

GELSON IEZZI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria analítica

7



CAPÍTULO I

Coordenadas cartesianas no plano

I. Noções básicas

1. Consideremos dois eixos x e y perpendiculares em O , os quais determinam o plano α .

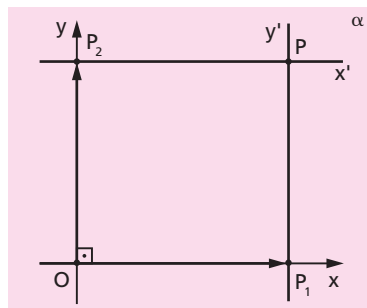
Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por ele duas retas:

$$x' \parallel x \quad \text{e} \quad y' \parallel y$$

Denominemos P_1 a interseção de x com y' e P_2 a interseção de y com x' .

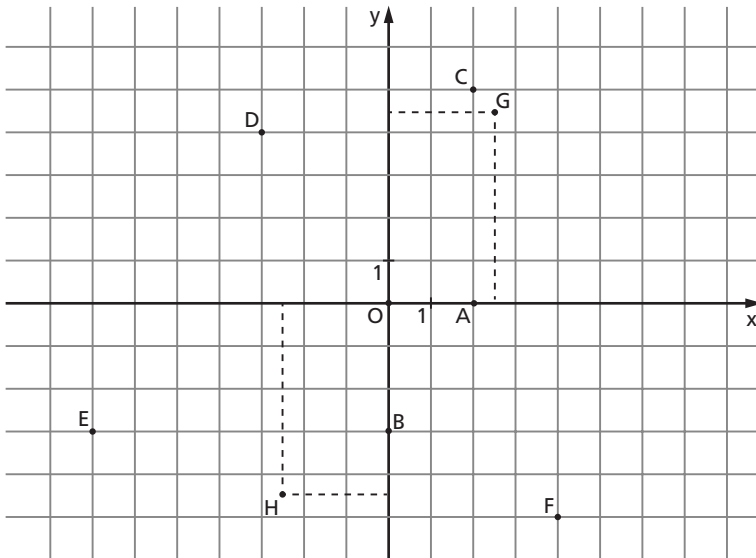
Nessas condições definimos:

- abscissa de P é o número real $x_p = \overline{OP_1}$
- ordenada de P é o número real $y_p = \overline{OP_2}$
- coordenadas de P são os números reais x_p e y_p , geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_p, y_p) , em que x_p é o primeiro termo
- eixo das abscissas é o eixo x (ou Ox)
- eixo das ordenadas é o eixo y (ou Oy)
- sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy
- origem do sistema é o ponto O
- plano cartesiano é o plano α .



2. Exemplo:

Vamos localizar os pontos $A(2,0)$, $B(0, -3)$, $C(2, 5)$, $D(-3, 4)$, $E(-7, -3)$, $F(4, -5)$, $G\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ e $H\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ no plano cartesiano, lembrando que, no par ordenado, o primeiro número representa a abscissa e o segundo, a ordenada do ponto.



3. Teorema

Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_p, y_p) de números reais existe uma correspondência biunívoca.

Demonstração:

1ª parte

As definições dadas anteriormente indicam que a todo ponto P , $P \in \alpha$, corresponde um único par de pontos (P_1, P_2) sobre os eixos x e y respectivamente e, portanto, um único par ordenado de números reais (x_p, y_p) tais que $x_p = \overline{OP_1}$ e $y_p = \overline{OP_2}$.

Esquema: $P \rightarrow (P_1, P_2) \rightarrow (x_p, y_p)$

2ª parte

Dado o par ordenado de número reais (x_p, y_p) , existem $P_1 \in x$ e $P_2 \in y$ tais que $\overline{OP_1} = x_p$ e $\overline{OP_2} = y_p$.

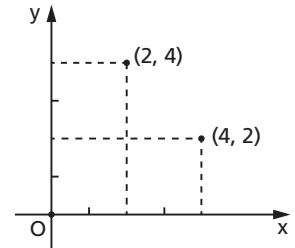
Se construirmos $x' \parallel x$ por P_2 e $y' \parallel y$ por P_1 , essas retas vão concorrer em P . Assim, a todo par (x_p, y_p) corresponde um único ponto P , $P \in \alpha$.

Esquema: $(x_p, y_p) \rightarrow (P_1, P_2) \rightarrow P$

4. Notemos que os pares ordenados $(4, 2)$ e $(2, 4)$ não são iguais. Eles se diferenciam pela ordem de seus termos e, portanto, não representam o mesmo ponto do plano cartesiano.

De maneira mais geral, se a e b são números reais distintos, então:

$$(a, b) \neq (b, a)$$



5. A principal consequência deste teorema é que em Geometria Analítica Plana:

- a) "dar um ponto P " significa dar o par ordenado (x_p, y_p) ;
- b) "pedir um ponto P " significa pedir o par de coordenadas (x_p, y_p) ;
- c) todo ponto P procurado representa duas incógnitas $(x_p$ e $y_p)$.

II. Posições de um ponto em relação ao sistema

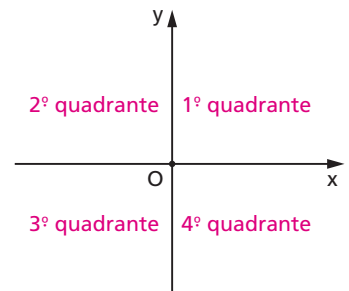
6. Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões angulares chamadas quadrantes, que recebem os nomes indicados na figura. É evidente que:

$$P \in 1^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_p \geq 0 \text{ e } y_p \geq 0$$

$$P \in 2^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_p \leq 0 \text{ e } y_p \geq 0$$

$$P \in 3^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_p \leq 0 \text{ e } y_p \leq 0$$

$$P \in 4^\circ \text{ quadrante} \Leftrightarrow x_p \geq 0 \text{ e } y_p \leq 0$$



7. Um ponto pertence ao eixo das abscissas se, e somente se, sua ordenada é nula:

$$P \in O_x \Leftrightarrow y_p = 0$$

Isso significa que o eixo das abscissas é o conjunto dos pontos de ordenada nula:

$$O_x = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Notemos que, para todo número real a , o ponto $(a, 0)$ pertence ao eixo das abscissas.

8. Um ponto pertence ao eixo das ordenadas se, e somente se, sua abscissa é nula:

$$P \in O_y \Leftrightarrow x_p = 0$$

Isso significa que o eixo das ordenadas é o conjunto dos pontos de abscissa nula:

$$O_y = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

Notemos que, para todo número real b , o ponto $(0, b)$ pertence ao eixo das ordenadas.

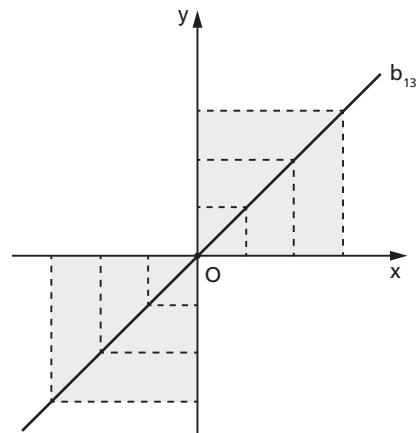
9. Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se, e somente se, tiver coordenadas iguais:

$$P \in b_{13} \Leftrightarrow x_p = y_p$$

Isso significa que a bissetriz b_{13} é o conjunto dos pontos de coordenadas iguais:

$$b_{13} = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Notemos que, para todo a real, o ponto (a, a) pertence à bissetriz b_{13} .



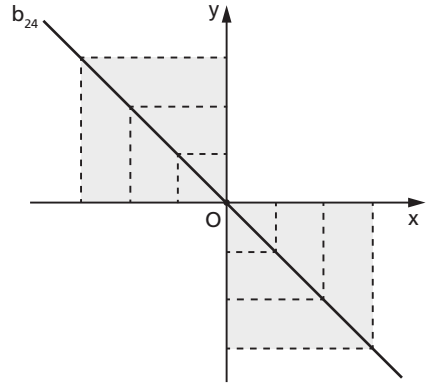
10. Um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares se, e somente se, tiver coordenadas simétricas:

$$P \in b_{24} \Leftrightarrow x_P = -y_P$$

Isso significa que a bissetriz b_{24} é o conjunto dos pontos de coordenadas simétricas:

$$b_{24} = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Notemos que, para todo a real, o ponto $(a, -a)$ pertence à bissetriz b_{24} .



11. Se uma reta é paralela ao eixo das abscissas, então todos os seus pontos têm a mesma ordenada.

Se uma reta é paralela ao eixo das ordenadas, então todos os seus pontos têm a mesma abscissa.

Também valem as recíprocas dessas duas propriedades.

EXERCÍCIO

1. Dados os pontos:

A(500, 500)

E(0, 0)

I(0, 8198)

B(-600, -600)

F(711, 0)

J(π , $\pi\sqrt{3}$)

C(715, -715)

G(0, -517)

K($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$)

D(-1002, 1002)

H(-321, 0)

L($\frac{9}{2}$, $\frac{18}{4}$)

indique quais são pertencentes:

a) ao primeiro quadrante;

e) ao eixo das abscissas;

b) ao segundo quadrante;

f) ao eixo das ordenadas;

c) ao terceiro quadrante;

g) à bissetriz dos quadrantes ímpares;

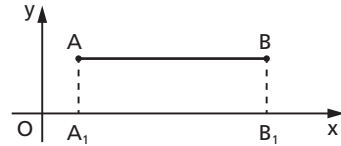
d) ao quarto quadrante;

h) à bissetriz dos quadrantes pares.

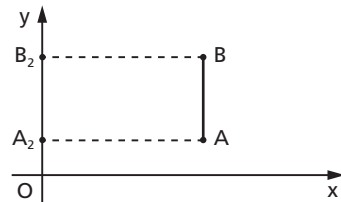
III. Distância entre dois pontos

12. Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, calculemos a distância d entre eles.

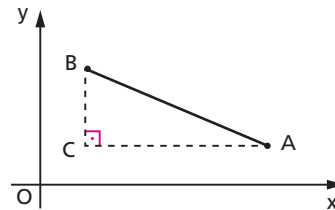
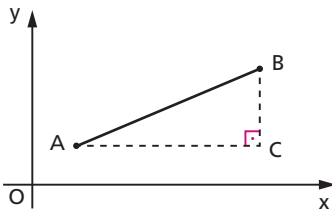
1º caso: $AB \parallel Ox$
 $d = d_{A_1B_1} = |x_2 - x_1|$



2º caso: $AB \parallel Oy$
 $d = d_{A_2B_2} = |y_2 - y_1|$



3º caso: $AB \not\parallel Ox$ e $AB \not\parallel Oy$



Temos inicialmente:

$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel Ox \Rightarrow y_C = y_1 \\ BC \parallel Oy \Rightarrow x_C = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow C(x_2, y_1)$$

De acordo com os casos iniciais, temos:

$$d_{AC} = |x_C - x_A| = |x_2 - x_1|$$

$$d_{BC} = |y_B - y_C| = |y_2 - y_1|$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, temos:

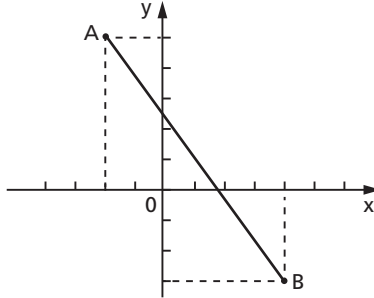
$$d^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

e então:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

13. Exemplo:

Calcular a distância entre os pontos $A(-2, 5)$ e $B(4, -3)$.



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 + 2)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

Observemos que, se mudarmos a ordem das diferenças, d não se altera:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

14. Convém observarmos que, como a ordem dos termos nas diferenças de abscissas e ordenadas não influi no cálculo de d , uma forma simples da fórmula da distância é:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

em que $\Delta x = x_2 - x_1$ ou $\Delta x = x_1 - x_2$ (é indiferente); $\Delta y = y_2 - y_1$ ou $\Delta y = y_1 - y_2$ (é indiferente).

EXERCÍCIOS

2. Sendo $A(3, 1)$, $B(4, -4)$ e $C(-2, 2)$ vértices de um triângulo, classifique-o quanto aos seus lados e ângulos.
3. Calcule a distância entre os pontos $A(1, 3)$ e $B(-2, 1)$.
4. Calcule a distância do ponto $P(3, -4)$ à origem do sistema cartesiano.
5. Calcule a distância entre os pontos $A(a - 2, b + 8)$ e $B(a + 4, b)$.

6. Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo dados A(3, 1), B(-1, 1) e C (-1, 4).
7. Prove que o triângulo cujos vértices são A(2, 2), B(-4, -6) e C(4, -12) é retângulo.

Solução

Para demonstrar que um triângulo é retângulo basta provar que as medidas dos seus lados verificam o teorema de Pitágoras: "O quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados".

$$d_{AB}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (2 + 4)^2 + (2 + 6)^2 = 100$$

$$d_{BC}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (4 + 4)^2 + (-6 + 12)^2 = 100$$

$$d_{CA}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (2 - 4)^2 + (2 + 12)^2 = 200$$

$$\text{Então } d_{CA}^2 = d_{AB}^2 + d_{BC}^2.$$

8. Determine x de modo que o triângulo ABC seja retângulo em B. São dados: A(-2, 5), B(2, -1) e C(3, x).
9. Se P(x, y) equidista de A(-3, 7) e B(4, 3), qual é a relação existente entre x e y?

Solução

$$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 7)^2 = (x - 4)^2 + (y - 3)^2$$

então:

$$\underline{x^2} + 6x + \underline{9} + \underline{y^2} - 14y + 49 = \underline{x^2} - 8x + 16 + \underline{y^2} - 6y + \underline{9}$$

$$(6x - 14y + 49) - (-8x + 16 - 6y) = 0$$

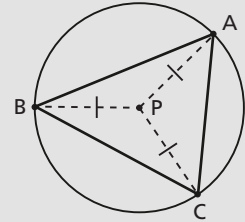
$$14x - 8y + 33 = 0$$

$$\text{Resposta: } 14x - 8y + 33 = 0.$$

10. Dados A(x, 3), B(-1, 4) e C(5, 2), obtenha x de modo que A seja equidistante de B e C.
11. Determine o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, sabendo que é equidistante dos pontos A(2, -1) e B(3, 5).
12. Determine o ponto P, da bissetriz dos quadrantes pares, que equidista de A(0, 1) e B(-2, 3).
13. Dados os pontos A(8, 11), B(-4, -5) e C(-6, 9), obtenha o circuncentro do triângulo ABC.

Solução

O circuncentro (centro da circunferência circunscrita ao triângulo) é um ponto P equidistante dos três vértices,



$$P(x, y) \begin{cases} (1) d_{PA} = d_{PB} \\ (2) d_{PB} = d_{PC} \end{cases}$$

$$(1) (x - 8)^2 + (y - 11)^2 = (x + 4)^2 + (y + 5)^2$$

$$\underline{x^2} - 16x + 64 + \underline{y^2} - 22y + 121 = \underline{x^2} + 8x + 16 + \underline{y^2} + 10y + 25$$

$$-24x - 32y = -144$$

$$3x + 4y = 18 \quad (3)$$

$$(2) (x + 4)^2 + (y + 5)^2 = (x + 6)^2 + (y - 9)^2$$

$$\underline{x^2} + 8x + 16 + \underline{y^2} + 10y + 25 = \underline{x^2} + 12x + 36 + \underline{y^2} + 18y + 81$$

$$-4x + 28y = 76$$

$$x - 7y = -19 \quad (4)$$

De (4), temos $x = 7y - 19$, que substituindo em (3) dá:

$$3(7y - 19) + 4y = 18 \Rightarrow 25y = 75 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 7 \cdot 3 - 19 = 2$$

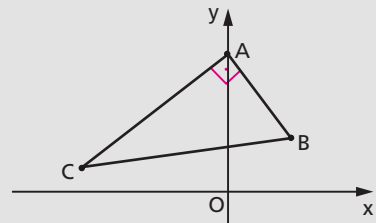
Resposta: P(2, 3).

- 14. Dados os pontos M(a, 0) e N(0, a), determine P de modo que o triângulo MNP seja equilátero.
- 15. Dados os pontos B(2, 3) e C(-4, 1), determine o vértice A do triângulo ABC, sabendo que é o ponto do eixo y do qual se vê BC sob ângulo reto.

Solução

$$A(x, y) \begin{cases} (1) A \in y \\ (2) AC \perp AB \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) x = 0 \\ (2) d_{AC}^2 + d_{AB}^2 = d_{BC}^2 \end{cases}$$



De (2) temos:

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (2 + 4)^2 + (3 - 1)^2$$

Levando em conta que $x = 0$, temos:

$$16 + (y^2 - 2y + 1) + 4 + (y^2 - 6y + 9) = 36 + 4$$

$$2y^2 - 8y - 10 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ou } y = 5$$

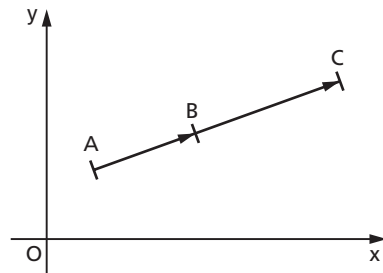
Resposta: $A(0, -1)$ ou $A(0, 5)$.

- 16.** Dados $A(5, -2)$ e $B(4, -1)$, vértices consecutivos de um quadrado, determine os outros dois vértices.
- 17.** Dados $A(1, 2)$ e $C(3, -4)$, extremidades da diagonal de um quadrado, calcule as coordenadas dos vértices B e D , sabendo que $x_B > x_D$.

IV. Razão entre segmentos colineares

15. Dados três pontos colineares A, B e C (com $A \neq B \neq C$), chama-se razão entre os segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} o número real r tal que:

$$r = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$$



Se r o quociente entre as medidas algébricas de \overrightarrow{AB} e de \overrightarrow{BC} , temos:

1º) se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} têm o mesmo sentido, então a razão r é positiva;

2º) se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} têm sentidos opostos, então a razão r é negativa.

16. Exemplo:

Para esclarecermos a definição dada, consideremos sobre um eixo e os pontos C, D, E, F, G, H, I, J tais que $F = A$ e $H = B$ e $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{HI}, \overrightarrow{IJ}$,

têm comprimento ℓ e calculemos as razões:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{BG}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{BI}} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{BJ}}$$



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2\ell}{-5\ell} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BG}} = \frac{2\ell}{-\ell} = -2$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{2\ell}{-4\ell} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{2\ell}{0} \text{ (não existe)}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{2\ell}{-3\ell} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BI}} = \frac{2\ell}{\ell} = 2$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{2\ell}{-2\ell} = -1$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BJ}} = \frac{2\ell}{2\ell} = 1$$

17. Uma pergunta importante é “como se poderia cacular o valor de $r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ quando são dadas as coordenadas de A, B e C?”.

Uma primeira ideia seria tentar responder à pergunta usando a fórmula da distância entre dois pontos:

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}$$

mas esta não é uma saída aceitável porque, além de ser trabalhosa, daria sempre um resultado $r \geq 0$ uma vez que dividimos distâncias e não medidas algébricas. Assim, quando \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} têm sentidos opostos, erramos o sinal da razão.

Para contornar essa dificuldade, a ideia é projetar os segmentos \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} sobre os eixos coordenados e observar o que acontece com as projeções. Vejamos:

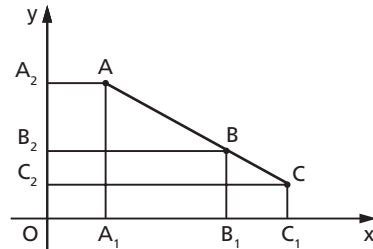
1º caso: a reta \overleftrightarrow{AB} não é paralela a Ox e nem a Oy .

Aplicando o teorema de Tales às transversais do feixe de paralelas $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ e $\overline{CC_1}$, temos:

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} \quad (1)$$

Aplicando analogamente o teorema de Tales às transversais $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_2}$ e $\overline{CC_2}$, temos:

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}} \quad (2)$$



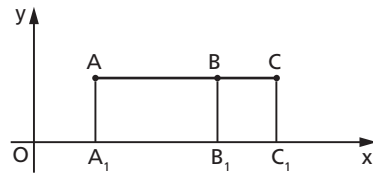
Supondo que $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, a partir das igualdades (1) e (2), temos:

$$r = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \quad \text{e} \quad r = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

2º caso: a reta \overleftrightarrow{AB} é paralela ao eixo Ox .

Neste caso só existe o primeiro feixe de paralelas $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ e $\overline{CC_1}$ e então:

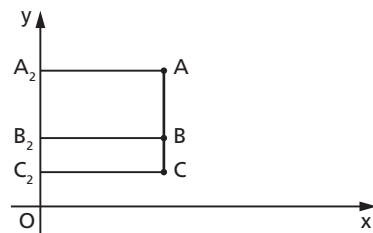
$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} \Rightarrow r = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}$$



3º caso: a reta \overleftrightarrow{AB} é paralela ao eixo Oy .

Neste caso só existe o feixe de paralelas $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_2}$ e $\overline{CC_2}$ e então:

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}} \Rightarrow r = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$



18. Exemplo:

Dados os pontos $A(3, 7)$, $B(5, 11)$ e $C(6, 13)$, calcular a razão entre os segmentos \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} .

Calculando pelas projeções no eixo Ox , temos:

$$r = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{5 - 3}{6 - 5} = \frac{2}{1} = 2$$

Calculando pelas projeções no eixo Oy , temos:

$$r = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{11 - 7}{13 - 11} = \frac{4}{2} = 2$$

É claro que só poderíamos ter obtido resultados iguais.

V. Coordenadas do terceiro ponto

19. Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é possível calcular as coordenadas (x_3, y_3) de um terceiro ponto C pertencente à reta \overrightarrow{AB} , desde que conheçamos a razão entre dois segmentos com extremidades nesses pontos. Por exemplo, se sabemos o valor de $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, temos:

$$r = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \quad \text{e} \quad r = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

equações a partir das quais é possível calcular x_3 e y_3 .

