colog}_2 \frac{1}{3} = -\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3$$

$$3^\circ) \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log 2 - \log 3 = \log 2 + \operatorname{colog} 3$$

$$4^\circ) \text{ Se } x > 1, \text{ então } \log_3 x - \log_3 (x - 1) = \log_3 x + \operatorname{colog}_3 (x - 1).$$

## 49. 3ª) Logaritmo da potência

“Em qualquer base  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.”

Em símbolos:

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ então} \\ \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b.$$

Demonstração:

Fazendo  $\log_a b = x$  e  $\log_a b^\alpha = y$ , provemos que  $y = \alpha \cdot x$ .

De fato:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^\alpha = y \Rightarrow a^y = b^\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a^y = (a^x)^\alpha \Rightarrow a^y = a^{\alpha \cdot x} \Rightarrow y = \alpha \cdot x$$

## 50. Observações

1ª) Como corolário desta propriedade, decorre:

“Em qualquer base  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ), o logaritmo da raiz enésima de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando.”

Em símbolos:

$$\text{Se } 0 < a \neq 1 \text{ e } b > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^*, \text{ então} \\ \log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

2ª) Se  $b > 0$ , então  $b^\alpha > 0$  para todo  $\alpha$  real e vale a identidade:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$$

mas, se soubermos apenas que  $b^\alpha > 0$ , então teremos:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a |b|$$

Exemplos:

$$1^{\circ}) \log_3 2^5 = 5 \cdot \log_3 2$$

$$2^{\circ}) \log_5 \sqrt[3]{2} = \log_5 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_5 2$$

$$3^{\circ}) \log_2 \left( \frac{1}{3^4} \right) = \log_2 3^{-4} = -4 \cdot \log_2 3$$

$$4^{\circ}) \log (x - 1)^4 = 4 \cdot \log (x - 1) \text{ se, e somente se, } x - 1 > 0, \text{ isto é, } x > 1.$$

$$5^{\circ}) \text{ Se } x \neq 0, \text{ então } \log x^2 = 2 \cdot \log |x|.$$

### 51. As propriedades

$$1^{\text{a})} \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$2^{\text{a})} \log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$3^{\text{a})} \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$$

válidas com as devidas restrições para  $a$ ,  $b$  e  $c$  nos permitem obter o logaritmo de um produto, de um quociente ou de uma potência, conhecendo somente os logaritmos dos termos do produto, dos termos do quociente ou da base da potência.

Notemos a impossibilidade de obter o logaritmo de uma soma ou de uma diferença por meio de regras análogas às dadas. Assim, para encontrarmos

$$\log_a (b + c) \quad \text{e} \quad \log_a (b - c)$$

devemos, respectivamente, calcular inicialmente  $(b + c)$  e  $(b - c)$ .

**52.** As expressões que envolvem somente as operações de multiplicação, divisão e potenciação são chamadas **expressões logarítmicas**, isto é, expressões que podem ser calculadas utilizando logaritmos, com as restrições já conhecidas. Assim, por exemplo, a expressão

$$A = \frac{a^\alpha \cdot \sqrt[n]{b}}{c^\beta}$$

em que  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ , pode ser calculada aplicando logaritmos:

$$A = \frac{a^\alpha \cdot \sqrt[n]{b}}{c^\beta} \Rightarrow \log A = \log \frac{a^\alpha \cdot \sqrt[n]{b}}{c^\beta} \Rightarrow \log A = \log (a^\alpha \cdot b^{\frac{1}{n}}) - \log c^\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log A = \alpha \cdot \log a + \frac{1}{n} \log b - \beta \log c$$

Dispondo de uma tabela que dê  $\log a$ ,  $\log b$  e  $\log c$  (veja nas páginas 134 e 135), calculamos  $\log A$  e, então, pela mesma tabela, obtemos  $A$ .

## EXERCÍCIOS

**153.** Desenvolva, aplicando as propriedades dos logaritmos ( $a$ ,  $b$  e  $c$  são reais positivos):

a)  $\log_2 \left( \frac{2ab}{c} \right)$

b)  $\log_3 \left( \frac{a^3 b^2}{c^4} \right)$

c)  $\log \left( \frac{a^3}{b^2 \sqrt{c}} \right)$

### Solução

a)  $\log_2 \left( \frac{2ab}{c} \right) = \log_2 (2ab) - \log_2 c = \log_2 2 + \log_2 a + \log_2 b - \log_2 c =$   
 $= 1 + \log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$

b)  $\log_3 \left( \frac{a^3 b^2}{c^4} \right) = \log_3 (a^3 b^2) - \log_3 c^4 = \log_3 a^3 + \log_3 b^2 - \log_3 c^4 =$   
 $= 3 \log_3 a + 2 \log_3 b - 4 \log_3 c$

c)  $\log \left( \frac{a^3}{b^2 \sqrt{c}} \right) = \log a^3 - \log (b^2 \sqrt{c}) = \log a^3 - (\log b^2 + \log c^{\frac{1}{2}}) =$   
 $= 3 \log a - 2 \log b - \frac{1}{2} \log c$

