

GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Conjuntos
Funções

1



CAPÍTULO III

Conjuntos numéricos

I. Conjunto dos números naturais

41. Chama-se **conjunto dos números naturais** — símbolo \mathbb{N} — o conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Nesse conjunto são definidas duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

[A.1] associativa da adição
 $(a + b) + c = a + (b + c)$
para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

[A.2] comutativa da adição
 $a + b = b + a$
para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

[A.3] elemento neutro da adição
 $a + 0 = a$
para todo $a \in \mathbb{N}$.

[M.1] associativa da multiplicação
 $(ab)c = a(bc)$
para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

[M.2] comutativa da multiplicação

$$ab = ba$$

para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

[M.3] elemento neutro da multiplicação

$$a \cdot 1 = a$$

para todo $a \in \mathbb{N}$.

[D] distributiva da multiplicação relativamente à adição

$$a(b + c) = ab + ac$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Veremos que os próximos conjuntos numéricos a serem apresentados são ampliações de \mathbb{N} , isto é, contêm \mathbb{N} , têm uma adição e uma multiplicação com as propriedades formais já apresentadas e outras mais, que constituem justamente o motivo determinante da ampliação.

Assim, dado um natural $a \neq 0$, o simétrico de a não existe em \mathbb{N} : $-a \notin \mathbb{N}$. O resultado disso é que o símbolo $a - b$ não tem significado em \mathbb{N} para todos $a, b \in \mathbb{N}$, isto é, em \mathbb{N} a subtração não é uma operação. Venceremos essa dificuldade introduzindo um novo conjunto numérico.

EXERCÍCIOS

- 62.** Seja H o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 40, n \text{ múltiplo de } 2, n \text{ não múltiplo de } 3\}$. Qual é o número de elementos de H ?
- 63.** Um subconjunto X de números naturais contém 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 e 8 números ímpares. Qual é o número de elementos de X ?
- 64.** Sendo $A = \{n \mid n = 2p - 1 \text{ e } p \in B\}$, qual é a condição sobre B para que n seja um número natural ímpar?

II. Conjunto dos números inteiros

- 42.** Chama-se **conjunto dos números inteiros** — símbolo \mathbb{Z} — o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

No conjunto \mathbb{Z} distinguimos três subconjuntos notáveis:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$

(chamado conjunto dos inteiros não negativos);

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não positivos);

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não nulos).

43. Operações em \mathbb{Z}

No conjunto \mathbb{Z} são definidas também as operações de adição e multiplicação que apresentam, além de [A.1], [A.2], [A.3], [M.1], [M.2], [M.3] e [D], a propriedade:

[A.4] simétrico ou oposto para a adição

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que

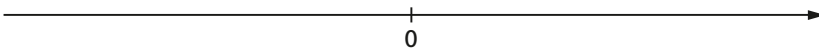
$$a + (-a) = 0.$$

Devido à propriedade [A.4], podemos definir em \mathbb{Z} a operação de subtração, estabelecendo que $a - b = a + (-b)$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.

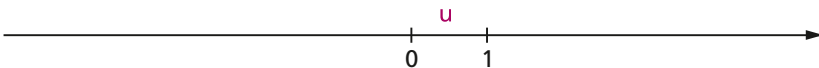
44. Os números inteiros e a reta

Os números inteiros podem ser representados sobre uma reta orientada por meio do seguinte procedimento:

1º) sobre a reta estabelecemos um sentido positivo e um ponto 0 (origem), que representa o inteiro 0 (zero):

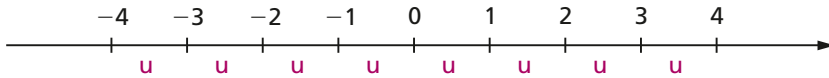


2º) a partir de 0, no sentido positivo, marcamos um segmento unitário $u \neq 0$ cuja extremidade passará a representar o inteiro 1:



3º) para cada inteiro positivo n , a partir de 0, marcamos um segmento de medida nu no sentido positivo cuja extremidade representará n e marcamos um segmento de medida nu no sentido negativo cuja extremidade representará o inteiro $-n$.

O resultado é este:



45. Divisibilidade

Uma importante noção que devemos ter sobre números inteiros é o conceito de divisor.