20. Exemplo:

Obter as coordenadas do ponto C da reta \overrightarrow{AB} , sabendo que $A = (1, 5)$, $B = (4, 17)$ e

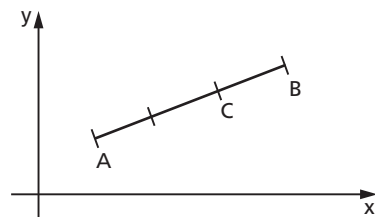
$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 2.$$

Temos:

$$r = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = 2 \Rightarrow \frac{x_3 - 1}{4 - x_3} = 2 \Rightarrow x_3 - 1 = 8 - 2x_3 \Rightarrow x_3 = 3$$

$$r = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} = 2 \Rightarrow \frac{y_3 - 5}{17 - y_3} = 2 \Rightarrow y_3 - 5 = 34 - 2y_3 \Rightarrow y_3 = 13$$

Então $C = (3, 13)$.



21. Ponto médio

No caso particular de C ser o ponto médio do segmento \overline{AB} , então $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 1$ e daí:

$$r = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = 1 \quad \text{e} \quad r = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} = 1$$

de onde vem:

$$x_3 - x_1 = x_2 - x_3 \quad \text{e} \quad y_3 - y_1 = y_2 - y_3$$

e finalmente:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

22. Exemplo:

Obter o ponto médio do segmento \overline{AB} quando $A = (7, -1)$ e $B = (-3, 11)$.

Temos:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7 + (-3)}{2} = 2$$

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(-1) + 11}{2} = 5$$

Então $C = (2, 5)$.

EXERCÍCIOS

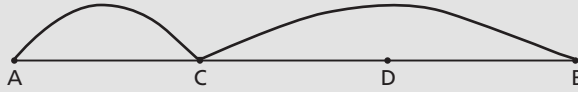
18. Calcule a razão $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right)$, sendo dados os pontos $A(1, 4)$, $B\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $C(-2, -2)$.

19. Dados $A(5, 3)$ e $B(-1, -3)$, seja C a interseção da reta AB com o eixo das abscissas. Calcule a razão $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right)$.

20. Determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em três partes iguais, sabendo que $A = (-1, 7)$ e $B = (11, -8)$.

Solução

1º)

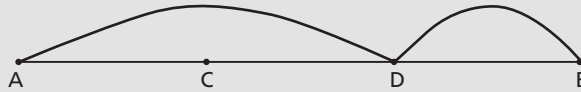


Conhecemos a razão $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$, então:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = r \Rightarrow x_C = \frac{x_A + r \cdot x_B}{1 + r} = \frac{(-1) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (11)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = 3$$

$$\frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = r \Rightarrow y_C = \frac{y_A + r \cdot y_B}{1 + r} = \frac{(7) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-8)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{3}{2}} = 2$$

2º)



Conhecemos a razão $r' = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = 2$, então:

$$x_D = \frac{x_A + r' \cdot x_B}{1 + r'} = \frac{(-1) + 2 \cdot 11}{1 + 2} = \frac{21}{3} = 7$$

$$y_D = \frac{y_A + r' \cdot y_B}{1 + r'} = \frac{7 + 2 \cdot (-8)}{1 + 2} = \frac{-9}{3} = -3$$

Observemos também que D é ponto médio de \overline{BC} :

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{(11) + (3)}{2} = 7 \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{(-8) + 2}{2} = -3$$

Resposta: C(3, 2) e D(7, -3).

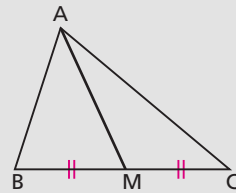
- 21.** Determine os pontos que dividem AB em quatro partes iguais quando $A = (3, -2)$ e $B = (15, 10)$.
- 22.** Até que ponto o segmento de extremos $A(4, -2)$ e $B\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ deve ser prolongado no sentido \overrightarrow{AB} para que seu comprimento triplique?
- 23.** Calcule o comprimento da mediana AM do triângulo ABC cujos vértices são os pontos $A(0, 0)$, $B(3, 7)$ e $C(5, -1)$.

Solução

O ponto M é tal que:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3$$



O comprimento da mediana AM é a distância entre A e M:

$$d_{AM} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Resposta: $d_{AM} = 5$.

- 24.** Dados os vértices $P(1, 1)$, $Q(3, -4)$ e $R(-5, 2)$ de um triângulo, calcule o comprimento da mediana que tem extremidade no vértice Q.
- 25.** Dados os vértices consecutivos, $A(4, -2)$ e $B(3, -1)$, de um paralelogramo, e o ponto $E(2, 1)$, interseção de suas diagonais, determine os outros dois vértices.
- 26.** Do triângulo ABC são dados: o vértice $A(2, 4)$, o ponto $M(1, 2)$ médio do lado AB e o ponto $N(-1, 1)$ médio do lado BC. Calcule o perímetro do triângulo ABC.

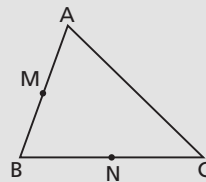
Solução

1º) M é o ponto médio de AB. Então:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{4 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 0$$

Portanto, $B(0, 0)$.



2º) N é o ponto médio de BC. Então:

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow -1 = \frac{0 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = -2$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow 1 = \frac{0 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 2$$

Portanto, C(-2, 2).

3º) perímetro = $d_{AB} + d_{BC} + d_{CA} =$

$$= \sqrt{(2 - 0)^2 + (4 - 0)^2} + \sqrt{(0 + 2)^2 + (0 - 2)^2} + \sqrt{(2 + 2)^2 + (4 - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{20} + \sqrt{8} + \sqrt{20} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2} = 2(2\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

Resposta: $2(2\sqrt{5} + \sqrt{2})$.

27. Se M(1, 1), N(0, 3) e P(-2, 2) são os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente, de um triângulo ABC, determine as coordenadas de A, B e C.

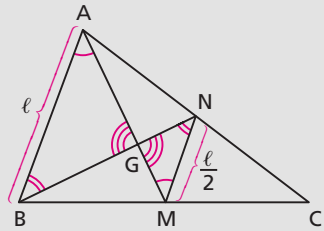
28. Calcule as coordenadas do baricentro do triângulo ABC cujos vértices são $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

Solução

O baricentro G é a interseção das medianas do triângulo.

Tomando um triângulo ABC e construindo as medianas AM e BN, formamos os triângulos, ABG e MNG que são semelhantes. Portanto:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{AB}{MN} = \frac{\ell}{\frac{\ell}{2}} = 2$$



isto é, G divide a mediana \overrightarrow{AM} na razão 2. Então:

$$x_G = \frac{x_A + 2x_M}{1 + 2} = \frac{x_A + 2 \frac{x_B + x_C}{2}}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + 2y_M}{1 + 2} = \frac{y_A + 2 \frac{y_B + y_C}{2}}{3} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Resposta: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

A conclusão tirada no problema anterior, isto é, o fato de que “as coordenadas do baricentro são as médias aritméticas das coordenadas dos vértices” poderá ser utilizada a seguir em outros problemas de Geometria Analítica.

- 29.** O baricentro de um triângulo é $G(5, 1)$ e dois de seus vértices são $A(9, -3)$ e $B(1, 2)$. Determine o terceiro vértice.
- 30.** O baricentro de um triângulo é $G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, o ponto médio do lado BC é $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e o ponto médio do lado AB é $M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Determine os vértices A, B, C .
- 31.** Determine os vértices B e C de um triângulo equilátero ABC , sabendo que o ponto médio do lado AB é $M(\sqrt{3}, 1)$ e A é a origem do sistema.

Solução

1º) Obter B

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 2\sqrt{3}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{0 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 2$$

2º) Obter C

Temos:

$$\ell = d_{AB} = \sqrt{(2\sqrt{3} - 0)^2 + (2 - 0)^2} = 4$$

$$C(x, y) \begin{cases} (1) d_{AC} = \ell \\ (2) d_{BC} = \ell \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 16 \\ (2) (x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) x^2 + y^2 = 16 \\ (2) x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y = 0 \end{cases}$$

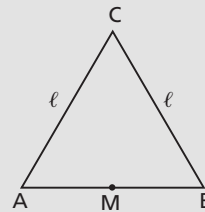
De (1) em (2) resulta: $16 - 4\sqrt{3}x - 4y = 0 \Rightarrow y = 4 - \sqrt{3}x$, que substituindo em (1) dá:

$$x^2 + (4 - \sqrt{3}x)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + 16 - 8\sqrt{3}x + 3x^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8\sqrt{3}x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 4 \text{ ou } y = -2 \text{ (respectivamente)}$$

Resposta: $B(2\sqrt{3}, 2)$ e $C(0, 4)$ ou $C(2\sqrt{3}, -2)$.



32. Num triângulo ABC são dados:

- (1) $A(-4, 3)$
 - (2) $M(-4, 6)$ ponto médio de AB
 - (3) $d_{AC} = 8$
 - (4) $d_{BC} = 10$
- Obtenha o vértice C do triângulo.

33. Prove que os pontos médios dos lados do quadrilátero de vértices $A(a, b)$, $B(c, d)$, $C(e, f)$ e $D(g, h)$ são vértices de um paralelogramo.

Solução

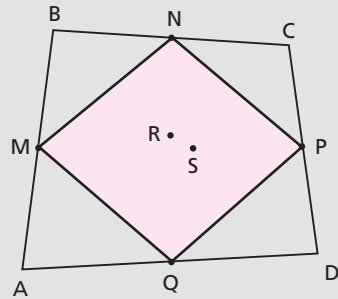
1º) Aplicando a fórmula do ponto médio, determinemos M, N, P e Q:

$$M \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + d}{2} \right)$$

$$N \left(\frac{c + e}{2}, \frac{d + f}{2} \right)$$

$$P \left(\frac{e + g}{2}, \frac{f + h}{2} \right)$$

$$Q \left(\frac{a + g}{2}, \frac{b + h}{2} \right)$$



2º) Provemos que as diagonais do quadrilátero MNPQ se cortam ao meio, isto é, os seus pontos médios, R e S, são coincidentes:

$$R \left\{ \begin{array}{l} x_R = \frac{x_N + x_Q}{2} = \frac{\frac{c + e}{2} + \frac{a + g}{2}}{2} = \frac{a + c + e + g}{4} \\ y_R = \frac{y_N + y_Q}{2} = \frac{\frac{d + f}{2} + \frac{b + h}{2}}{2} = \frac{b + d + f + h}{4} \end{array} \right.$$

$$S \left\{ \begin{array}{l} x_S = \frac{x_M + x_P}{2} = \frac{\frac{a + c}{2} + \frac{e + g}{2}}{2} = \frac{a + c + e + g}{4} \\ y_S = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{\frac{b + d}{2} + \frac{f + h}{2}}{2} = \frac{b + d + f + h}{4} \end{array} \right.$$

$R = S \Rightarrow MNPQ$ é paralelogramo.

34. O quadrilátero de vértices $A\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $B\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $C(1, -1)$ e $D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é um paralelogramo? Justifique.

VI. Condição para alinhamento de três pontos

23. Teorema

Três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são colineares se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

1ª parte

Hipótese

Tese

A, B, C colineares

\Rightarrow

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

Demonstração:

Pode ocorrer uma das três situações seguintes:

1ª) dois dos pontos coincidem ($A = B$, por exemplo).

Neste caso $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e daí:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0 \cdot (y_3 - y_2) = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = (x_3 - x_2) \cdot 0 = 0$$

e está provada a tese.

2ª) os três pontos são distintos e pertencem a uma reta paralela a um dos eixos (paralela ao eixo Ox , por exemplo).

Neste caso $y_1 = y_2 = y_3$ e daí:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_2 - x_1) \cdot 0 = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = (x_3 - x_2) \cdot 0 = 0$$

e está provada a tese.

3ª) os três pontos são distintos e pertencem a uma reta não paralela a Ox nem a Oy .

Neste caso, seja r a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Temos:

$$r = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \quad \text{e} \quad r = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Daí $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$ e decorre que:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

2ª parte

Hipótese

Tese

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) \Rightarrow \text{A, B, C colineares}$$

Demonstração:

Podem ocorrer uma das três situações seguintes:

1ª) $x_3 - x_2 = 0$ (ou seja, $x_2 = x_3$)

Neste caso, a hipótese fica sendo $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$ e então:

$$x_2 - x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad y_3 - y_2 = 0$$

Se $x_2 - x_1 = 0$, resulta $x_1 = x_2 = x_3$ e então A, B, C ficam colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao eixo Oy.

Se $y_3 - y_2 = 0$, resulta $y_2 = y_3$ e $x_2 = x_3$ e então A, B, C ficam colineares porque B e C coincidem.

2ª) $y_2 - y_1 = 0$ (ou seja, $y_1 = y_2$)

Neste caso, a hipótese fica sendo $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$ e então:

$$x_2 - x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad y_3 - y_2 = 0$$

Se $x_2 - x_1 = 0$, resulta $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e então A, B, C ficam colineares porque A e C coincidem.

Se $y_3 - y_2 = 0$, resulta $y_1 = y_2 = y_3$ e então A, B, C ficam colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao eixo Ox.

3ª) $x_3 - x_2 \neq 0$ e $y_2 - y_1 \neq 0$

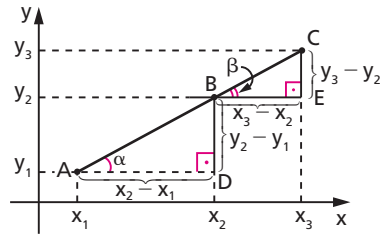
Neste caso, resulta da hipótese que:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) \neq 0$$

e daí vem:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Então os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, logo são semelhantes. Por isso temos $\alpha = \beta$ e resulta que os pontos A, B, C estão alinhados.



Nota

A condição para alinhamento de três pontos

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

pode ser expressa de outra forma mais simples de memorizar. Vejamos:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 0$$

$$x_2y_3 - \cancel{x_2y_2} - x_1y_3 + x_1y_2 - x_3y_2 + \underline{x_3y_1} + \cancel{x_2y_2} - \underline{x_2y_1} = 0$$

$$x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Ver no final deste capítulo o desenvolvimento de determinantes pela regra de Laplace.)

24. Exemplos:

1º) Mostrar que A(-1, 1), B(1, 3) e C(7, 9) são colineares.

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= +6 + 6 - 12 = 0 \Rightarrow A, B, C \text{ colineares}$$

2º) Para que valores de x os pontos $A(x, x)$, $B(3, 1)$ e $C(7, -3)$ são colineares?

$$A, B, C \text{ colineares} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 4x + 4x - 16 = \\ = 8x - 16 = 0 \Rightarrow x = 2$$

EXERCÍCIOS

- 35.** Os pontos $A(2, 7)$, $B(-3, 0)$ e $C(16, 5)$ são colineares?
- 36.** Determine y para que os pontos $A(3, 5)$, $B(-3, 8)$ e $C(4, y)$ sejam colineares.

Solução

$$A, B, C \text{ colineares} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \\ 4 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(5 - 8) - y(3 + 3) + (24 + 15) = 0 \Rightarrow -12 - 6y + 39 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y = 27 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$$

$$\text{Resposta: } y = \frac{9}{2}.$$

- 37.** Os pontos $(2, -3)$, $(4, 3)$ e $(5, \frac{k}{2})$ estão numa mesma reta. Determine o valor de k .
- 38.** Se o ponto $(q, -4)$ pertence à reta que passa pelos pontos $(0, 6)$ e $(6, 0)$, determine q .
- 39.** Mostre que $A(a, -3a)$, $B(a + 3, -3a - 1)$ e $C(a + 5, -3a - 2)$ são colineares para todo valor real de a .

40. Se $A(0, a)$, $B(a, -4)$ e $C(1, 2)$, para que valores de a existe o triângulo ABC?

Solução

Existe o triângulo se $a \in \mathbb{R}$ e os pontos A, B, C não são colineares. Impondo o alinhamento:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ então } -a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

isto é:

$$-a(a - 1) + (2a + 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \text{ donde } a = -1 \text{ ou } a = 4$$

Resposta: a real; $a \neq -1$ e $a \neq 4$.

41. O ponto $P(3, m)$ é interno a um dos lados do triângulo $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ e $C(5, -4)$. Determine m .
42. Dados $A(10, 9)$ e $B(2, 3)$, obtenha o ponto em que a reta AB intercepta o eixo das abscissas.
43. Dados $A(3, -1)$ e $B(7, -5)$, obtenha o ponto em que a reta AB intercepta o eixo das ordenadas.
44. Dados $A(1, 5)$ e $B(3, -1)$, obtenha o ponto em que a reta AB intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares.
45. Dados $A(1, -5)$ e $B(-1, -9)$, obtenha o ponto em que a reta AB intercepta a bissetriz dos quadrantes pares.
46. Dados $A(-3, 4)$ e $B(2, 9)$, $C(2, 7)$ e $D(4, 5)$, obtenha a interseção das retas AB e CD.

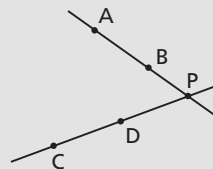
Solução

Seja $P(x, y)$ a interseção das retas.

Como P, B, A são colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 5y + 35 = 0 \Rightarrow x - y = -7 \quad (1)$$



Como P, C, D são colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 18 = 0 \Rightarrow x + y = 9 \quad (2)$$

Somando (1) e (2), vem: $2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 + y = 9 \Rightarrow y = 8$

Resposta: P(1, 8).

- 47.** Determine P(x_0 , y_0) colinear simultaneamente com A(0, 3) e B(1, 0) e com C(1, 2) e D(0, 1).
- 48.** Determine o ponto P da reta AB que está à distância 5 da origem. Dados A(0, -25) e B(-2, -11).

Solução

$$P(x, y) \begin{cases} (1) d_{OP} = 5 \\ (2) P, A, B \text{ colineares} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 25 \\ (2) \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -25 & 1 \\ -2 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

De (2): $-14x - 2y - 50 = 0 \Rightarrow y = -7x - 25$ que, substituindo em (1), dá:

$$x^2 + (-7x - 25)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 49x^2 + 350x + 625 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50x^2 + 350x + 600 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -4 \text{ ou } y = +3 \text{ (respectivamente)}$$

Resposta: P(-3, -4) ou P(-4, 3).

- 49.** Determine na reta AB os pontos equidistantes dos eixos cartesianos. Dados: A(2, 3) e B(-5, 1).

VII. Complemento — Cálculo de determinantes

- 25.** Um determinante de 2ª ordem

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

é calculado pela fórmula:

$$D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-5) \cdot 4 = 7 + 20 = 27$$

Um determinante de 3ª ordem

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

de acordo com o teorema de Laplace, é calculado da seguinte maneira:

1º) escolhe-se uma linha ou coluna qualquer de D;

2º) multiplica-se cada elemento da linha ou coluna escolhida pelo determinante de ordem 2 que se obtém suprimindo em D a linha e a coluna à qual pertence o elemento tomado;

3º) multiplica-se cada produto pelo cofator que é dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j}$, sendo A_{ij} o elemento tomado e $i + j$ a soma de seus índices. Se o expoente obtido for par, o cofator será 1; e se o expoente for ímpar, o cofator será -1 .

4º) somam-se os três produtos obtidos.

26. Exemplos:

1º) Desenvolvimento de D pela 1ª linha:

$$\begin{aligned} D &= (+1) \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (+1) \cdot a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22}) \end{aligned}$$

2º) Desenvolvimento de D pela 3ª linha:

$$\begin{aligned} D &= (+1) \cdot a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1) \cdot a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (+1) \cdot a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{31}(a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}) - a_{32}(a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13}) + a_{33}(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) \end{aligned}$$

3º) Calcular D

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Temos, pela 1ª linha:

$$D = +1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= +1(5 \cdot 1 - 3 \cdot 2) - 3(2 \cdot 1 - 4 \cdot 2) + 2(2 \cdot 3 - 4 \cdot 5) =$$

$$= 1(5 - 6) - 3(2 - 8) + 2(6 - 20) = -1 + 18 - 28 = -11$$

EXERCÍCIO

50. Calcule os determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \\ 6 & -10 & -2 \end{vmatrix}$$

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 36 \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

CAPÍTULO II

Equação da reta

I. Equação geral

27. Teorema

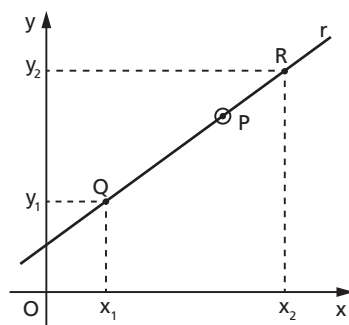
“A toda reta r do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ em que a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) representa um ponto genérico de r .”

Demonstração:

Sejam $Q(x_1, y_1)$ e $R(x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano cartesiano. Isto significa que x_1, y_1, x_2, y_2 são números reais (constantes) conhecidos.

Seja r a reta definida pelos pontos Q e R . Se $P(x, y)$ é um ponto que percorre r , então x e y são variáveis. Como P, Q, R são colineares, temos necessariamente:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Desenvolvendo esse determinante pela regra de Laplace, temos:

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(y_1 - y_2)}_a \cdot x + \underbrace{(x_2 - x_1)}_b \cdot y + \underbrace{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}_c = 0$$

Fazendo $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1 y_2 - x_2 y_1 = c$, decorre que todo ponto $P \in r$ deve verificar a equação

$$ax + by + c = 0$$

chamada equação geral de r .

28. Comentários

1º) Ficou provado que toda reta (não importa qual seja sua posição) tem equação geral.

2º) Convém notar que a mesma reta admite várias (infinitas) equações gerais, pois, se usarmos $Q'(x'_1, y'_1)$ e $R'(x'_2, y'_2)$ para definirmos r , com $Q' \neq Q$ e $R' \neq R$, obteremos provavelmente uma outra equação: $a'x + b'y + c' = 0$. Veremos, no 3º caso do item 39, que $a'x + b'y + c' = 0$ é, entretanto, equivalente a $ax + by + c = 0$.

Isso significa que a toda reta r do plano cartesiano está associado um conjunto de equações equivalentes entre si.

3º) Os coeficientes a e b não podem ser simultaneamente nulos, pois:

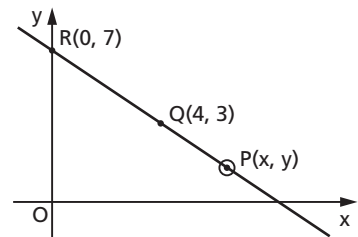
$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \\ b = 0 \Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow Q = R$$

e $Q \neq R$ por hipótese.

29. Exemplos:

1º) Obter a equação da reta que passa por $Q(4, 3)$ e $R(0, 7)$.

