GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Conjuntos
Funções

1

Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO II

Conjuntos

Faremos aqui uma revisão das principais noções da teoria dos conjuntos, naquilo que importa à Matemática elementar. Em seguida usaremos essas noções para apresentar os principais conjuntos de números.

I. Conjunto – Elemento – Pertinência

19. Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição, isto é, são consideradas noções primitivas:

- conjunto;
- elemento;
- pertinência entre elemento e conjunto.

A noção matemática de conjunto é praticamente a mesma que se usa na linguagem comum: é o mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema. Eis alguns exemplos:

1º) conjunto das vogais
2º) conjunto dos algarismos romanos
3º) conjunto dos números ímpares positivos
4º) conjunto dos planetas do sistema solar
5º) conjunto dos números primos positivos
6º) conjunto dos naipes das cartas de um baralho
7º) conjunto dos nomes dos meses de 31 dias

Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é chamado **elemento**. Assim, nos exemplos anteriores, temos os elementos:

1º) a, e, i, o, u

2º) I, V, X, L, C, D, M

3º) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

4º) Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, ...

5º) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

6º) paus, ouros, copas, espadas

7º) janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro

No 3º exemplo, cada número ímpar é elemento do conjunto dos números ímpares, isto é, pertence ao conjunto. Em particular, 5 pertence ao conjunto dos números ímpares e 2 não pertence.

Um elemento de um conjunto pode ser uma letra, um número, um nome, etc. É importante notar que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto. Por exemplo, o conjunto das seleções que disputam um campeonato mundial de futebol é um conjunto formado por equipes que, por sua vez, são conjuntos de jogadores.

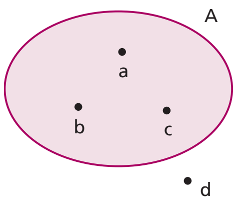
Indicamos um conjunto, em geral, com uma letra maiúscula, A, B, C, ..., e um elemento com uma letra minúscula, a, b, c, d, x, y, ...

Sejam A um conjunto e x um elemento. Se x pertence ao conjunto A, escrevemos:

$$\boxed{x \in A}$$

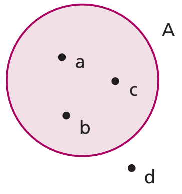
Para indicar que x não é elemento do conjunto A, escrevemos:

$$\boxed{x \notin A}$$



É habitual representar um conjunto pelos pontos interiores a uma linha fechada e não entrelaçada. Assim, na representação ao lado, temos:

$$a \in A, \ b \in A, c \in A \ \text{ e } \ d \notin A$$



No caso de usarmos um círculo para representar um conjunto, estaremos usando o assim chamado **diagrama de Euler-Venn**.

II. Descrição de um conjunto

Utilizamos dois recursos principais para descrever um conjunto e seus elementos: enumeramos (citamos, escrevemos) os elementos do conjunto ou damos uma propriedade característica dos elementos do conjunto.

20. Descrição pela citação dos elementos

Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, devemos indicá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Exemplos:

1º) conjunto das vogais: {a, e, i, o, u}

2º) conjunto dos algarismos romanos: {I, V, X, L, C, D, M}

3º) conjunto dos nomes de meses de 31 dias:

{janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}

Essa notação também é empregada quando o conjunto é infinito: escrevemos alguns elementos que evidenciem a lei de formação e em seguida colocamos reticências.

Exemplos:

1º) conjunto dos números ímpares positivos:

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$$

2º) conjunto dos números primos positivos:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

3º) conjunto dos múltiplos inteiros de 3:

$$\{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \ldots\}$$

A mesma notação também é empregada quando o conjunto é finito com grande número de elementos: escrevemos os elementos iniciais, colocamos reticências e indicamos o último elemento.

Exemplos:

1º) conjunto dos números inteiros de 0 a 500:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, 500\}$$

2º) conjunto dos divisores positivos de 100:

$$\{1, 2, 5, 10, \ldots, 100\}$$

21. Descrição por uma propriedade

Quando queremos descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos *x*, escrevemos:

$$\boxed{A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade P}\}}$$

e lemos: "A é o conjunto dos elementos *x* tal que *x* tem a propriedade P".

