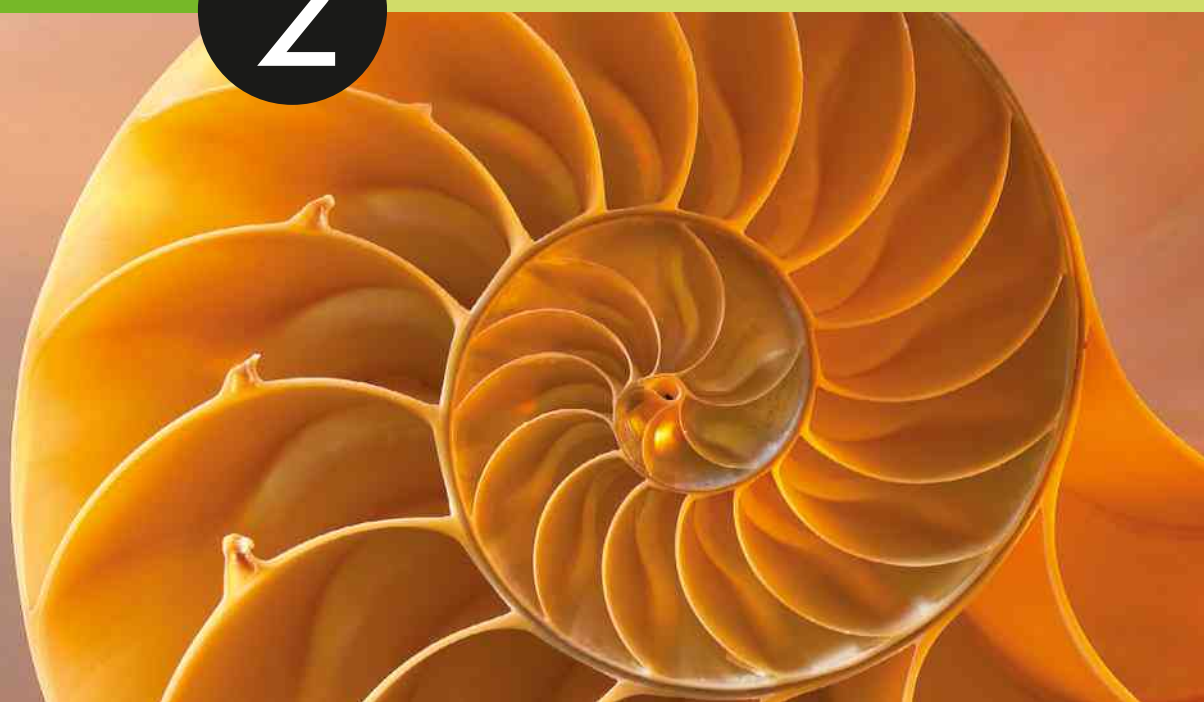


GELSON IEZZI  
OSVALDO DOLCE  
CARLOS MURAKAMI

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

## Logaritmos

2



# CAPÍTULO I

## Potências e raízes

### I. Potência de expoente natural

#### 1. Definição

Seja  $a$  um número real e  $n$  um número natural. Potência de base  $a$  e expoente  $n$  é o número  $a^n$  tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1, \text{ para } a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n, n \geq 1 \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 &= a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

e, de modo geral, para  $p$  natural e  $p \geq 2$ , temos que  $a^p$  é um produto de  $p$  fatores iguais a  $a$ .

#### 2. Exemplos:

1º)  $3^0 = 1$

2º)  $(-2)^0 = 1$

3º)  $5^1 = 5$

4º)  $\left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$

5º)  $(-3)^1 = -3$

6º)  $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

7º)  $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

8º)  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

9º)  $(-0,1)^5 = (-0,1)(-0,1)(-0,1)(-0,1)(-0,1) = -0,00001$

10º)  $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

11º)  $0^1 = 0$

## EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a)  $(-3)^2$

b)  $-3^2$

c)  $-2^3$

d)  $-(-2)^3$

### Solução

a)  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

b)  $-3^2 = -(3) \cdot (3) = -9$

c)  $-2^3 = -(2)(2)(2) = -8$

d)  $-(-2)^3 = -(-2)(-2)(-2) = 8$

2. Calcule:

a)  $(-3)^3$

e)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

i)  $-2^2$

m)  $0^7$

b)  $(-2)^1$

f)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

j)  $-\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

n)  $(-4)^0$

c)  $3^4$

g)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

k)  $(-1)^{10}$

o)  $-5^0$

d)  $1^7$

h)  $\left(\frac{2}{3}\right)^0$

l)  $(-1)^{13}$

p)  $-(-1)^{15}$

### 3. Propriedades

Se  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , com  $a \neq 0$  ou  $n \neq 0$ , então valem as seguintes propriedades:

$$[P_1] \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$[P_2] \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0 \text{ e } m \geq n$$

$$[P_3] \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \text{ com } b \neq 0 \text{ ou } n \neq 0$$

$$[P_4] \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$[P_5] \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Demonstração de  $P_1$  (por indução sobre  $n$ )

Consideremos  $m$  fixo.