Dizemos que o inteiro a é **divisor** do inteiro b — símbolo $a \mid b$ — quando existe um inteiro c tal que $ca = b$.

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{Z} \mid ca = b)$$

Exemplos:

- | | | |
|-------------------|------|------------------------|
| 1º) $2 \mid 12$ | pois | $6 \cdot 2 = 12$ |
| 2º) $3 \mid -18$ | pois | $(-6) \cdot 3 = -18$ |
| 3º) $-5 \mid 20$ | pois | $(-4) \cdot (-5) = 20$ |
| 4º) $-2 \mid -14$ | pois | $7 \cdot (-2) = -14$ |
| 5º) $4 \mid 0$ | pois | $0 \cdot 4 = 0$ |
| 6º) $0 \mid 0$ | pois | $1 \cdot 0 = 0$ |

Quando a é divisor de b , dizemos que “ b é **divisível** por a ” ou “ b é **múltiplo** de a ”.

Para um inteiro a qualquer, indicamos com $D(a)$ o conjunto de seus divisores e com $M(a)$ o conjunto de seus múltiplos.

Exemplos:

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1º) $D(2) = \{1, -1, 2, -2\}$ | $M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ |
| 2º) $D(-3) = \{1, -1, 3, -3\}$ | $M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$ |
| 3º) $D(0) = \mathbb{Z}$ | $M(0) = \{0\}$ |

Dizemos que um número inteiro p é **primo** quando $p \neq 0, 1$ e -1 e $D(p) = \{1, -1, p, -p\}$.

Exemplos:

$2, -2, 3, -3, 5, -5, 7$ e -7 são primos.

EXERCÍCIOS

- 65.** Quais das proposições abaixo são verdadeiras?
- | | | |
|------------------------------------|---|---------------------------------------|
| a) $0 \in \mathbb{N}$ | d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$ | g) $(-4) \cdot (-5) \in \mathbb{Z}_+$ |
| b) $(2 - 3) \in \mathbb{N}$ | e) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \emptyset$ | h) $0 \in \mathbb{Z}_-$ |
| c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ | f) $(-3)^2 \in \mathbb{Z}_-$ | i) $(5 - 11) \in \mathbb{Z}$ |
- 66.** Descreva os seguintes conjuntos: $D(6)$, $D(-18)$, $D(-24) \cap D(16)$, $M(4)$, $M(10)$ e $M(-9) \cap M(6)$.
- 67.** Quais dos seguintes elementos de \mathbb{Z} não são primos: 12, -13, 0, 5, 31, -1, 2, -4, 1, 49 e 53?
- 68.** Sendo a e b dois números inteiros, responda:
- $D(a)$ e $D(b)$ podem ser disjuntos?
 - Que nome se dá a um inteiro m tal que $D(a) \cap D(b) = D(m)$?
 - Quando $D(a) \cap D(b) = \{1, -1\}$, qual é a relação existente entre a e b ?
 - Em que caso ocorre $M(a) \subset M(b)$?
 - Em que caso ocorre $M(a) \cap M(b) = M(ab)$?
 - Que nome se dá a um inteiro n tal que $M(a) \cap M(b) = M(n)$?
- 69.** Determine os seguintes números inteiros:
- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\text{mdc}(2, 3)$ | c) $\text{mdc}(-6, -14)$ | e) $\text{mmc}(-4, 6)$ |
| b) $\text{mdc}(-4, 6)$ | d) $\text{mmc}(2, 3)$ | f) $\text{mmc}(-6, -14)$ |

III. Conjunto dos números racionais

Dado um número inteiro $q \neq 1$ e -1 , o inverso de q não existe em \mathbb{Z} : $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$. Por isso não podemos definir em \mathbb{Z} a operação de divisão, dando significado ao símbolo $\frac{p}{q}$. Vamos superar essa dificuldade introduzindo os números racionais.

- 46.** Chama-se **conjunto dos números racionais** — símbolo \mathbb{Q} — o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

1ª) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

2ª) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

3ª) multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

No conjunto dos racionais destacamos os subconjuntos:

\mathbb{Q}_+ (conjunto dos racionais não negativos);

\mathbb{Q}_- (conjunto dos racionais não positivos);

\mathbb{Q}^* (conjunto dos racionais não nulos).