Exemplos:

1º) $\{x \mid x \text{ é estado da região Sul do Brasil}\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

{Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}

2º) $\{x \mid x \text{ é divisor inteiro de } 3\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

$$\{1, -1, 3, -3\}$$

3º) $\{x \mid x \text{ é inteiro e } 0 \leqslant x \leqslant 500\}$ pode também ser indicado por:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, 500\}$$

III. Conjunto unitário – Conjunto vazio

22. Chama-se **conjunto unitário** aquele que possui um único elemento.

Exemplos:

1º) conjunto dos divisores de 1, inteiros e positivos: $\{1\}$

2º) conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$

3º) conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai:

{Rio Grande do Sul}

23. Chama-se **conjunto vazio** aquele que não possui elemento algum. O símbolo usual para o conjunto vazio é $\varnothing$.

Obtemos um conjunto vazio quando descrevemos um conjunto por meio de uma propriedade P logicamente falsa.

Exemplos:

1º) $\{x \mid x \neq x\} = \varnothing$

2º) $\{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \varnothing$

3º) $\{x \mid x > 0 \quad \text{e} \quad x < 0\} = \varnothing$

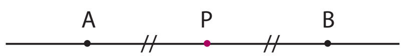
IV. Conjunto universo

24. Quando vamos desenvolver um certo assunto de Matemática, admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no tal assunto. Esse conjunto U recebe o nome de **conjunto universo**.

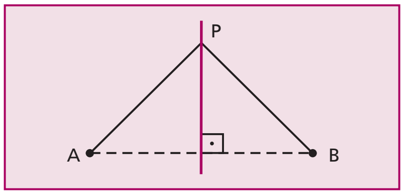
Assim, se procuramos as soluções reais de uma equação, nosso conjunto universo é $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais); se estamos resolvendo um problema cuja solução vai ser um número inteiro, nosso conjunto universo é $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros); se estamos resolvendo um problema de Geometria Plana, nosso conjunto universo é um certo plano α.

Quase sempre a resposta para algumas questões depende do universo U em que estamos trabalhando. Consideremos a questão: "Qual é o conjunto dos pontos P que ficam a igual distância de dois pontos dados A e B, sendo A $\neq$ B?"

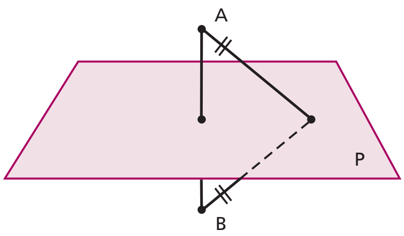
1) Se U é a reta $\overleftrightarrow{AB}$, o conjunto procurado é formado só por P;



2) Se U é um plano contendo A e B, o conjunto procurado é a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$;



3) Se U é o espaço, o conjunto procurado é o plano mediador do segmento $\overline{AB}$ (plano perpendicular a $\overline{AB}$ no seu ponto médio).



Portanto, quando vamos descrever um conjunto A através de uma propriedade P, é essencial fixarmos o conjunto universo U em que estamos trabalhando, escrevendo:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

EXERCÍCIOS

11. Dê os elementos dos seguintes conjuntos:
A $= \{x \mid x$ é letra da palavra **matemática**$\}$
B $= \{x \mid x$ é cor da bandeira brasileira$\}$
C $= \{x \mid x$ é nome do estado brasileiro que começa com a letra *a*$\}$

Solução

A = {m, a, t, e, i, c}
B = {branco, azul, amarelo, verde}
C = {Amazonas, Amapá, Acre, Alagoas}

12. Descreva por meio de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes:
A $= \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$
B $= \{0, 1, 2, ..., 9\}$
C = {Brasília, Rio de Janeiro, Salvador}

Solução

A $= \{x \mid x$ é inteiro, par e não negativo$\}$
B $= \{x \mid x$ é algarismo arábico$\}$
C $= \{x \mid x$ é nome de cidade que já foi capital do Brasil$\}$

13. Escreva com símbolos:
a) o conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre -10 e $+10$;
b) o conjunto dos divisores inteiros de 42;
c) o conjunto dos múltiplos inteiros de 0;
d) o conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3;
e) o conjunto dos nomes das capitais da região Centro-Oeste do Brasil.