**154.** Desenvolva, aplicando as propriedades dos logaritmos ( $a$ ,  $b$  e  $c$  são reais positivos):

a)  $\log_5 \left( \frac{5a}{bc} \right)$

d)  $\log_3 \left( \frac{a \cdot b^3}{c \cdot \sqrt[3]{a^2}} \right)$

g)  $\log_2 \sqrt[3]{\frac{4a\sqrt{ab}}{b^3 \sqrt[3]{a^2 b}}}$

b)  $\log_3 \left( \frac{ab^2}{c} \right)$

e)  $\log \sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}$

h)  $\log \left( \sqrt[3]{\frac{a^4 \sqrt{ab}}{b^2 \sqrt[3]{bc}}} \right)^2$

c)  $\log_2 \left( \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}} \right)$

f)  $\log \sqrt[3]{\frac{a}{b^2 \cdot \sqrt{c}}}$

**155.** Se  $m = \frac{b \cdot c}{d^2}$ , determine  $\log m$ .

**156.** Seja  $x = \frac{\sqrt{a}}{bc}$ . Calcule  $\log x$ .

**157.** Desenvolva, aplicando as propriedades dos logaritmos ( $a > b > c > 0$ ):

a)  $\log_2 \frac{2a}{a^2 - b^2}$

c)  $\log \left( c \cdot \sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}} \right)$

b)  $\log_3 \left( \frac{a^2 \sqrt{bc}}{\sqrt[5]{(a+b)^3}} \right)$

d)  $\log \left( \frac{\sqrt[5]{a(a-b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$

**158.** Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é:

$$1 + \log_2 a - \log_2 b - 2 \log_2 c \quad (a, b \text{ e } c \text{ são reais positivos})?$$

**Solução**

$$\begin{aligned} 1 + \log_2 a - \log_2 b - 2 \log_2 c &= \log_2 2 + \log_2 a - (\log_2 b + 2 \log_2 c) = \\ &= \log_2 (2a) - \log_2 (b \cdot c^2) = \log_2 \left( \frac{2a}{b \cdot c^2} \right) \end{aligned}$$

A expressão é  $\frac{2a}{bc^2}$ .

**159.** Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é dado abaixo ( $a, b$  e  $c$  são reais positivos)?

a)  $\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$

b)  $2 \log a - \log b - 3 \log c$

c)  $2 - \log_3 a + 3 \log_3 b - 2 \log_3 c$

d)  $\frac{1}{2} \log a - 2 \log b - \frac{1}{3} \log c$

e)  $\frac{1}{3} \log a - \frac{1}{2} \log c - \frac{3}{2} \log b$

f)  $2 + \frac{1}{3} \log_2 a + \frac{1}{6} \log_2 b - \log_2 c$

g)  $\frac{1}{4} (\log a - 3 \log b - 2 \log c)$

**160.** Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é dado abaixo ( $a > b > c > 0$ )?

- a)  $1 + \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b)$   
 b)  $2 \log (a + b) - 3 \log a - \log (a - b)$   
 c)  $\frac{1}{2} \log (a - b) + \log a - \log (a + b)$   
 d)  $\frac{1}{2} \log (a^2 + b^2) - \left[ \frac{1}{3} \log (a + b) - \log (a - b) \right]$   
 e)  $\frac{3 \log (a - b) - 2 \log (a + b) + 4 \log b}{5}$

**161.** Se  $\log x = \log b + 2 \log c - \frac{1}{3} \log a$ , determine o valor de  $x$ .

**162.** Se  $\log 2 = a$  e  $\log 3 = b$ , coloque em função de  $a$  e  $b$  os seguintes logaritmos decimais:

- a)  $\log 6$  e)  $\log 0,5$   
 b)  $\log 4$  f)  $\log 20$   
 c)  $\log 12$  g)  $\log 5$  (**Sugestão:**  $5 = \frac{10}{2}$ .)  
 d)  $\log \sqrt{2}$  h)  $\log 15$

**163.** O pH de uma solução é definido por  $\text{pH} = \log_{10} \left( \frac{1}{\text{H}^+} \right)$ , em que  $\text{H}^+$  é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. Determine o pH de uma solução tal que  $\text{H}^+ = 1,0 \cdot 10^{-8}$ .