Na fração $\frac{a}{b}$, a é o **numerador** e b o **denominador**. Se a e b são primos entre si, isto é, se $\text{mdc}(a, b) = 1$, dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma **fração irredutível**. Assim, as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{15}$ são irredutíveis, mas $\frac{6}{10}$ não é.

Consideremos o conjunto \mathbb{Q}' formado pelos números racionais com denominador unitário: $\mathbb{Q}' = \left\{ \frac{x}{1} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$. Temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a = b$$

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a + b}{1} \Leftrightarrow a + b = a + b$$

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1} \Leftrightarrow a \cdot b = a \cdot b$$

portanto, os racionais com denominador igual a 1 comportam-se para a igualdade, a adição e a multiplicação como se fossem números inteiros. Assim, fazendo o racional $\frac{x}{1}$ coincidir com o inteiro x , decorre que:

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{Z}, \text{ logo, } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

47. Operações em \mathbb{Q}

Pode-se verificar que a adição e a multiplicação de racionais apresentam as seguintes propriedades:

[A.1] $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right)$

$$[\text{A.2}] \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$[\text{A.3}] \quad \frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

$$[\text{A.4}] \quad \frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$$

$$[\text{M.1}] \quad \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

$$[\text{M.2}] \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

$$[\text{M.3}] \quad \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

$$[\text{D}] \quad \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

em que $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$ são racionais quaisquer; portanto, são válidas as mesmas propriedades formais vistas para os números inteiros. Além dessas, temos também a seguinte:

[M.4] simétrico ou inverso para a multiplicação

para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \neq 0$, existe

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \text{ tal que } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Devido à propriedade **[M.4]**, podemos definir em \mathbb{Q}^* a operação de divisão, estabelecendo que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer não nulos.

48. Representação decimal

Notemos que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Passa-se um número racional $\frac{a}{b}$ para a forma de número decimal dividindo o inteiro a pelo inteiro b . Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

1º) o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, é uma **decimal exata**.

Exemplos:

$$\frac{3}{1} = 3 \quad \frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{1}{20} = 0,05 \quad \frac{27}{1000} = 0,027$$

2º) o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma **dízima periódica**.

Exemplos:

$$\frac{1}{3} = 0,3333... = 0,\overline{3} \text{ (período 3)}$$

$$\frac{2}{7} = 0,285714285714... = 0,285714 \text{ (período 285714)}$$

$$\frac{11}{6} = 1,8333... = 1,8\overline{3} \text{ (período 3)}$$

Podemos notar também que todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração $\frac{a}{b}$ e, portanto, representa um número racional.

Quando a decimal é exata, podemos transformá-la em uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado.

Exemplos:

$$0,37 = \frac{37}{100} \quad 2,631 = \frac{2631}{1000} \quad 63,4598 = \frac{634598}{10000}$$

Quando a decimal é uma dízima periódica, devemos procurar sua **geratriz**. Damos, a seguir, três exemplos de como obter a geratriz de uma dízima periódica.

Exemplo 1: 0,777...

$$\left. \begin{array}{l} x = 0,777... \\ 10x = 7,777... \end{array} \right\} \Rightarrow 10x - x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$$

$$\text{então: } 0,777... = \frac{7}{9}.$$

Exemplo 2: 6,4343...

$$\left. \begin{array}{l} x = 6,434343... \\ 100x = 643,434343... \end{array} \right\} \Rightarrow 100x - x = 637 \Rightarrow x = \frac{637}{99}$$

$$\text{então: } 6,434343... = \frac{637}{99}.$$

Exemplo 3: 2,57919191...

$$\left. \begin{array}{l} x = 2,579191... \\ 100x = 257,919191... \\ 10\,000x = 25\,791,919191... \end{array} \right\} \Rightarrow 10\,000x - 100x = 25\,534 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{25\,534}{9\,900}$$

então: $2,57919191... = \frac{25\,534}{9\,900}$.

EXERCÍCIOS

70. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

- a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e) $0,474747... \in \mathbb{Q}$ i) $\frac{14}{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$
 b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ f) $\left\{ \frac{4}{7}, \frac{11}{3} \right\} \subset \mathbb{Q}$ j) $\frac{21}{14}$ é irredutível
 c) $0 \in \mathbb{Q}$ g) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ k) $\frac{121}{147} < \frac{131}{150}$
 d) $517 \in \mathbb{Q}$ h) $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ l) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$

71. Coloque na forma de uma fração irredutível os seguintes números racionais: 0,4; 0,444...; 0,32; 0,323232...; 54,2; 5,423423423... .

72. Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais: $\frac{15}{16}, \frac{11}{12}, \frac{18}{19}, 1, \frac{47}{48}$ e $\frac{2}{3}$.

73. Mostre que, se r_1 e r_2 são racionais e $r_1 < r_2$, então existe um racional r tal que $r_1 < r < r_2$.

74. Represente sobre uma reta orientada os seguintes números racionais:

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{4}, 0, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{7}{3} \text{ e } \frac{6}{2}.$$

75. Calcule o valor de:

a) $\frac{0,2 \cdot 0,7 - 4 \cdot 0,01}{0,5 \cdot 0,2}$ b) $0,999... + \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{15}}$

- 76.** Na minha calculadora, a tecla da divisão não funciona. Nessa situação, para dividir um número por 40, usando a calculadora, eu devo multiplicar 40 por qual número?
- 77.** Considere o número $\alpha = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots$.
Se ele for racional, coloque-o na forma decimal e na forma de fração irredutível.
- 78.** Suponha que um país A tem uma renda *per capita* anual de 20 000 dólares e uma população de 50 milhões de habitantes. Um outro país B tem uma renda *per capita* de 10 000 dólares e uma população de 20 milhões. Se os dois países se fundirem para formar um novo país, qual será o valor da nova renda *per capita*?
- 79.** A pressão P e o volume V de um gás perfeito mantido a uma temperatura constante satisfazem a Lei de Boyle $PV = \text{constante}$. Se aumentarmos a pressão em 25%, em quantos por cento diminuirá o volume do gás?

IV. Conjunto dos números reais

49. Números irracionais

Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo, o numeral decimal $0,1010010001\dots$ (em que o número de algarismos 0 intercalados entre os algarismos 1 vai crescendo) é não periódico. Ele representa um número *não* racional. Ele representa um **número irracional**.

Outros exemplos de números irracionais:

1,234567891011

6,202002000...

34,56789101112...

50. Chama-se **conjunto dos números reais** — símbolo \mathbb{R} — aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (que são números irracionais).

Dessa forma, todo número racional é número real, ou seja:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Além dos racionais, estão em \mathbb{R} números irracionais como:

$$\sqrt{2} = 1,4142136\dots$$

$$\pi = 3,1415926\dots$$

Se quisermos outros números irracionais, poderemos obtê-los, por exemplo, por meio da expressão \sqrt{p} , em que p é primo e positivo. São irracionais: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc.

Outro recurso para construção de irracionais é usar o fato de que, se α é irracional e r é racional não nulo, então: $\alpha + r$, $\alpha \cdot r$, $\frac{\alpha}{r}$ e $\frac{r}{\alpha}$ são todos irracionais.

Exemplos:

$$\sqrt{2} + 1, 3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ são irracionais.}$$

Além de \mathbb{Q} , destacamos em \mathbb{R} três outros subconjuntos:

\mathbb{R}_+ (conjunto dos reais não negativos);

\mathbb{R}_- (conjunto dos reais não positivos);

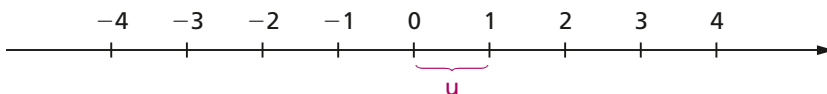
\mathbb{R}^* (conjunto dos reais não nulos).

51. Operações em \mathbb{R}

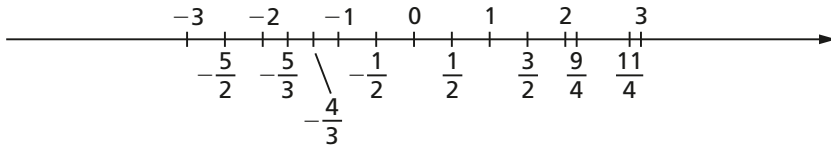
As operações de adição e multiplicação em \mathbb{R} gozam das mesmas propriedades vistas para o conjunto \mathbb{Q} . Em \mathbb{R} é também definida a operação de subtração e em \mathbb{R}^* é definida a divisão.

