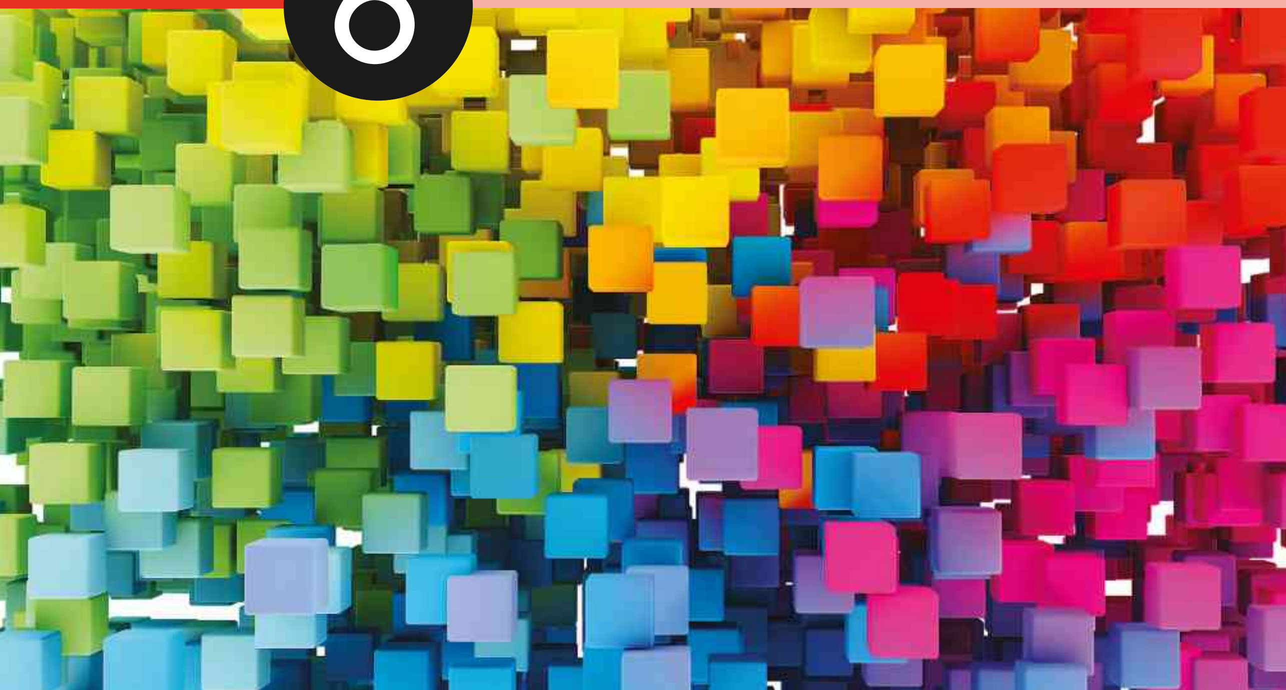
GELSON IEZZI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Complexos
Polinômios
Equações

6



Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO II

Polinômios

I. Polinômios

35. Função polinomial ou polinômio

Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, consideremos a função: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função f é denominada **função polinomial** ou **polinômio** associado à sequência dada.

Os números $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são denominados **coeficientes** e as parcelas a_0, $a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n$ são chamadas **termos** do polinômio f.

Uma função polinomial de um único termo é denominada **função monomial** ou **monômio**.

36. Exemplos:

As seguintes aplicações são polinômios:

$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 - 5x^3$, onde $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ e $a_3 = -5$

$g(x) = 1 + 7x^4$, onde $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e $a_4 = 7$

$h(x) = 5x - 3x^3$, onde $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 5$ e $a_3 = -3$

37. Valor numérico — Raiz

Dados o número complexo *a* e o polinômio $f(x) + a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, chama-se **valor numérico de *f* em *a*** a imagem de *a* pela função *f*, isto é:

$$f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_na^n.$$

Assim, por exemplo, se $f(x) = 2 + x + x^2 + 3x^3$, temos:

$$f(2) = 2 + 2 + 2^2 + 3 \cdot 2^3 = 32$$

$$f(-1) = 2 + (-1) + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^3 = -1$$

$$f(1 + i) = 2 + (1 + i) + (1 + i)^2 + 3(1 + i)^3 =$$

$$= 2 + 1 + i + 1 + 2i - 1 + 3 + 9i - 9 - 3i = -3 + 9i.$$

Muitas vezes, para simplificar a notação, escrevemos apenas

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

para simbolizar um polinômio *f* na variável *x*. Neste caso, *f* é o mesmo que f(x).

Em particular, se *a* é um número complexo e *f* é um polinômio tal que $f(a) = 0$, dizemos que *a* é uma raiz ou um zero de *f*. Por exemplo, os números -2 e -1 são raízes de $f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$, pois:

$$f(-2) = 2(-2) + 3(-2)^2 + (-2)^3 = 0$$

$$f(-1) = 2(-1) + 3(-1)^2 + (-1)^3 = 0$$

II. Igualdade

Neste parágrafo vamos estabelecer o que são dois polinômios iguais e como se pode constatar a igualdade de dois polinômios examinando apenas seus coeficientes.

38. Polinômio nulo

Dizemos que um polinômio *f* é **nulo** (ou **identicamente nulo**) quando *f* assume o valor numérico zero para todo *x* complexo. Em símbolos indicamos:

$$\boxed{f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{C}}$$

39. Coeficientes do polinômio nulo

Teorema

Um polinômio *f* é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de *f* forem nulos. Em símbolos, sendo $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, temos:

$$\boxed{f = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 \ldots = a_n = 0}$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) É imediato que $a_0 = a_1 = a_2 \ldots = a_n = 0$ acarreta:
$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n = 0, \forall x \in \mathbb{C}$

($\Rightarrow$) Se *f* é nulo, então existem $n + 1$ números complexos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, distintos dois a dois, que são raízes de *f*, isto é:

$$\begin{array}{l}
f(\alpha_0) = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + \ldots + a_n\alpha_0^n = 0 \\
f(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \ldots + a_n\alpha_1^n = 0 \\
f(\alpha_2) = a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots + a_n\alpha_2^n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(\alpha_n) = a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + \ldots + a_n\alpha_n^n = 0
\end{array}$$

Assim, estamos diante de um sistema linear homogêneo do tipo $(n + 1) \times (n + 1)$ cujas incógnitas são $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Como o determinante deste sistema é

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

não nulo por tratar-se do determinante de uma matriz de Vandermonde cujos elementos característicos são $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, todos distintos, o sistema tem uma única solução, que é a solução trivial:

$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

40. Polinômios idênticos

Dizemos que dois polinômios *f* e *g* são **iguais** (ou **idênticos**) quando assumem valores numéricos iguais para todo *x* complexo. Em símbolos, indicamos:

$$\boxed{f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{C}}$$

41. Coeficientes de polinômios idênticos

Teorema

Dois polinômios *f* e *g* são iguais se, e somente se, os coeficientes de *f* e *g* forem ordenadamente iguais. Em símbolos, sendo

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \quad \text{e}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

temos:

$$\boxed{f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}}$$

Demonstração:

Para todo $x \in \mathbb{C}$, temos:

$$a_i = b_i \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i - \sum_{i=0}^{n} b_ix^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

EXERCÍCIOS

104. Quais das expressões representam um polinômio na variável *x*?

a) $x^5 + x^3 + 2$

b) $0x^4 + 0x^2$

c) 3

d) $x^{\frac{5}{2}} + 3x^2$

e) $(\sqrt{x})^4 + x + 2$

f) $x\sqrt{x} + x^2$

g) x^{15}

h) $x + 2$

i) $x^2 + 2x + 3$

j) $\dfrac{1}{x^4} + x$

k) $x + x^3 + x^6 + x^4$

l) $(3x^2 - 5x + 3)(7x^3 + 2)$

105. Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 + x = 1$, calcule:
$f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(x + 1)$, $f(2x)$ e $f(f(-1))$.

Solução

$f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 + (-3) + 1 = -20$

$f(0) = 0^3 + 0^2 + 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$

$f(x + 1) = (x + 1)^3 + (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 =$

$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (x^2 + 2x + 1) + (x + 1) + 1 =$

$= x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

$f(2x) = (2x)^3 + (2x)^2 + (2x) + 1 = 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0 \Rightarrow f(f(-1)) = f(0) = 1$

106. Seja a funcão polinomial $f(x) = x^{15} + x^{14} + x^{13} + \ldots + x^2 + x + 1$.
Calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(-1)$.

107. Dado o polinômio $P(x) = x^2 - 2x$, calcule o valor de $P(1 + i)$.

108. Dado $f(z) = z^4 + iz^3 - (1 + 2i)z^2 + 3z + 1 + 3i$, calcule o valor de *f* no ponto $z = 1 + i$.

109. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio e $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ a soma dos coeficientes do polinômio $p(x)$. Qual a soma dos coeficientes do polinômio $(4x^3 - 2x^2 - 2x - 1)^{36}$?

110. Seja *f* uma função real tal que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para todo *x* real, em que *a*, *b*, *c*, *d* são números reais. Se $f(x) = 0$ para todo *x* do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcule $f(6)$.

111. Determine os reais, *a*, *b*, *c* de modo que $f = (a - 2)x^3 + (b + 2)x + (3 - c)$ seja o polinômio nulo.

112. Determine *a*, *b*, *c* de modo que a função
$f(x) = (a + b - 5)x^2 + (b + c - 7)x + (a + c)$
seja identicamente nula.

113. Se *m* e *n* são tais que o polinômio
$(mn - 2)x^3 + (m^2 - n^2 - 3)x^2 + (m + n - 3)x + 2m - 5n + 1$
é identicamente nulo, qual o valor de $m^2 + n^2$?

114. Dadas as funções polinomiais $f(x) = (a - 1)x^2 + bx + c$ e $g(x) = 2ax^2 + 2bx - c$, qual é a condição para que se tenha a identidade $f(x) \equiv g(x)$?

115. Determine a condição necessária e suficiente para que a expressão

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

em que $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ são reais não nulos, assuma um valor que não depende de x.