Entendemos por equação da reta \overleftrightarrow{QR} a condição que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ devem satisfazer para que P seja colinear com Q e R . Se P, Q e R são colineares, então:



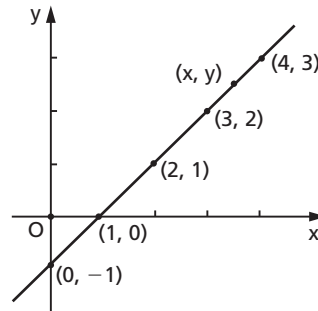
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow x + y - 7 = 0$$

isto é, todo ponto da reta \overleftrightarrow{QR} deve apresentar soma das coordenadas igual a sete.

2º) Obter a equação da reta da figura.

Devemos escolher dois pontos dados para montar o determinante juntamente com o ponto (x, y) variável. Se escolhermos $(2, 1)$ e $(1, 0)$, vem:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$



Se escolhermos $(4, 3)$ e $(0, -1)$, vem:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 4y - 4 = 0$$

que é equivalente à anterior. Assim, a equação da reta é $x - y - 1 = 0$ (a mais simples) ou qualquer equação equivalente a esta.

30. Teorema

“A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, está associada uma única reta r do plano cartesiano cujos pontos $P(x, y)$ são as soluções da equação dada.”

Demonstração:

Faremos a demonstração apenas para o caso geral em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Sejam $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ três pontos dois a dois distintos que satisfazem a equação dada. Então, temos:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow ax_1 = -by_1 - c \Rightarrow x_1 = \frac{-by_1 - c}{a}$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \Rightarrow ax_2 = -by_2 - c \Rightarrow x_2 = \frac{-by_2 - c}{a}$$

$$ax_3 + by_3 + c = 0 \Rightarrow ax_3 = -by_3 - c \Rightarrow x_3 = \frac{-by_3 - c}{a}$$

Temos ainda:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = \frac{(-by_2 - c) - (-by_1 - c)}{a} \cdot (y_3 - y_2) = \frac{b(y_1 - y_2)(y_3 - y_2)}{a}$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = \frac{(-by_3 - c) - (-by_2 - c)}{a} \cdot (y_2 - y_1) = \frac{b(y_2 - y_3)(y_2 - y_1)}{a}$$

então $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$, portanto P_1 , P_2 e P_3 são colineares.

Está provado que todo ponto P_3 (variável), que satisfaz a condição $ax + by + c = 0$, pertence necessariamente à reta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ (que existe e é única), à qual daremos o nome r .

31. Comentários

1º) Esse teorema mostra que, dada a equação $ax + by + c = 0$, o conjunto dos pares (x, y) que a satisfazem é uma reta.

Exemplo:

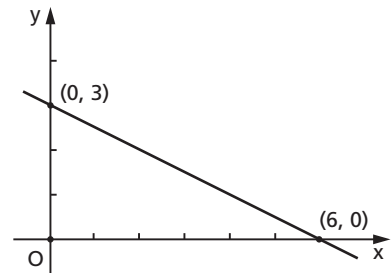
Construir o gráfico dos pontos que verificam a equação $x + 2y - 6 = 0$.

Como já sabemos, o gráfico é uma reta e, para localizá-la, basta localizar dois de seus pontos. Assim, temos:

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$x = 6 \Rightarrow 6 + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 0$$

isto é, os pontos $(0, 3)$ e $(6, 0)$ definem a reta.



2º) Esse teorema mostra também que só os pontos que satisfazem a equação $ax + by + c = 0$ pertencem à reta; portanto, um ponto está sobre uma reta somente se suas coordenadas verificam a equação da reta.

32. Exemplo:

Verificar se $A(2, 2)$, $B(4, 1)$ e $C(7, -1)$ pertencem à reta r de equação $x + 2y - 6 = 0$.

Basta substituir x e y na equação dada pelas coordenadas de cada ponto e verificar se a igualdade obtida é verdadeira ou falsa:

$$A \rightarrow (2) + 2(2) - 6 = 0 \text{ (verdadeira)} \rightarrow A \in r$$

$$B \rightarrow (4) + 2(1) - 6 = 0 \text{ (verdadeira)} \rightarrow B \in r$$

$$C \rightarrow (7) + 2(-1) - 6 = 0 \text{ (falsa)} \rightarrow C \notin r$$

33. A principal consequência dos teoremas dos itens 27 e 30 é que em Geometria Analítica Plana:

- a) "dar uma reta" significa dar uma das equações da reta;
- b) "pedir uma reta" significa pedir uma das equações da reta.

34. O anulamento de um dos coeficientes da equação geral da reta revela uma propriedade especial da reta. Assim, temos:

$$(1) a = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow r // x$$

isto é, quando a equação não tem o termo em x (exemplos: $3y - 4 = 0$, $7y + 11 = 0$), a reta é paralela ao eixo das abscissas.

$$(2) b = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow r // y$$

isto é, quando a equação não tem o termo em y (exemplos: $7x + 5 = 0$, $9x - 4 = 0$), a reta é paralela ao eixo das ordenadas.

$$(3) c = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0 \Leftrightarrow (0, 0) \text{ satisfaz a equação, pois}$$

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow (0, 0) \in r$$

isto é, quando a equação não tem o termo independente (exemplos: $3x + 4y = 0$, $12x - 13y = 0$), a reta passa pela origem.

$$(4) (a = 0 \text{ e } c = 0) \Rightarrow (r // x \text{ e } (0, 0) \in r) \Rightarrow r = x$$

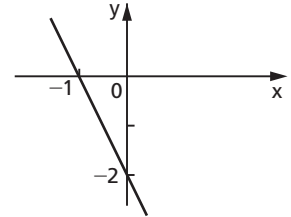
$$(5) (b = 0 \text{ e } c = 0) \Rightarrow (r // y \text{ e } (0, 0) \in r) \Rightarrow r = y$$

Assim: $x = 0$, $7x = 0$, $\sqrt{2} \cdot x = 0$ são equações do eixo dos y ;

$y = 0$, $5y = 0$, $-513y = 0$ são equações do eixo dos x .

EXERCÍCIOS

51. Determine a equação da reta r indicada no diagrama ao lado.



52. Dados os pontos $A(1, 2)$, $B(2, -2)$ e $C(4, 3)$, obtenha a equação da reta que passa por A e pelo ponto médio do segmento BC .
53. Determine as equações das retas suportes dos lados do triângulo cujos vértices são $A(0, 0)$, $B(1, 3)$ e $C(4, 0)$.

Solução

Cada reta é definida por dois vértices:

reta AB

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y = 0$$

reta BC

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow x + y - 4 = 0$$

reta CA

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Resposta: $3x - y = 0$, $x + y - 4 = 0$, $y = 0$.

54. Determine a equação da reta definida pelos pontos $A\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e $B\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)$.

- 55.** A reta determinada por $A(a, 0)$ e $B(0, b)$ passa por $C(2, 5)$. Qual é a relação entre a e b ?
- 56.** A reta determinada por $A(p, q)$ e $B(7, 3)$ passa pela origem. Qual é a relação entre p e q ?
- 57.** Prove que os pontos $A(a, b + c)$, $B(b, a + c)$ e $C(c, a + b)$ são colineares e determine a equação da reta que os contém.
- 58.** Dados $A(-5, -5)$, $B(1, 5)$, $C(19, 0)$ e $r: 5x - 3y = 0$, verifique se r passa pelo baricentro do triângulo ABC .

Solução

Conforme vimos no exercício 28, as coordenadas do baricentro são:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{(-5) + (1) + (19)}{3} = 5$$

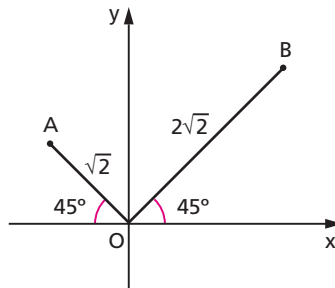
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{(-5) + (5) + (0)}{3} = 0$$

Substituindo $G(5, 0)$ na equação de r , temos:

$$5(5) - 3(0) = 0 \text{ (falsa)} \Rightarrow G \notin r$$

Resposta: $G \notin r$.

- 59.** Determine a equação da reta que passa pelos pontos A e B da figura abaixo.



- 60.** Desenhe no plano cartesiano as retas cujas equações são dadas abaixo:
- a) $y = 3x$ b) $x + y = 3$ c) $x - y + 2 = 0$ d) $3y + x = 0$

II. Interseção de duas retas

35. Todo ponto de interseção de duas retas tem de satisfazer as equações de ambas as retas. Portanto, obtemos o ponto comum $P(x_0, y_0)$ a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas suas equações:

$$(S) \begin{cases} r: a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \\ s: a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases}$$

36. Exemplo:

Obter a interseção das retas:

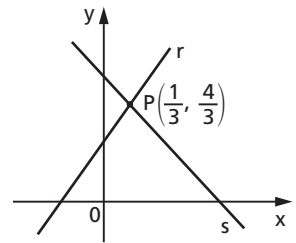
$$r: x - y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad s: 2x + y - 2 = 0$$

Vamos resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \quad (1) \\ + \quad 2x + y - 2 = 0 \quad (2) \\ \hline 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$(1) \quad \frac{1}{3} - y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

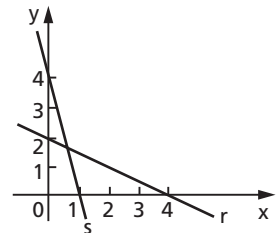
Logo, a interseção de r com s é $P\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.



EXERCÍCIOS

61. Determine a interseção das retas $x - 5y = 14$ e $3x + 2y = -9$.

62. Determine a interseção das retas r e s indicadas no gráfico ao lado.



- 63.** As retas $2x + 3y = 2$ e $x - 3y = 1$ passam pelo ponto (a, b) . Calcule $a + b$.
- 64.** Para que valores de a a interseção da reta $y = a(x + 2)$ com a reta $y = -x + 2$ se dá no primeiro quadrante?
- 65.** As retas suportes dos lados do triângulo ABC são:
 AB: $3x - 4y = 0$, BC: $x + y - 7 = 0$ e CA: $4x - 3y = 0$
 Mostre que ABC é um triângulo isósceles.

Solução

1º) Cada vértice do triângulo é a interseção de duas retas suportes:

$$\begin{aligned} \{A\} = AB \cap CA &\rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \\ \{B\} = AB \cap BC &\rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \\ \{C\} = BC \cap CA &\rightarrow \begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo os três sistemas formados, temos:

$$A = (0, 0), B = (4, 3) \text{ e } C = (3, 4)$$

2º) Calculemos as medidas dos lados AB e AC:

$$\left. \begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - 3)^2} = 5 \\ d_{AC} &= \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{AC}$$

- 66.** Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são as interseções das retas $x + y = 6$, $x = 1$ e $y = 1$.
- 67.** Prove que as retas de equações $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y = 0$ e $3x + 4y - 1 = 0$ concorrem no mesmo ponto P.

Solução

1º) Determinemos P, interseção da 1ª com a 2ª:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{resolvendo}} x = -1 \text{ e } y = +1 \rightarrow P(-1, +1)$$

2º) Provemos que P pertence à 3ª reta:

$$3x_p + 4y_p - 1 = 3(-1) + 4(+1) - 1 = -3 + 4 - 1 = 0$$

68. Demonstre que as retas

$r: x - 2y = 0$, $s: x + 2y - 8 = 0$ e $t: (1 + k)x + 2(1 - k)y - 8 = 0$ são concorrentes no mesmo ponto P , $\forall k \in \mathbb{R}$.

Solução

1º) Determinemos a interseção de r e s :

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{resolvendo}} x = 4 \text{ e } y = 2 \rightarrow P(4, 2)$$

2º) Provemos que $P \in t$:

$$\begin{aligned} (1 + k)x_p + 2(1 - k)y_p - 8 &= (1 + k)4 + 2(1 - k)2 - 8 = \\ &= 4 + 4k + 4 - 4k - 8 = 0, \forall k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

69. Determine a para que as retas de equações $3x - 3y + 2a = 0$, $ax - y = 0$ e $3x + 3y - 4a = 0$ sejam concorrentes no mesmo ponto.

70. Demonstre que as retas de equações $4x - 7y = 0$, $(8k + 2)x - (14k - 1)y - 18 = 0$ e $x - y - 3 = 0$ são concorrentes no mesmo ponto, qualquer que seja k .

71. Determine m de modo que as retas de equações $x - 2y + m = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$ e $x + 2y + 5 = 0$ definam um triângulo.

72. Qual é a equação da reta que passa por $P(3, 1)$, intercepta $r: 3x - y = 0$ em A e $s: x + 5y = 0$ em B tais que P é médio do segmento AB .

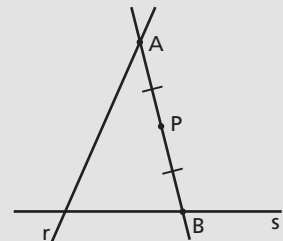
Solução

1º) Se $A \in r$, então as coordenadas de A verificam a equação de r . Fazendo $x_A = a$, decorre:

$$y_A = 3x_A \Rightarrow y_A = 3a \Rightarrow A(a, 3a)$$

2º) Se $B \in s$, então as coordenadas de B verificam a equação de s . Fazendo $y_B = b$, decorre:

$$x_B = -5y_B \Rightarrow x_B = -5b \Rightarrow B(-5b, b)$$



3º) P é ponto médio de AB, então:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{a - 5b}{2} \Rightarrow a - 5b = 6 \quad (1)$$

$$y_P = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{3a + b}{2} \Rightarrow 3a + b = 2 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), temos $a = 1$ e $b = -1$; portanto, $A = (1, 3)$ e $B = (5, -1)$.

4º) A equação da reta AB é:
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 4y - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y - 4 = 0$$

- 73.** Dado o ponto $A(-2, 4)$, determine as coordenadas de dois pontos P e Q, situados respectivamente sobre as retas $y = 3x$ e $y = -x$, de tal modo que A seja o ponto médio do segmento PQ.
- 74.** Dê a equação da reta suporte de um segmento que tem centro $P(3, 0)$ e extremidade em cada uma das retas $2x - y - 2 = 0$ e $x + y + 3 = 0$.
- 75.** Determine o ponto B da bissetriz do 2º e 4º quadrantes de tal forma que o ponto médio do segmento AB pertença à reta r . São dados: $A(5, 4)$ e $r: 2x - y + 3 = 0$.
- 76.** Determine o ponto B da reta s de tal forma que o segmento AB intercepte a reta r no ponto C que o divide na razão $\frac{1}{2}$. São dados: $A(-1, 6)$, $r: 3x - y = 0$ e $s: x - 2y + 4 = 0$.
- 77.** Determine o perímetro do triângulo ABC que verifica as seguintes condições:
- o vértice A pertence ao eixo dos x ;
 - o vértice B pertence ao eixo dos y ;
 - a reta BC tem equação $x - y = 0$;
 - a reta AC tem equação $x + 2y - 3 = 0$.

Solução

$$A(x_A, y_A) \begin{cases} (1) A \in x \Rightarrow y_A = 0 \\ (2) A \in AC \Rightarrow x_A + 2y_A - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3, 0)$$

$$B(x_B, y_B) \begin{cases} (1) B \in y \Rightarrow x_B = 0 \\ (2) B \in BC \Rightarrow x_B - y_B = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, 0)$$

$$C(x_C, y_C) \begin{cases} 1) C \in AC \Rightarrow x_C + 2y_C - 3 = 0 \\ 2) C \in BC \Rightarrow x_C - y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(1, 1)$$

$$\text{perímetro} = d_{AB} + d_{BC} + d_{CA} = \sqrt{3^2 + 0^2} + \sqrt{1^2 + 1^2} + \sqrt{2^2 + 1^2} = \\ = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$\text{Resposta: } 3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}.$$

78. Num triângulo ABC, sabe-se que:

- (1) A pertence ao eixo das abscissas;
- (2) B pertence à bissetriz b_{13} ;
- (3) a equação da reta AC é $x + y - 4 = 0$;
- (4) a equação da reta BC é $2x - 3y + 7 = 0$.

Calcule o perímetro do triângulo ABC.

79. Determine y de modo que $P(2, y)$ seja ponto interior do triângulo definido pelas retas $2x - y - 7 = 0$, $4x - y - 11 = 0$ e $10x - 3y - 25 = 0$.

III. Posições relativas de duas retas

37. Dadas duas retas r e s cujas equações são:

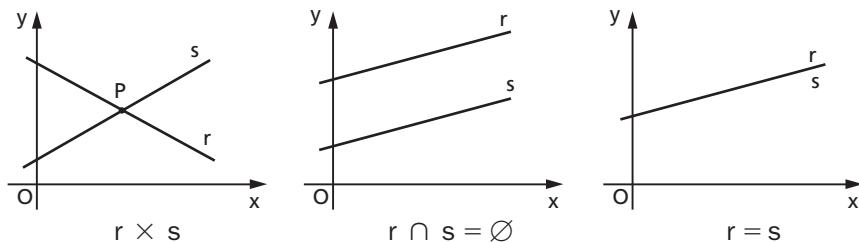
$$(\Sigma) \begin{cases} r: a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ s: a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

elas podem ocupar apenas três posições relativas no plano cartesiano. Essas posições são definidas com base no número de pontos comuns às retas, isto é:

r e s concorrentes \Leftrightarrow um único ponto comum

r e s paralelas e distintas \Leftrightarrow nenhum ponto comum

r e s coincidentes \Leftrightarrow infinitos pontos comuns



Com o símbolo $r \times s$ indicaremos que r e s são concorrentes; com $r \cap s = \emptyset$ indicaremos que r e s são paralelas e distintas; com $r = s$ indicaremos que r e s são coincidentes (ou paralelas coincidentes).

Notemos que $r // s$ significa $r \cap s = \emptyset$ ou $r = s$.

38. Todo ponto comum a r e s é solução do sistema (Σ) . Resolvendo o sistema (Σ) pelo método da adição, temos:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \times b_2 \Rightarrow a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ (2) \times (-b_1) \Rightarrow -a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = -c_2 b_1 \end{array} \right\} \oplus$$

$$\hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)x = (c_1 b_2 - c_2 b_1) \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \times (-a_2) \Rightarrow -a_1 a_2 x - a_2 b_1 y = -a_2 c_1 \\ (2) \times a_1 \Rightarrow a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \end{array} \right\} \oplus$$

$$\hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)y = (a_1 c_2 - a_2 c_1) \quad (4)$$

Fazendo:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$$

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_1$$

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_2$$

o sistema (Σ) fica reduzido a:

$$(\bar{\Sigma}) \begin{cases} D \cdot x = D_1 & (3) \\ D \cdot y = D_2 & (4) \end{cases}$$

cujas discussões são imediatas.

39. São possíveis três casos:

1º caso:

$D \neq 0 \Leftrightarrow (\bar{\Sigma})$ tem uma única solução $\Leftrightarrow r \times s$

2º caso:

$$\left. \begin{array}{l} D = 0 \\ D_1 \text{ (ou } D_2) \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\bar{\Sigma}) \text{ não tem solução} \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$$

3º caso:

$$\left. \begin{array}{l} D = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\bar{\Sigma}) \text{ tem infinitas soluções} \Leftrightarrow r = s$$

Quando $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, temos:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow c_1 b_2 = c_2 b_1 \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1 c_2 = a_2 c_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

e a teoria pode ser simplificada para:

$$\begin{array}{l} r \times s \quad \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \\ r \cap s = \emptyset \quad \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \\ r = s \quad \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \end{array}$$

40. Exemplos:

1º) As retas $r: x + 2y + 3 = 0$ e $s: 2x + 3y + 4 = 0$ são concorrentes, pois

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}, \text{ isto é, } \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$$

2º) As retas $r: x + 2y + 3 = 0$ e $s: 3x + 6y + 1 = 0$ são paralelas e distintas, pois

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}, \text{ isto é, } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \neq \frac{3}{1}$$

3º) As retas $r: x + 2y + 3 = 0$ e $s: 2x + 4y + 6 = 0$ são coincidentes, pois

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \text{ isto é, } \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

4º) As retas $r: x - 2 = 0$ e $s: y + 4 = 0$ são concorrentes, pois

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

5º) As retas $r: x + y + m = 0$ e $s: x + y + 2 = 0$ são paralelas, pois

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \text{ isto é, } \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

para $m = 2$, temos $r = s$ (coincidentes);

para $m \neq 2$ e $m \in \mathbb{R}$, temos $r \cap s = \emptyset$ (paralelas distintas).

EXERCÍCIOS

80. Qual é a posição relativa entre as retas $3x - y - 7 = 0$ e $6x - 2y + 17 = 0$?

81. Determine a posição relativa das seguintes retas, tomadas duas a duas:

r: $5x - 7y + 8 = 0$

s: $-x + 2y - 1 = 0$

t: $5x - 7y + 3 = 0$

u: $-3x + y = 0$

v: $-x + 2y = -1$

z: $10x - 14y = -16$

82. Discuta a posição relativa das retas

$$r: (m - 1)x + my - 1 = 0 \text{ e } s: (1 - m)x + (m + 1)y + 1 = 0$$

Solução

Calculemos D e os valores de m que anulam D :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m - 1 & m \\ 1 - m & m + 1 \end{vmatrix} = (m^2 - 1) - m(1 - m) = 2m^2 - m - 1$$

$$D = 0 \Rightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \text{ou} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

É evidente que, quando $D \neq 0$, as retas são concorrentes. Então:

$$m \in \mathbb{R}, m \neq 1 \text{ e } m \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow r \times s$$

Por outro lado, quando $D = 0$, trocamos m pelos valores críticos $\left(1 \text{ e } -\frac{1}{2}\right)$ nas equações iniciais e verificamos o que ocorre:

$$m = 1 \Rightarrow \begin{cases} r: y - 1 = 0 \\ s: 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \cap s = \emptyset$$

$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} r: -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0 \\ s: \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r = s$$

83. Discuta em função de m e p a posição relativa das retas $r: mx + y - p = 0$ e $s: 3x + y - 7 = 0$.

Solução

$$\text{Calculemos as raízes de } D: D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1$$

É evidente que: $m \in \mathbb{R}, m \neq 1 \Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow r \times s$.