52. Os números reais e a reta

Já vimos que os números inteiros podem ser representados por pontos de uma reta orientada:

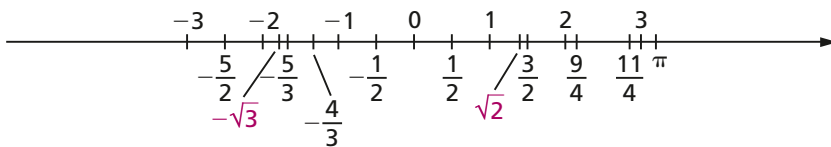


Analogamente, os números racionais não inteiros também podem. Se queremos, por exemplo, representar o número $\frac{1}{2}$ sobre a reta, marcamos a partir de 0 um segmento de medida $\frac{1}{2}$ u no sentido positivo. A extremidade desse segmento representa $\frac{1}{2}$. Na figura abaixo representamos sobre a reta vários números racionais.



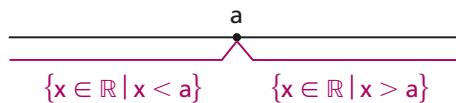
Os números racionais, entretanto, não preenchem completamente a reta, isto é, há pontos da reta que não representam nenhum racional. Por exemplo, entre os pontos 1,41 e 1,42 fica um ponto que representa $\sqrt{2} = 1,414215\dots$ (irracional).

Quando representamos também sobre a reta os números irracionais, cada ponto da reta passa a representar necessariamente um número racional ou irracional (portanto, real), isto é, os reais preenchem completamente a reta.



Essa reta, que representa \mathbb{R} , é chamada **reta real** ou **reta numérica**.

Na reta real, os números estão **ordenados**. Um número a é menor que qualquer número x colocado à sua direita e maior que qualquer número x à sua esquerda.



EXERCÍCIOS

80. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

- | | | |
|------------------------------------|--|---|
| a) $3 \in \mathbb{R}$ | d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ | g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ |
| b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ | e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ | h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ |
| c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ | f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ | i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ |

81. Prove que, se a, b, c e d são racionais, p é primo positivo e $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}$, então $a = c$ e $b = d$.

Solução

$$a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \Leftrightarrow (b - d)\sqrt{p} = c - a$$

Como $c - a$ é racional, a última igualdade só subsiste quando $(b - d)\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, isto é, se $b - d = 0$. Neste caso, $c - a = 0$, provando a tese.

82. Mostre que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

83. Mostre que existem a e b racionais tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

84. Dados dois números x e y reais e positivos, chama-se **média aritmética** de x com y o real $a = \frac{x + y}{2}$ e chama-se **média geométrica** o real $g = \sqrt{xy}$. Mostre que $a \geq g$ para todos $x, y \in \mathbb{R}_+$.

85. a) Mostre, por meio de um exemplo, que existe um número irracional a tal que a^4 e a^6 são números racionais.
 b) Mostre que, se a^7 e a^{12} são racionais, então a é racional.

86. Prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solução

Admitamos que a fração irredutível $\frac{a}{b}$ seja tal que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Desse modo temos:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \text{ é par} \Rightarrow a \text{ é par}$$

Fazendo $a = 2m$, com $m \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2m)^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2m^2 \Rightarrow b^2 \text{ é par} \Rightarrow \\ \Rightarrow b \text{ é par e isso é absurdo, pois } \text{mdc}(a, b) = 1.$$

- 87.** Prove que, dado um número racional $\frac{a}{b}$ e um número natural $n \geq 2$, nem sempre $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é racional.
- 88.** Dentre os reais $-1, 0, 1, 2$ e 3 , qual não pode ser escrito sob a forma $r = \frac{x+1}{x}$, x real?

V. Intervalos

53. Dados dois números reais a e b , com $a < b$, definimos:

a) **intervalo aberto** de extremos a e b é o conjunto

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

que também pode ser indicado por $a - b$.

b) **intervalo fechado** de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

que também pode ser indicado por $a \dashv b$.

c) **intervalo fechado à esquerda** (ou aberto à direita) de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

que também pode ser indicado por $a \vdash b$.

d) **intervalo fechado à direita** (ou aberto à esquerda) de extremos a e b é o conjunto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

que também pode ser indicado por $a \dashv b$.