Solução

Façamos a fração assumir o valor constante k. Então

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} = k, \forall x \in \mathbb{C}$$

equivale a

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = k(a_2x^2 + b_2x + c_2), \forall x \in \mathbb{C}$$
$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = ka_2x^2 + kb_2x + kc_2, \forall x \in \mathbb{C}$$

que equivale a: $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ e $c_1 = kc_2$ isto é:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Isso significa que os coeficientes do numerador devem ser respectivamente proporcionais aos coeficientes do denominador.
Por exemplo, as frações:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 4x + 6} \quad \text{e} \quad \frac{5x^2 - 7x + 1}{10x^2 - 14x + 2}$$

assumem valor constante para todo $x \in \mathbb{C}$.

Resposta: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

116. Determine a, b, c de modo que se tenha para todo x real: $\frac{ax^2 - bx - 5}{3x^2 + 7x + c} = 3$.

117. Qual o valor de $a + b$ para que a expressão abaixo não dependa de x?

Expressão: $\frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 - 10x + b}$.

118. Quais os valores de m, n e p para que a expressão

$$\frac{(m - 1)x^3 + (n - 2)x^2 + (p - 3)x + 8}{2x^2 + 3x + 4}$$

seja independente de x?

III. Operações

Adição

42. Soma de polinômios

Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \text{ e}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

chama-se **soma** de *f* com *g* o polinômio

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

isto é:

$$\boxed{(f + g)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i}$$

43. Exemplo:

Somar $f(x) = 4 + 3x + x^2$ e $g(x) = 5 + 3x^2 + x^4$.

Temos:

$f(x) = 4 + 3x + x^2 + 0x^3 + 0x^4$

$g(x) = 5 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + x^4$

Então:

$(f + g)(x) = (4 + 5) + (3 + 0)x + (1 + 3)x^2 + (0 + 0)x^3 + (0 + 1)x^4 =$
$= 9 + 3x + 4x^2 + x^4$.

44. Propriedades da adição

Teorema

A operação de adição define em P, conjunto dos polinômios de coeficientes complexos, uma estrutura de grupo comutativo, isto é, verifica as seguintes propriedades:

[A−1] propriedade associativa

[A−2] propriedade comutativa

[A−3] existência de elemento neutro

[A−4] existência de inverso aditivo

Demonstração:

[A−1] $f + (g + h) = (f + g) + h, \ \forall f, g, h \in P$

Fazendo $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$, $h(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$,

$(f + (g + h))\,(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i x^i$ e $((f + g) + h)\,(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} e_i x^i$, temos:

$d_i = a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i = e_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

[A−2] $f + g = g + f, \ \forall f, g \in P$.

Fazendo $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$, $(f + g)\,(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$ e

$(g + f)\,(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i x^i$, temos:

$c_i = a_i + b_i = b_i + a_i = d_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

[A−3] $\exists\, e_a \in P \mid f + e_a = f, \ \forall f \in P$

Fazendo $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $e_a(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$, temos:

$f + e_a \equiv f \Leftrightarrow a_i + \alpha_i = a_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ e então

$\alpha_i = 0, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, portanto e_a (**elemento neutro** para a adição de polinômios) é o polinômio nulo.

[A−4] $\forall f \in P, \ \exists\, f' \in P \mid f + f' = e_a$

Fazendo $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $f'(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a'_i x^i$, temos:

$f + f' \equiv e_a \Leftrightarrow a_i + a'_i = 0, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ e então

$a'_i = -a_i, \ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, portanto:

$f'(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-a_i)x^i = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - ... - a_nx^n$

é o **inverso aditivo** de *f*, ou seja, é o polinômio que somado com *f* dá o polinômio nulo.

Subtração

45. Diferença de polinômios

Tendo em vista o teorema anterior e dados dois polinômios

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$,

definimos **diferença** entre *f* e *g* como o polinômio $f - g = f + (-g)$, isto é:

$$\boxed{(f - g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots + (a_n - b_n)x^n.}$$

Multiplicação

46. Produto de polinômios

Dados dois polinômios

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$

chama-se **produto fg** o polinômio

$$(fg)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \ldots + a_mb_nx^{m+n}.$$

Notemos que o produto fg é o polinômio

$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{m+n}x^{m+n}$

cujo coeficiente c_k pode ser assim obtido:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}.$$

Notemos ainda que fg pode ser obtido multiplicando-se cada termo a_ix^i de *f* por cada termo b_jx^j de *g*, segundo a regra $(a_ix^i) \cdot (b_jx^j) \cdot a_ib_jx^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

47. Exemplo:

Multiplicar $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ por $g(x) = 4 + 5x + 6x^2$.

Temos:

$(fg)(x) = (x + 2x^2 + 3x^3)(4 + 5x + 6x^2) =$

$= x(4 + 5x + 6x^2) + 2x^2(4 + 5x + 6x^2) + 3x^3(4 + 5x + 6x^2) =$

$= (4x + 5x^2 + 6x^3) + (8x^2 + 10x^3 + 12x^4) + (12x^3 + 15x^4 + 18x^5) =$

$= 4x + 13x^2 + 28x^3 + 27x^4 + 18x^5.$

48. Dispositivo prático 1

$$
\begin{array}{lllll}
 & 4 + 5x + 6x^2 & & \leftarrow & g \\
 & x + 2x^2 + 3x^3 & & \leftarrow & f \\
\hline
 & 4x + 5x^2 + 6x^3 & & \leftarrow & x \cdot g \\
+ & 8x^2 + 10x^3 + 12x^4 & & \leftarrow & 2x^2 \cdot g \\
 & 12x^3 + 15x^4 + 18x^5 & & \leftarrow & 3x^3 \cdot g \\
\hline
 & 4x + 13x^2 + 28x^3 + 27x^4 + 18x^5 & & \leftarrow & fg
\end{array}
$$

49. Dispositivo prático 2

Colocamos numa tabela os coeficientes a_i de *f* e os coeficientes b_j de *g*; calculamos todos os produtos a_ib_j; somamos os produtos em cada diagonal, conforme indica a figura, obtendo os c_k.

Assim, no nosso exemplo, temos:

$c_0 = 0$

$c_1 = 4 + 0 = 4$

$c_2 = 8 + 5 + 0 = 13$

$c_3 = 12 + 10 + 6 = 28$

$c_4 = 15 + 12 = 27$

$c_5 = 18$

f \ g	4	5	6
0	0	0	0
1	4	5	6
2	8	10	12
3	12	15	18

Portanto, $h(x) = (fg)(x) = 4x + 13x^2 + 28x^3 + 27x^4 + 18x^5$.

50. Propriedades da multiplicação

Teorema

A operação de multplicação em P (conjunto dos polinômios de coeficientes complexos) verifica as seguintes propriedades:

[M–1] propriedade associativa $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h, \quad \forall f, g, h \in P$

[M–2] propriedade comutativa $f \cdot g = g \cdot f, \quad \forall f, g \in P$

[M–3] existência do elemento neutro $\exists e_m \in P \mid f \cdot e_m = f, \quad \forall f \in P$

[M–4] propriedade distributiva $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \quad \forall f, g, h \in P$

Num curso deste nível, julgamos desnecessário conhecer a prova destas propriedades.

EXERCÍCIOS

119. Dados os polinômios:

$f(x) = 7 - 2x + 4x^2$

$g(x) = 5 + x + x^2 + 5x^3$

$h(x) = 2 - 3x + x^4$

calcule $(f + g)(x)$, $(g - h)(x)$ e $(h - f)(x)$.

120. Dados os polinômios:

$f(x) = 2 + 3x - 4x^2$

$g(x) = 7 + x^2$

$h(x) = 2x - 3x^2 + x^3$

calcule $(fg)(x)$, $(gh)(x)$ e $(hf)(x)$.

120. Determine h(x) tal que: $h(x) = (x + 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 1) + 4(x + 1)$.

122. Calcule h(x) tal que: $h(x) = (x + 2)^2 + (2x - 1)^3$.

123. Sendo dados os polinômios $f = x$, $g = x + x^3$ e $h = 2x^3 + 5x$, obtenha os números reais *a* e *b* tais que $h = af + bg$.

Solução

$2x^3 + 5x = ax + b(x + x^3) = bx^3 + (a + b)x, \quad \forall x \in \mathbb{C}$.

Aplicando o teorema da igualdade de polinômios, vem: $2 = b$ e $5 = a + b$.

Resposta: $a = 3$ e $b = 2$.

124. Sendo dados os polinômios

$f = x^2$, $g = x^2 + x^4$, $h = x^2 + x^4 + x^6$ e $k = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$,

obtenha os números reais *a*, *b* e *c* de modo que se tenha $k = af + bg + ch$.

125. Sabendo que *a*, *b* e *c* são tais que $x^2 - 2x + 1 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$ é uma identidade, qual é o valor de $a + b + c$?

126. Qual o valor de $a - b$ para que o binômio $2x^2 + 17$ seja idêntico à expressão: $(x^2 + b)^2 - (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$, com $a > 0$ e $b > 0$?

127. Dizemos que os polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente independentes (L. I.) se a relação $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, em que a_1, a_2, a_3 são números reais. Caso contrário, dizemos que $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente dependentes (L. D.). Classifique os polinômios

$p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$ e $p_3(x) = x^2 + 2x + 2$

quanto à dependência linear.

128. Demonstre que $f = (x - 1)^2 + (x - 3)^2 - 2(x - 2)^2 - 2$ é o polinômio nulo.

129. Se $f = x^2 + px + q$ e $g = (x - p)(x - q)$, determine os reais *p* e *q* de modo que $f = g$.

130. Determine *a*, *b*, *c* de modo que se verifique cada identidade.

a) $a(x^2 - 1) + bx + c = 0$

b) $a(x^2 + x) + (b + c)x + c = x^2 + 4x + 2$

c) $x^3 - ax(x + 1) + b(x^2 - 1) + cx + 4 = x^3 - 2$

131. Mostre que os polinômios $f = \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$ e $g = x^4 + 1$ são iguais.

132. Determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que os polinômios

$f = x^3 + \alpha x + \beta$ e $g = (x^2 + x + 1)^2 - x^4$ sejam iguais.

133. Determine a condição para que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrado perfeito.

Solução

$ax^2 + bx + c$ é um polinômio quadrado perfeito se existir $px + q$ tal que:

$ax^2 + bx + c = (px + q)^2$ então: $ax^2 + bx + c = p^2x^2 + 2pqx + q^2$

Aplicando o teorema da igualdade, temos:

I) $a = p^2$, II) $b = 2pq$, III) $c = q^2$

Quadrado II, temos $b^2 = 4p^2q^2$ (II').

Substituindo I e III e II', vem $b^2 = 4(p^2)\,(q^2) = 4ac$.