14. Descreva por meio de uma propriedade dos elementos:
A $= \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6\}$
B $= \{0, -10, -20, -30, -40, ...\}$
C $= \{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$
D = {Lua}

15. Quais dos conjuntos abaixo são unitários?

$A = \left\{x \mid x < \dfrac{9}{4} \text{ e } x > \dfrac{6}{5}\right\}$

$B = \{x \mid 0 \cdot x = 2\}$

$C = \{x \mid x \text{ é inteiro e } x^2 = 3\}$

$D = \{x \mid 2x + 1 = 7\}$

16. Quais dos conjuntos abaixo são vazios?

$A = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$

$B = \left\{x \mid x > \dfrac{9}{4} \text{ e } x < \dfrac{6}{5}\right\}$

$C = \{x \mid x \text{ é divisor de zero}\}$

$D = \{x \mid x \text{ é divisível por zero}\}$

V. Conjuntos iguais

25. Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Em símbolos:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$$

Exemplos:

1º) $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$

2º) $\{1, 3, 5, 7, 9, ...\} = \{x \mid x \text{ é inteiro, positivo e ímpar}\}$

3º) $\{x \mid 2x + 1 = 5\} = \{2\}$

Observemos que na definição de igualdade entre conjuntos não intervém a noção de ordem entre os elementos; portanto:

$$\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{b, a, c, d\}$$

Observemos ainda que a repetição de um elemento na descrição de um conjunto é algo absolutamente inútil, pois, por exemplo:

$$\{a, b, c, d\} = \{a, a, b, b, b, c, d, d, d, d\}$$

para conferir basta usar a definição. Assim, preferimos sempre a notação mais simples.

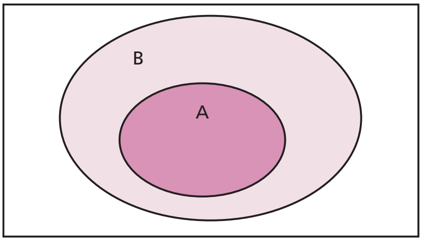
26. Se A não é igual a B, escrevemos $A \neq B$. É evidente que A é diferente de B se existe um elemento de A não pertencente a B ou existe em B um elemento não pertencente a A.

Exemplo:

$$\{a, b, d\} \neq \{a, b, c, d\}$$

VI. Subconjuntos

27. Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B.



Com a notação $A \subset B$ indicamos que "A é subconjunto de B" ou "A está contido em B" ou "A é parte de B".

O símbolo $\subset$ é denominado **sinal de inclusão**.

Em símbolos, a definição fica assim:

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (\forall\, x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)}$$

Exemplos:

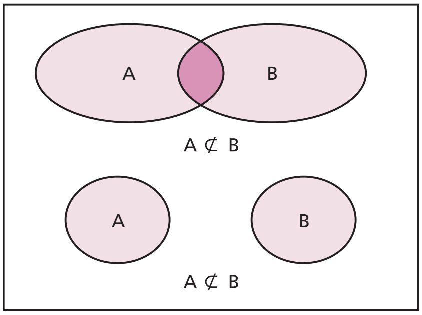
1º) $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$

2º) $\{a\} \subset \{a, b\}$

3º) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$

4º) $\{x \mid x \text{ é inteiro e par}\} \subset \{x \mid x \text{ é inteiro}\}$

28. Quando $A \subset B$, também podemos escrever $B \supset A$, que se lê "B contém A".



Com a notação $A \not\subset B$ indicamos que "A não está contido em B", isto é, a negação de $A \subset B$.

É evidente que $A \not\subset B$ somente se existe ao menos um elemento de A que não pertence a B.

Assim, por exemplo, temos:

1º) $\{a, b, c\} \not\subset \{b, c, d, e\}$

2º) $\{a, b\} \not\subset \{c, d, e\}$

3º) $\{x \mid x \text{ é inteiro e par}\} \not\subset \{x \mid x \text{ é inteiro e primo}\}$

29. Conjuntos iguais

Vimos anteriormente o conceito de igualdade de conjuntos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) \ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Nessa definição está explícito que todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$; portanto, podemos escrever:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow (A \subset B \ \text{ e } \ B \subset A)}$$

Assim, para provarmos que $A = B$, devemos provar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

30. Propriedades da inclusão

Sendo A, B e C três conjuntos arbitrários, valem as seguintes propriedades:

1ª) $\varnothing \subset A$

2ª) $A \subset A$ (reflexiva)

3ª) $(A \subset B \ \text{ e } \ B \subset A) \Rightarrow A = B$ (antissimétrica)

4ª) $(A \subset B \ \text{ e } \ B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

A demonstração dessas propriedades é imediata, com exceção da 1ª, que passamos a provar. Para todo *x*, a implicação

$$x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$$

é verdadeira, pois $x \in \varnothing$ é falsa. Então, por definição de subconjunto, $\varnothing \subset A$.