Quando $D = 0$, temos:

$$m = 1 \Rightarrow \begin{cases} r: x + y - p = 0 \\ s: 3x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \text{ então } \begin{cases} \text{se } p = \frac{7}{3}, r = s \\ \text{se } p \neq \frac{7}{3}, r \cap s = \emptyset \end{cases}$$

Resposta: $m \in \mathbb{R}, m \neq 1 \Rightarrow r \times s$

$$m = 1 \text{ e } p = \frac{7}{3} \Rightarrow r = s$$

$$m = 1 \text{ e } p \neq \frac{7}{3} \Rightarrow r \cap s = \emptyset$$

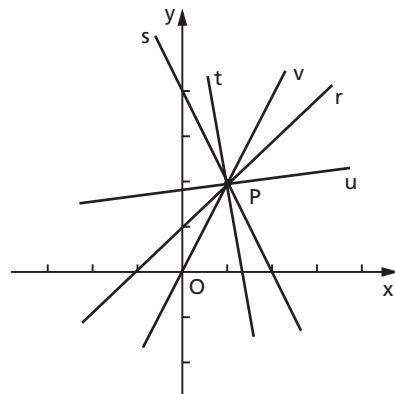
- 84.** Discuta a posição relativa das retas $r: 2mx + my - 5 = 0$ e $s: 3mx + 3y + m = 0$ em função de m .
- 85.** Discuta em função de m a posição relativa das retas $r: 5x + y + 5 = 0$ e $s: 2x + my + 5m = 0$.
- 86.** Para que valores de k as retas $(k + 1)x + 10y - 1 = 0$ e $8x + (k - 1)y + 1 = 0$ são paralelas?
- 87.** Discuta em função de a e b a posição relativa das retas $r: ax - 5y + b = 0$ e $s: 4x - 2y + 7 = 0$.
- 88.** Entre os triângulos OAB com o vértice O na origem e os outros dois vértices A e B , respectivamente, nas retas $y = 1$ e $y = 3$ e alinhados com o ponto $P(7, 0)$, determine aquele para o qual é mínima a soma dos quadrados dos lados.

IV. Feixe de retas concorrentes

41. Exemplo preliminar

Consideremos as retas $r: x - y + 1 = 0$ e $s: 2x + y - 4 = 0$. Essas retas são concorrentes e seu ponto de interseção é $P(1, 2)$.

Vamos agora repetir a mesma experiência três vezes: vamos multiplicar as equações de r e s por números reais (arbitrários e ambos não nulos), somar os resultados obtidos e analisar como é a nova reta em relação a P .



$$\left. \begin{array}{l} (r) \times 2 \Rightarrow 2x - 2y + 2 = 0 \\ (s) \times 3 \Rightarrow 6x + 3y - 12 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(t) \quad \underline{8x + y - 10 = 0}$$

Substituindo P, vem:

$$8(1) + (2) - 10 = 0 \Rightarrow P \in t$$

$$\left. \begin{array}{l} (r) \times 5 \Rightarrow 5x - 5y + 5 = 0 \\ (s) \times (-2) \Rightarrow -4x - 2y + 8 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(u) \quad \underline{x - 7y + 13 = 0}$$

Substituindo P, vem:

$$(1) - 7(2) + 13 = 0 \Rightarrow P \in u$$

$$\left. \begin{array}{l} (r) \times (-4) \Rightarrow -4x + 4y - 4 = 0 \\ (s) \times (-1) \Rightarrow -2x - y + 4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(v) \quad \underline{-6x + 3y = 0}$$

Substituindo P, vem: $-6(1) + 3(2) = 0 \Rightarrow P \in v$.

As três novas retas obtidas também passam por P. Será que isso foi por acaso, isto é, será que isso aconteceu por causa dos multiplicadores escolhidos? Ou será que a nova reta passará por P, quaisquer que sejam os multiplicadores? A teoria seguinte vai explicar.

42. Definição

Feixe de retas concorrentes é um conjunto de retas coplanares, concorrentes num único ponto $P(x_0, y_0)$.

Um feixe de concorrentes fica definido por seu centro $P(x_0, y_0)$ ou por duas de suas retas.

Consideremos o feixe definido pelas retas:

$$\left. \begin{array}{l} r: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ s: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array} \right\} \text{concorrentes em } P(x_0, y_0)$$

Temos:

$$P \in r \Rightarrow a_1 \cdot x_0 + b_1 \cdot y_0 + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$P \in s \Rightarrow a_2 \cdot x_0 + b_2 \cdot y_0 + c_2 = 0 \quad (2)$$

Consideremos a equação:

$$k_1 \cdot (a_1x + b_1y + c_1) + k_2 \cdot (a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad (3)$$

em que $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_2 \in \mathbb{R}$ e $k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$.

Essa equação representa uma reta, pois, desenvolvendo e ordenando, temos:

$$(k_1a_1 + k_2a_2)x + (k_1b_1 + k_2b_2)y + (k_1c_1 + k_2c_2) = 0$$

O ponto $P(x_0, y_0)$ pertence a essa reta, pois:

$$k_1 \underbrace{(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}_{\text{veja (1)}} + k_2 \underbrace{(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}_{\text{veja (2)}} = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0, \quad \forall k_1, \forall k_2 \in \mathbb{R}$$

Isso significa que a equação (3), para cada valor atribuído a k_1 e k_2 , representa uma reta t passando por P . Variando k_1 e k_2 , essa reta t se "movimenta" descrevendo o feixe de centro P . A equação (3) representa, pois, o feixe de retas concorrentes em P .

43. Exemplos:

1º) As retas $r: x - y + 1 = 0$ e $s: 2x + y - 4 = 0$ definem um feixe de retas concorrentes cuja equação é

$$k_1(x - y + 1) + k_2(2x + y - 4) = 0$$

em que k_1 e k_2 são reais e não nulos simultaneamente.

2º) O feixe de concorrentes cuja equação é

$$k_1(2x - 3y) + k_2(x + 3y - 9) = 0$$

tem centro no ponto de interseção das retas $r: 2x - 3y = 0$ e $s: x + 3y - 9 = 0$, isto é, $P(3, 2)$.

Esse ponto pode também ser determinado, achando a interseção de duas retas quaisquer do feixe:

$$k_1 = 1 \quad \text{e} \quad k_2 = 2 \Rightarrow (2x - 3y) + (2x + 6y - 18) = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 18 = 0$$

$$k_1 = 2 \quad \text{e} \quad k_2 = 3 \Rightarrow (4x - 6y) + (3x + 9y - 27) = 0 \Rightarrow 7x + 3y - 27 = 0$$

e, resolvendo o último sistema, temos $x = 3$ e $y = 2$.

3º) É comum apresentar-se a equação de um feixe em função de um só parâmetro (k) em vez de dois (k_1 e k_2). No exemplo anterior, supondo $k_1 \neq 0$ e dividindo por k_1 , temos:

$$(2x - 3y) + \frac{k_2}{k_1} \cdot (x + 3y - 9) = 0$$

e, fazendo $\frac{k_2}{k_1} = k$, resulta:

$$(2x - 3y) + k \cdot (x + 3y - 9) = 0$$

Notemos, porém, que esta última equação exclui uma reta do feixe: a reta $x + 3y - 9 = 0$, correspondente a $k_1 = 0$.

EXERCÍCIOS

- 89.** O que representa a equação $-2x + y + 8 + t(3x - 2y - 13) = 0$, sendo t uma variável real?
- 90.** Determine o centro do feixe de retas concorrentes cuja equação é:
 $k_1(3x + 3y + 1) + k_2(18x + 21y + 4) = 0$
- 91.** Determine a equação da reta que pertence ao feixe definido pela equação:
 $(2x + 3y - 15) + k \cdot (5x - 2y + 29) = 0$
 e que passa pela origem do sistema cartesiano.
- 92.** Determine a equação da reta comum aos feixes:
 (1) $(x + y + 1) + m \cdot (x - y - 3) = 0$
 (2) $(2x + 3y - 5) + p \cdot (4x + y - 5) = 0$

Solução

1º) Determinemos o centro do feixe (1), achando a interseção de duas retas:

$$m = 1 \Rightarrow (x + y + 1) + 1 \cdot (x - y - 3) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$m = 0 \Rightarrow (x + y + 1) + 0 \cdot (x - y - 3) = 0 \Rightarrow x + y + 1 = 0$$

Resolvendo o sistema, vem $x = 1$ e $y = -2$.

2º) Analogamente para o feixe (2):

$$\left. \begin{array}{l} p = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 5 = 0 \\ p = -3 \Rightarrow -10x + 10 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1$$

3º) A reta comum aos dois feixes é aquela definida pelos pontos (1, -2) e (1, 1):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Resposta: $x = 1$.

93. São dados os feixes de retas concorrentes:

$$3x - 2y - 6 + k(x + 2y - 2) = 0$$

$$3x - 3y + 4 + \ell(2x + 3y + 1) = 0$$

Obtenha a equação da reta comum aos dois feixes.

94. Calcule o valor de m para que os três feixes definidos pelas equações

$$2x + 3y - 8 + k_1(mx - 3y + 5) = 0$$

$$4x + 3y + 25 + k_2(2x - 3y - 1) = 0$$

$$mx + my + 1 + k_3(-mx - 4y - 1) = 0$$

tenham uma reta comum.

95. Demonstre que as retas de equações

$$(m + 2)x - my - 4 + m = 0$$

em que m é uma variável real passam por um mesmo ponto.

Solução 1

A equação dada representa um conjunto de retas, pois m é variável. Tomemos duas retas particulares do conjunto:

$$\left. \begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \\ m = -2 \Rightarrow 2y - 6 = 0 \end{array} \right\}$$

A interseção dessas retas é o ponto $P(2, 3)$. Provemos que P pertence a qualquer reta do conjunto, substituindo-o na equação dada:

$$\begin{aligned} (m + 2) \cdot x_p - m \cdot y_p - 4 + m &= (m + 2) \cdot 2 - m \cdot 3 - 4 + m = \\ &= 2m + 4 - 3m - 4 + m = 0, \forall m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Solução 2

Desenvolvendo a equação dada, temos: $mx + 2x - my - 4 + m = 0$, isto é, $(x - y + 1)m + (2x - 4) = 0$, que é a equação de um feixe de concorrentes.

Solução 3

Temos:

$$mx + 2x - my - 4 + m = 0$$

$$(x - y + 1)m + (2x - 4) = 0$$

impondo que o polinômio do 1º membro, na variável m , seja idêntico a zero, temos:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{resolvendo}} x = 2 \text{ e } y = 3$$

Portanto o ponto $P(2, 3)$ anula o 1º membro $\forall m \in \mathbb{R}$, isto é, ele pertence a todas as retas cujas equações são obtidas atribuindo valores a m . Logo, todas essas retas passam pelo mesmo ponto P .

- 96.** Demonstre que as retas de equações $(2 + m)x + (3 + 2m)y - 1 = 0$, em que m é uma variável real, passam por um mesmo ponto.
- 97.** Prove que as retas de equações $(m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 2)y - 3m + 2 = 0$, em que m é uma variável real, passam pelo mesmo ponto.
- 98.** Dadas as retas $r_m: (2m + 1)x - (3m - 1)y + 3m - 1 = 0$, em que m é um número real qualquer, responda:
- As retas passam por um ponto fixo?
 - Existe m para o qual r_m coincide com um dos eixos?
- Justifique as respostas.

V. Feixe de retas paralelas

44. Exemplo preliminar

Como poderíamos construir a equação de uma reta paralela a $r: 3x + 4y + 1 = 0$?

Uma paralela a r deve ter coeficientes a e b respectivamente proporcionais a 3 e 4; em particular, se $a = 3$ e $b = 4$, fica garantido o paralelismo. Assim, são paralelas a r as retas: $3x + 4y = 0$, $3x + 4y + 500 = 0$, $3x + 4y - \sqrt{2} = 0$, $3x + 4y - \frac{5}{3} = 0$, $6x + 8y + 1 = 0$, etc.

Como vemos, desde que $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$, o termo independente pode ser qualquer número real que o paralelismo já está garantido.

45. Definição

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares, todas paralelas a uma reta dada (logo paralelas entre si).

Um feixe de paralelas está determinado quando conhecemos uma de suas retas (ou sua direção).

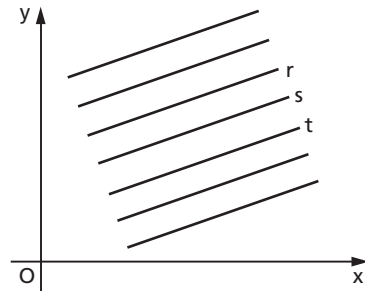
Consideremos o feixe de retas paralelas determinado pela reta r de equação geral $ax + by + c = 0$.

Consideremos a equação:

$$ax + by + c' = 0 \quad (c' \in \mathbb{R})$$

Para cada valor atribuído a c' , essa equação representa uma reta s paralela a r , pois:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$



Variando c' , essa reta s se “movimenta” descrevendo o feixe de paralelas a r . A equação $ax + by + c' = 0$ representa, pois, o feixe de retas paralelas à reta r .

46. Exemplos:

1º) A equação do feixe de paralelas à reta $r: 3x + 4y - 2 = 0$ é $3x + 4y + c' = 0$, em que $c' \in \mathbb{R}$.

Pertencem a esse feixe, por exemplo, as retas

$$s: 3x + 4y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad t: 3x + 4y - 5 = 0$$

2º) A equação do feixe de paralelas à reta $r: 5x + 11y - 51 = 0$ é $5x + 11y + c' = 0$, em que $c' \in \mathbb{R}$.

Em particular, a paralela a r passando por $P(2, -1)$ é tal que:

$$5(2) + 11(-1) + c' = 0 \Rightarrow c' = 1$$

e, portanto, sua equação é $5x + 11y + 1 = 0$.

EXERCÍCIOS

- 99.** Dada a equação da reta $r: 7x + 3y + \sqrt{2} = 0$, obtenha:
- a equação do feixe de paralelas a r ;
 - a equação da paralela a r pela origem;
 - a equação da paralela a r por $P(9, -10)$.

Solução

- Para construir a equação do feixe basta copiar a e b e deixar "livre" o termo independente: $7x + 3y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$.
- A reta do feixe que passa pela origem apresenta $c = 0$, portanto sua equação é $7x + 3y = 0$.
- O ponto P deve verificar a equação da paralela. Logo:
 $7x_p + 3y_p + c = 7(9) + 3(-10) + c = 0 \Rightarrow c = -33$
 e, portanto, sua equação é $7x + 3y - 33 = 0$.

- 100.** Determine a equação do feixe de paralelas à reta $2x - 7y - 4 = 0$.
- 101.** Determine a reta do feixe $k_1 \cdot (x - 2y + 3) + k_2 \cdot (2x + y - 2) = 0$, que é paralela à reta $r: 7x + y + 4 = 0$.
- 102.** Dois lados de um paralelogramo acham-se sobre as retas $r: 3x - 4y + 12 = 0$ e $s: 5x + 6y + 30 = 0$. Obtenha as equações das retas suportes dos outros dois lados, sabendo que um dos vértices do paralelogramo é o ponto $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$.
- 103.** Demonstre que os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ constituem um feixe de retas paralelas.
- 104.** Que figura constituem os pontos do plano xy cujas coordenadas satisfazem a equação $\operatorname{sen}(x - y) = 0$?

VI. Formas da equação da reta

47. Forma geral

Vimos no item 27 que, dada uma reta r , podemos determinar pelo menos uma equação do tipo

$$ax + by + c = 0$$

denominada equação geral da reta r , a qual é satisfeita por todos os pontos $P(x, y)$ pertencentes à reta r .

48. Forma reduzida

Dada a equação geral da reta r , $ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$, temos:

$$by = -ax - c \Rightarrow y = \underbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}_m x + \underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_q \Rightarrow y = mx + q$$

Esta última equação, que expressa y em função de x , é denominada **equação reduzida** da reta r .

Conforme veremos, m é o coeficiente angular da reta (item 63) e q é a medida do segmento que r define no eixo Oy (item 52).

49. Exemplo:

Se uma reta r passa por $A(0, 3)$ e $B(-1, 0)$, qual é sua equação reduzida?

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{3x - y + 3 = 0}_{\text{equação geral}} \Rightarrow \underbrace{y = 3x + 3}_{\text{equação reduzida}}$$

50. Forma segmentária

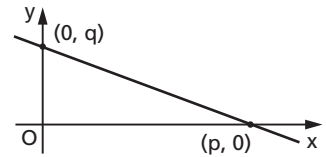
Consideremos uma reta r que intercepta os eixos cartesianos nos pontos $Q(0, q)$ e $P(p, 0)$, distintos.

A equação dessa reta é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qx + py - pq = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qx + py = pq \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$



denominada **equação segmentária**.

51. Exemplo:

Obter a equação geral da reta que intercepta os eixos em $P(2, 0)$ e $Q(0, -3)$.

A equação segmentária é $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ e a equação geral é obtida eliminando os denominadores: $3x - 2y - 6 = 0$.

52. Interseções com os eixos

Consideremos uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$ para que a reta corte os eixos em pontos distintos $P(p, 0)$ e $Q(0, q)$. Determinemos p e q :

$$P \in r \Rightarrow a \cdot p + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{p = -\frac{c}{a}}$$

$$Q \in r \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot q + c = 0 \Rightarrow \boxed{q = -\frac{c}{b}}$$

53. Obtenção da equação segmentária a partir da equação geral

A equação segmentária é obtida a partir da equação geral da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} ax + by + c = 0 &\Rightarrow ax + by = -c \Rightarrow -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1 &\Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \end{aligned}$$

54. Exemplo:

Obter a equação segmentária da reta (r) $7x + 11y + 3 = 0$.

$$7x + 11y = -3 \Rightarrow -\frac{7}{3}x - \frac{11}{3}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{7}{3}} + \frac{y}{-\frac{11}{3}} = 1$$

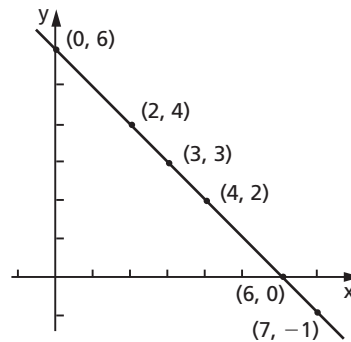
55. Forma paramétrica

As equações geral, reduzida e segmentária relacionam diretamente entre si as coordenadas (x, y) de um ponto genérico da reta. É possível, entretanto, fixar a lei a ser obedecida pelos pontos da reta dando as coordenadas x e y de cada ponto da reta em função de uma terceira variável t , chamada **parâmetro**.

Por exemplo, se os pontos de uma reta r satisfazem as leis $x = 3t + 4$ e $y = 2 - 3t$, como é o gráfico de r e qual é sua equação geral?

Um modo de solucionar essas questões é construir uma tabela dando valores a t e calculando, para cada valor de t , as coordenadas x e y de um ponto da reta.

t	x	y	ponto
$\frac{2}{3}$	6	0	(6, 0)
1	7	-1	(7, -1)
0	4	2	(4, 2)
$-\frac{1}{3}$	3	3	(3, 3)
$-\frac{2}{3}$	2	4	(2, 4)
$-\frac{4}{3}$	0	6	(0, 6)



Colocados dois desses pontos no plano, já é possível desenhar a reta r . A equação geral de r pode ser obtida tomando dois pontos e aplicando a condição de alinhamento. Por exemplo, usando $(4, 2)$ e $(3, 3)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y + 6 = 0 \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

Um outro modo de obter a equação geral é isolar t em cada uma das equações dadas e igualar as expressões obtidas. Vejamos:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3t + 4 \Rightarrow t = \frac{x - 4}{3} \\ y = 2 - 3t \Rightarrow t = \frac{2 - y}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x - 4}{3} = \frac{2 - y}{3}$$

então $x - 4 = 2 - y$ e daí $x + y - 6 = 0$.

As equações que dão as coordenadas (x, y) de um ponto qualquer da reta em função de uma terceira variável t :

$$x = f_1(t) \text{ e } y = f_2(t)$$

são chamadas **equações paramétricas** da reta.

56. Como norma geral, no caso em que é dada a equação de uma reta na forma (A) e pede-se a forma (B), devemos usar o esquema

(A) \rightarrow equação geral \rightarrow (B)

isto é, devemos começar obtendo a equação geral.

57. Exemplo:

Obter a equação segmentária da reta cujas equações paramétricas são

$$x = 3t + 1 \text{ e } y = 4t + 5$$

$$\text{Temos: } \left. \begin{array}{l} t = \frac{x - 1}{3} \\ t = \frac{y - 5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 5}{4} \Rightarrow \underbrace{4x - 3y + 11 = 0}_{\text{geral}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 3y = -11 \Rightarrow -\frac{4}{11}x + \frac{3}{11}y = 1 \Rightarrow \underbrace{-\frac{11}{4}x + \frac{11}{3}y = 11}_{\text{segmentária}}$$

EXERCÍCIOS

105. Dada a reta de equação

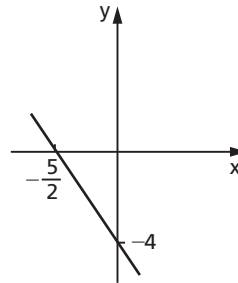
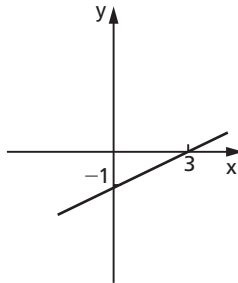
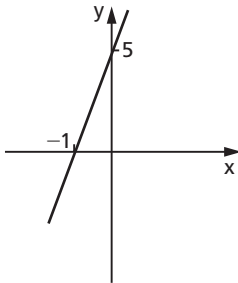
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dê sua expressão sob forma reduzida.

106. Determine a equação reduzida da reta AB quando $A(2, 7)$ e $B(-1, 5)$.

107. Dados $A(3, 10)$ e $B(-6, -5)$, determine a equação segmentária da reta AB.

108. Determine a equação geral das retas abaixo:



109. Dadas as equações paramétricas de uma reta r : $x = 10t - 2$ e $y = 3t$, obtenha sua equação segmentária.

110. Ache as coordenadas do ponto de interseção das retas

$$r \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s \begin{cases} x = 2u - 2 \\ y = 7 + u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

111. Qual é a posição relativa das retas r : $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$ e s : $x = t - 1$, $y = 3t - 2$?