Os números reais a e b são denominados, respectivamente, **extremo inferior** e **extremo superior** do intervalo.

Exemplos:

1º) $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ é intervalo aberto.

2º) $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$ é intervalo fechado.

3º) $\left[\frac{2}{5}, 7\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq x < 7\right\}$ é intervalo fechado à esquerda.

4º) $\left]-\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leq \sqrt{2}\right\}$ é intervalo fechado à direita.

Também consideramos intervalos lineares os “intervalos infinitos” assim definidos:

a) $] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

que também podemos indicar por $(-\infty, a[$ ou $-\infty - a$.

b) $] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

que também podemos indicar por $(-\infty, a]$ ou $-\infty \dashv a$.

c) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

que também podemos indicar por $]a, +\infty)$ ou $a - +\infty$.

d) $]a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

que também podemos indicar por $]a, +\infty)$ ou $a \dashv +\infty$.

e) $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

que também podemos indicar por $(-\infty, +\infty)$ ou $-\infty - +\infty$.

54. Representação gráfica

Os intervalos têm uma representação geométrica sobre a reta real como a que segue:



EXERCÍCIOS

89. Represente sobre a reta real cada um dos seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$$

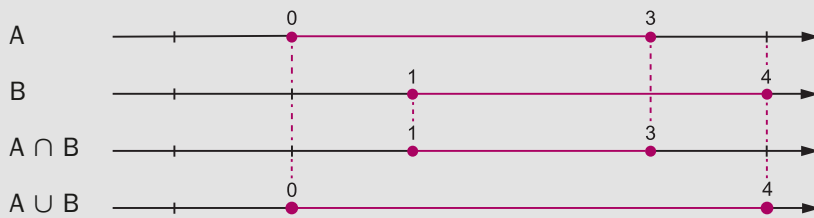
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > 2\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x \geq 3\}$$

90. Descreva, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos: $[-1, 3]$, $[0, 2[$, $] -3, 4[$, $] -\infty, 5[$ e $[1, +\infty[$.

91. Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = [0, 3]$ e $B = [1, 4]$.

Solução



então $A \cap B = [1, 3]$ e $A \cup B = [0, 4]$.

92. Descreva os seguintes conjuntos:

a) $[0, 2] \cap [1, 3]$

d) $] -\infty, 2] \cap [0, +\infty[$

b) $[0, 2] \cap]1, 3[$

e) $[-1, +\infty[\cap \left[-\frac{9}{2}, 2\right[$

c) $\left]-1, \frac{2}{5}\right[\cap \left]0, \frac{4}{3}\right[$

f) $[1, 2] \cap [0, 3] \cap [-1, 4]$

93. Determine os seguintes conjuntos:

a) $[-1, 3] \cup [0, 4]$

c) $[-1, 3] \cup [3, 5]$

b) $] -2, 1] \cup]0, 5[$

d) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right]$

94. Sendo $A = [0, 5[$ e $B =]1, 3[$, determine \complement_A^B .

- 95.** Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$, calcule $A \cup B$.
- 96.** Sejam $A = (-\infty; 2]$ e $B = [0; +\infty)$ intervalos de números reais. Determine $A \cap B$.
- 97.** Determine a interseção dos conjuntos:
 $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$; $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$ e $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$.

VI. Conjunto dos números complexos

55. Vimos que $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}_+$ qualquer que seja o real a não negativo. Assim, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[5]{\frac{17}{2}}$ e $\sqrt[6]{\pi}$ são números reais.

Desde que o índice da raiz seja ímpar, os radicais da forma $\sqrt[n]{-a}$, em que $a \in \mathbb{R}_+$, também representam números reais. É o caso, por exemplo, de $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[5]{-32}$ e $\sqrt[7]{-3}$.

Se o radicando é negativo e o índice da raiz é par, entretanto, o radical $\sqrt[n]{-a}$ não representa elemento de \mathbb{R} . Por exemplo, $\sqrt{-1}$ não é real, pois:

$$\sqrt{-1} = x \Rightarrow -1 = x^2$$

e isso é impossível, pois, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$.