31. Conjunto das partes

Dado um conjunto A, chama-se **conjunto das partes** de A – notação $\mathcal{P}(A)$ – aquele que é formado por todos os subconjuntos de A. Em símbolos:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}}$$

Exemplos:

1º) Se $A = \{a\}$, os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\varnothing$ e $\{a\}$, isto é:

$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$.

2º) Se $A = \{a, b\}$, os elementos de $\mathscr{P}(A)$ são $\varnothing$ e $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{a, b\}$, isto é:
$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

3º) Se $A = \{a, b, c\}$, os elementos de $\mathscr{P}(A)$ são $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ e $\{a, b, c\}$, isto é:
$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$.

EXERCÍCIOS

17. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$:

a) escreva com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

1ª) 3 é elemento de A
2ª) 1 não está em B
3ª) B é parte de A
4ª) B é igual a A
5ª) 4 pertence a B

b) classifique as sentenças anteriores em falsas ou verdadeiras.

Solução

1ª) $3 \in A$ (V)
2ª) $1 \notin B$ (V)
3ª) $B \subset A$ (V)
4ª) $B = A$ (F)
5ª) $4 \in B$ (V)

18. Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classifique em V ou F cada sentença abaixo e justifique.

a) $A \subset D$
b) $A \subset B$
c) $B \subset C$
d) $D \supset B$
e) $C = D$
f) $A \not\subset C$

Solução

a) V, pois $1 \in A$, $1 \in D$, $2 \in A$ e $2 \in D$
b) F, pois $1 \in A$ e $1 \notin B$
c) F, pois $2 \in B$ e $2 \notin C$
d) V, pois $2 \in B$, $2 \in D$, $3 \in B$ e $3 \in D$
e) F, pois $2 \in D$ e $2 \notin C$
f) V, pois $2 \in A$ e $2 \notin C$

19. Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

a) $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$
b) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x \neq 0 \text{ e } x^3 - 4x = 0\}$
c) $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$
d) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geqslant 0\} = \varnothing$

20. Diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo.

a) $0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
b) $\{a\} \in \{a, b\}$
c) $\varnothing \in \{0\}$
d) $0 \in \varnothing$
e) $\{a\} \subset \varnothing$
f) $a \in \{a, \{a\}\}$
g) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$
h) $\varnothing \subset \{\varnothing, \{a\}\}$
i) $\varnothing \in \{\varnothing, \{a\}\}$
j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, d\}$

21. Faça um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A, B, C e D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.

22. Construa o conjunto das partes do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

VII. Reunião de conjuntos

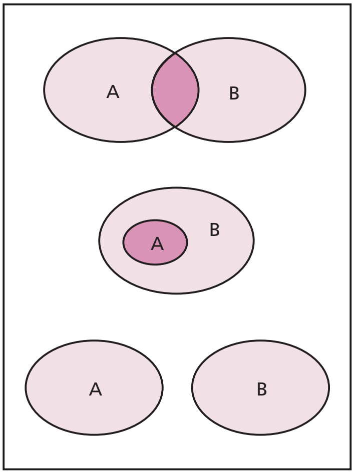
32. Dados dois conjuntos A e B, chama-se **reunião** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

O conjunto $A \cup B$ (lê-se "A reunião B" ou "A u B") é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.