112. Obtenha uma reta paralela a r : $2x + y = 0$ e que define com os eixos um triângulo cuja área é 16.

Solução

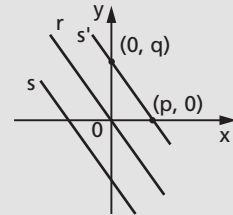
A equação da paralela tem a forma $2x + y + c = 0$. Como a área é 16, temos:

$$S = \frac{|p| \cdot |q|}{2} = \frac{\left|-\frac{c}{2}\right| \cdot \left|-\frac{c}{1}\right|}{2} =$$

$$= \frac{c^2}{4} = 16$$

Então $c^2 = 64 \Rightarrow c = \pm 8$.

Resposta: $2x + y + 8 = 0$ ou $2x + y - 8 = 0$.



- 113.** Prove que, se uma reta se desloca de modo que a soma das medidas p e q dos segmentos determinados por ela sobre os eixos seja igual ao produto dessas medidas, então a reta passa por um ponto fixo P do plano cartesiano.

Solução

A reta tem equação segmentária

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \text{ em que } p \text{ e } q \text{ são variáveis,}$$

mas $p + q = pq$, por hipótese.

Vamos eliminar o parâmetro q da equação da reta, usando a hipótese:

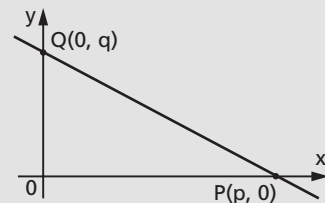
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{\frac{p}{p-1}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{(p-1)y}{p} = 1 \Rightarrow x + (p-1)y = p \quad (1)$$

Dando a p dois valores arbitrários e diferentes de 0 e 1, temos:

$$p = 2 \Rightarrow x + y = 2 \quad (r) \quad p = 3 \Rightarrow x + 2y = 3 \quad (s)$$

As retas r e s , concorrentes em $(1, 1)$, são elementos do conjunto de retas dado por (1), que é um feixe de concorrentes em $(1, 1)$, pois

$$(1) + (p-1)(1) = p, \quad \forall p \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$



- 114.** Prove que, se uma reta se desloca de modo que a soma dos inversos das medidas dos segmentos por ela determinados sobre os eixos seja $\frac{1}{k}$ (constante), então a reta passa por um ponto fixo P do plano cartesiano.

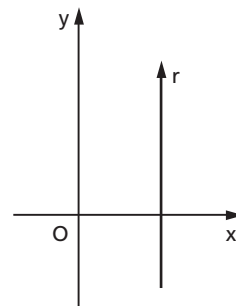
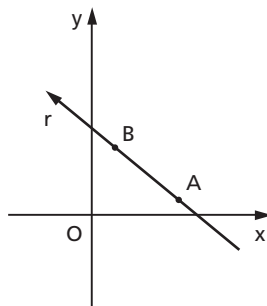
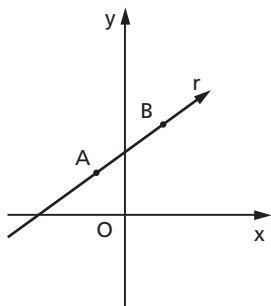
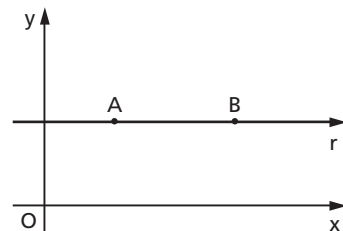
CAPÍTULO III

Teoria angular

I. Coeficiente angular

58. Fixemos em uma reta dada r dois pontos distintos A e B . Se $y_A = y_B$, r é paralela ao eixo x ; nesse caso, adotaremos como sentido positivo da reta r o sentido positivo do eixo x .

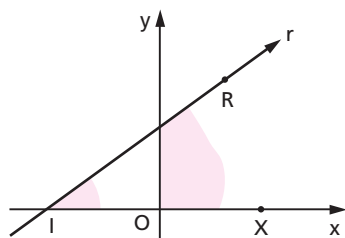
Se $y_A \neq y_B$, então $y_A > y_B$ ou $y_B > y_A$; nesse caso, adotaremos como sentido positivo da reta r aquele em que se parte do ponto de menor ordenada (A ou B) e se chega ao ponto de maior ordenada (B ou A , respectivamente).



59. Ângulo que uma reta r forma com o eixo x é o ângulo $\hat{r}x$, assim definido:

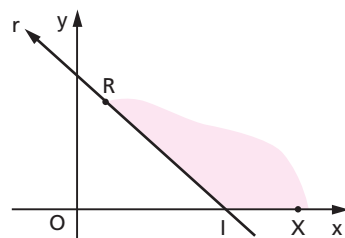
se $r \parallel x$, $\hat{r}x$ é nulo;

se $r \not\parallel x$, $\hat{r}x$ é o menor ângulo formado pelas semirretas \vec{IX} e \vec{IR} , em que I é o ponto de interseção de r com x .



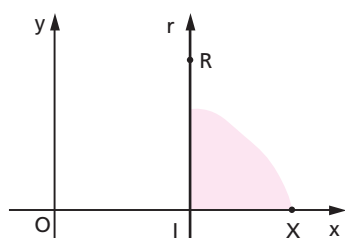
$\hat{r}x$ agudo

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$



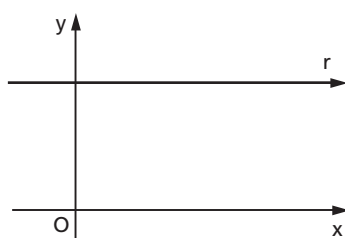
$\hat{r}x$ obtuso

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$



$\hat{r}x$ reto

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$



$\hat{r}x$ nulo

$$\alpha = 0$$

De acordo com essa definição, a medida do ângulo $\hat{r}x$, que chamaremos α , na unidade radiano, é tal que $0 \leq \alpha < \pi$.

60. Coeficiente angular ou declive de uma reta r não perpendicular ao eixo das abscissas (*) é o número real m tal que:

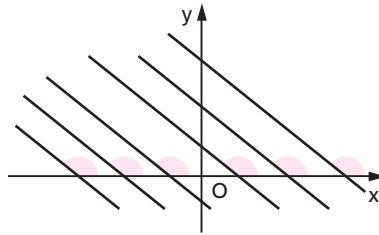
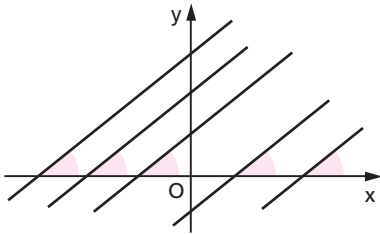
$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

(*) Daqui para a frente, em vez de "perpendicular ao eixo das abscissas", diremos só que r é "vertical".

São evidentes as seguintes propriedades do coeficiente angular:

- 1ª) se \hat{r} é agudo, então m é positivo;
- 2ª) se \hat{r} é obtuso, então m é negativo;
- 3ª) se \hat{r} é nulo, então m é nulo;
- 4ª) se \hat{r} é reto, então não se define m ;

5ª) dar o declive de uma reta equivale a dar a direção da reta; assim, quando dizemos que uma reta r tem declive $m = 1$, r forma com o eixo Ox um ângulo de 45° ; portanto, r é qualquer reta do feixe de paralelas da figura. Analogamente, se o declive de r é $m = -1$, então $\hat{r} = 135^\circ$; portanto r pode ser qualquer reta do outro feixe de paralelas.

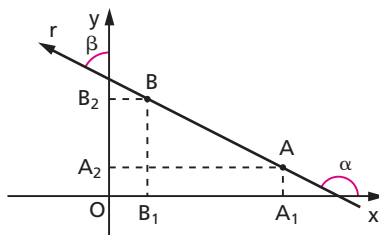
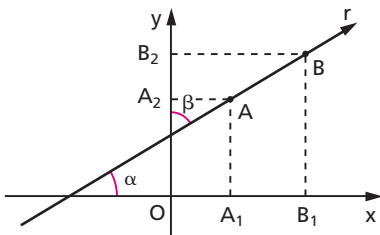


II. Cálculo de m

61. Só é possível calcular o coeficiente angular de uma reta quando dela se conhece:

- 1º) dois pontos distintos;
ou
- 2º) a equação geral;
ou
- 3º) a direção (por exemplo, sabe-se que a reta é paralela a uma reta dada).

62. Vamos calcular o coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos conhecidos: $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.



Projetemos \overline{AB} sobre os eixos do sistema cartesiano e apliquemos a Trigonometria:

$$\text{sobre } x: \overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{sobre } y: \overline{A_2B_2} = \overline{AB} \cdot \cos \beta = \overline{AB} \cdot \cos (90^\circ - \alpha) = \overline{AB} \cdot \sin \alpha$$

Temos:

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin \alpha}{\overline{AB} \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = m$$

mas $\overline{A_2B_2} = y_2 - y_1$ e $\overline{A_1B_1} = x_2 - x_1$. Logo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

Preferimos a notação

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0)$$

em que Δx e Δy são, respectivamente, a diferença de abscissas e a diferença de ordenadas entre A e B, calculadas no mesmo sentido.

Assim, por exemplo, o declive da reta que passa por A(-5, 4) e B(1, 10) é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(10) - (4)}{(1) - (-5)} = \frac{(4) - (10)}{(-5) - (1)} = 1$$

63. Vamos calcular o coeficiente angular de uma reta cuja equação geral é conhecida: $ax + by + c = 0$.

Lembremos que, dados $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pertencentes à reta, a equação geral é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

isto é,

$$\underbrace{(y_1 - y_2)}_a \cdot x + \underbrace{(x_2 - x_1)}_b \cdot y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

Como vimos, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e portanto resulta:

$$m = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

Assim, por exemplo, o coeficiente angular da reta $r: \sqrt{3}x - 3y + c = 0$ é:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Notemos que o termo independente c não tem influência no cálculo de m , isto é, retas como $\sqrt{3}x - 3y + 1 = 0$ e $\sqrt{3}x - 3y + 500 = 0$ têm o mesmo declive.

64. No item 48 do capítulo II demonstramos que a equação reduzida de uma reta é $y = mx + q$ e, portanto, sempre que uma reta tiver equação reduzida (isto é, $b \neq 0$), estaremos expressando y em função de x e o coeficiente de x é m .

65. Exemplo:

Dada a equação geral $2x - 7y + 1 = 0$, deduzimos que a equação reduzida é $y = \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$, logo $m = \frac{2}{7}$.

EXERCÍCIOS

115. Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(0, 3)$ e $B(3, 0)$.

116. Qual é o coeficiente angular da reta $5x + 3y + 13 = 0$?

117. Calcule o coeficiente angular das retas:

a) $x - 2y + 6 = 0$

f) $x = 9$

b) $2x + 5 = 2y$

g) $3y = -5$

c) $y = -4x + 7$

h) $4x - 5y = 0$

d) $\frac{x}{7} + \frac{y}{-4} = 1$

i) $\mu(2x + 7y - 3) + \lambda(x + y - 2) = 0$

j) $x \cdot \sin 60^\circ + y \cdot \cos 60^\circ = 10$

e) $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

k) contém $\begin{cases} A(a, b) \\ B(b, a) \end{cases}$

118. Considere os pontos $A(-5, -3)$, $B(-2, 12)$ e $C(4, 6)$ e o triângulo ABC . Determine o coeficiente angular da reta que contém a mediana obtida a partir do vértice A .

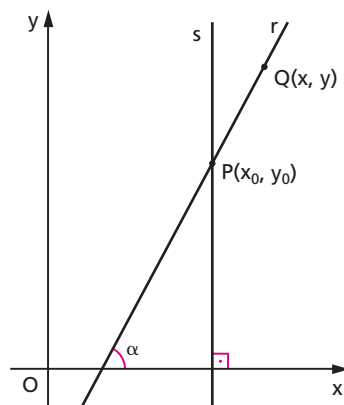
III. Equação de uma reta passando por $P(x_0, y_0)$

66. Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto conhecido. Se quisermos obter a equação de uma reta que, entre outras propriedades, tem a propriedade de passar por P , podem ocorrer dois casos:

1º) essa reta r não é perpendicular ao eixo dos x ; portanto, existe o coeficiente angular de r , que é

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

em que (x, y) representa um ponto genérico Q , pertencente à reta.



Neste caso, a equação da reta é:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (1)$$

2º) essa reta s é perpendicular ao eixo dos x ; portanto sua equação é:

$$x = x_0 \quad (2)$$

67. Exemplo:

Conduzir por $P(5, 4)$ retas que formam com o eixo dos x os seguintes ângulos:

a) 45° ; b) 90° ; c) 135° ; d) 60° ; e) $\text{arc tg}\left(-\frac{4}{3}\right)$.

a) $y - 4 = 1(x - 5)$

isto é: $x - y - 1 = 0$

b) $x - 5 = 0$

c) $y - 4 = -1(x - 5)$

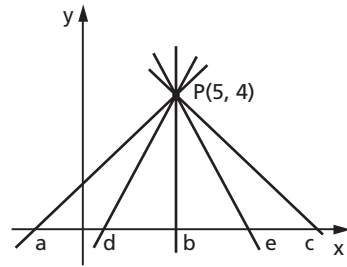
isto é: $x + y - 9 = 0$

d) $y - 4 = \sqrt{3}(x - 5)$

isto é: $\sqrt{3}x - y + 4 - 5\sqrt{3} = 0$

e) $y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 5)$

isto é: $4x + 3y - 32 = 0$



68. Se fizermos, na equação (1), m assumir todos os valores reais, para cada m teremos a equação de uma reta passando por P e formando com o eixo dos x um ângulo cuja tangente é m ; assim, a equação (1) representa um conjunto de infinitas retas que passam por P , contidas no plano cartesiano. Só não pertence a esse conjunto a retas s , que não tem coeficiente angular. O feixe de retas concorrentes em P é:

$$\{r \subset \alpha \mid P \in r \text{ e } \exists m_r\} \cup \{s \subset \alpha \mid P \in s \text{ e } \nexists m_s\}$$

Portanto a equação do feixe é:

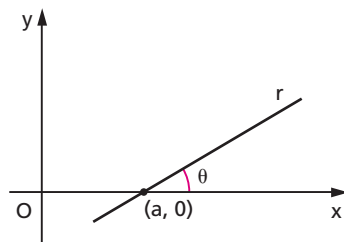
$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ ou } x = x_0$$

(m variável real)

EXERCÍCIOS

119. Dê a equação geral da reta que passa pelo ponto $P(2, -5)$ e tem coeficiente angular $-\frac{4}{5}$.

- 120.** Dê a equação da reta r indicada na figura ao lado, supondo conhecidos a e θ .



- 121.** Determine a equação da reta que passa por P e tem inclinação α em relação ao eixo dos x nos casos seguintes:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| a) $P(-2, 4)$ e $\alpha = 45^\circ$ | d) $P(2, 5)$ e $\alpha = \arcsen \frac{12}{13}$ |
| b) $P(-1, 8)$ e $\alpha = 60^\circ$ | e) $P(3, -1)$ e $\alpha = 0^\circ$ |
| c) $P(3, -5)$ e $\alpha = 90^\circ$ | e) $P(2, -2)$ e $\alpha = \arctg 3$ |

- 122.** Qual é a equação do feixe de retas concorrentes em $P(-3, 2)$?

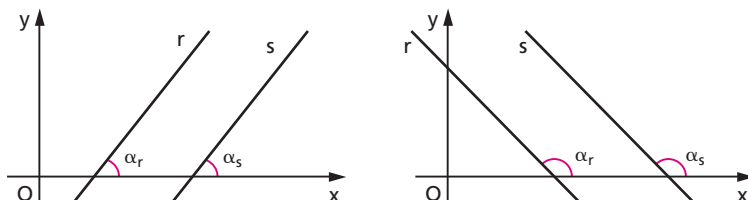
IV. Condição de paralelismo

69. Teorema

"Duas retas r e s , não verticais, são paralelas entre si se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais."

$$r // s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

Demonstração:



$$r // s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha_r = \operatorname{tg} \alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

70. Observação

Nos itens 37, 38 e 39 do capítulo II vimos que: "duas retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ são paralelas (distintas ou não) se, e somente se,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0".$$

Nos casos em que r e s não são verticais, vamos provar que as condições de paralelismo $D = 0$ e $m_r = m_s$ são equivalentes. Lembrando que $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, temos:

$$D = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow m_r = m_s$$

Nos casos em que $r \parallel s \parallel Oy$ só vale a condição $D = 0$, pois não existem os coeficientes angulares m_r e m_s .

71. Exemplos:

1º) $r: 3x + 6y - 1 = 0$ e $s: 2x + 4y + 7 = 0$ são paralelas, pois:

$$\begin{cases} m_r = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \\ m_s = -\frac{a_2}{b_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m_r = m_s$$

e também:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

2º) $r: 500x - 1 = 0$ e $s: 71x - 13 = 0$ são paralelas, pois:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 500 & 0 \\ 71 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

embora $\nexists m_r$ e $\nexists m_s$.

72. Construção da paralela

Obter uma reta s que passa por um ponto P (dado) e é paralela a uma reta r (dada, não vertical).

Por exemplo, vamos resolver este problema quando r tem equação

$$5x + 7y + 1 = 0 \text{ e } P = (6, -5):$$

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{7}$$

$$s \parallel r \Rightarrow m_s = m_r = -\frac{5}{7}$$

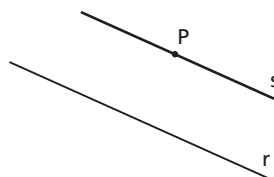
Como s passa por P , vamos aplicar a teoria do item 66; a equação de s é:

$$y - (-5) = -\frac{5}{7}(x - 6)$$

$$7(y + 5) = -5(x - 6)$$

$$7y + 35 = -5x + 30$$

$$5x + 7y + 5 = 0$$



73. Vimos no item 48 que a equação reduzida de uma reta r é $y = mx + q$ em que

$m = -\frac{a}{b}$ é o coeficiente angular de r e $q = -\frac{c}{b}$ é a ordenada do ponto onde r corta o eixo Oy .

Supondo m constante e q variável, a equação reduzida passa a representar um conjunto de retas paralelas (mesmo declive), isto é, um feixe de retas paralelas.

Assim, por exemplo, $y = 3x + q$ é a equação do feixe de retas paralelas com coeficiente angular 3.

EXERCÍCIOS

123. A reta $y = mx - 5$ é paralela à reta $2y = -3x + 1$. Determine m .

124. Qual é o valor de r para que a reta de equação $x - 5y + 20 = 0$ seja paralela à reta determinada pelos pontos $M(r, s)$ e $N(2, 1)$?

125. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $A(1, 1)$ e é paralela à reta $y = -2x + 1$?

- 126.** Determine a equação da reta paralela à reta determinada pelos pontos de coordenadas (2, 3) e (1, -4) passando pela origem.
- 127.** Determine a equação da reta que passa pelo ponto (3, 4) e é paralela à bissetriz do 2º quadrante.
- 128.** Determine a equação da reta s que contém $P(-5, +4)$ e é paralela à reta r cujas equações paramétricas são $x = 3t$ e $y = 2 - 5t$.

Solução

1º) Coeficiente angular de r

$$t = \frac{x}{3} = \frac{2-y}{5} \Rightarrow 5x = 6 - 3y \Rightarrow 5x + 3y - 6 = 0$$

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{3}$$

2º) Equação de s

$$s \parallel r \Rightarrow m_s = m_r = -\frac{5}{3}$$

$$P \in s \Rightarrow y - 4 = m_s(x + 5) \Rightarrow y - 4 = -\frac{5}{3}(x + 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y - 12 = -5x - 25 \Rightarrow 5x + 3y + 13 = 0$$

Resposta: $s: 5x + 3y + 13 = 0$.

- 129.** Determine a equação da reta que passa por $P(-3, 7)$ e é paralela à reta definida por $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{7}\right)$ e $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$.
- 130.** Determine a equação da reta u que passa pelo ponto de interseção das retas r e t e é paralela à reta s . Dados:
- $$r: \frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1, \quad s: x = 2t - 1 \text{ e } y = 2 + 3t \text{ e } t: 2x - y - 4 = 0$$
- 131.** Os pontos M , N , P e Q são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Sendo $M(3, 5)$, $N(1, 2)$ e $P(5, 1)$, determine o vértice Q .
- 132.** Dois lados de um paralelogramo $ABCD$ estão contidos nas retas $r: 2x + y - 3 = 0$ e $s: x + y - 2 = 0$. Dado o vértice $A(-3, 4)$, determine B , C e D .
- 133.** Qual é a figura formada pelos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a equação $|x - y| = 1$?

V. Condição de perpendicularismo

74. Teorema

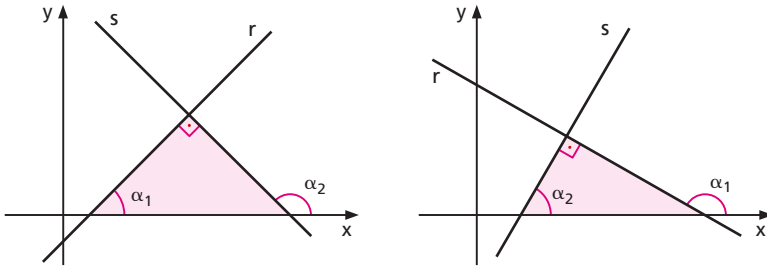
"Duas retas r e s , não verticais, são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1 ."

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Demonstração:

1ª parte:

$$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$



Conforme o caso, das figuras acima tiramos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha_1 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}$$

(o ângulo externo é igual à soma dos internos não adjacentes)
e então:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{cotg} (-\alpha_1) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = -1 \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

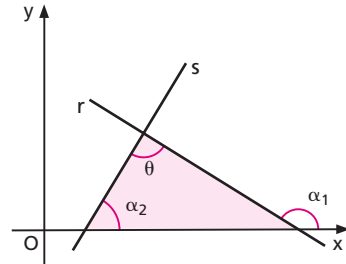
2ª parte:

$$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$$

$$1^\circ) m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$$

isto é, $m_r \neq m_s$, portanto as retas r e s são concorrentes e formam um ângulo θ tal que:

$$\alpha_1 = \theta + \alpha_2 \quad (1)$$



2º) Temos:

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = -\operatorname{cotg} \alpha_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2 \right) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha_2 \quad (2)$$

Comparando (1) e (2): $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r \perp s$

75. Exemplos:

1º) $r: 3x + 2y - 1 = 0$ e $s: 4x - 6y + 3 = 0$ são perpendiculares, pois:

$$\left. \begin{aligned} m_r &= -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{3}{2} \\ m_s &= -\frac{a_2}{b_2} = +\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

2º) $r: 3x - 11y + 4 = 0$ e $s: 11x + 3y - \sqrt{2} = 0$ são perpendiculares, pois:

$$\left. \begin{aligned} m_r &= -\frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{11} \\ m_s &= -\frac{a_2}{b_2} = -\frac{11}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

3º) $r: x = 3$ e $s: y = -1$ são perpendiculares, pois $r \parallel y$ e $s \parallel x$.