Resolveremos definitivamente o problema de dar significado ao símbolo $\sqrt[n]{a}$, para todo número a , introduzindo no volume 6 desta coleção o conjunto \mathbb{C} dos números complexos, do qual \mathbb{R} é um subconjunto.

VII. Resumo

Os conjuntos numéricos podem ser representados esquematicamente pela figura ao lado.

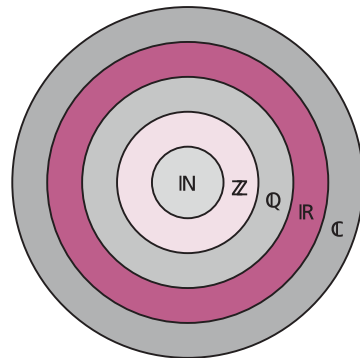
Observemos que
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notemos também que:

$\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ = conjunto dos números inteiros negativos;

$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ = conjunto dos números racionais não inteiros;

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = conjunto dos números reais irracionais.



Apêndice

Princípio da indução finita

56. Indução vulgar

A indução vulgar (generalização de propriedade após verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares) pode conduzir a sérios enganos na Matemática. Vejamos dois exemplos:

1º) Consideremos a relação $y = 2^{2^n} + 1$ definida para $n \in \mathbb{N}$.

Temos:

$$n = 0 \Rightarrow y = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$

$$n = 1 \Rightarrow y = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 2 \Rightarrow y = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$n = 3 \Rightarrow y = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$n = 4 \Rightarrow y = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$$

Os números y encontrados são números primos. Fermat (1601-1665) acreditou que a fórmula acima daria números primos, qualquer que fosse o valor inteiro positivo atribuído a n . Esta indução é falsa, pois Euler (1707-1783) mostrou que para $n = 5$ resulta $y = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$, isto é, resulta um número divisível por 641 e que, portanto, não é primo.

2º) Dada a relação $y = -\frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{3} + 3$, definida para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$n = 1 \Rightarrow y = -\frac{1^3}{6} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{7 \cdot 1}{3} + 3 = \frac{-1 + 9 - 14 + 18}{6} = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow y = -\frac{2^3}{6} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{7 \cdot 2}{3} + 3 = \frac{-8 + 36 - 28 + 18}{6} = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow y = -\frac{3^3}{6} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{7 \cdot 3}{3} + 3 = \frac{-27 + 81 - 42 + 18}{6} = 5$$

$$n = 4 \Rightarrow y = -\frac{4^3}{6} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{7 \cdot 4}{3} + 3 = \frac{-64 + 144 - 56 + 18}{6} = 7$$

Poderíamos tirar a conclusão precipitada: “ y é número primo, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ”. Essa indução também é falsa, pois:

$$n = 5 \Rightarrow y = -\frac{5^3}{6} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} - \frac{7 \cdot 5}{3} + 3 = \frac{-125 + 225 - 70 + 18}{6} = 8.$$

57. É necessário, portanto, dispor de um método com base lógica que permita decidir sobre a validade ou não de uma indução vulgar.

Consideremos, por exemplo, a igualdade:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

que expressa a propriedade: “a soma dos n primeiros números ímpares positivos é n^2 ”.

Vamos verificar se ela é verdadeira:

$$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2 \text{ (V)}$$

$$n = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2 \text{ (V)}$$

$$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \text{ (V)}$$

...

$$n = 10 \Rightarrow 1 + 3 + 5 \dots + 19 = 100 = 10^2 \text{ (V)}$$

Mesmo que continuemos o trabalho fazendo a verificação até $n = 1\,000\,000$, não estará provado que a fórmula vale para todo n natural, pois poderá existir um $n > 1\,000\,000$ em que a fórmula falha.

58. Princípio da indução finita

Para provarmos que a relação é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$ empregamos o **princípio da indução finita** (P.I.F.) cujo enunciado é o seguinte:

Uma proposição $P(n)$, aplicável aos números naturais n , é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ quando:

1º) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e

2º) Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e $P(k)$ é verdadeira, então $P(k + 1)$ também é verdadeira.

Provemos, por exemplo, que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1º) Verifiquemos que $P(1)$ é verdadeira:

$$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$$

2º) Admitamos que $P(k)$, com $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad (\text{hipótese da indução})$$

e provemos que decorre a validade de $P(k + 1)$, isto é:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2.$$

Temos:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = \underbrace{k^2}_{\text{hipótese}} + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

EXERCÍCIOS

Demonstre, usando o princípio da indução finita.