1º) A propriedade é verdadeira para  $n = 0$ , pois:

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$$

2º) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para  $n = p$ , isto é,  $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$ , e mostremos que é verdadeira para  $n = p + 1$ , isto é,  $a^m \cdot a^{p+1} = a^{m+p+1}$ . De fato:

$$a^m \cdot a^{p+1} = a^m \cdot (a^p \cdot a) = (a^m \cdot a^p) \cdot a = a^{m+p} \cdot a = a^{m+p+1}$$

Demonstração de  $P_3$  (por indução sobre  $n$ )

1º) A propriedade é verdadeira para  $n = 0$ , pois:

$$(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$$

2º) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para  $n = p$ , isto é,  $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ , e mostremos que é verdadeira para  $n = p + 1$ , isto é,  $(a \cdot b)^{p+1} = a^{p+1} \cdot b^{p+1}$ . De fato:

$$(a \cdot b)^{p+1} = (a \cdot b)^p \cdot (a \cdot b) = (a^p \cdot b^p) \cdot (a \cdot b) = (a^p \cdot a) \cdot (b^p \cdot b) = a^{p+1} \cdot b^{p+1}$$

Demonstração de  $P_5$  (por indução sobre  $n$ )

Consideremos  $m$  fixo.

1º) A propriedade é verdadeira para  $n = 0$ , pois:

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^m \cdot 0$$

2º) Supondo que a propriedade seja verdadeira para  $n = p$ , isto é,  $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$ , mostremos que é verdadeira para  $n = p + 1$ , isto é,  $(a^m)^{p+1} = a^{m \cdot (p+1)}$ . De fato:

$$(a^m)^{p+1} = (a^m)^p \cdot (a^m) = a^{m \cdot p} \cdot a^m = a^{m \cdot p + m} = a^{m(p+1)}$$

As demonstrações das propriedades  $P_2$  e  $P_4$  ficam como exercícios.

As propriedades  $P_1$  a  $P_5$  têm grande aplicação nos cálculos com potências. A elas nos referiremos com o nome simplificado de **propriedades (P)** nos itens seguintes.

Nas “ampliações” que faremos logo a seguir do conceito de potência, procuraremos manter sempre válidas as propriedades (P), isto é, essas propriedades serão estendidas sucessivamente para potências de expoente inteiro, racional e real.

**4.** Na definição da potência  $a^n$ , a base  $a$  pode ser um número real positivo, nulo ou negativo.

Vejamos o que ocorre em cada um desses casos:

1º caso

$$a = 0 \Rightarrow 0^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

2º caso

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

isto é, toda potência de base real positiva e expoente  $n \in \mathbb{N}$  é um número real positivo.

3º caso

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ a^{2n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

isto é, toda potência de base negativa e expoente par é um número real positivo e toda potência de base negativa e expoente ímpar é um número real negativo.

## EXERCÍCIOS

3. Se  $n \in \mathbb{N}$ , calcule o valor de  $A = (-1)^{2n} - (-1)^{2n+3} + (-1)^{3n} - (-1)^n$ .
4. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:
- |                            |                               |
|----------------------------|-------------------------------|
| a) $5^3 \cdot 5^2 = 5^6$   | e) $(5^3)^2 = 5^6$            |
| b) $3^6 : 3^2 = 3^3$       | f) $(-2)^6 = 2^6$             |
| c) $2^3 \cdot 3 = 6^3$     | g) $\frac{2^7}{2^5} = (-2)^2$ |
| d) $(2 + 3)^4 = 2^4 + 3^4$ | h) $5^2 - 4^2 = 3^2$          |
5. Simplifique  $(a^4 \cdot b^3)^3 \cdot (a^2 \cdot b)^2$ .