Notemos que neste último caso não vale a relação $m_r \cdot m_s = -1$, uma vez que r é vertical.

76. Comentário

Existe uma condição de perpendicularismo que vale também no caso de uma das retas ser vertical. Deixamos como exercício a sua demonstração:

"Duas retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ são perpendiculares se, e somente se, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$."

Assim, por exemplo, as retas $x = 3$ e $y = -1$ são perpendiculares, pois:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

77. Construção da perpendicular

Obter uma reta s que passa por um ponto P (dado) e é perpendicular a uma reta r (dada, não horizontal).

Por exemplo, vamos resolver este problema quando r tem equação $5x + 7y + 1 = 0$ e $P = (6, -5)$:

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{7}$$

$$s \perp r \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{5}{7}} = \frac{7}{5}$$

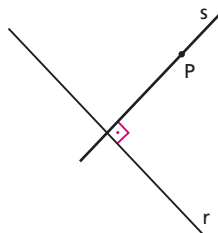
Como s passa por P , vamos aplicar a teoria do item 66; a equação de s é:

$$y - (-5) = \frac{7}{5}(x - 6)$$

$$5(y + 5) = 7(x - 6)$$

$$5y + 25 = 7x - 42$$

$$7x - 5y - 67 = 0$$



EXERCÍCIOS

134. Demonstre que $r: \frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$ e $s: \frac{x}{7} = \frac{y}{3}$ são retas perpendiculares.

- 135.** Determine p de modo que as retas $r: -2x + (p - 7)y + 3 = 0$ e $s: px + y - 13 = 0$ sejam perpendiculares.
- 136.** Se $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ e $Ax + By + C = 0$ são retas perpendiculares, calcule $bA + aB$.
- 137.** Dentre os seguintes pares de retas, qual não é formado por retas paralelas ou perpendiculares?
- a) $2x + 7y - 3 = 0$ e $\frac{x}{-7} + \frac{y}{-2} = 1$
- b) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3 - 3t \end{cases}$ e $-x + 3y + 9 = 0$
- c) $2x - 7 = 0$ e $5y + 2 = 0$
- d) $x = 2$ e $x = -\frac{2}{5}$
- e) $(a + 1)x + (a - 1)y = 0$ e $(a - 1)x = (a + 1)y$
- 138.** Qual é o coeficiente angular da mediatriz do segmento que une os pontos $(-2, -1)$ e $(8, 3)$?
- 139.** Dê a equação da mediatriz do segmento que une os pontos $A(0, 0)$ e $B(2, 3)$.
- 140.** Determine a equação da reta s que contém $P(2, 1)$ e é perpendicular à reta $r: 2x - y + 2 = 0$.
- 141.** Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(-5, 4)$ e é perpendicular à reta $5x - 4y + 7 = 0$.
- 142.** Qual é a equação da reta perpendicular à reta $y - 2 = 0$, passando pelo ponto $P(3, 1)$?
- 143.** Seja r a reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Dê a equação da reta s que passa pelo ponto $(1, 2)$ e é perpendicular à reta r .
- 144.** Determine a equação da reta perpendicular à reta $y = x$ e que passa pela interseção das retas $2x - 3y - 1 = 0$ e $3x - y - 2 = 0$.
- 145.** Ache a equação da reta r , conhecendo-se o ponto $H(2, 3)$, pé da perpendicular baixada da origem $O(0, 0)$ sobre a reta r .
- 146.** Escreva a equação da reta que passa pelo ponto P de abscissa 2 e pertence à reta $y = 3x - 1$, perpendicular à reta $x + 3y - 13 = 0$.
- 147.** Determine a projeção ortogonal do ponto $P(-7, 15)$ sobre a reta $r: x = 2t, y = 3t$.

Solução

1º) Coeficiente angular de r

$$t = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow 3x - 2y = 0$$

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

2º) Equação de s tal que $s \perp r$, por P

$$s \perp r \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{2}{3}$$

$$P \in s \Rightarrow y - 15 = m_s(x + 7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 15 = -\frac{2}{3}(x + 7) \Rightarrow$$

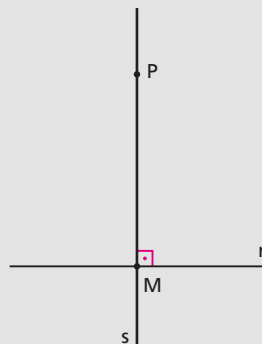
$$\Rightarrow 2x + 3y - 31 = 0$$

3º) Interseção de r com s

$$\begin{cases} r: 3x - 2y = 0 \\ s: 2x + 3y = 31 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = \frac{62}{13}$, $y = \frac{93}{13}$.

Resposta: $M\left(\frac{62}{13}, \frac{93}{13}\right)$.



148. Determine o pé da perpendicular baixada de $P(-2, 1)$ sobre $r: 2x - y - 20 = 0$.

149. Determine o ponto Q , simétrico de P em relação à reta r . Dados $P(-3, +2)$ e $r: x + y - 1 = 0$.

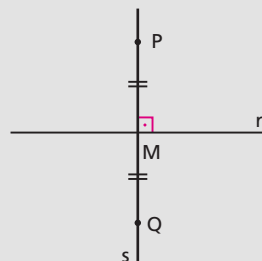
Solução

1º) s , por P , perpendicular a r

$$m_r = -\frac{a}{b} = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} = +1$$

$$P \in s \Rightarrow y - 2 = 1(x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y + 5 = 0$$



2º) Interseção de r com s

$$\begin{cases} r: x + y - 1 = 0 \\ s: x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = -2$ e $y = 3$; portanto, $M = (-2, 3)$.

3º) Q

M é o ponto médio de \overline{PQ} ; então:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = 2x_M - x_P = -4 + 3 = -1$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 2y_M - y_P = 6 - 2 = 4$$

Resposta: $Q(-1, 4)$.

- 150.** Qual é o ponto simétrico de $P(2, 3)$ com relação à reta $y = x - 3$?
- 151.** Em um sistema cartesiano ortogonal xOy são dados os pontos A, sobre Ox de abscissa $+1$, e B sobre Oy de ordenada $+2$. Calcule as coordenadas do ponto P simétrico da origem O em relação à reta AB.
- 152.** Determine a reta s , simétrica de $r: x - y + 1 = 0$ em relação a $t: 2x + y + 4 = 0$.

Solução

1º) Interseção de r com t

$$\begin{cases} r: x - y + 1 = 0 \\ s: 2x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

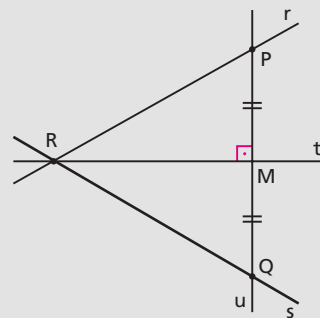
$$x = -\frac{5}{3} \text{ e } y = -\frac{2}{3};$$

$$\text{portanto, } R = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

2º) Tomar $P \in r$ tal que $P \neq R$

$$r: y = x + 1, \text{ portanto } y_P = x_P + 1$$

Fazendo $x_P = 0$, obtemos $y_P = 1$, isto é, $P = (0, 1)$.



3º) Equação de $u \perp t$, por P

$$m_t = -\frac{a}{b} = -2 \Rightarrow m_u = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{2}$$

$$P \in u \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow u: x - 2y + 2 = 0$$

4º) Interseção de u com t

$$\begin{cases} u: x - 2y + 2 = 0 \\ t: 2x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = -2$ e $y = 0$; portanto,

$$M = (-2, 0).$$

5º) Q, simétrico de P em relação a t

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow -2 = \frac{0 + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = -4$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow 0 = \frac{1 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = -1$$

Portanto $Q = (-4, -1)$.

6º) s é a reta RQ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_R & y_R & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{7y}{3} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 7y - 3 = 0$$

153. Determine a equação da reta s simétrica da reta $r: 2x + 3y - 7 = 0$ em relação à bissetriz do 2º quadrante.

154. Dados $P(2, 2)$ e $r: 3x + 2y - 6 = 0$, forneça:

- a equação de s perpendicular a r por P;
- o ponto M, pé da perpendicular a r por P;
- o ponto Q, simétrico de P em relação a r ;
- a reta t , simétrica de r em relação a P.

155. Determine a simétrica da reta $r: x - 6y + 12 = 0$ em relação:

- a) ao eixo dos x ;
- b) ao eixo dos y ;
- c) à reta $s: x + y - 9 = 0$.

156. Determine as equações das alturas do triângulo ABC e prove que elas concorrem no mesmo ponto H (ortocentro).

Dados: $A(0, -3)$, $B(-4, 0)$ e $C(2, 1)$.

Solução

1º) Equação de h_a tal que $h_a \perp BC$, por A

$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1 - 0}{2 + 4} = \frac{1}{6}$$

$$m_{h_a} = -\frac{1}{m_{BC}} = -6$$

$$A \in h_a \Rightarrow y + 3 = -6(x - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + y + 3 = 0 \text{ (} h_a \text{)}$$

2º) Equação de h_b tal que $h_b \perp CA$, por B

$$m_{CA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 + 3}{2 - 0} = 2 \Rightarrow m_{h_b} = -\frac{1}{2}$$

$$B \in h_b \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow 2y = -x - 4 \Rightarrow x + 2y + 4 = 0 \text{ (} h_b \text{)}$$

3º) Equação de h_c tal que $h_c \perp AB$, por C

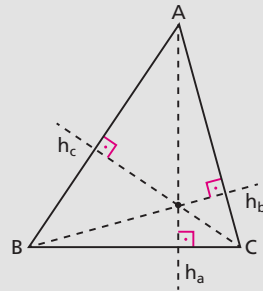
$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 + 3}{-4 - 0} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{h_c} = \frac{4}{3}$$

$$C \in h_c \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 3 = 4x - 8 \Rightarrow 4x - 3y - 5 = 0$$

4º) Provemos que existe $H \in h_a \cap h_b \cap h_c$

$$\{H\} = h_a \cap h_b \left\{ \begin{array}{l} 6x + y + 3 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{resolvendo}} H\left(-\frac{2}{11}, -\frac{21}{11}\right)$$

$$H \in h_c, \text{ pois } 4x_H - 3y_H - 5 = -\frac{8}{11} + \frac{63}{11} - 5 = \frac{-8 + 63 - 55}{11} = 0$$

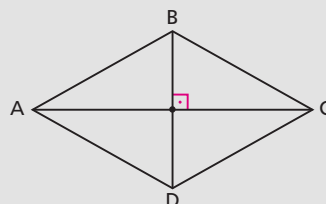


157. Determine o ortocentro H do triângulo ABC cujos vértices são $A(2, -1)$, $B(0, 3)$ e $C(1, 2)$.

- 158.** Dados os pontos $A(1, 1)$, $B(5, 5)$ e $C(-1, 2)$, determine a razão entre as áreas dos triângulos ABC e BCD , em que D é o pé da altura do triângulo ABC , traçada por C .
- 159.** Dados $H(-1, 0)$, $r: 2x + y - 1 = 0$ e $s: x - y - 2 = 0$, obtenha a reta t que determina com r e s um triângulo cujo ortocentro é H .
- 160.** Demonstre que o quadrilátero de vértices $A(a, b)$, $B(a + 4, b + 3)$, $C(a + 7, b + 7)$ e $D(a + 3, b + 4)$ é um losango.

Solução

Uma das maneiras de provar que $ABCD$ é losango é mostrar que seus lados são paralelos dois a dois e suas diagonais são perpendiculares.



$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b+3) - b}{(a+4) - a} = \frac{3}{4} \\ m_{CD} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b+7) - (b+4)}{(a+7) - (a+3)} = \frac{3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \parallel CD$$

$$\left. \begin{aligned} m_{BC} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b+7) - (b+3)}{(a+7) - (a+4)} = \frac{4}{3} \\ m_{AD} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b+4) - b}{(a+3) - a} = \frac{4}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC \parallel AD$$

$$\left. \begin{aligned} m_{AC} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b+7) - b}{(a+7) - a} = 1 \\ m_{BD} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(b+4) - (b+3)}{(a+3) - (a+4)} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AC \perp BD$$

- 161.** Obtenha os vértices de um losango $ABCD$ tal que:
- A está no eixo dos y ;
 - B está no eixo dos x ;
 - a diagonal AC está contida em $r: 7x + y - 3 = 0$;
 - as diagonais se interceptam em $E\left(x, -\frac{1}{2}\right)$.

- 162.** Obtenha uma reta perpendicular a $r: 4x + 3y = 0$ e que defina com os eixos coordenados um triângulo de área 6.

Solução

$$m_r = -\frac{4}{3} \Rightarrow m_s = +\frac{3}{4}$$

A equação reduzida da reta s é:

$$y = \frac{3}{4}x + q$$

Fazendo $4q = c$, a equação geral de s é:

$$3x - 4y + c = 0$$

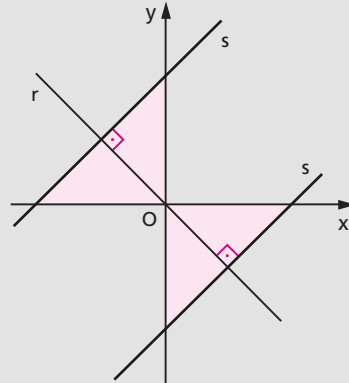
A reta s corta os eixos nos pontos $\left(0, \frac{c}{4}\right)$

e $\left(-\frac{c}{3}, 0\right)$. Como a área do triângulo é 6,

temos:

$$6 = \frac{\left|\frac{c}{4}\right| \cdot \left|\frac{c}{3}\right|}{2} \Rightarrow 12 = \frac{c^2}{12} \Rightarrow c^2 = 144 \Rightarrow c = \pm 12$$

Resposta: $3x - 4y \pm 12 = 0$.



- 163.** Encontre a equação da reta que é perpendicular à reta $x - 2y + 4 = 0$ e forma com os eixos coordenados um triângulo de área 4 unidades de área, de modo que esse triângulo tenha interseção não vazia com a reta $x - y = -3$.
- 164.** Dados os pontos $A(a, 0)$ e $B(0, b)$, tomemos sobre a reta AB um ponto C de modo que $\overline{BC} = m \cdot \overline{AB}$ ($m \neq 0$ real). Pede-se a equação da reta perpendicular a AB , a qual passa pelo ponto médio do segmento AC .
- 165.** O ponto $P(3, 3)$ é o centro de um feixe de retas no plano cartesiano. Determine as equações das retas desse feixe, perpendiculares entre si, que interceptam o eixo Ox nos pontos A e B , e tais que a distância entre eles seja $\frac{15}{2}$.
- 166.** Dados o ponto $A(3, 1)$ e a reta r cuja equação é $y = 2x$, traçam-se por A as retas $AB \perp x$ e $AC \perp r$, onde B e C são, respectivamente, os pés das perpendiculares AB e AC . Prove que a reta determinada pelos pontos médios de OA e BC é perpendicular a BC .

167. Dados $A(1, 4)$, $B(-3, 6)$, $C(0, 2)$ e $P(0, 6)$, traçam-se por P as perpendiculares aos lados do triângulo ABC .

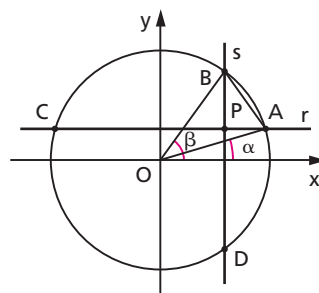
- Obtenha os pés das perpendiculares.
- Prove que são colineares.

168. Pelo ponto P de coordenadas cartesianas ortogonais $\cos \beta$, $\sin \alpha$ ($0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$) passam duas retas r e s paralelas aos eixos coordenados (ver figura).

a) Determine as coordenadas das interseções de r e s com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

b) Determine a equação da reta PM , em que M é o ponto médio do segmento AB .

c) Demonstre analiticamente que as retas CD e PM são perpendiculares.



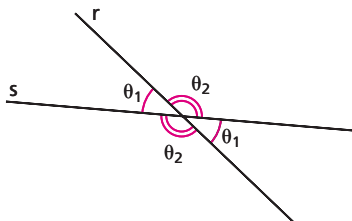
169. Dado um ponto P situado no prolongamento do lado AB de um quadrado $ABCD$, traçam-se as retas PC e PD ; pelo ponto E , interseção de BC e PD , conduzimos a reta AE cuja interseção com PC é o ponto F . Prove que BF e PD são perpendiculares.

VI. Ângulo de duas retas

78. Dadas duas retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, vamos calcular os ângulos que elas determinam.

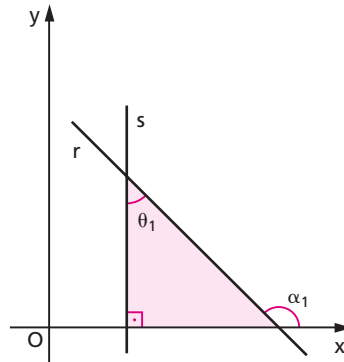
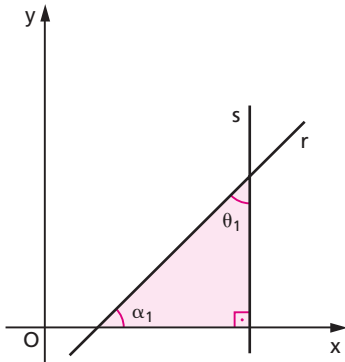
Se $r \parallel s$ ou $r \perp s$, o problema é imediato; portanto, deixaremos esses dois casos de lado.

Quando duas retas são concorrentes, elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelos vértices (e congruentes).



79. Calculemos θ_1 , ângulo agudo formado por r e s :

1º caso: uma das retas (s , por exemplo) é vertical.



$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

$$\theta_1 = \alpha_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right)$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{cotg} \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\operatorname{cotg} \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1}{m_r}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{1}{m_r}$$

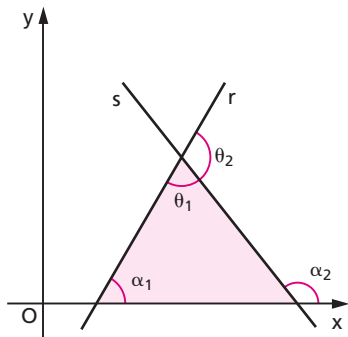
Unificando as duas possibilidades, temos:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \left| \frac{1}{m_r} \right|$$

Resumo

Dadas r e s , se uma delas não tem coeficiente angular, a tangente do ângulo agudo $\hat{r}s$ é o módulo do inverso do declive da outra.

2º caso: nenhuma das retas é vertical.

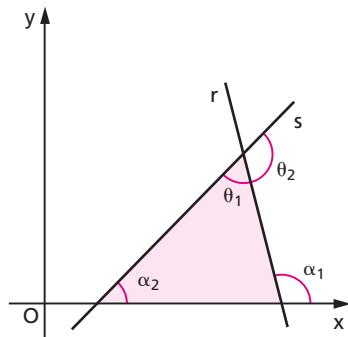


$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$



$$\theta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

Portanto, em qualquer situação, temos:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

Nas duas situações, se obtivermos $\operatorname{tg} \theta_1 > 0$, teremos calculado diretamente a $\operatorname{tg} \theta_1$; se $\operatorname{tg} \theta_1 < 0$, então calculamos a $\operatorname{tg} \theta_2$ (ângulo complementar a θ_1) e, trocamos de sinal para obtermos $\operatorname{tg} \theta_1$.

Resumo

Dadas r e s , se as duas têm coeficiente angular, a tangente do ângulo agudo $\hat{r}\hat{s}$ é o módulo da diferença dos declives dividida por 1 somado ao produto dos declives.

80. Exemplos:

1º) Calcular o ângulo agudo formado pelas retas

$$r: 3x - y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad s: 2x + y + 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r} \right| = \left| \frac{(3) - (-2)}{1 + 3 \cdot (-2)} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

2º) Calcular o ângulo formado pelas retas cujas equações são

$$r: 2x + 3y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad s: 6x - 4y + 5 = 0$$

$$m_r = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad m_s = +\frac{3}{2} \Rightarrow m_r m_s = -1 \Rightarrow r \perp s \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

3º) Calcular o ângulo agudo formado pelas retas

$$r: 4x + 2y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad s: 3x - 4 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} m_r = -\frac{4}{2} = -2 \\ \nexists m_s \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \left| \frac{1}{m_r} \right| = \left| \frac{1}{-2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$$

4º) Calcular o ângulo formado pelas retas

$$r: 5x + 2y = 0 \quad \text{e} \quad s: 10x + 4y - 7 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} m_r = -\frac{5}{2} \\ m_s = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow m_r = m_s \Rightarrow r // s \Rightarrow \theta = 0$$

81. Comentário

Existe uma fórmula para calcular o ângulo agudo entre duas retas que só não é válida se as retas forem perpendiculares.

Deixamos como exercício a sua demonstração:

"O ângulo agudo formado pelas retas

$$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{e} \quad s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

é θ tal que $\operatorname{tg} \theta = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$ ($a_1 a_2 + b_1 b_2 \neq 0$)."

82. Construção da oblíqua

Obter uma reta s que passa por um ponto P (dado) e forma ângulo agudo θ (dado) com uma reta r (dada, não vertical).