Resposta: $b^2 = 4ac$.

134. Determine a condição para o polinômio $f = (ax + b)^2 + (cx + d)^2$, em que *a*, *b*, *c*, *d* são reais e não nulos, seja um quadrado perfeito.

135. Calcule *p* para que o polinômio

$4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4(p + 1)x + (p + 1)^2$

seja o quadrado perfeito de um polinômio racional inteiro em *x*.

136. Os coeficientes A, B, C e D do polinômio $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ devem satisfazer certas relações para que P(x) seja um cubo perfeito. Quais são essas relações?

137. Verifique se existem valores de *k* para os quais o trinômio $(k + 1)x^2 + (k - 3) \cdot x + 13$ pode ser escrito como uma soma de quadrados do tipo $(x + a)^2 + (x + b)^2$.

138. Decomponha o trinômio $-6x^2 + 36x - 56$ em uma diferença de dois cubos do tipo $(x - b)^3 - (x - a)^3$.

139. Obtenha $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que os polinômios $f = x^4 + 2\alpha x^3 - 4\alpha x + 4$ e $g = x^2 + 2x + 2$ verifiquem a condição $f = g^2$.

IV. Grau

51. Definição

Seja $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se **grau** de *f*, e representa-se por ∂f ou gr *f* o número natural *p* tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$.

$$\partial f = p \iff \begin{cases} a_p \neq 0 \\ a_i = 0, \ \forall\, i > p \end{cases}$$

Assim, grau de um polinômio *f* é o índice do "último" termo não nulo de *f*.

52. Exemplos:

1º) $f(x) = 4 + 7x + 2x^3 - 6x^4 \Rightarrow \partial f = 4$

2º) $g(x) = -1 + 2x + 5x^2 \Rightarrow \partial g = 2$

3º) $h(x) = 1 + 5x - 3x^2 + (a - 4)x^3 \Rightarrow \begin{cases} \partial h = 2, \text{ se } a = 4 \\ \partial h = 3, \text{ se } a \neq 4. \end{cases}$

Se o grau do polinômio *f* é *n*, então a_n é chamado **coeficiente dominante** de *f*. No caso do coeficiente dominante a_n ser igual a 1, *f* é chamado **polinômio unitário**.

53. Grau da soma

Teorema

Se f, g e $f + g$ são polinômios não nulos, então o grau de $f + g$ é menor ou igual ao maior dos números ∂f e ∂g.

$$\partial(f + g) \leqslant \text{máx } \{\partial f, \partial g\}$$

Demonstração:

Se $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, $\partial f = m$ e $\partial g = n$, com $m \neq n$, admitamos, por exemplo, $m > n$. Assim, sendo $c_i = a_i + b_i$, temos:

$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0$, e

$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \ \forall i > m.$

Portanto, $\partial(f + g) = m = \text{máx } \{\partial f, \partial g\}$.

Se admitirmos $m = n$, temos:

$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \ \forall i > m$

$c_m = a_m + b_m$ pode ser nulo, então:

$(f + g) \leqslant \text{máx } \{\partial f, \partial g\}$

54. Exemplos:

1º) $f(x) = 1 + x + x^2 \Rightarrow \partial f = 2$

$g(x) = 2 + 3x \Rightarrow \partial g = 1$

$(f + g)(x) = 3 + 4x + x^2 \Rightarrow \partial(f + g) = 2$

2º) $f(x) = 1 + x + x^2 \Rightarrow \partial f = 2$

$g(x) = 2 + 3x + 2x^2 \Rightarrow \partial g = 2$

$(f + g)(x) = 3 + 4x + 3x^2 \Rightarrow \partial(f + g) = 2$

3º) $f(x) = 2 + ix + 5x^2 \Rightarrow \partial f = 2$

$g(x) = 3 + 5x + 5x^2 \Rightarrow \partial g = 2$

$(f + g)(x) = 5 + (i + 5)x \Rightarrow \partial(f + g) = 1$

55. Grau do produto

Teorema

Se *f* e *g* são dois polinômios não nulos, então o grau de fg é igual à soma dos graus de *f* e *g*.

$$\boxed{\partial(fg) = \partial f + \partial g}$$

Demonstração:

Se $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, $\partial f = m$ e $\partial g = n$, seja

$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$ um coeficiente qualquer de (fg)(x).

Temos:

$c_{m+n} = a_m \cdot b_n \neq 0$

$c_k = 0, \ \forall k > m + n$ e então

$\partial(fg) = m + n = \partial f + \partial g$

56. Exemplos:

1º) $f(x) = 4 + 3x^N \Rightarrow \partial f = 1$

$g(x) = 1 + 2x + 5x^2 \Rightarrow \partial g = 2$

$(fg)(x) = 4 + 11x + 26x^2 + 15x^3 \Rightarrow \partial(fg) = 3$

2º) $f(x) = 1 + 2x + x^2 + 5x^3 \Rightarrow \partial f = 3$

$g(x) = 3 - 6x + 7x^2 + 8x^3 \Rightarrow \partial g = 3$

$(fg)(x) = 3 - 2x^2 + 31x^3 - 7x^4 + 43x^5 + 40x^6 \Rightarrow \partial(fg) = 6$

EXERCÍCIOS

140. Determine o grau dos seguintes polinômios:

$f = x^2 + (x + 2)^2 - 4x$

$g = ax^2 + 2x + 3 (a \in \mathbb{R})$

$h = (a^2 - 5a + 6)x^2 + (a^2 - 4)x + (6 - 2a) (a \in \mathbb{R})$

141. Se f e g são dois polinômios de grau n, qual e o grau de $f + g$ e de fg?

142. Qual o grau do polinômio

$f = (2a^2 + a - 3)x^3 + (a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x - 3$

na indeterminada x quando $a = 1$?

143. Determine o polinômio f do segundo grau tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ e $f(-1) = 0$.

Solução

Seja $f = ax^2 + bx + c$. Temos:

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \quad \Rightarrow c = 1 \quad (1)$

$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4 \quad \Rightarrow a + b + c = 4 \quad (2)$

$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0 \quad (3)$

Subtraindo (3) de (2), vem $2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Em (2): $a + 2 + 1 = 4 \Rightarrow a = 1$.

Resposta: $f = x^2 + 2x + 1$.

144. O coeficiente da maior potência de um polinômio $P(x)$ do 3º grau é 1. Sabendo que $P(1) = P(2) = 0$ e $P(3) = 30$, calcule $P(-1)$.

145. Seja $P(x)$ um polinômio do 5º grau que satisfaz as condições:

$1 = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$ e $P(6) = 0$.

Qual o valor de $P(0)$?

146. Seja $P(x)$ um polinômio do 2º grau tal que

$P(0) = -20$, $P(1) + P(2) = -18$ e $P(1) - 3P(2) = 6$.

Resolva a inequação $P(x) < 0$.

147. Os algarismos α, β e γ formam a centena $A = \alpha\beta\gamma$.

a) Escreva o polinômio completo do 2º grau $p(x)$ tal que $p(10) = A$.

b) Probve que A é divisível por 3 se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma$ é múltiplo de 3.

148. Determine uma função polinomial $f(x)$ de grau 2 tal que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$.

Solução

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Temos:

$f(x) - f(-x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c$

Isto é:

$ax^2 + bx + c - ax^2 - bx + c, \forall x \in \mathbb{C}$

Então:

$b = -b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Resposta: $f(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$.

149. Seja f(x) uma função polinomial do 2º grau. Determine f(x), sabendo que $f(1) = 0$ e $f(x) = f(x - 1), \forall x$.

150. Quantos elementos tem o conjunto dos polinômios P(x) de grau 3 tais que $P(x) = P(-x)$, para todo *x* real?

151. Seja a_n o coeficiente de x^n num polinômio de coeficientes complexos de grau 30. Sendo $a_0 = -1$ e $a_{n+1} = 1 + ia_n$ $(n \geqslant 0)$, determine a_{30}.

152. a) Determine os polinômios P do terceiro grau tais que, para todo número real *x*, se tenha $P(x) - P(x - 1) = x^2$.

b) Usando o resultado da parte *a*, calcule, em função de *n*:

$$S = \sum_{i=0}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

V. Divisão

57. Definição

Dados dois polinômios *f* (**dividendo**) e $g \neq 0$ (**divisor**), dividir *f* por *g* é determinar dois outros polinômios *q* (**quociente**) e *r* (**resto**) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

I) $q \cdot g + r = f$

II) $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$, caso em que a divisão é chamada exata)

58. Exemplos:

1º) Quando dividimos $f = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $g = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, obtemos $q = x$ e $r = -4x^2 + 8x + 2$, que satisfazem as duas condições:

I) $qg + r = x(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (-4x^2 + 8x + 2) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2 = f$

II) $\partial r = 2$ e $\partial g = 3 \Rightarrow \partial r < \partial g$

2º) Quando dividimos $f = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $g = x - 2$, obtemos $q = 5x^2 + 11x + 12$ e $r = 0$, que satisfazem as duas condições:

I) $qg + r = (5x^2 + 11x + 12)(x - 2) + 0 = 5x^3 + x^2 - 10x - 24 = f$

II) $r = 0$

Neste caso a divisão é exata; dizemos, então, que *f* é divisível por *g* ou *g* é divisor de *f*.

59. Divisões imediatas

Há dois casos em que a divisão de *f* por *g* é imediata.

1º caso: o dividendo *f* é o polinômio nulo ($f = 0$).

Neste caso, os polinômios $q = 0$ e $r = 0$ satisfazem as condições (I) e (II) da definição de divisão, pois $qg + r = 0 \cdot g + 0 = 0 = f$ e $r = 0$.

$$\boxed{f = 0 \Rightarrow q = 0 \text{ e } r = 0}$$

2º caso: o dividendo *f* não é polinômio nulo, mas tem grau menor que o divisor g ($\partial f < \partial g$).

Neste caso, os polinômios $q = 0$ e $r = f$ satisfazem as condições (I) e (II) da definição de divisão, pois $qg + r = 0 \cdot g + f = f$ e $\partial r = \partial f < \partial g$.

$$\boxed{\partial f < \partial g \Rightarrow q = 0 \text{ e } r = f}$$

Exemplos:

1º) Na divisão de $f = 0$ por $g = x^2 + 3x + \sqrt{2}$, obtemos $q = 0$ e $r = 0$.