Notemos que x é elemento de $A \cup B$ se ocorre ao menos uma das condições seguintes:

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$



Exemplos:

1º) $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
2º) $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
3º) $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$
4º) $\{a, b, c\} \cup \varnothing = \{a, b, c\}$
5º) $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

33. Propriedades da reunião

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cup A = A$ (idempotente)
2ª) $A \cup \varnothing = A$ (elemento neutro)
3ª) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
4ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

Demonstração:

Fazendo $A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}$ ou, simplesmente, $A = \{x \mid p(x)\}$ e ainda: $B = \{x \mid q(x)\}$, $C = \{x \mid r(x)\}$ e $\varnothing = \{x \mid f(x)\}$ em que *f* é proposição logicamente falsa, temos:

$$A \cup A = \{x \mid p(x) \text{ ou } p(x)\} = \{x \mid p(x)\} = A.$$

Analogamente, as demais decorrem das propriedades das proposições vistas no exercício 7.

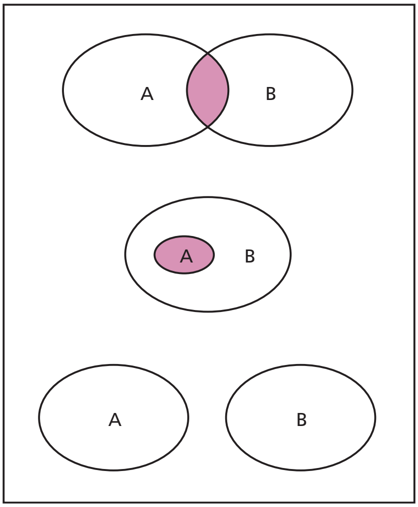
VIII. Interseção de conjuntos

34. Dados dois conjuntos A e B, chama-se **interseção** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}}$$

O conjunto $A \cap B$ (lê-se "A inter B") é formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos (A e B) simultaneamente.

Se $x \in A \cap B$, isso significa que *x* pertence a A e também *x* pertence a B. O conectivo e colocado entre duas condições significa que elas devem ser obedecidas ao mesmo tempo.



Exemplos:

1º) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$
2º) $\{a, b\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$
3º) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
4º) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$
5º) $\{a, b\} \cap \varnothing = \varnothing$

35. Propriedades da interseção

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cap A = A$ (idempotente)

2ª) $A \cap U = A$ (elemento neutro)

3ª) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

4ª) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

Como mostramos para a operação de reunião, essas propriedades são também demonstráveis com auxílio do exercício 7.

36. Conjuntos disjuntos

Quando $A \cap B = \varnothing$, isto é, quando os conjuntos A e B não têm elemento comum, A e B são denominados **conjuntos disjuntos**.

IX. Propriedades

37. Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades, que inter-relacionam a reunião e a interseção de conjuntos:

1ª) $A \cup (A \cap B) = A$

2ª) $A \cap (A \cup B) = A$

3ª) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(distributiva da reunião em relação à interseção)

4ª) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributiva da interseção em relação à reunião)

Demonstremos, por exemplo, a 1ª e a 3ª:

$$A \cup (A \cap B) = \{x \mid p(x) \vee (p(x) \wedge q(x))\} = \{x \mid p(x)\} = A$$

$$A \cup (B \cap C) = \{x \mid p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))\} = \{x \mid (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))\} =$$
$$= \{x \mid p(x) \vee q(x)\} \cap \{x \mid p(x) \vee r(x)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCÍCIOS

23. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, determine $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ e $A \cup B \cup C$.

24. Prove que $A \subset (A \cup B), \forall A$.

Solução

$x \in A \Rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$
é uma implicação verdadeira, $\forall x$; portanto: $A \subset (A \cup B)$.

25. Classifique em V ou F:

a) $\varnothing \subset (A \cup B)$
b) $(A \cup B) \subset A$
c) $A \supset (A \cup B)$
d) $(A \cup B) \subset (A \cup B)$
e) $B \subset (A \cup B)$
f) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$

admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

26. Determine a reunião dos círculos de raio *r*, contidos num plano α e que têm um ponto comum $O \in \alpha$.

27. Determine a reunião das retas de um plano α que são paralelas a uma dada reta *r* de α.

28. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, descreva $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$.

29. Prove que $(A \cap B) \subset A, \forall A$.

Solução

$x \in (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \Rightarrow x \in A$
é uma implicação verdadeira, $\forall x$; portanto: $(A \cap B) \subset A$.