**164.** Sabendo que  $\log 2 = 0,3010$ , determine o valor da expressão  $\log \frac{125}{\sqrt[3]{2}}$ .

**165.** Se  $\log_{10} 2 = 0,301$ , calcule o valor da expressão  $\log_{10} 20 + \log_{10} 40 + \log_{10} 800$ .

**166.** Determine a razão entre os logaritmos de 16 e 4 numa base qualquer.

**167.** Se  $\log a + \log b = p$ , calcule o valor de  $\log \frac{1}{a} + \log \frac{1}{b}$ .

**168.** Se  $\log_2 (a - b) = m$  e  $(a + b) = 8$ , determine  $\log_2 (a^2 - b^2)$ .

**169.** A soma dos logaritmos de dois números na base 9 é  $\frac{1}{2}$ . Determine o produto desses números.

**170.** Se  $\log_a x = n$  e  $\log_a y = 6n$ , calcule  $\log_a \sqrt[3]{x^2 y}$ .

**171.** Sabe-se que  $\log_m 2 = a$  e  $\log_m 3 = b$ . Calcule o valor de  $\log_m \frac{64}{2,7} - \log_m 60$ .

**172.** Sendo  $\text{colog}_2 \frac{1}{32} = x$  e  $\log_y 256 = 4$ , determine o valor de  $x + y$ .

**173.** Sabendo que  $\log 2 = 0,3010300$ , quanto vale  $\log 2^{20} = \log 1\,048\,576$ ?

**174.** Sendo  $\log_{10} 2 \cong 0,3$ , determine o menor número natural  $n$  que verifica a relação  $2^n > 10^4$ .

## VI. Mudança de base

**53.** Há ocasiões em que logaritmos em bases diferentes precisam ser convertidos para uma única base conveniente.

Por exemplo:

1º) na aplicação das propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos numa mesma base.

2º) mais adiante (\*) falaremos da tábua de logaritmos, uma tabela de valores que possibilita determinar o valor do logaritmo decimal de qualquer número real positivo. Se quisermos determinar o valor de um logaritmo não decimal, devemos antes transformá-lo em logaritmo decimal para depois procurar o valor na tabela.

Vejamos o processo que permite converter o logaritmo de um número positivo, em uma certa base, para outro em base conveniente.

### 54. Propriedade

Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais positivos e  $a$  e  $c$  diferentes de 1, então tem-se:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(\*) Ver capítulo VII.

Demonstração:

Consideremos  $\log_a b = x$ ,  $\log_c b = y$  e  $\log_c a = z$  e notemos que  $z \neq 0$ , pois  $a \neq 1$ .

Provemos que  $x = \frac{y}{z}$ .

De fato:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_c b = y \Rightarrow c^y = b \\ \log_c a = z \Rightarrow c^z = a \end{array} \right\} \Rightarrow (c^z)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

## 55. Exemplos:

1º)  $\log_3 5$  convertido para a base 2 fica:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

2º)  $\log_2 7$  convertido para a base 10 fica:

$$\log_2 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2}$$

3º)  $\log_{100} 3$  convertido para a base 10 fica:

$$\log_{100} 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} 3}{2} = \frac{1}{2} \log_{10} 3$$

## 56. Observação

A propriedade da mudança de base pode também ser assim apresentada: se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais e positivos e  $a$  e  $c$  diferentes de 1, então tem-se:

$$\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c$$

Demonstração:

A demonstração é simples, basta que passemos o  $\log_c b$  para a base  $a$ :

$$\log_c b \cdot \log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \log_a c = \log_a b$$

## 57. Conseqüências

1ª) Se  $a$  e  $b$  são reais positivos e diferentes de 1, então tem-se:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Demonstração:

Convertendo  $\log_a b$  para a base  $b$ , temos:  $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$ .

2ª) Se  $a$  e  $b$  são reais positivos com  $a$  diferente de 1 e  $\beta$  é um real não nulo, então tem-se:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

Demonstração:

Devemos considerar dois casos:

1º caso:

Se  $b = 1$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} \log_a 1 = 0 \\ \log_{a^\beta} 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \log_{a^\beta} 1 = \frac{1}{\beta} \log_a 1$$

2º caso:

Se  $b \neq 1$ , temos:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\log_b a^\beta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$$