2º) Na divisão de $f = \pi x + \sqrt{3}$ por $g = x^3 + 4x^2 + x + \sqrt{2}$, obtemos $q = 0$ e $r = \pi x + \sqrt{3}$.

60. Deste ponto em diante admitiremos sempre $\partial f \geqslant \partial g$, isto é, excluiremos da teoria os dois casos em que a divisão é trivial. Para responder à pergunta:

"Como obter *q* e *r*?"

no caso de $\partial f \geqslant \partial g$, explicaremos dois métodos: o método de Descartes e o método da chave. Neste último, provaremos a existência e a unicidade do quociente e do resto.

61. Método de Descartes

Este método, também conhecido com o nome de **método dos coeficientes a determinar**, baseia-se nos seguintes fatos:

(1) $\partial q = \partial f - \partial g$, o que é consequência da definição, pois:

$qg + r = f \Rightarrow \partial(qg + r) = \partial f$ e então $\partial q + \partial g = \partial f$.

(2) $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$)

O método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

1º) calculam-se ∂q e ∂r;

2º) constroem-se os polinômios *q* e *r*, deixando incógnitos os seus coeficientes;

3º) determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $qg + r = f$.

62. Aplicações

1º) Dividir $f = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $g = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.

Temos:

$\partial q = 4 - 3 = 1 \Rightarrow q = ax + b$

$\partial r < 3 \Rightarrow \partial r \leqslant 2 \Rightarrow r = cx^2 + dx + e$

$qg + r = f \Rightarrow (ax + b)(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (cx^2 + dx + e) =$
$= 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$

Desenvolvendo, temos para todo *x*:

$3ax^4 + (3b - 2a)x^3 + (4a - 2b + c)x^2 + (4b - a + d)x + (e - b) =$
$= 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$

Então, resulta:

$$\begin{cases} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \\ 3b - 2a = -2 \Rightarrow 3b = -2 + 2(1) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2b - 4a \Rightarrow c = -4 \\ 4b - a + d = 7 \Rightarrow d = a - 4b + 7 \Rightarrow d = 8 \\ e - b = 2 \Rightarrow e = b + 2 \Rightarrow r = 2 \end{cases}$$

Resposta: $q = x$ e $r = -4x^2 + 8x + 2$

(compare com o 1º exemplo do item 58 da página 70).

2º) Dividir $f = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $g = x - 2$.

Temos:

$\partial q = 3 - 1 = 2 \Rightarrow q = ax^2 + bx + c$

$\partial r < 1 \Rightarrow \partial r = 0 \Rightarrow r = d$

$qg + r = f \Rightarrow (ax^2 + bx + c)(x - 2) + d = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$

Desenvolvendo, temos para todo *x*:

$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x + (d - 2c) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$

Então, resulta:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b - 2a = 1 \Rightarrow b = 2a + 1 \Rightarrow b = 11 \\ c - 2b = -10 \Rightarrow c = 2b - 10 \Rightarrow c = 12 \\ d - 2c = -24 \Rightarrow d = 2c - 24 \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Resposta: $q = 5x^2 + 11x + 12$ e $r = 0$

(compare com o 2º exemplo do item 58 da página 70).

63. Existência e unicidade do quociente e do resto

Teorema

Dados os polinômios

$f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_m \neq 0)$

$g = b_n x^n + b_{n-1}n^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 \quad (b_n \neq 0)$

existem um único polinômio *q* e um único polinômio *r* tais que $qg + r = f$ e $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$).

Demonstração:

a) Existência

1º grupo de operações: vamos formar o monômio $\frac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n} = q_0x^{m-n}$ e construir o polinômio

$$r_1 = f - \left(q_0x^{m-n}\right)g \quad (1)$$

chamado 1º resto parcial.

Notemos que:

$$r_1 = \left(a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots\right) - \frac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n} \cdot \left(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\right)$$

o que prova o cancelamento de a_mx^m (pelo menos); portanto, $\partial r_1 = \alpha < m$.

Para maior comodidade, façamos:

$$r_1 = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + c_{\alpha-2}x^{\alpha-2} + \ldots + c_1x + c_0$$

2º grupo de operações: vamos formar o monômio $\frac{c_\alpha}{b_n} \cdot x^{\alpha-n} = q_1x^{\alpha-n}$ e construir o polinômio

$$r_2 = r_1 - \left(q_1x^{\alpha-n}\right)g \quad (2)$$

chamado 2º resto parcial.

Notemos que:

$$r_2 = \left(c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \ldots\right) - \frac{c_\alpha}{b_n} \cdot x^{\alpha-n} \cdot \left(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\right)$$

o que prova o cancelamento de $c_\alpha x^\alpha$ (pelo menos); portanto, $\partial r_2 = \beta < \alpha$.

Para maior comodidade, façamos:

$$r_2 = d_\beta x^\beta + d_{\beta-1}x^{\beta-1} + d_{\beta-2}x^{\beta-2} + \ldots + d_1x + d_0$$

3º grupo de operações: vamos formar o monômio $\frac{d_\beta}{b_n} \cdot x^{\beta-m} = q_2x^{\beta-n}$ e construir o polinômio

$$r_3 = r_2 - \left(q_2x^{\beta-n}\right)g \quad (3)$$

chamado 3º resto parcial.

Notemos que:

$$r_3 = \left(d_\beta x^\beta + d_{\beta-1}x^{\beta-1} + \ldots\right) - \frac{d_\beta}{b_n} \cdot x^{\beta-n} \cdot \left(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\right)$$

o que prova o cancelamento de $d_\beta x^\beta$ (pelo menos); portanto, $\partial r_3 = \gamma < \beta$.

Para maior comodidade, façamos:

$$r_3 = e_\gamma x^\gamma + e_{\gamma-1}x^{\gamma-1} + e_{\gamma-2}x^{\gamma-2} + \ldots + e_1 x + e_0$$

4º grupo em diante: analogamente.

Notando que, em cada grupo de operações, o grau do resto parcial diminui ao menos uma unidade, concluímos que, após um certo número *p* de operações, resulta um resto parcial r_p de grau inferior ao de *g* (ou então $r_p = 0$) e

$$r_p = r_{p-1} - \left(q_{p-1}x^{\epsilon-n}\right)g \quad (p)$$

Vamos adicionar membro a membro as igualdades de (1) a (p):

$$\begin{array}{ll}
(1) & r_1 = f - \left(q_0 x^{m-n}\right)g \\
(2) & r_2 = r_1 - \left(q_1 x^{\alpha-n}\right)g \\
(3) & r_3 = r_2 - \left(q_2 x^{\beta-n}\right)g \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(p) & r_p = r_{p-1} - \left(q_{p-1}x^{\epsilon-n}\right)g \\
\hline
\end{array}$$

$$\underbrace{r_p}_{r} = f - \underbrace{\left(q_0x^{m-n} + q_1x^{\alpha-n} + q_2x^{\beta-n} + \ldots + q_{p-1}x^{\epsilon-n}\right)}_{q}g$$

e então $f = qg + r$ com $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$).

b) Unicidade

Admitamos a existência de dois quocientes q_1 e q_2 e dois restos r_1 e r_2 na divisão de *f* por *g*, isto é:

$$\begin{array}{l|l} f & g \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{l|l} f & g \\ \hline r_2 & q_2 \end{array}$$

e provemos que $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Pela definição de divisão, temos:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 g + r_1 = f \\ q_2 g + r_2 = f \end{array}\right\} \Rightarrow q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2 \Rightarrow (q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$$

Se $q_1 \neq q_2$ ou $r_1 \neq r_2$, provemos que a igualdade $(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ não se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \partial\left[\left(q_1 - q_2\right)g\right] = \partial\left(q_1 - q_2\right) + \partial g \geqslant \partial g \\ (*)\ \partial\left(r_2 - r_1\right) \leqslant \text{máx}\left\{\partial r_2, \partial r_1\right\} < \partial g \end{array}\right\} \Rightarrow \partial\left[\left(q_1 - q_2\right)g\right] \neq \partial\left(r_2 - r_1\right)$$

Então, para evitar a contradição, devemos ter $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

---

* Supusemos $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$; é imediato, por exemplo, que $r_1 = 0 \Rightarrow \partial(r_2 - r_1) = \partial r_2 < \partial g$.

64. Método da chave

A prova da existência de q e r vista no item 63 nos ensina como construir esses dois polinômios a partir de f e g. Vejamos por exemplo como proceder se $f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ e $g = x^2 - 2x + 3$.

1º grupo de operações

Formamos o primeiro termo de q pela operação $\dfrac{3x^5}{x^2} = 3x^3$ e construímos o primeiro resto parcial $r_1 = f - (3x^3)g = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$, que tem grau maior que ∂g.

2º grupo de operações

Formamos o segundo termo de q pela operação $\dfrac{4x^3}{x^2} = 4x$ e construímos o segundo resto parcial $r_2 = r_1 - (4x)g = -x^2 - x - 1$, que tem grau igual a ∂g.

3º grupo de operações

Formamos o terceiro termo de q pela operação $\dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ e construímos o terceiro resto parcial $r_3 = r_2 - (-1)g = -3x + 2$, que tem grau menor que ∂g, encerrando, portanto, a divisão.

Resposta: $q = 3x^2 + 4x - 1$ e $r = -3x + 2$.

A disposição prática dessas operações é a seguinte:

$$
\begin{array}{rl|l}
f \rightarrow & 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & x^2 - 2x + 3 \leftarrow g \\
\cline{3-3}
& -3x^5 + 6x^4 - 9x^3 \phantom{{}- 9x^2 + 11x - 1} & 3x^3 + 4x - 1 \leftarrow q \\
\cline{1-2}
& r_1 \rightarrow 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & \\
& -4x^3 + 8x^2 - 12x \phantom{{}- 1} & \\
\cline{2-2}
& r_2 \rightarrow -x^2 - x - 1 & \\
& x^2 - 2x + 3 & \\
\cline{2-2}
& -3x + 2 \leftarrow r &
\end{array}
$$

que pode ser simplificada assim:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
3 & -6 & 13 & -9 & 11 & -1 & 1 & & -2 & 3 \\
\cline{7-10}
-3 & 6 & -9 & & & & 3 & 0 & 4 & -1 \\
\cline{1-6}
& & 4 & -9 & 11 & -1 & & & & \\
& & -4 & 8 & -12 & & & & & \\
\cline{3-6}
& & & -1 & -1 & -1 & & & & \\
& & & 1 & -2 & 3 & & & & \\
\cline{4-6}
& & & & -3 & 2 & & & &
\end{array}
$$

65. Aplicações

1ª) Dividir $f = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x + 7$ por $g = x^3 - x^2 + x - 1$.