30. Classifique em V ou F:

a) $\varnothing \subset (A \cap B)$
b) $A \subset (A \cap B)$
c) $A \in (A \cap B)$
d) $(A \cap B) \subset (A \cap B)$
e) $(A \cap B) \subset B$
f) $(A \cap B) \supset (A \cap B \cap C)$

admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

31. Considere os conjuntos:
K = conjunto dos quadriláteros planos
$P = \{x \in K \mid x \text{ tem lados 2 a 2 paralelos}\}$
$L = \{x \in K \mid x \text{ tem 4 lados congruentes}\}$
$R = \{x \in K \mid x \text{ tem 4 ângulos retos}\}$
$Q = \{x \in K \mid x \text{ tem 4 lados congruentes e 2 ângulos retos}\}$
Determine os conjuntos:
a) $L \cap P$
c) $L \cap R$
e) $L \cap Q$
b) $R \cap P$
d) $Q \cap R$
f) $P \cup Q$

32. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$, determine o conjunto X tal que $X \cup B = A \cup C$ e $X \cap B = \varnothing$.

Solução

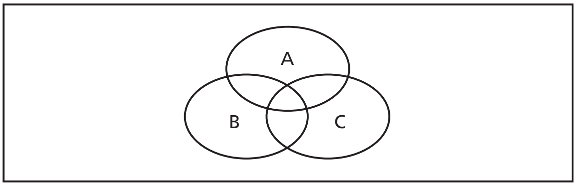
a) $X \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, então os possíveis elementos de X são: 1, 2, 3 e 4.
b) $X \cap B = \varnothing \Rightarrow 3 \notin X$ e $4 \notin X$
Conclusão: $X = \{1, 2\}$.

33. Determine o conjunto X tal que:
$\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\}$ e $\{b, c, d\} \cap X = \{c\}$.

34. Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 10\}$, $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 8\}$.
Determine C.

35. Determine o número de conjuntos X que satisfazem a relação
$\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

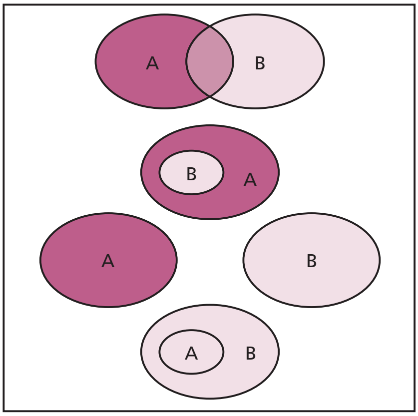
36. Assinale no diagrama abaixo, um de cada vez, os seguintes conjuntos:
a) $A \cap B \cap C$
b) $A \cap (B \cup C)$
c) $A \cup (B \cap C)$
d) $A \cup B \cup C$



37. Sejam os conjuntos A com 2 elementos, B com 3 elementos, C com 4 elementos. Qual é o número máximo de elementos de $(A \cap B) \cap C$?

X. Diferença de conjuntos

38. Dados dois conjuntos A e B, chama-se **diferença entre A e B** o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.



$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

Exemplos:

1º) $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$

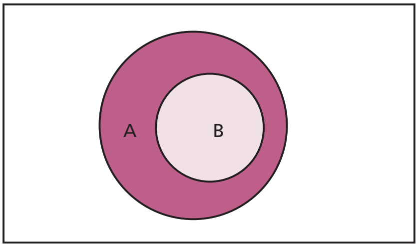
2º) $\{a, b, c\} - \{b, c\} = \{a\}$

3º) $\{a, b\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$

4º) $\{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \varnothing$

XI. Complementar de B em A

39. Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, o conjunto $A - B$ chama-se **complementar** de B em relação a A, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.



Com o símbolo

$$\complement_A^B \quad \text{ou} \quad \overline{B}$$

indicamos o complementar de B em relação a A.

Notemos que $\complement_A^B$ só é definido para $B \subset A$, e aí temos:

$$\boxed{\complement_A^B = A - B}$$

Exemplos:

1º) Se $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{c, d, e\}$, então:

$$\complement_A^B = \{a, b\}$$

2º) Se $A = \{a, b, c, d\} = B$, então:

$$\complement_A^B = \varnothing$$

3º) Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \varnothing$, então:

$$\complement_A^B = \{a, b, c, d\} = A$$

40. Propriedades da complementação

Sendo B e C subconjuntos de A, valem as seguintes propriedades:

1ª) $\complement_A^B \cap B = \varnothing$ e $\complement_A^B \cup B = A$

2ª) $\complement_A^A = \varnothing$ e $\complement_A^{\varnothing} = A$

3ª) $\complement_A (\complement_A^B) = B$ (complementar em relação a A do complementar de B em relação a A)

4ª) $\complement_A^{(B \cap C)} = \complement_A^B \cup \complement_A^C$

5ª) $\complement_A^{(B \cup C)} = \complement_A^B \cap \complement_A^C$

Provemos, por exemplo, a 2ª e a 4ª propriedades:

$$\complement_A^A = \{x \in A \mid x \notin A\} = \varnothing$$

$$\complement_A^{\varnothing} = \{x \in A \mid x \notin \varnothing\} = A$$

$$\begin{aligned}\complement_A^{(B \cap C)} &= \{x \in A \mid x \notin B \cap C\} = \{x \in A \mid x \notin B \ \text{ ou } \ x \notin C\} = \\ &= \{x \in A \mid x \notin B\} \cup \{x \in A \mid x \notin C\} = \complement_A^B \cup \complement_A^C\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

38. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{b, d, e, g\}$. Determine:

a) $A - B$
b) $B - A$
c) $C - B$
d) $(A \cup C) - B$
e) $A - (B \cap C)$
f) $(A \cup B) - (A \cap C)$

39. Prove que $(A - B) \subset A$, $\forall A$.

Solução

A implicação $x \in (A - B) \Rightarrow (x \in A \text{ e } x \notin B) \Rightarrow x \in A$
é verdadeira para todo x, então $(A - B) \subset A$.

40. Classifique em V ou F as sentenças:

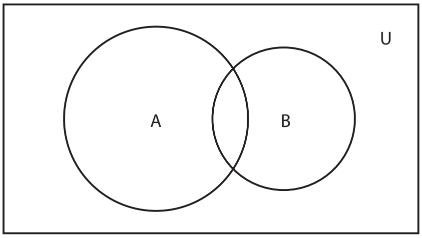
a) $(A - B) \supset \varnothing$
b) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
c) $(A - B) \subset B$
d) $(A - B) \subset (A \cup B)$

admitindo que A e B são conjuntos quaisquer.

41. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 4, 5, 7\}$, obtenha um conjunto X tal que $X \subset A$ e $A - X = B \cap C$.

42. Assinale no diagrama ao lado, um de cada vez, os seguintes conjuntos:

a) $\overline{A} - B$
b) $\overline{A} - A \cup B$
c) $\overline{B} \cup A$
d) $\overline{A \cup B}$
e) $\overline{A \cap B}$
f) $\overline{B} \cap A$



43. Prove que $A - \overline{B} = A \cap B$, em que A e B são conjuntos quaisquer do universo U.

Solução

A implicação $x \in (A - \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ é verdadeira $\forall x$; portanto, está provado.

44. Classifique em V ou F as seguintes sentenças:

a) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
b) $A \subset B \Rightarrow (\complement B) \subset (\complement A)$
c) $(A - B) \subset (\complement A)$
d) $(A - B) \subset (\complement B)$

Observação: $\complement A = U - A$

45. Sendo $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, p(y): $y + 1 \leqslant 6$ e $F = \{y \in E \mid y \text{ satisfaz } p(y)\}$, determine $\overline{F}$.

46. Descreva os elementos dos conjuntos abaixo:

$A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0\}$
$B = \{x \mid x$ é letra da palavra **exercício**$\}$
$C = \{x \mid x^2 - 9 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 9\}$
$D = \{x \mid 2x + 1 = 0 \text{ e } 2x^2 - x - 1 = 0\}$
$E = \{x \mid x$ é algarismo do número 234 543$\}$

47. Seja $E = \{a, \{a\}\}$. Diga quais das proposições abaixo são verdadeiras.

a) $a \in E$
b) $\{a\} \in E$
c) $a \subset E$
d) $\{a\} \subset E$
e) $\varnothing \in E$
f) $\varnothing \subset E$

48. Sejam A e B dois conjuntos finitos. Prove que

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}.$$

O símbolo n_x representa o número de elementos do conjunto X.

49. Dados A e B conjuntos tais que $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 3$, determine o número de subconjuntos de $A \cup B$.