### Solução

$$(a^4 \cdot b^3)^3 \cdot (a^2 \cdot b)^2 = (a^4 \cdot 3 \cdot b^3 \cdot 3) \cdot (a^2 \cdot 2 \cdot b^2) = a^{12} \cdot b^9 \cdot a^4 \cdot b^2 = a^{12+4} \cdot b^{9+2} = a^{16} \cdot b^{11}$$

6. Simplifique as expressões, supondo  $a \cdot b \neq 0$ .
- |  |
|--|
| a) $(a^2 \cdot b^3)^2 \cdot (a^3 \cdot b^2)^3$                           |
| b) $\frac{(a^4 \cdot b^2)^3}{(a \cdot b^2)^2}$                           |
| c) $[(a^3 \cdot b^2)^2]^3$   |
| d) $\left(\frac{a^4 \cdot b^3}{a^2 \cdot b}\right)^5$                    |
| e) $\frac{(a^2 \cdot b^3)^4 \cdot (a^3 \cdot b^4)^2}{(a^3 \cdot b^2)^3}$ |
7. Se  $a$  e  $b$  são número reais, então em que condições  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ?
8. Determine o menor número inteiro positivo  $x$  para que  $2940x = M^3$ , em que  $M$  é um número inteiro.
9. Determine o último algarismo (algarismo das unidades) do número  $14^{(14^{14})}$ .

## II. Potência de expoente inteiro negativo

### 5. Definição

Dado um número real  $a$ , não nulo, e um número  $n$  natural, define-se a potência  $a^{-n}$  pela relação

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo.

### 6. Exemplos:

$$1^\circ) 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$2^\circ) 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$3^\circ) (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

$$4^\circ) \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$$

$$5^\circ) \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{-\frac{1}{32}} = -32$$

## EXERCÍCIOS

10. Calcule o valor das expressões:

$$a) \frac{2^{-1} - (-2)^2 + (-2)^{-1}}{2^2 - 2^{-2}}$$

$$b) \frac{3^2 - 3^{-2}}{3^2 + 3^{-2}}$$

$$c) \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3}$$

**11.** Calcule:

- |                 |                                     |                                      |                            |
|-----------------|-------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| a) $3^{-1}$     | f) $(-3)^{-2}$                      | k) $-\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$  | p) $(0,75)^{-2}$           |
| b) $(-2)^{-1}$  | g) $-5^{-2}$                        | l) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ | q) $\frac{1}{2^{-3}}$      |
| c) $-3^{-1}$    | h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$  | m) $(0,1)^{-2}$                      | r) $\frac{1}{(0,2)^{-2}}$  |
| d) $-(-3)^{-1}$ | i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$  | n) $(0,25)^{-3}$                     | s) $\frac{1}{(-3)^{-3}}$   |
| e) $2^{-2}$     | j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$ | o) $(-0,5)^{-3}$                     | t) $\frac{1}{(0,01)^{-2}}$ |

**12.** Remova os expoentes negativos e simplifique a expressão  $\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$ , em que  $x, y \in \mathbb{R}^*$ .

## 7. Observações

1ª) Com a definição de potência de expoente inteiro negativo, a propriedade (P<sub>2</sub>)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

passa a ter significado para  $m < n$ .

2ª) Se  $a = 0$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0^{-n}$  é um símbolo sem significado.

**8.** Com as definições de potência de expoente natural e potência de expoente inteiro negativo, podemos estabelecer a seguinte definição:

Se  $a \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , então:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ e } a \neq 0 \\ a^{n-1} \cdot a & \text{se } n > 0 \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Estas potências têm as propriedades (P)

$$[P_1] a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$[P_2] \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$[P_3] (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$[P_4] \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$[P_5] (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

em que  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .

## EXERCÍCIOS

**13.** Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

a)  $(5^3)^{-2} = 5^{-6}$

f)  $\frac{5^2}{5^{-6}} = 5^8$

b)  $2^{-4} = -16$

g)  $2^{-1} - 3^{-1} = 6^{-1}$

c)  $(\pi + 2)^{-2} = \pi^{-2} + 2^{-2}$

h)  $\pi^1 + \pi^{-1} = 1$

d)  $3^{-4} \cdot 3^5 = \frac{1}{3}$

i)  $(2^{-3})^{-2} = 2^6$

e)  $\frac{7^{-2}}{7^{-5}} = 7^{-3}$

j)  $3^2 \cdot 3^{-2} = 1$

**14.** Se  $a \cdot b \neq 0$ , simplifique  $\frac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2}}{(a^{-4} \cdot b^3)^3}$ .