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
2 & -3 & 4 & 0 & -6 & 7 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \cline{7-10}
-2 & 2 & -2 & 2 & & & 2 & -1 & 1 & \\ \cline{1-6}
 & -1 & 2 & 2 & -6 & 7 & & & & \\
 & 1 & -1 & 1 & -1 & & & & & \\ \cline{2-6}
 & & 1 & 3 & -7 & 7 & & & & \\
 & & -1 & 1 & -1 & 1 & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & 4 & -8 & 8 & & & &
\end{array}$$

Resposta: $q = 2x^2 - x + 1$ e $r = 4x^2 - 8x + 8$.

2ª) Dividir $f = x^4 - 16$ por $g = x + 1$.

$$\begin{array}{rrrrr|rrrr}
1 & 0 & 0 & 0 & -16 & 1 & 1 & & \\ \cline{6-9}
-1 & -1 & & & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \cline{1-5}
 & -1 & 0 & 0 & -16 & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & & \\ \cline{2-5}
 & & 1 & 0 & -16 & & & & \\
 & & -1 & -1 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -1 & -16 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & -15 & & & &
\end{array}$$

Resposta: $q = x^3 - x^2 + x - 1$ e $r = -15$.

EXERCÍCIOS

153. Dividindo o polinômio f por $x^2 - 3x + 5$, obtemos quociente $x^2 + 1$ e resto $3x - 5$. Determine f.

Solução

Por definição de divisão, temos: $f = qg + r$. Então:

$f = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 5) + (3x - 5) =$

$= (x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5) + (3x - 5) = x^4 - 3x^3 + 6x^2$

Resposta: $f = x^4 - 3x^3 + 6x^2$.

154. Numa divisão de polinômios em que o divisor tem grau 4, o quocidente tem grau 2 e o resto tem grau 1, qual é o grau do dividendo? E se o grau do resto fosse 2?

155. Dados os polinômios P(x) de grau *m* e S(x) de grau $n(n < m)$, o resto da divisão de P(x) por S(x) tem grau *p*. Determine os possíveis valores de *p*.

156. Numa divisão de polinômios em que o dividendo é de grau *p* e o quociente de grau *q*, qual é o grau máximo que o resto pode ter?

157. Divida *f* por *g* aplicando o método de Descartes:

a) $f = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ e $g = x^3 - 2x + 1$
b) $f = x^4 - 2x + 13$ e $g = x^2 + x + 1$
c) $f = 2x^5 - 3x + 12$ e $g = x^2 + 1$

158. Aplicando o método da chave, determine quociente e resto da divisão de *f* por *g*:

a) $f = x^2 + 5x + 1$, $g = 2x^2 + 4x - 3$
b) $f = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$, $g = x^2 + 2$
c) $f = 5x + 1$, $g = x^3 + 5$
d) $f = 3x^3 + 6x^2 + 9$, $g = 3x^2 + 1$
e) $f = x^3 + x^2 + x + 1$, $g = 2x^2 + 3$

159. Efetue a divisão de $f = x^3 + ax + b$ por $g = 2x^2 + 2x - 6$. Qual é a condição para que a divisão seja exata?

Solução

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & 0 & a & b & 2 & 2 & -6 \\ \cline{5-7}
-1 & -1 & 3 & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ \cline{1-4}
 & -1 & a+3 & b & & & \\
 & 1 & 1 & -3 & & & \\ \cline{2-4}
 & & a+4 & b-3 & & &
\end{array}
$$

e o resto é nulo para $a = -4$ e $b = 3$.

Resposta: $q = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ e $r = (a + 4)x + (b - 3)$

para divisão exata: $a = -4$ e $b = 3$.

160. Sem efetuar a divisão, determine *a* e *b* de modo que o polinômio

$f = (x + 2)^3 + (x - 1)^3 + 3ax + b$

seja divisível por $g = (x - 2)^2$.

Solução

Desenvolvendo as potências, obtemos:

$f = 2x^3 + 3x^2 + (15 + 3a)x + (7 + b)$
$g = x^2 - 4x + 4$

Fazendo $q = cx + d$ (pois $\partial q = \partial f - \partial g = 1$) e lembrando que $f = qg$ (pois *f* é divisível por *g*), resulta para todo *x* que:

$2x^3 + 3x^2 + (15 + 3a)x + (7 + b) = (cx + d)(x^2 - 4x + 4) =$
$= cx^3 + (d - 4c)x^2 + (4c - 4d)x + 4d$

portanto:
$2 = c$
$3 = d - 4c \Rightarrow d = 4c + 3 = 8 + 3 = 11$
$15 + 3a = 4c - 4d \Rightarrow 15 + 3a = 8 - 44 \Rightarrow 3a = -51 \Rightarrow a = -17$
$7 + b = 4d \Rightarrow 7 + b = 44 \Rightarrow b = 37$

Resposta: $a = -17$ e $b = 37$.

161. Determine os reais *a* e *b* de modo que o polinômio
$f = x^4 - 3ax^3 + (2a - b)x^2 + 2bx + (a + 3b)$ seja divisível por $g = x^2 - 3x + 4$.

162. Determine $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ de modo que $x^4 + 1$ seja divisível por $x^2 + px + q$.

163. Se a divisão do polinômio $P_1(x) = x^3 + px^2 - qx + 3$ por $P_2(x) = x^2 - x + 1$ for exata, quais os valores de *p* e de *q*?

164. O polinômio $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + 2x + 5$. Quais os valores de *p* e de *q*?

165. Dividindo o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ por $Q(x)$, obtemos o quociente $S(x) = 1 + x$ e o reto $R(x) = x + 1$. Qual é o polinômio $Q(x)$?

166. Dividindo $(x^3 - 4x^2 + 7x - 3)$ por um certo polinômio $p(x)$, obtemos o quociente $(x - 1)$ e o resto $(2x - 1)$. Determine $p(x)$.

167. Quais são o quocidente e o resto da divisão de $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ por $D(x) = x^2 - x + 1$?

168. Sendo:
$A(x) = 3(x - 2)(x^2 - 1) - (2x - 4)(x^2 + 3)$
$B(x) = -2x + 6 + (3 - x)(x - 4)$
$F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, qual a expressão de $F(x)$ para todo *x* do domínio de F?

169. Sendo:

$p(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$

$q(x) = x^2 - 4$,

qual o valor de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$?

170. Qual ou quais dos polinômios abaixo satisfazem a igualdade
$(3x + 2) \cdot P(x) = 3x^3 + x^2 + 6x - 2 + P(x)$?

$A(x) = x^3 - 2x - 2$

$B(x) = x^2 - 2$

$C(x) = x^3 - 6x - 2$

171. Determine m e n no polinômio $2x^4 + 3x^3 + mx^2 - nx - 3$ para que seja divisível pelo polinômio $x^2 - 2x - 3$.

172. Dados:

$P(x) = 2x^3 + Ax + 3B$ (A e B constantes)

$Q(x) = x^2 - 3x + 9$

a) divida P(x) por Q(x);

b) determine A e B para que a divisão seja exata.

173. Se a e b são determinados de forma que o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + 20$ seja divisível por $x^2 - 5x + 4$, qual o valor de $a + b$?

174. O polinômio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ é o quociente da divisão (que é exata) de $x^5 - x^4 - 34x^3 + 34x^2 + 225x - 225$ por $x^2 - 4x + 3$. Determine $|a + b + c + d|$.

175. Para que valores de m o resto da divisão de $P_1(x) = 4x^3 - 3x^2 + mx + 1$ por $P_2(x) = 2x^2 - x + 1$ independe de x?

176. Qual é o grau do polinômio quociente resultante da operação
$\{(x^2 + x + 1)^5 - (x^{10} + 2)\} : (x^3 + 1)$?

177. Seja Q o quociente e R o resto da divisão de um polinômio A por um polinômio B. Dê o quociente e o resto da divisão de A por 2B.

178. Se $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + ax + b$ e $x^2 + rx + s$, demonstre que $b = -r(a + r)$.

179. Dado o polinômio $f = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$, determine a condição para que f seja um cubo perfeito.

180. Demonstre que, se *f* e *g* são polinômios divisíveis por *h*, então o resto *r* da divisão de *f* por *g* também é divisível por *h*.

Solução

Seja q_1 o quociente de *f* por h: $f = q_1h$.

Seja q_2 o quociente de *g* por h: $g = q_2h$.

Sejam *q* o quociente e *r* o resto da divisão de *f* por g: $f = qg + r$.

Temos, então: $r = f - qg = q_1h - qq_2h = (q_1 - qq_2)h$ e, portanto, *r* é divisível por *h*.

181. Mostre que, se *f* e *g* são polinômios divisíveis pelo polinômio *h*, então o mesmo ocorre com $f + g$, $f - g$ e fg.

VI. Divisão por binômios do 1º grau

66. Divisão por binômios do 1º grau unitário

Trataremos neste item das divisões em que o dividendo é um polinômio *f*, com $\partial f \geqslant 1$, e o divisor é um polinômio *g*, com $\partial g = 1$ e coeficiente dominante também igual a 1.

Observemos o que ocorre quando dividimos $f = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ por $g = x - 4$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\,7x^2 & +\,4x & -\,1 & \;x - 4 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & +\,8x^2 & & & \;2x^2 + x + 8 \\
\cline{1-4}
& x^2 & +\,4x & -\,1 & \\
& -x^2 & +\,4x & & \\
\cline{2-4}
& & 8x & -\,1 & \\
& & -8x & +\,32 & \\
\cline{3-4}
& & & 31 &
\end{array}
$$

Como já sabemos, neste tipo de divisão *r* é um polinômio constante, pois:

$\partial g = 1 \Rightarrow \partial r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0$

Vemos que o valor numérico de *r* não depende do número *a* substituído no lugar de *x*, isto é, $r(a) = r, \forall a \in \mathbb{C}$.

Notemos, finalmente, que

$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 7 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 1 = 128 - 112 + 16 - 1 = 31 = r$

67. Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio *f* por $x - a$ é igual ao valor numérico de *f* em *a*.

Demonstração:

De acordo com a definição de divisão, temos:

$q \cdot (x - a) + r = f$

em que *q* e *r* são, respectivamente, o quociente e o resto. Como $x - a$ tem grau 1, o resto *r* ou é nulo ou tem grau zero; portanto, *r* é um polinômio constante.