Exemplos:

$$1^\circ) \log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3} \log_2 3$$

$$2^\circ) \log_{\frac{1}{5}} 6 = \log_{5^{-1}} 6 = -\log_5 6$$

$$3^\circ) \log_{\frac{1}{9}} 5 = \log_{3^{-2}} 5 = -\frac{1}{2} \log_3 5$$

## EXERCÍCIOS

**175.** Sabendo que  $\log_{30} 3 = a$  e  $\log_{30} 5 = b$ , calcule  $\log_{10} 2$ .

**Solução**

Notando que  $2 = \frac{30}{3 \cdot 5}$  e  $10 = \frac{30}{3}$ , temos:

$$\begin{aligned} \log_{10} 2 &= \frac{\log_{30} 2}{\log_{30} 10} = \frac{\log_{30} \left( \frac{30}{3 \cdot 5} \right)}{\log_{30} \left( \frac{30}{3} \right)} = \frac{\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5}{\log_{30} 30 - \log_{30} 3} = \\ &= \frac{1 - a - b}{1 - a} \end{aligned}$$

**176.** Sabendo que  $\log_{20} 2 = a$  e  $\log_{20} 3 = b$ , calcule  $\log_6 5$ .

**177.** Se  $\log_{ab} a = 4$ , calcule  $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ .

**178.** Se  $\log_{12} 27 = a$ , calcule  $\log_6 16$ .

**179.** Calcule o valor de  $\log_{0,04} 125$ .

**180.** Se  $\log_2 m = k$ , determine o valor de  $\log_8 m$ .

**181.** Dados  $\log_{10} 2 = a$  e  $\log_{10} 3 = b$ , calcule  $\log_9 20$ .

**182.** Calcule o valor de  $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$ .

**183.** Se  $m = \log_b a$ ,  $m \neq 0$ , calcule  $\log_{\frac{1}{a}} b^2$ .

**184.** Determine o valor de

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9$$

**185.** Se  $ab = 1$ , calcule  $\log_b \sqrt{a}$ .

**186.** Sabendo que  $\log_{14} 7 = a$  e  $\log_{14} 5 = b$ , calcule o valor de  $\log_{35} 28$ .

**Sugestão:**  $28 = \frac{14^2}{7}$ .

**187.** Calcule  $A = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$ .

**188.** Simplifique  $a^{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d}$ .

**189.** Simplifique  $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$ .

**190.** Demonstre que a relação entre os logaritmos de dois números positivos e diferentes de 1 independe da base considerada.

**191.** Se  $a, b$  e  $c$  são reais positivos com  $a \neq 1$  e  $ac \neq 1$ , prove que:

$$\log_a b = (\log_{ac} b) (1 + \log_a c)$$

**192.** Se  $a, b$  e  $c$  são reais positivos, diferentes de 1, e  $a = b \cdot c$ , prove que:

$$\frac{1}{\log_a c} = 1 + \frac{1}{\log_b c}$$

**193.** Se  $a, b$  e  $c$  são reais positivos, diferentes de 1, e  $a \cdot b \neq 1$ , prove que:

$$\frac{\log_a c \cdot \log_b c}{(\log_{ab} c)^2} = \frac{(1 + \log_a b)^2}{\log_a b}$$

**194.** Se  $a, b, c$  e  $d$  são reais positivos, diferentes de 1, e  $a \cdot b \neq 1$ , prove que:

$$\log_a d \cdot \log_b d + \log_b d \cdot \log_c d + \log_c d \cdot \log_a d = \frac{\log_a d \cdot \log_b d \cdot \log_c d}{\log_{abc} d}$$

**195.** Se  $a$  e  $b$  são reais positivos, prove que:  $a^{\log b} = b^{\log a}$ .

**196.** Se  $a, b, c$  e  $d$  são reais positivos,  $a$  e  $c$  diferentes de 1, prove que:

$$\log_a b^{(\log_c d)} = \log_c d^{(\log_a b)}$$

**197.** Se  $x = \log_c(ab)$ ,  $y = \log_b(ac)$  e  $z = \log_a(bc)$ , prove que:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$$

**198.** Se  $a, b, c$  e  $d$  são reais positivos, diferentes de 1 e dois a dois distintos, prove a

equivalência:  $\frac{\log_a d}{\log_c d} = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} \Leftrightarrow b^2 = ac$ .

**199.** Se  $a$  e  $b$  são raízes da equação  $x^2 - px + q = 0$  ( $p > 0$  e  $0 < q \neq 1$ ), demonstre que:

$$\log_q a^a + \log_q b^b + \log_q a^b + \log_q b^a = p$$

**200.** Se  $a, b$  e  $c$  são as medidas dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa de medida  $a$  e sabendo que  $a - b \neq 1$  e  $a + b \neq 1$ , demonstre que:

$$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = 2 \log_{a+b} c \cdot \log_{a-b} c$$