### Solução

$$\frac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2}}{(a^{-4} \cdot b^3)^3} = \frac{a^{3(-2)} \cdot b^{(-2) \cdot (-2)}}{a^{-4 \cdot 3} \cdot b^{3 \cdot 3}} = \frac{a^{-6} \cdot b^4}{a^{-12} \cdot b^9} = a^{-6 - (-12)} \cdot b^{4 - 9} =$$

$$= a^6 \cdot b^{-5} = \frac{a^6}{b^5}$$



2ª) Observemos na definição dada que:

$$\sqrt{36} = 6 \text{ e não } \sqrt{36} = \pm 6$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \text{ e não } \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

mas

$$-\sqrt[3]{8} = -2, -\sqrt{4} = -2, \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

são sentenças verdadeiras em que o radical “não é causador” do sinal que o antecede.

3ª) Devemos estar atentos ao cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito, pois:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemplos:

1º)  $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$  e não  $\sqrt{(-5)^2} = -5$

2º)  $\sqrt{x^2} = |x|$  e não  $\sqrt{x^2} = x$

## EXERCÍCIOS

**17.** Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

a)  $\sqrt[3]{27} = 3$

c)  $\sqrt[4]{1} = 1$

e)  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

b)  $\sqrt{4} = \pm 2$

d)  $-\sqrt{9} = -3$

f)  $\sqrt[3]{0} = 0$

**18.** Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

a)  $\sqrt{x^4} = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

b)  $\sqrt{x^{10}} = x^5, \forall x \in \mathbb{R}$

c)  $\sqrt{x^6} = x^3, \forall x \in \mathbb{R}_+$

d)  $\sqrt{(x-1)^2} = x-1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 1$

e)  $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq 3$

19. Determine a raiz quadrada aritmética de  $(x - 1)^2$ .

### Solução

$$\sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ 1 - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

20. Determine a raiz quadrada aritmética de:

a)  $(x + 2)^2$       b)  $(2x - 3)^2$       c)  $x^2 - 6x + 9$       d)  $4x^2 + 4x + 1$

## 11. Propriedades

Se  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $p \in \mathbb{N}^*$ , temos:

**[R<sub>1</sub>]**  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ , para  $a \neq 0$  ou  $m \neq 0$

**[R<sub>2</sub>]**  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

**[R<sub>3</sub>]**  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  ( $b \neq 0$ )

**[R<sub>4</sub>]**  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ , para  $a \neq 0$  ou  $m \neq 0$

**[R<sub>5</sub>]**  $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

Demonstração:

**[R<sub>1</sub>]**  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

Façamos  $\sqrt[n]{a^m} = x$ , então:

$$x^{np} = (\sqrt[n]{a^m})^{np} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = [a^m]^p \Rightarrow x = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

**[R<sub>2</sub>]**  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Façamos  $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ , então:

$$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab \Rightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

**[R<sub>4</sub>]**  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Considerando  $n$  fixo e  $m \geq 0$ , provaremos por indução sobre  $m$ :

1º) A propriedade é verdadeira para  $m = 0$ , pois:

$$(\sqrt[n]{a})^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}$$

2º) Supondo a propriedade verdadeira para  $m = p$ , isto é,  $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$ , prove-mos que é verdadeira para  $m = p + 1$ , isto é:

$$(\sqrt[n]{a})^{p+1} = \sqrt[n]{a^{p+1}}$$

De fato:

$$(\sqrt[n]{a})^{p+1} = (\sqrt[n]{a})^p \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p \cdot a} = \sqrt[n]{a^{p+1}}$$

Se  $m < 0$ , façamos  $-m = q > 0$ , então:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^q} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^q}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**[R<sub>5</sub>]**  $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Façamos  $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$ ; então:

$$x^p = (\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}})^p = \sqrt[n]{a} \Rightarrow (x^p)^n = (\sqrt[n]{a})^n \Rightarrow x^{pn} = a \Rightarrow x = \sqrt[pn]{a}$$

A verificação da propriedade R<sub>3</sub> fica como exercício.

## 12. Observação

Notemos que, se  $b \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ , temos:

1º) para  $b \geq 0$ ,  $b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}$

2º) para  $b < 0$ ,  $b \cdot \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a \cdot |b|^n}$

isto é, o coeficiente ( $b$ ) do radical ( $a$  menos do sinal) pode ser colocado no radicando com expoente igual ao índice do radical.