Calculemos os valores dos polinômios da igualdade acima em *a*:

$$q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{0} + \underbrace{r(a)}_{r} = f(a)$$

Então: $r = f(a)$.

68. Exemplos:

1º) O resto da divisão de $f = 5x^4 + 3x^2 + 11$ por $g = x - 3$ é:

$f(3) = 5 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^2 + 11 = 405 + 27 + 11 = 443$

2º) O resto da divisão de $f = (x + 3)^7 + (x - 2)^2$ por $g = x + 3$ é:

$f(-3) = (-3 + 3)^7 + (-3 - 2)^2 = 0^7 + (-5)^2 = 25$

69. Teorema de D'Alembert

Um polinômio *f* é divisível por $x - a$ se, e somente se, *a* é raiz de *f*.

Demonstração:

De acordo com o teorema do resto, temos $r = f(a)$. Então:

$$q = 0 \Rightarrow f(a) = 0$$

(divisão exata) (*a* é raiz de *f*)

Aplicações

1ª) Verificar que $f = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 7x - 1$ é divisível por $g = x - 1$.

$f(1) = 1^5 - 4 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 1 = 1 - 4 - 3 + 7 - 1 = 0$, então *f* é divisível por *g*.

2ª) Determinar *a* de modo que $f = x^3 - 2ax^2 + (a - 1)x + 15$ seja divisível por $x - 5$.

Vamos impor a condição $r = f(5) = 0$:

$$f(5) = 5^3 - 2a \cdot 5^2 + (a - 1) \cdot 5 + 15 = 125 - 50a + 5a - 5 + 15 =$$
$$= 135 - 45a = 0 \Rightarrow a = \frac{135}{45} = 3$$

70. Algoritmo de Briot-Ruffini

Dados os polinômios

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 \neq 0) \text{ e}$$
$$g = x - a,$$

vamos determinar o quociente *q* e o resto *r* da divisão de *f* por *g*.

Façamos:

$$q = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-1}$$

e apliquemos o método dos coeficientes a determinar:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r} q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1} \\ x - a \end{array}\right\} \times \\
\hline
q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \ldots + q_{n-2}x^2 + q_{n-1}x \\
\quad - aq_0x^{n-1} - aq_1x^{n-2} - \ldots - aq_{n-3}x^2 - aq_{n-2}x - aq_{n-1} \\
\hline
q_0x^n + (q_1 - aq_0)x^{n-1} + (q_2 - aq_1)x^{n-2} + \ldots + (q_{n-1} - aq_{n-2})x - aq_{n-1}
\end{array}$$

Impondo a condição $q \cdot (x - a) + r = f$, resultam as igualdades:

$$\begin{array}{l}
q_0 = a_0 \\
q_1 - aq_0 = a_1 \Rightarrow q_1 = aq_0 + a_1 \\
q_2 - aq_1 = a_2 \Rightarrow q_1 = aq_1 + a_2 \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
q_{n-1} - aq_{n-2} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1} \\
r - aq_{n-1} = a_n \Rightarrow r = aq_{n-1} + a_n
\end{array}$$

Os cálculos para obter *q* e *r* indicados acima tornam-se mais rápidos com a aplicação do seguinte dispositivo prático de Briot-Ruffini.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & a \\
\hline
\underbrace{a_0}_{q_0} & \underbrace{aq_0 + a_1}_{q_1} & \underbrace{aq_1 + a_2}_{q_2} & \ldots & \underbrace{aq_{n-2} + a_{n-1}}_{q_{n-1}} & \underbrace{aq_{n-1} + a_n}_{r} &
\end{array}
$$

71. Exemplos:

1º) $f = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$ e $g = x - 3$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
2 & 0 & -7 & 3 & -1 & 3 \\
\hline
2 & \underbrace{2 \cdot 3 + 0}_{6} & \underbrace{6 \cdot 3 - 7}_{11} & \underbrace{11 \cdot 3 + 3}_{36} & \underbrace{36 \cdot 3 - 1}_{107} &
\end{array}
$$

portanto: $q = 2x^3 + 6x^2 + 11x + 36$ e $r = 107$.

2º) $f = 625x^4 - 81$ e $g = x - \dfrac{3}{5}$.

$$
\begin{array}{ccccc|c}
625 & 0 & 0 & 0 & -81 & \dfrac{3}{5} \\
\hline
625 & \underbrace{625 \cdot \dfrac{3}{5}}_{375} & \underbrace{375 \cdot \dfrac{3}{5}}_{225} & \underbrace{225 \cdot \dfrac{3}{5}}_{135} & \underbrace{135 \cdot \dfrac{3}{5} - 81}_{0} &
\end{array}
$$

portanto: $q = 625x^3 + 375x^2 + 225x + 135$ e $r = 0$.

3º) $f = 9x^3 + 5x^2 + x - 11$ e $g = x + 2$

$$
\begin{array}{cccc|c}
9 & 5 & 1 & -11 & -2 \\
\hline
9 & \underbrace{9(-2) + 5}_{-13} & \underbrace{(13)(-2) + 1}_{27} & \underbrace{27(-2) - 11}_{-65} &
\end{array}
$$

portanto: $q = 9x^2 - 13x + 27$ e $r = -65$.

72. Teorema

Se um polinômio *f* é divisível separadamente por $x - a$ e $x - b$, com $a \neq b$, então *f* é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

Demonstração:

Sejam *q* o quociente e $r = cx + d$ o resto da divisão de *f* por $(x - a)(x - b)$; então:

$q(x - a)(x - b) + (cx + d) = f$

Calculando os valores numéricos desses polinômios em *a*, temos:

$$[q(a)]\underbrace{(a - a)}_{0}(a - b) + (ca + d) = \underbrace{f(a)}_{0} \quad (1) \qquad \text{(pois } f \text{ é divisível por } x - a)$$

Calculando os valores numéricos em *b*, temos:

$$[q(b)](b - a)\underbrace{(b - b)}_{0} + (cb + d) = \underbrace{f(b)}_{0} \quad (2) \qquad \text{(pois } f \text{ é divisível por } x - b)$$

Resulta, então, o sistema: $\begin{cases} ca + d = 0 \\ cb + d = 0 \end{cases}$

de onde vem $c = 0$ e $d = 0$, portanto $r = 0$.

EXERCÍCIOS

182. Qual o quociente da divisão de $2x^4 - 5x^3 - 10x - 1$ por $x - 3$?

183. Qual é o resto da divisão do polinômio $x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 15x + 6$ por $(x - 2)$?

184. O quociente de um polinômio de grau $n + 1$ por $x - a$ é um polinômio de que grau?

185. Determine o resto de $x^2 + x + 1$ dividido por $x + 1$.

186. Qual é o resto da divisão de $x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ por $x + 1$?

187. Qual é o resto da divisão de $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ por $x + 1$?

188. Qual é o resto da divisão de $kx^2 + x - 1$ por $x + 2k$?

189. Se $n \geqslant 2$, qual o resto da divisão de $4x^n + 3x^{n-2} + 1$ por $x + 1$?

190. Qual é uma condição necessária e suficiente para que um polinômio P(x) de coeficientes inteiros seja divisível por $(x + a)$?

191. Determine a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que o polinômio

$f = ax^3 + (2a - 1)x^2 + (3a - 2)x + 4a$

seja divisível por $g = x - 1$ e, em seguida, obtenha o quociente da divisão.

Solução

f é divisível por $x - 1$ se, e somente se, $f(1) = 0$, então:

$f(1) = a1^3 + (2a - 1)1^2 + (3a - 2)1 + 4a = 10a - 3 = 0$; portanto, $a = \dfrac{3}{10}$.

Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, vamos dividir o polinômio

$f = \dfrac{3}{10}x^3 - \dfrac{4}{10}x^2 - \dfrac{11}{10}x + \dfrac{12}{10}\left(\text{para } a = \dfrac{3}{10}\right)$ por $x - 1$.

$$
\begin{array}{cccc|c|c}
\frac{3}{10} & -\frac{4}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{12}{10} & & 1 \\
\hline
\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{12}{10} & \multicolumn{1}{|c|}{0} & &
\end{array}
$$

Resposta: $a = \dfrac{3}{10}$ e $q = \dfrac{3}{10}x^2 - \dfrac{1}{10}x - \dfrac{12}{10}$.

192. Determine p e q reais de modo que $f = x^2 + (p - q)x + 2p$ e $g = x^3 + (p + q)$ sejam ambos divisíveis por $2 - x$.

Solução

Pelo teorema de D'Alembert, *f* e *g* são divisíveis por $2 - x = -(x - 2)$ se, e só se, $f(2) = 0$ e $g(2) = 0$, então:

$f(2) = 2^2 + (p - q)2 + 2p = 0 \Rightarrow 4q - 2q = -4 \quad (1)$

$g(2) = 2^3 + (p + q) = 0 \Rightarrow p + q = -8 \quad (2)$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2), vem:

Resposta: $p = -\dfrac{10}{3}$ e $q = -\dfrac{14}{3}$.

193. Determine *a* de modo que a divisão de $f = x^4 - 2ax^3 + (a + 2)x^2 + 3a + 1$ por $g = x - 2$ apresente resto igual a 7.

194. Determine *p* de modo que o polinômio $f = 2x^3 + px^2 - (2p + 1)x + (p + 3)$ seja divisível por $g = x + 4$.

195. Determine *p* e *q* de modo que o polinômio $x^3 - 2px^2 + (p + 3)x + (2p + q)$ seja divisível por *x* e $x - 2$.

196. Determine *a* e *b* de modo que o polinômio $f = x^3 + 2x^2 + ax + b$ apresente as seguintes propriedades: $f + 1$ é divisível por $x + 1$ e $f - 1$ é divisível por $x - 1$.

197. Qual o valor de *a* para que o resto da divisão $ax^3 - 2x + 1$ por $x - 3$ seja 4?

198. Na divisão do polinômio $5x^5 + ax^3 + bx^2 + 3x + 1$ por $x - 2$, encontrou-se o quociente $5x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 115$. Determine o resto.

199. Sejam *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* os números que aparecem no dispositivo de Briot-Ruffini para o cálculo do quociente e do resto da divisão de $2x^4 + 8x^3 - x^2 + 16$ por $x + 4$.