Por exemplo, vamos resolver este problema com os seguintes dados:

$$\begin{cases} P(6, -5) \\ \theta = 45^\circ \\ r: 5x + 7y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{7}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{m_s - \left(-\frac{5}{7}\right)}{1 + m_s \left(-\frac{5}{7}\right)} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{7m_s + 5}{7 - 5m_s} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{(7m_s + 5)^2}{(7 - 5m_s)^2} \Rightarrow 49 - 70m_s + 25m_s^2 = 49m_s^2 + 70m_s + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24m_s^2 + 140m_s - 24 = 0 \Rightarrow m_s = \frac{1}{6} \text{ ou } m_s = -6$$

Como s passa por P , vamos aplicar a teoria do item 66. Existem duas possibilidades para a equação de s :

$$\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ y - (-5) = \frac{1}{6}(x - 6) \end{array}$$

$$6(y + 5) = (x - 6)$$

$$6y + 30 = x - 6$$

$$x - 6y - 36 = 0$$

ou

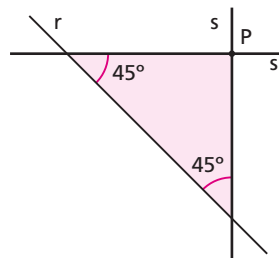
2^a

$$y - (-5) = -6(x - 6)$$

$$y + 5 = -6(x - 6)$$

$$y + 5 = -6x + 36$$

$$6x + y - 31 = 0$$



EXERCÍCIOS

170. Qual é a tangente do ângulo agudo formado pelas retas $3x + 2y + 2 = 0$ e $-x + 2y + 5 = 0$?

- 171.** Calcule a cotangente do ângulo agudo formado pelas retas $x = 3y + 7$ e $x = 13y + 9$.
- 172.** Calcule a tangente do ângulo agudo formado pelas retas não perpendiculares $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
- 173.** Calcule o ângulo agudo formado pelas seguintes retas:
 1º caso: $r: x + 2y - 3 = 0$ e $s: 2x + 3y - 5 = 0$
 2º caso: $r: \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ e $s: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases}$
 3º caso: $r: x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ = 6$ e $s: 3y - \sqrt{2} = 0$
 4º caso: $r: \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$ e $s: 2x - 3 = 0$
- 174.** Em um plano, munido de um sistema cartesiano ortogonal de referência, são dados os pontos $A(3, 0)$, $B(10, 1)$ e $M(6, k)$. Determine o valor de k para o qual o ângulo $\widehat{BAM} = 45^\circ$.
- 175.** Dados os pontos $A(4, -1)$, $B(2, -1)$ e $C(5 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$, calcule os ângulos internos do triângulo ABC .
- 176.** Conduza por $P(0, 0)$ as retas que formam ângulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ com $r: 6x + 2y - 3 = 0$.

Solução

A equação de uma reta qualquer passando por P é: $y - 0 = m(x - 0)$, isto é, $mx - y = 0$.

Para obter m vamos impor que essa reta forme ângulo $\theta = 45^\circ$ com r :

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m - m_1}{1 + mm_1} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{m - (-3)}{1 + m(-3)} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{m + 3}{1 - 3m} \right|$$

$$\text{então: } 1 - 3m = m + 3 \quad \text{ou} \quad 1 - 3m = -(m + 3)$$

$$\text{isto é: } m = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m = 2.$$

As retas procuradas têm equações: $-\frac{1}{2}x - y = 0$ ou $2x - y = 0$.

Resposta: $x + 2y = 0$ ou $2x - y = 0$.

- 177.** Dados o ponto $P(5, 4)$ e a reta $r: 2x - y + 7 = 0$, conduza as seguintes retas por P :
- s paralela a r
 - t perpendicular a r
 - u formando $\theta = \text{arc tg } 3$ com r
 - v paralela ao eixo Ox
 - z paralela ao eixo Oy

Solução

A principal finalidade deste problema é mostrar que as retas s, t, u, v são retas que passam por P e têm coeficiente angular; portanto, suas equações são da forma:

$$y - 4 = m \cdot (x - 5)$$

e o que as distingue é o valor de m .

Assim, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} s // r \Rightarrow m_s = m_r = 2 \\ t \perp r \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{2} \\ \hat{u}r = \text{arc tg } 3 \Rightarrow 3 = \left| \frac{m_u - 2}{1 + m_u \cdot 2} \right| \Rightarrow m_u = -1 \text{ ou } m_u = -\frac{1}{7} \\ v // Ox \Rightarrow m_v = 0 \end{array} \right.$$

A reta z passa por P e não tem declive; portanto, sua equação é:

$$x - 5 = 0$$

Resposta:

$$s: y - 4 = 2 \cdot (x - 5)$$

$$t: y - 4 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 5)$$

$$u: y - 4 = -1 \cdot (x - 5) \text{ ou } y - 4 = -\frac{1}{7} \cdot (x - 5)$$

$$v: y - 4 = 0$$

$$z: x - 5 = 0$$

- 178.** Determine as equações das retas s_1 e s_2 que passam por P e formam ângulo θ com a reta r nos seguintes casos:

$$1^\circ \text{ caso: } P(1, 0) \quad \theta = 30^\circ \quad r: x + y + 1 = 0$$

$$2^\circ \text{ caso: } P(0, 1) \quad \theta = \text{arc tg } 2 \quad r: 2x - y + 7 = 0$$

$$3^\circ \text{ caso: } P(2, -1) \quad \theta = 45^\circ \quad r: x + 2y = 0$$

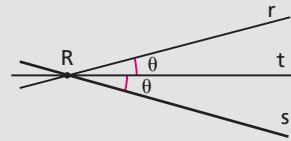
- 179.** Considere as retas r e s coplanares formando ângulos α e β com $\alpha < \beta$. Pelo ponto de interseção passa uma reta t que forma com r um ângulo igual a $\frac{\alpha + \beta}{2}$. Quais os ângulos formados pelas retas t e s ?
- 180.** Determine a reta s , simétrica de $r: x - y + 1 = 0$ em relação a $t: 2x + y + 4 = 0$.

Solução

1º) Interseção de r com t

Já vimos no exercício 152 que é

$$R\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$



2º) Ângulo agudo $\hat{r}t$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t} \right| = \left| \frac{1 - (-2)}{1 + (1) \cdot (-2)} \right| = 3$$

3º) Declive da reta s

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \left| \frac{m_s - m_t}{1 + m_s \cdot m_t} \right| \Rightarrow 3 = \left| \frac{m_s - (-2)}{1 + m_s \cdot (-2)} \right| \Rightarrow 3 = \left| \frac{m_s + 2}{1 - 2 \cdot m_s} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9(1 - 2m_s)^2 = (m_s + 2)^2 \Rightarrow 35m_s^2 - 40m_s + 5 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_s = 1 \quad \text{ou} \quad m_s = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

4º) Equação de s

Como $m_s = \frac{1}{7}$ (pois $m_s = 1$ não convém, uma vez que acarreta $r = s$) e

$R \in s$, a equação de s é:

$$y - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{7} \left(x - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) \Rightarrow x - 7y - 3 = 0$$

Resposta: $s: x - 7y - 3 = 0$.

- 181.** Seja r a reta que passa pelos pontos $(3, 5)$ e $(7, 0)$. Obtenha a equação da reta s simétrica de r em relação à reta $x = 7$.
- 182.** Conduza pelo ponto $P(3, 0)$ uma reta igualmente inclinada em relação a $r: y = 2x$ e $s: x = 2y$.

Solução

Seja m o declive da reta t procurada.

Temos:

$$\hat{r}t = \hat{s}t$$

Então:

$$\operatorname{tg} \hat{r}t = \operatorname{tg} \hat{s}t$$

$$\left| \frac{m - 2}{1 + 2m} \right| = \left| \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{m}{2}} \right|$$

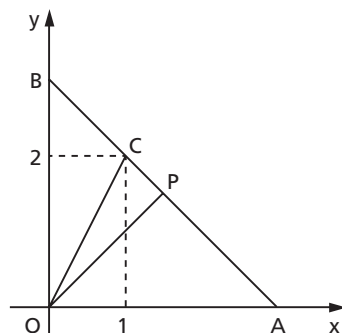
$$\frac{(m - 2)^2}{(1 + 2m)^2} = \frac{(2m - 1)^2}{(2 + m)^2}$$

donde vem:

$$(m + 2)^2(m - 2)^2 = (2m + 1)^2(2m - 1)^2 \Rightarrow 15m^4 = 15 \Rightarrow m = \pm 1$$

Resposta: $y - 0 = \pm 1(x - 3)$.

- 183.** Determine as equações das retas que contêm os lados de um triângulo, conhecendo:
o seu vértice A de coordenadas $(-2, 4)$;
a reta r : $3x - 4y + 59 = 0$, que contém uma altura;
a reta s : $2x - y + 18 = 0$, que contém uma bissetriz;
sendo a altura e a bissetriz relativas a dois vértices distintos.
- 184.** Demonstre que, em um triângulo retângulo, a reta determinada pelo vértice do ângulo reto e o centro do quadrado construído sobre a hipotenusa, externamente ao triângulo, é a bissetriz do ângulo reto.
- 185.** No retângulo $ABCD$ traçam-se por A e C as perpendiculares à diagonal BD . Demonstre que os pés das perpendiculares, A e C , formam um paralelogramo.
- 186.** Na figura ao lado, OP é perpendicular a AB e as coordenadas dos pontos A , B e C são: $A(x, 0)$; $B(0, y)$; $C(1, 2)$.
a) Ache o comprimento ℓ do segmento AB em função de x , para $x > 1$.
b) Para $x = 2$, ache a tangente do ângulo φ entre OP e OC .



CAPÍTULO IV

Distância de ponto a reta

I. Translação de sistema

83. Sejam $P(x, y)$ e $O'(x_0, y_0)$ dois pontos referidos a um sistema cartesiano xOy .

Se $x'O'y'$ é um sistema tal que $x' \parallel x$, $y' \parallel y$ e x' , y' têm respectivamente o mesmo sentido positivo de x , y , dizemos que $x'O'y'$ foi obtido por uma translação de xOy .

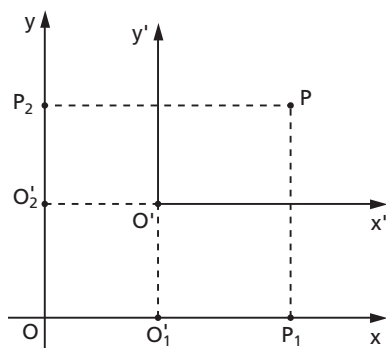
Nosso problema é estabelecer uma relação entre as coordenadas de P no "novo" sistema $x'O'y'$ e no "antigo" xOy .

No eixo dos x , temos:

$$\overline{OP_1} = \overline{OO_1} + \overline{O_1P_1} \Rightarrow x = x_0 + x'$$

No eixo dos y , temos:

$$\overline{OP_2} = \overline{OO_2} + \overline{O_2P_2} \Rightarrow y = y_0 + y'$$



84. Consideremos, por exemplo, a reta de equação $x + y - 7 = 0$. Eis alguns pontos que pertencem a essa reta:

A(1, 6), B(2, 5), C(3, 4),
D(4, 3), E(5, 2), F(6, 1).

Se é dada uma translação no sistema xOy de modo que a nova origem seja $O'(2, 1)$, todos os pontos citados mudam de coordenadas, obedecendo à lei:

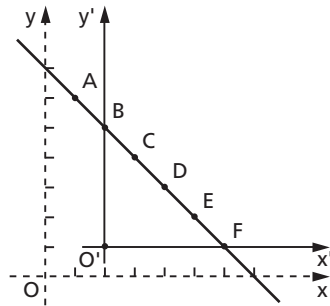
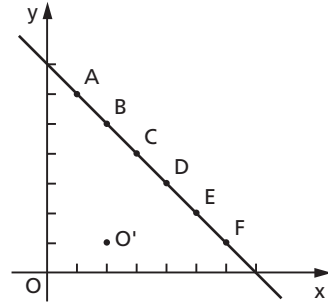
$$\begin{array}{rcl} x' & = & x - 2 \\ \text{(nova)} & \text{(antiga)} & \text{(origem } O') \\ y' & = & y - 1 \end{array}$$

Portanto, temos:

A(-1, 5), B(0, 4), C(1, 3),
D(2, 2), E(3, 1), F(4, 0).

A equação da reta no sistema $x'O'y'$ é obtida a partir de $x + y - 7 = 0$. Assim:

$$x + y - 7 = 0 \Rightarrow (x' + 2) + (y' + 1) - 7 = 0 \Rightarrow x' + y' - 4 = 0$$



II. Distância entre ponto e reta

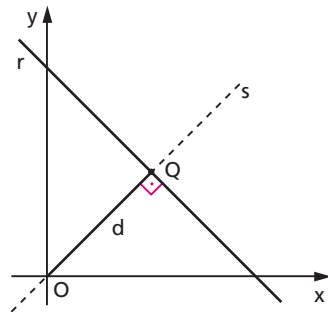
85. Calculemos a distância entre a origem O e a reta r cuja equação geral é:

$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

A reta s , perpendicular a r passando por O , tem equação geral:

$$bx - ay = 0 \quad (2)$$

Se resolvêssemos o sistema formado pelas equações (1) e (2), obteríamos $Q(x, y)$, ponto de interseção de r com s .



O que nos interessa, no entanto, é a distância $d = \overline{OQ} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Então operamos assim:

$$\begin{aligned} (1)^2 &\rightarrow (ax + by)^2 = (-c)^2 \\ (2)^2 &\rightarrow (bx - ay)^2 = 0^2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} (1)^2 &\rightarrow (ax + by)^2 = (-c)^2 \\ (2)^2 &\rightarrow (bx - ay)^2 = 0^2 \end{aligned}} \right\} +$$

$$\frac{(ax + by)^2 + (bx - ay)^2}{a^2x^2 + 2abxy + \underline{b^2y^2} + \underline{b^2x^2} - 2abxy + \underline{a^2y^2}} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2) = c^2$$

$$(a^2 + b^2)\underbrace{(x^2 + y^2)}_{d^2} = c^2 \Rightarrow d^2 = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

e, finalmente, temos a fórmula:

$$d_{o,r} = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Assim, por exemplo, a distância da reta $r: 3x + 4y - 25 = 0$ à origem é dada por:

$$d_{o,r} = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{-25}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{25}{5} = 5$$

86. Calculemos a distância entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta $r: ax + by + c = 0$.

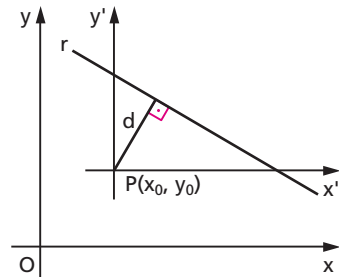
A ideia é transformar P em origem do sistema e, então, aplicar a fórmula já deduzida no item anterior.

Dando uma translação no sistema xOy de modo que P seja a origem do sistema $x'Py'$, determinemos a equação da reta r no "novo" sistema:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow a(x' + x_0) + b(y' + y_0) + c = 0 \Rightarrow ax' + by' + \underbrace{(ax_0 + by_0 + c)}_{c'} = 0$$

Conforme vimos no item 85, a distância da origem P à reta r é:

$$d_{P,r} = \left| \frac{c'}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$



donde vem a fórmula:

$$d_{P,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Resumo

Calculamos d substituindo as coordenadas de P no primeiro membro da equação de r , dividindo o resultado por $\sqrt{a^2 + b^2}$ e tomando este resultado em valor absoluto.

Assim, por exemplo, a distância do ponto $P(2, -3)$ à reta $r: 3x - 4y + 2 = 0$ é dada por:

$$d = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{3(2) - 4(-3) + 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{20}{5} \right| = 4$$

87. Observações

1ª) A distância d é, em qualquer caso, um número real não negativo, isto é: $d \geq 0$ quaisquer que sejam P e r .

2ª) A fórmula deduzida no item 85 (distância de r à origem) passa a ser um caso particular da fórmula deduzida no item 86.

De fato, a distância de $r: ax + by + c = 0$ ao ponto $P = (0, 0)$ é:

$$d = \left| \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

88. Uma aplicação notável da fórmula da distância entre ponto e reta é o seguinte problema: calcular a distância entre as retas paralelas

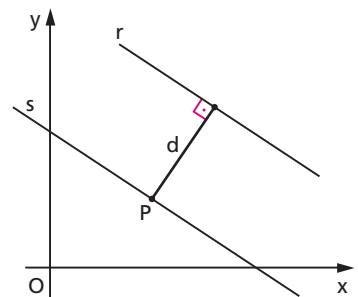
$$r: ax + by + c = 0 \text{ e}$$

$$s: ax + by + c' = 0$$

Como sabemos, a distância entre r e s é igual à distância de um ponto qualquer $P \in s$ até a reta r . Então:

1ª) Seja $P(x_0, y_0)$ pertencente a s

$$P \in s \Rightarrow ax_0 + by_0 + c' = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 = -c'$$



2º) A distância de P até r é:

$$d_{P,r} = \left| \frac{\overbrace{ax_0 + by_0 + c}^{-c'}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{(-c') + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Então vem a fórmula:

$$d_{r,s} = \left| \frac{c - c'}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

EXERCÍCIOS

- 187.** Seja P o ponto de coordenadas (4, 3) num sistema cartesiano ortogonal oxy. Se OXY é um novo sistema de coordenadas, obtido do anterior por uma translação da origem de o para O(2, -1), determine as coordenadas de P no novo sistema.
- 188.** Calcule a distância do ponto (-2, 3) ao eixo das ordenadas.
- 189.** Calcule a distância da origem à reta r: $ax + by + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$.

Solução

$$d_{0,r} = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = 1$$

Resposta: 1.

- 190.** Ache a distância da reta $r \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) à origem.
- 191.** Calcule a distância do ponto P à reta r nos seguintes casos:
- a) P(2, 0) e r: $2x + 3y - 5 = 0$
- b) P(1, 0) e r: $x + 3y - 5 = 0$
- c) P(-1, 0) e r: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
- d) P(0, 2) e r: $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 4t - 1 \end{cases}$
- e) P(1, -1) e r: $x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + y \cdot \sen \frac{\pi}{4} = 2$

- 192.** Calcule o comprimento da altura AH, do triângulo de vértices A(-3, 0), B(0, 0) e C(6, 8).

Solução

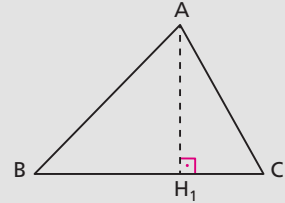
1º) Equação geral da reta BC

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 8x - 6y &= 0 \\ 4x - 3y &= 0 \end{aligned}$$

2º) $AH_1 = d_{A, BC}$

$$AH_1 = d_{A, BC} = \left| \frac{4(-3) - 3(0)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right| = \left| \frac{-12}{5} \right| = \frac{12}{5}$$

Resposta: $AH_1 = \frac{12}{5}$.



- 193.** Calcule a altura do trapézio cujos vértices são A(-1, -3), B(6, -2), C(5, 2) e D(-9, 0).

- 194.** O ponto P = (0, 0) é um vértice de um quadrado que tem um dos seus lados não adjacentes a P sobre a reta $x - 2y + 5 = 0$. Qual é a área do quadrado?

- 195.** Calcule a distância entre as retas

$r: 3x + 4y - 13 = 0$ e $s: 3x + 4y + 7 = 0$

Solução

Distância entre duas retas paralelas é a distância de um ponto P, pertencente a uma delas, até a outra.

1º) Tomemos $P \in r$

$$P \in r \Rightarrow 3x_p + 4y_p - 13 = 0$$

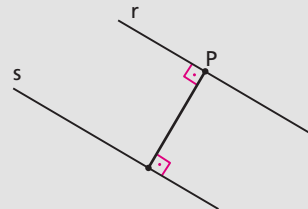
$$x_p = -1 \Rightarrow y_p = \frac{13 - 3(-1)}{4} = 4$$

Portanto $P(-1, 4)$.

2º) Calculemos $d_{r, s}$

$$d_{r, s} = d_{P, s} = \left| \frac{3(-1) + 4(4) + 7}{\sqrt{9 + 16}} \right| = \left| \frac{20}{5} \right| = 4$$

Resposta: $d_{r, s} = 4$.



- 196.** Calcule a distância entre as retas cujas equações são $ax + by + c = 0$ e $ax + by - c = 0$.
- 197.** Determine os pontos da reta $r: y = 2x + 1$ que estão à distância 2 da reta $s: 3x - 2y + 1 = 0$.
- 198.** Determine as equações das retas que formam 45° com o eixo dos x e estão à distância $\sqrt{2}$ do ponto $P(3, 4)$.

Solução

$$\hat{r}x = 45^\circ \Rightarrow m_r = +1 = -\frac{a}{b}$$

Façamos $a = 1$ e $b = -1$. Então a equação de r é

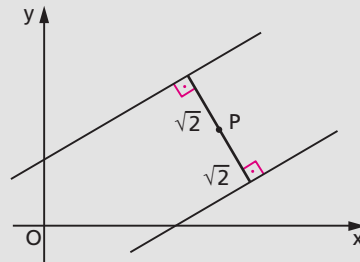
$$x - y + c = 0$$

Mas $d_{P,r} = \sqrt{2}$. Então:

$$\left| \frac{(3) - (4) + c}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{-1 + c}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |c - 1| = 2 \Rightarrow c - 1 = \pm 2 \Rightarrow c = -1 \text{ ou } c = 3$$

Resposta: $r_1: x - y + 3 = 0$ ou $r_2: x - y - 1 = 0$.



- 199.** Obtenha uma reta paralela a $r: x - y + 7 = 0$ e distante $\sqrt{2}$ do ponto $C(2, 2)$.
- 200.** Determine as equações das perpendiculares à reta $r: 3x + 4y - 1 = 0$, as quais estão à distância 4 unidades do ponto $P(2, 0)$.

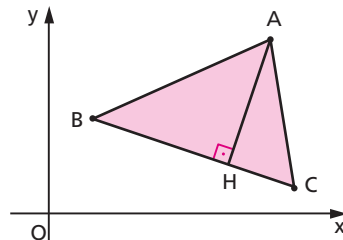
III. Área do triângulo

89. Calculemos a área do triângulo cujos vértices são

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$.

1º) Lembrando a fórmula da área do triângulo da Geometria Plana:

$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$



Temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

2º) Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos:

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

3º) A equação geral da reta BC é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{(y_2 - y_3)}_a x + \underbrace{(x_3 - x_2)}_b y + \underbrace{(x_2 y_3 - x_3 y_2)}_c = 0$$

4º) Cálculo da distância do ponto A à reta BC:

$$A(x_1, y_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{(BC) } ax + by + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

então:

$$AH = d = \left| \frac{(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \right|$$

5º) Indicando $D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \cdot \frac{|D_{ABC}|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}$$

donde vem a fórmula:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}|$$

Assim, por exemplo, a área do triângulo cujos vértices são $A(4, 1)$, $B(-2, 3)$ e $C(0, -6)$ é:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 12 = 50$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D_{ABC}| = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$$

90. Observações

1ª) Para todo triângulo ABC, a área é um número real $S > 0$.