- 98.** $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
- 99.** $2 + 5 + 8 + \dots + \dots + (2 + 3n) = \frac{(n + 1)(4 + 3n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$
- 100.** $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
- 101.** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
- 102.** $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n + 1)}{2} \right]^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
- 103.** $8 \mid (3^{2n} - 1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Solução

1º) $P(1)$ é verdadeira, pois $8 \mid (3^2 - 1)$.

2º) Admitamos que $P(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$8 \mid (3^{2k} - 1)$ (hipótese da indução)

e provemos que $8 \mid (3^{2(k+1)} - 1)$:

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k+2} - 1 = 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2k} \cdot (8 + 1) - 1 = \\ &= 8 \cdot 3^{2k} + (3^{2k} - 1) \end{aligned}$$

então:

$$\left. \begin{array}{l} 8 \mid 8 \cdot 3^{2k} \\ 8 \mid (3^{2k} - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \mid (8 \cdot 3^{2k} + 3^{2k} - 1) \Rightarrow 8 \mid (3^{2(k+1)} - 1).$$

104. $6 \mid n(n + 1)(n + 2), \forall n \in \mathbb{N}$.

105. $2 \mid (n^2 + n), \forall n \in \mathbb{N}$.

106. $3 \mid (n^3 + 2n), \forall n \in \mathbb{N}$.

107. $(1 + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

108. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

109. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

110. $2n \geq n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Solução

1º) $P(1)$ é verdadeira, pois $2 \cdot 1 \geq 1 + 1$.

2º) Admitamos que $P(k), k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$2k \geq k + 1$ (hipótese da indução)

e provemos que $2(k + 1) \geq (k + 1) + 1$.

Temos:

$2(k + 1) = 2k + 2 \geq (k + 1) + 2 > (k + 1) + 1$.

111. $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}$.

112. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 > \frac{n^4}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

113. $(1 + a)^n \geq 1 + na, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq -1$.

114. O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $d_n = \frac{n(n - 3)}{2}$.

Solução

1º) $P(3)$ é verdadeira, pois:

$n = 3 \Rightarrow d_3 = \frac{3(3 - 3)}{2} = 0$

e isso é verdade porque um triângulo não tem diagonais.

2º) Supondo válida a fórmula para um polígono de k lados ($k \geq 3$):

$$d_k = \frac{k(k-3)}{2} \quad (\text{hipótese da indução})$$

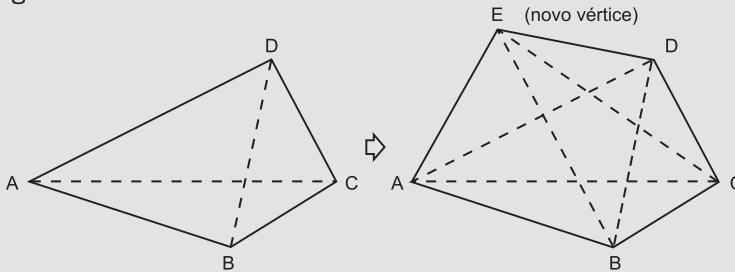
provemos que ela vale para um polígono de $k + 1$ lados:

$$d_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

Quando passamos de um polígono com k vértices para um de $k + 1$ vértices, acrescentando mais um vértice, ocorre o seguinte:

1. todas as diagonais do primeiro polígono continuam sendo diagonais do segundo;
2. um lado do primeiro se transforma em diagonal do segundo;
3. no segundo há $k - 2$ novas diagonais (as que partem do novo vértice).

Vejamos, por exemplo, a passagem de um quadrilátero para um pentágono:



\overline{AC} e \overline{BD} são diagonais \rightarrow \overline{AC} e \overline{BD} continuam diagonais
 \overline{AD} é lado \rightarrow \overline{AD} se transforma em diagonal
 \overline{EB} e \overline{EC} são diagonais

Então:

$$d_{k+1} = d_k + 1 + (k-2) = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

115. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

116. Se A é um conjunto finito com n elementos, então $\mathcal{P}(A)$, conjunto das partes de A , tem 2^n elementos.