2	8	−1	0	16	−4
	−8	b	4	e	
2	a	c	d	f	

Qual o valor de $a + b + c + d + e + f$?

200. O resto da divisão por $x - b$ do polinômio

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

é um polinômio nulo ou não nulo?

201. O quadro

1	0	−0,52	−1,626	1,32
1	1,32	1,2224	−0,012432	

é o dispositivo prático de Briot-Ruffini para a divisão de determinado polinômio P(x) por determinado binômio linear D(x). Qual é o valor de $P(x) + D(x)$ no ponto $x = 1$?

202. Os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ do polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 1/2. Então, qual o resto da divisão de P(x) por $x + 2$?
Obs.: *n* é ímpar.

203. Determine o polinômio *f* do segundo grau que, dividido por *x*, $x - 1$ e $x - 2$, apresenta resto 4, 9 e 18, respectivamente.

Solução

Seja $f = ax^2 + bx + c$. Temos:
$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4 \quad (1)$
$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 9 \Rightarrow a + b + c = 9 \quad (2)$
$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 18 \Rightarrow 4a + 2b + c = 18 \quad (3)$
Substituindo (1) em (2) e (3) resulta o sistema:
$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 4a + 2b = 14 \end{cases}$$
que, resolvido por adição, dá $a = 2$ e $b = 3$.
Resposta: $f = 2x^2 + 3x + 4$.

204. Obtenha um polinômio *f* do segundo grau tal que:
I) $a = 21$
II) *f* é divisível por $x - 1$
III) os restos das divisões de *f* por $x - 2$ e $x - 3$ são iguais.

205. Determine o polinômio do 3º grau que se anula para $x = 1$ e que, dividido por $x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$, dá restos iguais a 6.

206. Mostre que, se a soma dos coeficientes de um polinômio *f* é nula, então *f* é divisível por $x - 1$.

Solução

Seja $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ tal que $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$.
Provemos que *f* é divisível por $x - 1$ ou, o que é equivalente, $f(1) = 0$:
$f(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + ... + a_n \cdot 1^n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$.
Assim, por exemplo, são divisíveis por $x - 1$ os polinômios:
$3x^4 - 5x + 2$ (pois $3 + (-5) + 2 = 0$)
$7x^n - 8x^{n-3} + 1$ (pois $7 + (-8) + 1 = 0$)

207. Aplicando Briot-Ruffini, determine o quociente *q* e o resto *r* da divisão de $f = x^3 - x^2 + x - 1$ por $g = (x - 2)(x - 3)$.

Solução

Sejam q_1 o quociente e r_1 o resto da divisão de *f* por $x - 2$:

$f = q_1(x - 2) + r_1 \quad (1)$

Sejam q_2 o quociente e r_2 o resto da divisão de q_1 por $x - 3$:

$q_1 = q_2(x - 3) + r_2 \quad (2)$

Substituindo (2) em (1), vem:

$q_f = [q_2(x - 3) + r_2]\,(x - 3) + r_1 = q_2(x - 2)(x - 3) + [r_2(x - 2) + r_1]$

Assim, q_2 é o quociente procurado e $r_2(x - 2) + r_1$ é o resto procurado.

Apliquemos Briot-Ruffini duas vezes:

$$\begin{array}{l|cccc|c} f \rightarrow & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ \hline q_1 \rightarrow & 1 & 1 & 3 & \underbrace{5}_{r_1} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|ccc|c} q_1 \rightarrow & 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline q_2 \rightarrow & 1 & 4 & \underbrace{15}_{r_2} & \end{array}$$

$q = q_2 = x + 45$

$r = r_2(x - 2) + r_1 = 15(x - 2) + 5 = 15x - 25$

Resposta: $q = x + 4$ e $r = 15x - 25$.

208. Sendo 5 e -2 os restos da divisão de um polinômio *f* por $x - 1$ e $x + 3$, respectivamente, determine o resto da divisão de *f* pelo produto $(x - 1)(x + 3)$.

Solução

Pelo teorema do resto, temos:

$f(1) = 5$ e $f(-3) = -2$

Sejam *q* e $r = ax + b$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de *f* por $(x - 1)(x + 3)$. Temos

$f = q \cdot (x - 1)(x + 3) + (ax + b)$

Tomemos os valores numéricos desses polinômios em 1 e -3:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = q(1) \cdot \underbrace{(1 - 1)}_{0}(1 + 3) + (a \cdot 1 + b) \Rightarrow 5 = a + b \\ f(-3) = q(-3) \cdot (-3 - 1)\underbrace{(-3 + 3)}_{0} + (-3a + b) \Rightarrow -2 = -3a + b \end{array}\right\}$$

Resolvendo o sistema formado por $a + b = 5$ e $-3a + b = -2$, resulta $a = \frac{7}{4}$ e $b = \frac{13}{4}$.

Resposta: $r = \frac{7}{4}x + \frac{13}{4}$.

209. Sendo 8 e 6 os restos respectivos da divisão de um polinômio P(x) por $(x + 5)$ e $(x - 3)$, determine o resto da divisão de P(x) pelo produto $(x - 5)(x - 3)$.

210. Sabe-se que os restos das divisões de $y^2 + ay + 2$ por $y - 1$ e por $y + 1$ são iguais. Qual o valor de *a*?

211. Qual o valor do produto $m \cdot n$ para que o polinômio $x^3 - 6x^2 + mx + n$ seja divisível por $(x - 1)(x - 2)$?

212. Um polinômio desconhecido ao ser dividido por $x - 1$ deixa resto 2 e ao ser dividido por $x - 2$ deixa resto 1. Qual o resto da divisão desse polinômio por $(x - 1)(x - 2)$?

213. Se P(x) é um polinômio divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, $(x - a)(x - b)$ divide P(x)?

214. Qual o resto da divisão de $2x^5 - 15x^3 + 12x^2 + 7x - 6$ por $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$?

215. Os restos das divisões de um polinômio pelos binômios $(x + 1)$, $(x - 1)$ e $(x - 2)$ são, respectivamente, 5, -1, -1. Então, qual o resto da divisão de P(x) por $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$?

216. Qual o coeficiente de x^3 no polinômio P(x) do terceiro grau que se anula para $x = -1$ e tal que dividido separadamente por $x - 1$, $x + 2$ e $x + 3$ deixa sempre resto 10?

217. Quais os valores dos números reais *a* e *b* para que os polinômios

$$x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b \quad \text{e} \quad x^3 - (a + 2b)x + 2a$$

sejam divisíveis por $x + 1$?

218. Qual é a condição necessária e suficiente que devem satisfazer *p* e *q* de modo que $x^p + 2a^q x^{p-q} + a^p$ seja divisível por $x + a$ ($p, q \in \mathbb{N}$ e $p > q$)?

219. Qual deve ser o valor do coeficiente *c* para que os restos das divisões de $x^{10} + ax^4 + bx^2 + cx + d$ por $x + 12$ e $x - 12$ sejam iguais?

220. É dado o polinômio $f(x) = (a - 1)x^6 + (a + 1)x^5 + (a^2 - 1)x^4 - (2a + 1)x + 12$.

a) Determine *a* de modo que o quociente da divisão *f* por $g(x) = x^2 + 1$ seja do 3º grau;

b) para esse valor de *a*, calcule o quociente e o resto da divisão de *f* por *g*.

221. Determine o resto e o quociente da divisão de $f = x^n - a^n$ por $g = x - a$.

Solução

$r = f(a) = a^n - a^n = 0$

Aplicando Briot-Ruffini, temos:

$$
\begin{array}{cc|c|c}
1 & \overbrace{0 \quad\; 0 \quad\; 0 \quad\; \ldots \quad\; 0}^{n\,-\,1\text{ zeros}} & -a^n & a \\ \hline
1 & a \quad\; a^2 \quad\; a^3 \quad\; \ldots \quad\; a^{n-1} & \underbrace{0}_{r} &
\end{array}
$$

Resposta: $r = 0$ e $q = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$.

222. Determine o resto e o quociente da divisão de $f = x^n + a^n$ por $g = x - a$.

Solução

$r = f(a) = a^n + a^n = 2a^n$

Aplicando Briot-Ruffini, temos:

$$
\begin{array}{cc|c|c}
1 & \overbrace{0 \quad\; 0 \quad\; 0 \quad\; \ldots \quad\; 0}^{n\,-\,1\text{ zeros}} & a^n & a \\ \hline
1 & a \quad\; a^2 \quad\; a^3 \quad\; \ldots \quad\; a^{n-1} & \underbrace{2a^n}_{r} &
\end{array}
$$

Resposta: $r = 2a^n$ e $q = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$.

223. Determine o resto e o quociente da divisão de $f = x^n - a^n$ por $g = x + a$.

Solução

1º caso: *n* é par $\Rightarrow$ $r = f(-a) = (-a)^n - a^n = a^n - a^n = 0$

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
1 & \overbrace{0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad \ldots \qquad 0}^{n-1\text{ zeros}} & & & & & -a^n & -a \\ \hline
1 & -a & a^2 & -a^3 & \ldots & -a^{n-1} & \underbrace{0}_{r} &
\end{array}$$

$q = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots - a^{n-1}$

2º caso: *n* é ímpar $\Rightarrow$ $r = f(-a) = (-a)^n - a^n = -a^n - a^n = -2a^n$

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
1 & \overbrace{0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad \ldots \qquad 0}^{n-1\text{ zeros}} & & & & & -a^n & -a \\ \hline
1 & -a & a^2 & -a^3 & \ldots & a^{n-1} & \underbrace{-2a^n}_{r} &
\end{array}$$

$q = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$

224. Determine o resto e o quociente da divisão de $f = x^n + a^n$ por $g = x + a$.

Solução

1º caso: *n* é par $\Rightarrow$ $r = f(-a) = (-a)^n + a^n = a^n + a^n = 2a^n$

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
1 & \overbrace{0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad \ldots \qquad 0}^{n-1\text{ zeros}} & & & & & a^n & -a \\ \hline
1 & -a & a^2 & -a^3 & \ldots & -a^{n-1} & \underbrace{2a^n}_{r} &
\end{array}$$

$q = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-1}$

2º caso: n é ímpar $\Rightarrow$ $r = f(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0$

$$\begin{array}{c|c|c}
1 \quad \overbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{n\,-\,1\text{ zeros}} & a^n & -a \\
\hline
1 \quad -a \quad a^2 \quad -a^3 \quad \dots \quad a^{n-1} & \underbrace{0}_{r} &
\end{array}$$

$q = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1}$

225. Determine o resto e o quociente das divisões de f por g nos seguintes casos:

a) $f = x^4 - 81$ e $g = x + 3$
b) $f = x^4 + 81$ e $g = x - 3$
c) $f = x^5 + 32$ e $g = x - 2$
d) $f = x^5 - 32$ e $g = x + 2$
e) $f = x^6 - 1$ e $g = x - 1$
f) $f = x^6 + 1$ e $g = x + 1$
g) $f = x^5 + 243$ e $g = x - 3$
h) $f = x^5 + 243$ e $g = x + 3$

226. Transforme $x^5 - a^5$ num produto de dois polinômios.

227. Qual é o resto da divisão de $f = \sum_{i=0}^{n} a^i x^{n-1}$ por $g = x - a$?

228. A divisão de $(x^{999} - 1)$ por $(x - 1)$ tem resto $R(x)$ e quociente $Q(x)$. Qual o valor de $R(x)$ e qual o valor de $Q(x)$ para $x = 0$?