Exemplos:

1º)  $2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

2º)  $-5\sqrt{2} = -\sqrt{2 \cdot 5^2} = -\sqrt{50}$

3º)  $-2\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{2 \cdot 2^4} = -\sqrt[4]{32}$

## EXERCÍCIOS

21. Simplifique os radicais:

a)  $\sqrt[3]{64}$

b)  $\sqrt{576}$

c)  $\sqrt{12}$

d)  $\sqrt[3]{2^7}$

### Solução

a)  $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

b)  $\sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^2} = 2^3 \cdot 3 = 24$

c)  $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

d)  $\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

22. Simplifique os radicais:

a)  $\sqrt{144}$

c)  $\sqrt[3]{729}$

e)  $\sqrt[4]{625}$

g)  $\sqrt{128}$

i)  $\sqrt[4]{512}$

b)  $\sqrt{324}$

d)  $\sqrt{196}$

f)  $\sqrt{18}$

h)  $\sqrt[3]{72}$

23. Simplifique as expressões:

a)  $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{72} - \sqrt{50}$

b)  $5\sqrt{108} + 2\sqrt{243} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}$

c)  $\sqrt{20} - \sqrt{24} + \sqrt{125} - \sqrt{54}$

d)  $\sqrt{2000} + \sqrt{200} + \sqrt{20} + \sqrt{2}$

e)  $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

f)  $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192}$

g)  $a\sqrt[3]{ab^4} + b\sqrt[3]{a^4b} + \sqrt[3]{a^4b^4} - 3ab\sqrt[3]{ab}$

24. Simplifique:

a)  $\sqrt{81x^3}$

b)  $\sqrt{45x^3y^2}$

c)  $\sqrt{12x^4y^5}$

d)  $\sqrt{8x^2}$

25. Reduza ao mesmo índice  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{2}$  e  $\sqrt[4]{5}$ .

### Solução

O mínimo múltiplo comum entre 2, 3 e 4 é 12; então, reduzindo ao índice 12, temos:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6}, \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} \text{ e } \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$$

26. Reduza ao mesmo índice:

a)  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{3}$

c)  $\sqrt[3]{2^2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{5^3}$

b)  $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{5}$

d)  $\sqrt[3]{3^2}, \sqrt{2^3}, \sqrt[5]{5^4}, \sqrt[6]{2^5}$

27. Efetue as operações indicadas com as raízes:

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

c)  $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$

e)  $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2}$

b)  $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

d)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$

f)  $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} : \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

**Solução**

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$

b)  $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c)  $\sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 2} = \sqrt{3}$

d)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$

e)  $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{(2^2)^4} : \sqrt[12]{2^3} = \frac{\sqrt[12]{2^8}}{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^8}{2^3}} = \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12]{32}$

f)  $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} : \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = \sqrt[15]{\frac{5^5}{2^5}} : \sqrt[15]{\frac{1}{2^3}} = \sqrt[15]{\frac{5^5}{2^5} \cdot \frac{1}{2^3}} = \sqrt[15]{\frac{5^5}{2^8}}$

28. Efetue as operações indicadas com as raízes:

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

f)  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$

k)  $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{5}$

b)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{30}$

g)  $\sqrt{6} : \sqrt{3}$

l)  $\sqrt[3]{3} : \sqrt{2}$

c)  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{18}$

h)  $\sqrt{24} : \sqrt{6}$

m)  $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}$

d)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$

i)  $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{2}$

n)  $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$

e)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$

j)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

o)  $\frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt{15}}$

29. Efetue as operações:

a)  $(\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$

b)  $(3 + \sqrt{2}) \cdot (5 - 3\sqrt{2})$

c)  $(5 - 2\sqrt{3})^2$

**Solução**

- a)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{75} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} - 2\sqrt{81} + 3 \cdot \sqrt{225} =$   
 $= 6 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 15 = 33$
- b)  $(3 + \sqrt{2}) \cdot (5 - 3\sqrt{2}) = 15 - 9\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6 = 9 - 4\sqrt{2}$
- c)  $(5 - 2\sqrt{3})^2 = 25 - 20\sqrt{3} + 12 = 37 - 20\sqrt{3}$

**30. Efetue as operações:**

- a)  $2\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{5} - 2\sqrt{20} - \sqrt{45})$  g)  $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{7})$   
 b)  $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}) : 2\sqrt{5}$  h)  $(3 + \sqrt{2})^2$   
 c)  $(6 + \sqrt{2}) \cdot (5 - \sqrt{2})$  i)  $(4 - \sqrt{5})^2$   
 d)  $(3 + \sqrt{5}) \cdot (7 - \sqrt{5})$  j)  $(2 + 3\sqrt{7})^2$   
 e)  $(\sqrt{2} + 3) \cdot (\sqrt{2} - 4)$  k)  $(1 - \sqrt{2})^4$   
 f)  $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \cdot (5\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