50. Sendo A, B e C conjuntos finitos, estabeleça uma fórmula para calcular $n_{A \cup B \cup C}$.

51. Se $A = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ é divisor de $120\}$, qual é o número de elementos de $A \cap B$?

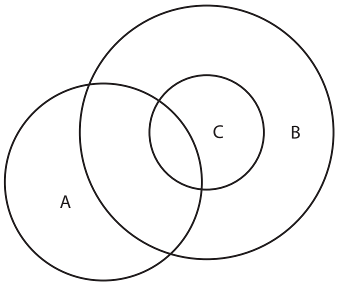
52. Em uma escola que tem 415 alunos, 221 estudam inglês, 163 estudam francês e 52 estudam ambas as línguas. Quantos alunos estudam inglês ou francês? Quantos alunos não estudam nenhuma das duas?

53. Denotando-se por X' o complementar de um conjunto qualquer X, determine o conjunto $[P' \cup (P \cap Q)]$, quaisquer que sejam os conjuntos P e Q.

54. Considerando os conjuntos A, B e C, representados abaixo, e sabendo que

$n(A \cup B) = 24$
$n(A \cap B) = 4$
$n(B \cup C) = 16$
$n(A - C) = 11$
$n(B - C) = 10$, calcule:

a) $n(A - B)$
b) $n(A \cap B \cap C)$
c) $n(B - (C \cup A))$
d) $n((A \cap B) - C)$
e) $n(B - (A \cap B))$



55. Sabendo que A e B são subconjuntos de U,
$\overline{A} = \{e, f, g, h, i\}$, $A \cap B = \{c, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, responda:
Quantos elementos tem A? E B?
Observação: $\overline{A}$ é o complementar de A em U.

56. Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram-se os resultados tabelados abaixo:

Marca	A	B	C	A e B	B e C	C e A	A, B e C	Nenhuma das três
Número de consumidores	109	203	162	25	41	28	5	115

Forneça:

a) o número de pessoas consultadas;
b) o número de pessoas que só consomem a marca A;
c) o número de pessoas que não consomem as marcas A ou C;
d) o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas.

57. Determine os conjuntos A, B e C que satisfazem as seguintes seis condições:
1ª) $A \cup B \cup C = \{z, x, v, u, t, s, r, q, p\}$
2ª) $A \cap B = \{r, s\}$
3ª) $B \cap C = \{s, x\}$
4ª) $C \cap A = \{s, t\}$
5ª) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$
6ª) $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$

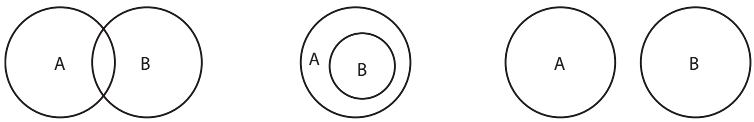
58. Em certa comunidade há indivíduos de três etnias: branca, negra e amarela. Sabendo que 70 são brancos, 350 são não negros e 50% são amarelos, responda:
a) quantos indivíduos tem a comunidade?
b) quantos são os indivíduos amarelos?

59. De todos os empregados de uma firma, 30% optaram por um plano de assistência médica. A firma tem a matriz na capital de São Paulo e somente duas filiais, uma em Santos e outra em Campinas. 45% dos empregados trabalham na matriz e 20% dos empregados trabalham na filial de Santos. Sabendo que 20% dos empregados da capital optaram pelo plano de assistência médica e que 35% dos empregados da filial de Santos o fizeram, qual a porcentagem dos empregados da filial de Campinas que optaram pelo plano?

60. Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença simétrica de A com B o conjunto $A \triangle B$ tal que:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

a) Determine $\{a, b, c, d\} \triangle \{c, d, e, f, g\}$.
b) Prove que $A \triangle \varnothing = A$, para todo A.
c) Prove que $A \triangle A = \varnothing$, para todo A.
d) Prove que $A \triangle B = B \triangle A$, para A e B quaisquer.
e) Assinale em cada diagrama abaixo o conjunto $A \triangle B$.



61. Desenhe um diagrama de Venn representando quatro conjuntos, A, B, C e D, não vazios, de modo que se tenha:

$$A \not\subset B,\ B \not\subset A,\ C \supset (A \cup B) \quad e \quad D \subset (A \cap B).$$