229. Quais os valores de a e de b para que o polinômio $x^3 + ax + b$ seja divisível por $(x - 1)^2$?

230. Se dividimos um polinômio $P(x)$ por $x - 2$, o resto é 13 e se dividimos $P(x)$ por $(x + 2)$, o resto é 5. Supondo que $R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 4$, determine $R(x)$ para $x = 1$.

231. Sabendo que $P(x)$ do quarto grau é divisível por $(x - 2)^3$ e que $P(0) = -8$ e $P(1) = -3$, determine o valor de $P(3)$.

232. O polinômio $x^{2n} - a^{2n}$ é divisível por $x^2 - a^2$ para quais valores de n?

73. Divisão por binômios do 1º grau quaisquer

Para obtermos rapidamente o quociente q e o resto r da divisão de um polinômio f, com $\partial f \geqslant 1$, por $g = bx - a$, em que $b \neq 0$, notemos que:

$$(bx - a)q + r = f \quad \text{então} \quad \left(x - \frac{a}{b}\right)\underbrace{(bq)}_{q'} + r = f$$

do que decorre a seguinte regra prática:

1º) divide-se *f* por $x - \frac{a}{b}$ empregando o algoritmo de Briot-Ruffini;

2º) divide-se o quociente q' encontrado pelo número *b*, obtendo *q*.

Exemplos:

1º) Dividir $f = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 7x + 1$ por $g = 3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$.

3	−2	1	−7	1	$\frac{5}{3}$
3	3	6	3	6	

$q' = 3x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow q = \frac{q'}{3} = x^3 + x^2 + 2x + 1$ e $r = 6$

2º) Dividir $f = 4x^3 + 5x + 25$ por $g = 2x + 3 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

4	0	5	25	$-\frac{3}{2}$
4	−6	14	4	

$q' = 4x^2 - 6x + 14 \Rightarrow q = \frac{q'}{2} = 2x^2 - 3x + 7$ e $r = 4$

3º) Dividir $f = 8x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 3$ por $g = 4x + 3 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)$.

8	6	4	3	−4	−3	$-\frac{3}{4}$
8	0	4	0	−4	0	

$q' = 8x^4 + 4x^2 - 4 \Rightarrow q = \frac{q'}{4} = 2x^4 + x^2 - 1$ e $r = 0$

EXERCÍCIOS

233. Qual o quociente da divisão de $4x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 8x - 7$ por $2x + 3$?

234. Qual o valor de K para que

$P(x) = 6x^5 + 11x^4 + 4x^3 + Kx^2 + 2x + 8$

seja divisível por $3x + 4$?

235. Qual o quociente da divisão do polinômio

$P_1(x) = x^5 + 3x^2 + x - 1$ por $P_2(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$?

236. Dados os polinômios $f = -2x^3 - x^2 + 2x + 1$ e $g = 2x + 1$, calcule $(f + g)(f - g)$ e $f : g$.

237. Sendo $p(x) = 5x^2 - \frac{29}{2}x + 6$, $q(x) = 2x - 1$ e $r(x) = x - 7$, calcule $p(x) \div q(x) - r(x)$.

238. O resto da divisão de um polinômio P(x) por $ax - b$ é $R = P(r)$. Determine *r*.

239. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, determine quociente e resto da divisão de *f* por *g*:

a) $f = 5x^4 - 12x^3 + x^2 - 13$, $g = x + 3$

b) $f = 81x^5 + 32$, $g = x - \frac{2}{3}$

c) $f = 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ e $g = 2x + 1$

d) $f = 4x^4 - 2x^2 + 1$ e $g = (x - 1)(x + 2)$

240. Qual é o resto da divisão de $f = x^8 + 1$ por $g = 2x - 4$?

241. Mostre que $f = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$ é divisível por $g = x^2 + 5x + 6$.

Solução

Podemos resolver este problema se efetuar a divisão, notando que $g = (x + 2)(x + 3)$.

Se *f* for divisível por $x + 2$ e $x + 3$, de acordo com o teorema do item 72, *f* será divisível por *g*. Provemos, portanto, que $f(-2) = 0$ e $f(-3) = 0$:

$f(-3) = 2(-3)^3 + 9(-3)^2 + 7(-3) - 6 = -54 + 81 - 21 - 6 = 0$

$f(-2) = 2(-2)^3 + 9(-2)^2 + 7(-2) - 6 = -16 + 36 - 14 - 6 = 0$

242. Mostre que $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$ é divisível por $g(x) = x^2 + 3x + 2$.

243. Prove que $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$.

244. Determine *a* e *b* em $\mathbb{R}$ de modo que o polinômio

$f = x^3 + 2x^2 + (2a - b)x + (a + b)$

seja divisível por $g = x^2 - x$.

Solução

$g = x^2 - x = x(x - 1) = (x - 0)(x - 1)$

então *f* é divisível por *g* desde que *f* seja divisível por $x - 0$ e $x - 1$, isto é, se $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$. Assim, temos:

$f(0) = 0 \Rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0^2 + (2a - b) \cdot 0 + (a + b) = 0 \Rightarrow a + b = 0$

$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + 2 \cdot 1^2 + (2a - b) \cdot 1 + (a + b) = 0 \Rightarrow 3a + 3 = 0$

Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, vem:

$a = -1$ e $b = 1$.

245. Determine *p* e *q* de modo que o polinômio $x^3 + px + q$ seja divisível por $(x - 2)(x + 1)$.

246. Determine *a*, *b*, *c* de modo que $ax^{2n} + bx^{2n-1} + c$, com $n \in \mathbb{N}^*$, seja divisível por $x(x + 1)(x - 1)$.

247. Prove que $5x^6 - 6x^5 + 1$ é divisível por $(x - 1)^2$ e determine o quociente.

248. Prove que $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ é divisível por $(x - 1)^2$.

249. Determine *a* e *b* em função de *n* de modo que $ax^{n+1} + bx^n + 1$ seja divisível por $(x - 1)^2$.

250. Determine os números reais *a* e *b* e o maior inteiro *m* de tal modo que o polinômio $x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$ seja divisível por $(x - 1)^m$.

251. Mostre que $f = x^3 + x^2 - 10x + 8$ é divisível por $x - 1$, mas não é divisível por $(x - 1)^2$.

Solução

Vamos aplicar duas vezes o algoritmo de Briot-Ruffini:

f	→	1	1	−10	8	1
q	→	1	2	−8	0	
					↑ r_1	

q	→	1	2	−8	1
		1	3	−5	
				↑ r_2	

Verificamos que *f* é divisível por $x - 1$, pois obtivemos $q = x^2 + 2x - 8$ e $r_1 - 0$, porém *f* não é divisível por $(x - 1)^2$, uma vez que *q* não é divisível por $x - 1$.

252. Se α, β e γ são raízes do polinômio *f*, qual é o grau de *f*?

Solução

Se *f* admite α, β e γ como raízes, então *f* é divisível por $x - \alpha$, $x - \beta$ e $x - \gamma$; portanto *f* é divisível pelo produto $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, isto é, existe um polinômio *q* tal que:

$f = q \cdot (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

Existem duas possibilidades:

1ª) $q = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \nexists\ \partial f$

ou

2ª) $q \neq 0 \Rightarrow \partial f = \partial q + \partial[(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)] = \partial q + 3 \geqslant 3$

Resposta: $f = 0$ ou $\partial f \geqslant 3$.

253. Se as divisões de um polinômmio *f* por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$ são exatas, que se pode dizer do grau de *f*?

254. Determine o quociente e o resto da divisão de
$f = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ por $g = (x - 1)(2x - 4)$.

Solução

Vamos dividir *f* sucessivamente por $x - 1$ e $2x - 4 = 2(x - 2)$ e aplicar o mesmo raciocínio feito no exercício 207:

$$\begin{array}{l|rrr|r|l} f \rightarrow & 1 & -5 & 8 & -4 & 1 \\ \hline q \rightarrow & 1 & -4 & 4 & \underbrace{0}_{r_1} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|rr|r|l} q_1 \rightarrow & 1 & -4 & 4 & 2 \\ \hline 2q_2 \rightarrow & 1 & -2 & \underbrace{0}_{r_2} & \end{array}$$

$$q = q_2 = \frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{2}x - 1$$

$$r = r_2(x - 1) + r_1 = 0(x - 1) + 0 = 0$$

Resposta: $q = \frac{1}{2}x - 1$ e $r = 0$.

255. Calcule o resto R(x) da divisão de um polinômio inteiro em *x* pelo produto $(x + 1)(x - 2)$, sabendo que o resto da divisão por $(x + 1)$ no ponto -1 e o resto da divisão por $(x - 2)$ no ponto 2 são ambos iguais a 3.

256. a) Enuncie o teorema da existência e unicidade do quociente e do resto da divisão de dois polinômios de uma variável A(z) e B(z).

b) Determine o resto da divisão de um polinômio A(z) por $B(z) = z^2 + 1$, conhecendo A(i) e A(−i), em que *i* é a unidade imaginária.

257. Um polinômio *f*, dividido por $x + 2$ e $x^2 + 4$, dá restos 0 e $x + 1$, respectivamente. Qual é o resto da divisão de *f* por $(x + 2)(x^2 + 4)$?

258. Um polinômio P(x) é divisível por $x + 1$, e, dividido por $x^2 + 1$, dá quociente $x^2 - 4$ e resto R(x). Se $R(2) = 9$, escreva P(x).