**31. Efetue:**

- a)  $(4\sqrt{8} - 2\sqrt{18}) : \sqrt[3]{2}$   
 b)  $(3\sqrt{12} + 2\sqrt{48}) : \sqrt[4]{3}$   
 c)  $(3\sqrt{18} + 2\sqrt{8} + 3\sqrt{32} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt[4]{2}$   
 d)  $(\sqrt{8} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[4]{4}) : \sqrt{2}$

**32. Efetue:**

- a)  $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 1}$   
 b)  $\sqrt{7 + \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{24}}$   
 c)  $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$   
 d)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

**33. Simplifique:**

- a)  $\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a^2 - b}$   
 b)  $(2\sqrt{x \cdot y} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) : \sqrt{xy}$   
 c)  $\left(a \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{ab} + b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \cdot \sqrt{ab}$   
 d)  $\sqrt{p + \sqrt{p^2 - 1}} \cdot \sqrt{p - \sqrt{p^2 - 1}}$   
 e)  $\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - y^3}} \cdot \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - y^3}}$

34. Simplifique as raízes:

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

b)  $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$

c)  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

35. Racionalize os denominadores das frações:

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c)  $\frac{5}{3 - \sqrt{7}}$

d)  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

**Solução**

a)  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

c)  $\frac{5}{3 - \sqrt{7}} = \frac{5}{3 - \sqrt{7}} \cdot \frac{3 + \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}} = \frac{5(3 + \sqrt{7})}{2}$

d)  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{2} - 3} =$   
 $= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{4}$

36. Racionalize o denominador de cada fração:

a)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$

g)  $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

m)  $\frac{1}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b)  $\frac{4}{\sqrt{5}}$

h)  $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}$

n)  $\frac{4}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$

c)  $\frac{3}{\sqrt{6}}$

i)  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

o)  $\frac{1}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

d)  $\frac{10}{3\sqrt{5}}$

j)  $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

p)  $\frac{5}{2 - \sqrt{5} + \sqrt{2}}$

e)  $\frac{4}{2\sqrt{3}}$

k)  $\frac{2}{3 + 2\sqrt{2}}$

q)  $\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}$

f)  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

l)  $\frac{6}{5 - 3\sqrt{2}}$

r)  $\frac{\sqrt[3]{9} - 1}{\sqrt[3]{3} - 1}$

**37.** Determine o valor da expressão  $\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt{2} - 1}$ .

**38.** Simplifique:

a)  $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$

b)  $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

c)  $\frac{\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{125}}{\sqrt{12} + \sqrt{108} - \sqrt{180}}$

d)  $\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{17 - 12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}}$

**39.** Simplifique a expressão:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

**40.** Simplifique a expressão  $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$ , sabendo que  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$ ,  $(0 < b < a)$ .

**41.** Mostre que  $\sqrt[3]{9(\sqrt[3]{2} - 1)} = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ .

**42.** Mostre que  $\frac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}}$ .

**43.** Calcule o valor de  $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$

**44.** Qual o valor que se obtém ao subtrair  $\frac{5}{8 - 3\sqrt{7}}$  de  $\frac{12}{\sqrt{7} + 3}$ ?

## IV. Potência de expoente racional

### 13. Definição

Dados  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  ( $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{N}^*$ ), define-se potência de base  $a$  e expoente  $\frac{p}{q}$  pela relação:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Se  $a = 0$  e  $\frac{p}{q} > 0$ , adotamos a seguinte definição especial:

$$0^{\frac{p}{q}} = 0$$

Exemplos:

1º)  $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

3º)  $7^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{49}}$

2º)  $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

4º)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

### 14. Observações

1ª) O símbolo  $0^{\frac{p}{q}}$  com  $\frac{p}{q} < 0$  não tem significado, pois  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  e  $q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \Rightarrow p < 0 \Rightarrow 0^p$  não tem significado.

2ª) Toda potência de base positiva e expoente racional é um número real positivo:

$$a > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$$

## EXERCÍCIOS

45. Expresse na forma de potência de expoente racional os seguintes radicais:

a)  $\sqrt{5}$

d)  $\sqrt{\sqrt{2}}$

g)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b)  $\sqrt[3]{4}$

e)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$

h)  $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

c)  $\sqrt[4]{27}$

f)  $(\sqrt[3]{22})^2$

i)  $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)^2$

46. Calcule, substituindo as potências de expoente racional pelos correspondentes radicais:

a)  $8^{\frac{1}{3}}$

d)  $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

g)  $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

b)  $64^{-\frac{1}{2}}$

e)  $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{5}}$

h)  $(0,81)^{-\frac{1}{2}}$

c)  $(0,25)^{-\frac{1}{2}}$

f)  $27^{-\frac{2}{3}}$

i)  $(0,01)^{-0,5}$

## 15. Propriedades

As propriedades (P) verificam-se para as potências de expoente racional.

Se  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  e  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ , então valem as seguintes propriedades:

$$[P_1] a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

$$[P_2] \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$$

$$[P_3] (a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

$$[P_4] \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$$

$$[P_5] \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$$

Demonstrações:

$$[P_1] a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

$$[P_3] (a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

$$[P_5] \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{p \cdot r}}} = a^{p \cdot \frac{r}{s} \cdot \frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$$

Deixamos a demonstração das propriedades  $P_2$  e  $P_4$  como exercício.

## EXERCÍCIOS

47. Simplifique, fazendo uso das propriedades (P):

a)  $16^{\frac{3}{4}}$

b)  $27^{-\frac{4}{3}}$

c)  $(81^2)^{\frac{1}{4}}$

**Solução**

a)  $16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

b)  $27^{-\frac{4}{3}} = (3^3)^{-\frac{4}{3}} = 3^{-4} = \frac{1}{81}$

c)  $(81^2)^{\frac{1}{4}} = [(3^4)^2]^{\frac{1}{4}} = 3^2 = 9$

**48.** Simplifique fazendo uso das propriedades (P):

a)  $9^{\frac{3}{2}}$

e)  $81^{-0,25}$

i)  $(32^2)^{-0,4}$

b)  $8^{\frac{4}{3}}$

f)  $256^{\frac{5}{4}}$

j)  $(343^{-2})^{\frac{1}{3}}$

c)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

g)  $1024^{\frac{1}{10}}$

k)  $(243^{-2})^{-\frac{2}{5}}$

d)  $64^{-\frac{2}{3}}$

h)  $(16^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{5}}$

l)  $(216^2)^{\frac{1}{3}}$

**49.** Simplifique:

a)  $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{5}}$

e)  $\frac{3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}$

b)  $3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

f)  $(27^{\frac{2}{3}} - 27^{-\frac{2}{3}}) \cdot (16^{\frac{3}{4}} - 16^{-\frac{3}{4}})$

c)  $\frac{5^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}}}$

g)  $(125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

d)  $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 3^{\frac{1}{60}}}$

**50.** Determine o valor da expressão  $(0,064^{\frac{1}{3}}) \cdot (0,0625^{\frac{1}{4}})$ .

**51.** Determine o valor da expressão  $5x^0 + 3x^{\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$ , para  $x = 16$ .

**52.** Determine o valor da expressão  $\frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$ .

**53.** Simplifique, supondo  $a > 0$  e  $b > 0$ :

a)  $(n+3\sqrt[n-1]{a^2} \cdot n+1\sqrt[n-1]{a-1})^{n^2-1}$

b)  $a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-1}} \cdot \sqrt{a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}}$

c)  $(a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}) \cdot (a\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2a^2} + \sqrt[3]{4})$

d)  $\frac{b-a}{a+b} \cdot \left[ a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^{-1} - \left( \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \right]$

e)  $\sqrt{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-2} + 1}$

f)  $[(a\sqrt{a} + b\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-1} + 3\sqrt{ab}]^{\frac{1}{2}}$

54. Se  $a > 0$ , mostre que:

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}} + 1} + \frac{1}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{8}} + 1} - \frac{2 \cdot (a^{\frac{1}{4}} - 1)}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} + 1} = \frac{4}{a + \sqrt{a} + 1}$$

## V. Potência de expoente irracional

16. Dados um número real  $a > 0$  e um número irracional  $\alpha$ , podemos construir, com base nas potências de expoente racional, um único número real positivo  $a^\alpha$  que é a potência de base  $a$  e expoente irracional  $\alpha$ .

Seja, por exemplo, a potência  $3^{\sqrt{2}}$ . Sabendo quais são os valores racionais aproximados por falta ou por excesso de  $\sqrt{2}$ , obtemos em correspondência os valores aproximados por falta ou por excesso de  $3^{\sqrt{2}}$  (potências de base 3 e expoente racional, já definidas):

| <b>A<sub>1</sub></b> | <b>A<sub>2</sub></b> | <b>B<sub>1</sub></b> | <b>B<sub>2</sub></b> |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1                    | 2                    | 3 <sup>1</sup>       | 3 <sup>2</sup>       |
| 1,4                  | 1,5                  | 3 <sup>1,4</sup>     | 3 <sup>1,5</sup>     |
| 1,41                 | 1,42                 | 3 <sup>1,41</sup>    | 3 <sup>1,42</sup>    |
| 1,414                | 1,415                | 3 <sup>1,414</sup>   | 3 <sup>1,415</sup>   |
| 1,4142               | 1,4143               | 3 <sup>1,4142</sup>  | 3 <sup>1,4143</sup>  |

## 17. Definição

Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  e  $\alpha$  um número irracional; consideremos os conjuntos

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

Notemos que:

- a) todo número de  $A_1$  é menor que qualquer número de  $A_2$ .
- b) existem dois racionais  $r$  e  $s$  tais que  $r < \alpha < s$  e a diferença  $s - r$  é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos  $A_1$  e  $A_2$ , consideremos os conjuntos

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\}$$

e

$$B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$

Se  $a > 1$ , demonstra-se (\*) que:

- a) todo número de  $B_1$  é menor que qualquer número de  $B_2$ .
- b) existem dois números  $a^r$  e  $a^s$  tais que a diferença  $a^s - a^r$  é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Nessas condições, dizemos que  $a^r$  e  $a^s$  são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de  $a^\alpha$  e que  $B_1$  e  $B_2$  são classes que definem  $a^\alpha$ .

Se  $0 < a < 1$ , tudo acontece de forma análoga.

Exemplos de potências com expoente irracional:

$$2^{\sqrt{2}}, 4^{\sqrt{3}}, 5^\pi, \left(\frac{2}{3}\right)^{1+\sqrt{2}}, (7)^{-\sqrt{2}}, (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$$

**18.** Seja  $a = 0$  e  $\alpha$  é irracional e positivo, daremos a seguinte definição especial:

$$0^\alpha = 0$$

### 19. Observações

- 1ª) Se  $a = 1$ , então  $1^\alpha = 1, \forall \alpha$  irracional.
- 2ª) Se  $a < 0$  e  $\alpha$  é irracional e positivo, então o símbolo  $a^\alpha$  não tem significado. Exemplos:  $(-2)^{\sqrt{2}}, (-5)^{\sqrt{3}}$  e  $(-\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$  não têm significado.
- 3ª) Se  $\alpha$  é irracional e negativo ( $\alpha < 0$ ), então  $0^\alpha$  não tem significado.
- 4ª) Para as potências de expoente irracional são válidas as propriedades (P).

(\*) A demonstração está nas páginas 28, 29 e 30.

## EXERCÍCIO

55. Simplifique:

a)  $3 \cdot 2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$

b)  $(2^{\sqrt[3]{3}})^{\sqrt[3]{2}}$

c)  $(4^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{3}}$

d)  $(3^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}$

e)  $2^{1+\sqrt{3}} \cdot 4^{-\sqrt{12}}$

f)  $9^{\sqrt{2}} : 3^{\sqrt{8}}$

g)  $(5^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} : 25^{\sqrt{2}-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$

h)  $(4^{\sqrt{5}} : 8^{\sqrt{20}})^{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$

i)  $\left(\frac{2^{\sqrt{27}} \cdot 8^{\sqrt{75}}}{4^{\sqrt{48}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

## VI. Potência de expoente real

20. Considerando que foram definidas anteriormente as potências de base  $a$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ) e expoente  $b$  ( $b$  racional ou irracional), então já está definida a potência  $a^b$  com  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

### 21. Observações

1ª) Toda potência de base real e positiva e expoente real é um número positivo.

$$a > 0 \Rightarrow a^b > 0$$

2ª) Para as potências de expoente real são válidas as propriedades (P), isto é:

**[P<sub>1</sub>]**  $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$ )

**[P<sub>2</sub>]**  $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$ )

**[P<sub>3</sub>]**  $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$  e  $c \in \mathbb{R}$ )

**[P<sub>4</sub>]**  $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$  e  $c \in \mathbb{R}$ )

**[P<sub>5</sub>]**  $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$  ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$ )