2ª) Se A, B e C são colineares, isto é, se não existe o triângulo ABC, temos $D_{ABC} = 0$ e $S = 0$.

3ª) A unidade de área, raramente indicada nos problemas de Geometria Analítica, é o quadrado da unidade de comprimento utilizada nos eixos.

EXERCÍCIOS

- 201.** Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A(a + 1, a + 2)$, $B(a, a - 1)$ e $C(a + 2, a)$.
- 202.** Determine a área do triângulo ABC, onde A, B e C são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos MN, NP e PM, sendo $M(1, -5)$, $N(3, 3)$ e $P(9, -5)$.
- 203.** Calcule a área do triângulo determinado pelas retas de equações $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ e $x = 4$.
- 204.** Calcule a área do triângulo determinado pelas retas $y = x$, $x = 4$ e $x + y - 2 = 0$.
- 205.** Calcule a área do quadrilátero ABCD, dados: $A(0, 0)$, $B(4, -2)$, $C(6, 8)$ e $D(0, 4)$.

Solução

1º) Área do $\triangle ABC$

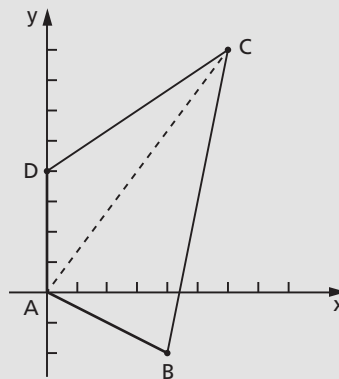
$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -44$$

$$S_{ABC} = \frac{|D_{ABC}|}{2} = 22$$

2º) Área do $\triangle ACD$

$$D_{ACD} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

$$S_{ACD} = \frac{|D_{ACD}|}{2} = 12$$



$$3^{\circ}) S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 22 + 12 = 34$$

Resposta: $S = 34$.

- 206.** Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são $A(-4, 4)$, $B(0, 1)$, $C(-4, -2)$ e $D(-8, 1)$.
- 207.** Os pontos $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(3, 1)$ e $D(m, n)$, nessa ordem, formam um paralelogramo. Determine a equação da reta AD e calcule a área do paralelogramo $ABCD$.
- 208.** Calcule a área do pentágono $ABCDE$, dados: $A(2, 1)$, $B(2, 0)$, $C(0, -4)$, $D(-2, 1)$ e $E(0, 4)$.
- 209.** Determine y de modo que o triângulo de vértices $A(1, 4)$, $B(4, 1)$ e $C(0, y)$ tenha área 6.

Solução

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} = 3y - 15$$

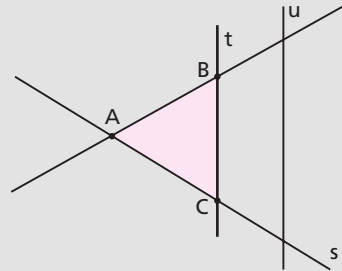
$$S = \frac{|D_{ABC}|}{2} \Rightarrow 6 = \frac{|3y - 15|}{2} \Rightarrow 4 = |y - 5| \Rightarrow y - 5 = \pm 4 \Rightarrow y = 5 \pm 4$$

Resposta: $y = 9$ ou $y = 1$.

- 210.** Dados os pontos $A(2, 3)$, $B(0, -1)$ e $C(1, y)$, calcule y para que a área do triângulo ABC seja 12.
- 211.** Num triângulo ABC , temos:
- 1º) $AB \subset r$ tal que $r: y = 3x$;
 - 2º) $AC \subset s$ tal que $s: x = 3y$;
 - 3º) $BC \subset t$ tal que $t \parallel u$ e $u: x + y = 0$;
 - 4º) a área do triângulo ABC é 4.
- Obtenha a equação da reta t .

Solução

Seja $x + y + c = 0$ a equação da reta $t // u$.
Falta apenas determinar o coeficiente c .



1º) Determinemos $r \cap s$

$$\begin{cases} y = 3x \\ x = 3y \end{cases} \xrightarrow{\text{resolvendo}} x = y = 0 \rightarrow A(0, 0)$$

2º) Determinemos $r \cap t$

$$\begin{cases} y = 3x \\ x + y + c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{resolvendo}} x = -\frac{c}{4} \text{ e } y = -\frac{3c}{4} \rightarrow B\left(-\frac{c}{4}, -\frac{3c}{4}\right)$$

3º) Determinemos $s \cap t$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y + c = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{resolvendo}} x = -\frac{3c}{4} \text{ e } y = -\frac{c}{4} \rightarrow C\left(-\frac{3c}{4}, -\frac{c}{4}\right)$$

4º) Determinemos c

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c}{4} & -\frac{3c}{4} & 1 \\ -\frac{3c}{4} & -\frac{c}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{c^2}{16} - \frac{9c^2}{16} = -\frac{c^2}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{|D_{ABC}|}{2} \Rightarrow 4 = \frac{c^2}{4} \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = \pm 4$$

Resposta: $t: x + y \pm 4 = 0$.

212. Calcule as coordenadas do vértice C do triângulo ABC de área 12, sabendo que $A = (0, -1)$, B é a interseção da reta $r: x + y - 2 = 0$ com o eixo dos x e $C \in r$.

213. Determine a área do triângulo ABC, sabendo que:

- a) $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 0)$;
- b) $y = x + 1$ é a equação do lado BC;
- c) o coeficiente angular da reta AC é 2.

- 214.** Determine o vértice C de um triângulo ABC, de área igual a 2, no qual $A(3, -2)$, $B(4, -1)$ e cujo baricentro está sobre a reta $2x - y + 3 = 0$.
- 215.** Num triângulo ABC, no qual $A(2, 1)$, $B(0, 3)$ e $C(-1, 0)$, toma-se M na reta BC tal que as áreas dos triângulos AMC e AMB ficam na razão $\frac{1}{4}$. Calcule as coordenadas de M.
- 216.** Os vértices de um triângulo são $A(1, 0)$, $B(3, 5)$ e $C(-1, 1)$.
 a) Obtenha o baricentro G do triângulo.
 b) Mostre que os triângulos ABG, ACG e BCG têm a mesma área.
- 217.** Demonstre que uma mediana de um triângulo divide-o em partes equivalentes.
- 218.** Demonstre que a área de um triângulo é o quádruplo da área do triângulo cujos vértices são os pontos médios de seus lados.
- 219.** Determine uma reta perpendicular a $r: 2x - 3y = 0$ que defina com as bissetrizes dos quadrantes um triângulo de área 20 unidades.
- 220.** Obtenha uma reta que passe por $P(1, 1)$ e defina com os eixos coordenados um triângulo de área 2, no primeiro quadrante.
- 221.** São dados, num plano, as duas retas r_1 , de equação $y = 2$, e r_2 com equações paramétricas $x = -2 + \lambda$ e $y = 2 + 2\lambda$ e o ponto $A = (1, 3)$.
 a) Entre as retas que passam por A, determine a reta r para a qual as distâncias de A às interseções com r_1 e r_2 sejam iguais.
 b) Satisfeita a condição do item anterior, determine a área do triângulo formado pelas retas r , r_1 e r_2 .

IV. Variação de sinal da função

$$E(x, y) = ax + by + c$$

91. Consideremos o trinômio:

$$E(x, y) \text{ ou } E(P) = ax + by + c \quad (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$$

função de duas variáveis x e y cujo domínio é o conjunto dos infinitos pares ordenados (x, y) , isto é, o conjunto de pontos P do plano cartesiano.

Sabendo que os pontos $P(x_0, y_0)$ para os quais $E(P) = ax_0 + by_0 + c = 0$ estão todos sobre a mesma reta r do plano cartesiano.

Consideremos dois pontos $Q(x_1, y_1)$ e $R(x_2, y_2)$, não pertencentes à reta r , os quais determinam a reta s concorrente com r em $M(x, y)$.

O ponto M divide \overline{QR} na razão k . Então:

$$k = \frac{\overline{QM}}{\overline{MR}}$$

$$k = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ e } k = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

E daí vem:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} \text{ e } y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$$

Por outro lado, M pertence à reta r e então deve satisfazer sua equação:

$$a \cdot \left[\frac{x_1 + kx_2}{1 + k} \right] + b \cdot \left[\frac{y_1 + ky_2}{1 + k} \right] + c = 0$$

$$a(x_1 + kx_2) + b \cdot (y_1 + ky_2) + c \cdot (1 + k) = 0$$

Donde tiramos:

$$k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = -\frac{E(Q)}{E(R)}$$

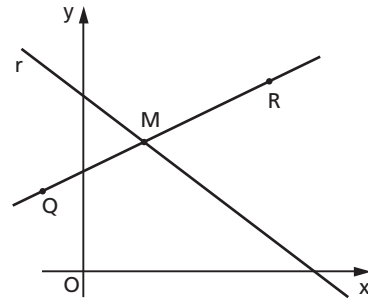
Finalmente, temos:

1º) Se Q e R estão no mesmo semiplano em relação a r , então M é exterior a \overline{QR} , o que implica $k < 0$, isto é, $ax_1 + by_1 + c$ e $ax_2 + by_2 + c$ de mesmo sinal. Em símbolos:

$$\left. \begin{array}{l} Q \text{ num semiplano} \\ R \text{ no mesmo semiplano} \end{array} \right\} \Rightarrow E(Q) \cdot E(R) > 0$$

2º) Se Q e R estão em semiplanos opostos em relação a r , então M é interior a \overline{QR} , o que implica $k > 0$, isto é, $ax_1 + by_1 + c$ e $ax_2 + by_2 + c$ de sinais contrários. Em símbolos:

$$\left. \begin{array}{l} Q \text{ num semiplano} \\ R \text{ no outro} \end{array} \right\} \Rightarrow E(Q) \cdot E(R) < 0$$



92. Resumo

- 1) Os pontos $P(x_0, y_0)$ pertencentes a r anulam $E(x, y)$;
- 2) Os pontos $Q(x_1, y_1)$ pertencentes a um mesmo semiplano e não pertencentes a r tornam $E(x, y) > 0$; e
- 3) Os pontos $R(x_2, y_2)$ pertencentes ao outro semiplano e não pertencentes a r tornam $E(x, y) < 0$.

93. Exemplos:

1. Estudar a variação de sinal de $E = 2x + y - 2$.

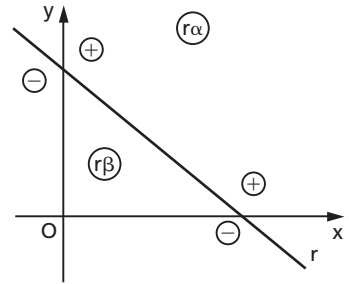
1º) Determinemos o conjunto dos pontos que anulam E :

$$E = 0 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0 \quad (r)$$

2º) Determinemos o sinal de E no semiplano da origem:

$$E(0) = 2 \cdot 0 + 0 - 2 = -2 < 0$$

3º) Concluimos que, para todo ponto do semiplano r_α , temos $E > 0$ e, de r_β , temos $E < 0$ (veja figura).



2. Estudar a variação de sinal de $E = x - y$.

1º) $E = 0 \Rightarrow x - y = 0 \quad (r)$

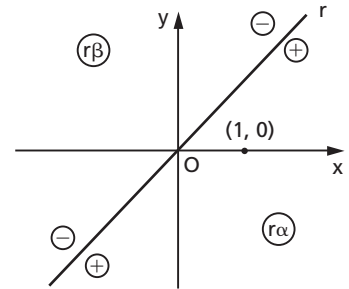
2º) $E(1, 0) = 1 - 0 = 1 > 0$

3º) Conclusão:

$P \in r \Rightarrow E(P) = 0$

$P \in r_\alpha \Rightarrow E(P) > 0$

$P \in r_\beta \Rightarrow E(P) < 0$



94. Regra prática

Do estudo da variação de sinais do trinômio $E(x, y) = ax + by + c$, podemos tirar a seguinte regra prática:

1º) Dado o trinômio $E(x, y) = ax + by + c$, buscamos os pontos que o anulam (pontos da reta r de equação $ax + by + c = 0$).

2º) Calculamos o sinal de E na origem $O(0, 0)$. Este sinal é o de c , pois $E(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$. Aplicamos a teoria, concluindo que o sinal $E(0)$ é o sinal de E em qualquer ponto do semiplano onde está O .

3º) Atribuimos a E , nos pontos do semiplano oposto ao anterior, sinal contrário ao de c .

Observamos que, se a reta r contiver O , o raciocínio anterior não é válido. Neste caso, em vez de O , temos de tomar P qualquer, fora de r . (Por exemplo num quadrante onde não passa a reta r .)

V. Inequações do 1º grau

A principal aplicação do estudo de sinais ora concluído é na resolução de inequações do primeiro grau a duas incógnitas, as quais só admitem solução gráfica.

95. Exemplos:

1. Resolver $x - y + 1 > 0$.

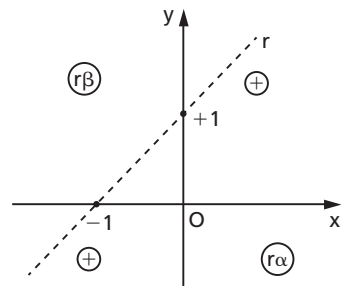
1º) Equação de r

$E = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

2º) $E(0) = 1 > 0 \Rightarrow E > 0$ em $r\alpha$

3º) $E < 0$ em $r\beta$

Resposta: região $r\alpha$.



2. Resolver $2x + y \geq 0$.

1º) Equação de r

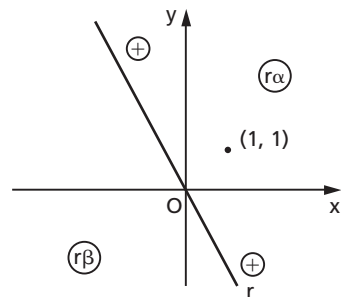
$E = 0 \Rightarrow 2x + y = 0$

2º) $E(1, 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 > 0$

então $E > 0$ em $r\alpha$.

3º) $E < 0$ em $r\beta$

Resposta: região $r\alpha \cup r$.



EXERCÍCIOS

222. Estude a variação de sinais dos trinômios:

- a) $E = x + y - 3$
- b) $E = -8x + 2y + 4$
- c) $E = -x + 3y - 6$
- d) $E = -6x - 2y - 12$
- e) $E = 5x - 4y$

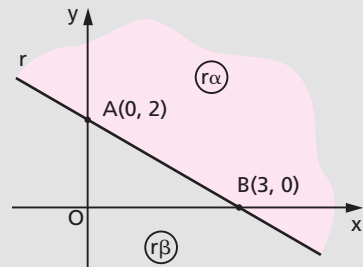
223. Resolva a inequação $2x + 3y \geq 6$.

Solução

1º) Equação de r

$$E = 2x + 3y - 6 = 0$$

x	y	ponto
0	2	A
3	0	B



2º) Valor de E na origem

$$E(0) = 2(0) + 3(0) - 6 = -6$$

$E \leq 0$ no semiplano $r\beta$

$E \geq 0$ no semiplano $r\alpha$

3º) $E(x, y) \geq 0 \Rightarrow (x, y) \in r\alpha$

Resposta: semiplano $r\alpha$ (incluindo r).

224. Resolva graficamente as inequações:

- a) $x - 4y + 4 > 0$
- b) $2x - 5y - 10 < 0$
- c) $3x + 2y - 6 \geq 0$
- d) $12x + y + 3 < 0$
- e) $3x - 2y \geq 0$
- f) $3x + y \leq 0$

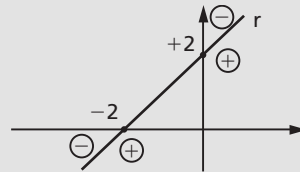
225. Resolva a inequação $\frac{x - y + 2}{x + y - 2} \geq 0$.

Solução

1º) Variação de $E_1 = x - y + 2$

$$E_1 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0 \quad (r)$$

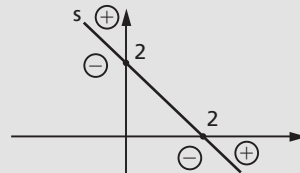
$$E_1(0) = +2 > 0$$



2º) Variação de $E_2 = x + y - 2$

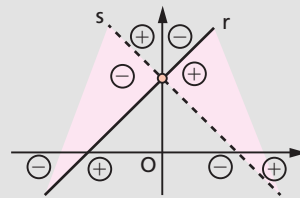
$$E_2 = 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0 \quad (s)$$

$$E_2(0) = -2 < 0$$



$$3^\circ) \frac{E_1}{E_2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} E_1 \text{ e } E_2 \text{ com sinais iguais} \\ \text{ou} \\ E_1 = 0 \text{ e } E_2 \neq 0 \end{cases}$$

Resposta: A inequação é satisfeita pelos pontos (x, y) dos dois ângulos opostos pelo vértice da figura, com exceção dos pontos da reta s .



226. Determine os pontos $P(x, y)$ do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a condição:

1º caso: $2x - 3y + 6 < 0$ e $x + y + 5 < 0$

2º caso: $3x + 2y < 0$ e $x \geq 0$

3º caso: $y \geq -1$ e $x - 3 > 0$

4º caso: $4x + 2y - 4 \leq 0$ e $2x + 4y \geq -8$

5º caso: $3x - y < 6$ e $y \geq 1$

227. Considere o sistema de inequações

$$S: \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \\ y \geq -2 \end{cases}$$

Represente graficamente o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \text{ satisfaz } S\}$.

228. Represente graficamente os pontos do plano que satisfazem simultaneamente as inequações $x - 3y \leq 0$ e $3x + y \geq 0$.

229. Represente graficamente, no plano cartesiano, o conjunto de pontos $P(x, y)$, tal que:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$

230. Resolva a inequação $|x + y| \leq 1$.

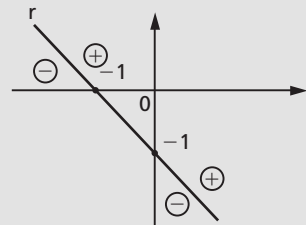
Solução

1º) $|x + y| \leq 1 \Leftrightarrow (x + y)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x + y + 1)(x + y - 1) \leq 0$

2º) Variação de $E_1 = x + y + 1$

$E_1 = 0 \Rightarrow x + y + 1 = 0 \quad (r)$

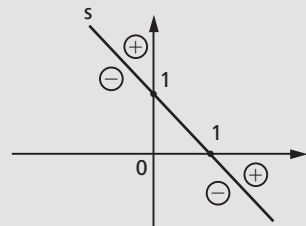
$E_1(0) = 1 > 0$



3º) Variação de $E_2 = x + y - 1$

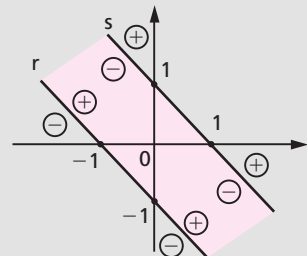
$E_2 = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0 \quad (s)$

$E_2(0) = -1 < 0$



4º) $E_1 \cdot E_2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} E_1 \text{ e } E_2 \text{ com sinais contrários} \\ \text{ou} \\ E_1 = 0 \text{ ou } E_2 = 0 \end{cases}$

Resposta: A inequação é satisfeita pelos pontos (x, y) da faixa de plano compreendida entre r e s , incluindo as retas r e s .



231. Qual é a figura formada pelos pontos do plano cartesiano que satisfazem a sentença $|x| > 5$?

232. Determine os pontos P do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem as desigualdades:

1º caso: $|x + y| < 3$

3º caso: $y - 1 > 0$ e $|x| \leq 2$

2º caso: $|x| + y > 2$

4º caso: $2 < |y| < 3$ e $1 < |x| < 2$

233. Determine os pontos P do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem as desigualdades:

1º caso: $(2x - y + 4)(x + 2y - 6) < 0$

2º caso: $(2x + y + 2)(x - 2y - 1) \geq 0$

3º caso: $\frac{2x + y - 6}{3x - y + 3} \geq 0$

4º caso: $\frac{x + y - 3}{x - y + 2} \leq 0$ e $y \geq 0$

234. Assinale no plano cartesiano o conjunto no qual estão contidas todas as retas de equação $x + y + c = 0$ com $c \leq -2$.

235. As regiões do plano definidas por

$x_1 + 2x_2 \leq 2, x_1 \geq 0$

$2x_1 + x_2 \leq 2, x_2 \geq 0$

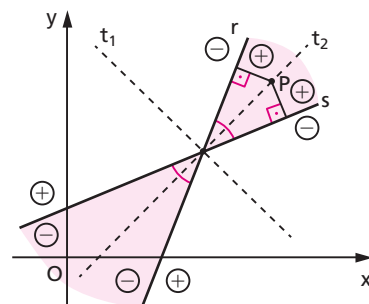
determinam um quadrilátero, no qual está definida a função $y = x_1 + x_2$. Sabendo que o máximo desta função está num dos vértices deste quadrilátero, determine esse valor.

VI. Bissetrizes dos ângulos de duas retas

96. Vamos obter as equações das bissetrizes t_1 e t_2 dos ângulos definidos pelas retas concorrentes $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

A reta r divide o plano em dois semiplanos nos quais o trinômio $E_1 = a_1x + b_1y + c_1$ assume valores numéricos de sinais contrários, excluídos os pontos de r . Analogamente, a reta s divide o plano em dois semiplanos nos quais o trinômio $E_2 = a_2x + b_2y + c_2$ assume valores de sinais contrários, excluídos os pontos de s .

Admitamos, para raciocinar, que a distribuição de sinais seja a da figura.



Verificamos que sempre r e s determinam dois ângulos opostos pelo vértice (assinalados na figura), em que E_1 e E_2 assumem valores numéricos de mesmo sinal e determinam dois outros ângulos opostos pelo vértice, em que E_1 e E_2 assumem sinais contrários.

Temos, então:

1º) Se $P(x, y) \in t_2$, então $d_{P,r} = d_{P,s}$, isto é,

$$\left| \frac{E_1(P)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right| = \left| \frac{E_2(P)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right|$$

Sendo $E_1(P) \cdot E_2(P) > 0$, vem

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

que é a equação da reta t_2 .

2º) Se $P(x, y) \in t_1$, então $d_{P,r} = d_{P,s}$, isto é,

$$\left| \frac{E_1(P)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right| = \left| \frac{E_2(P)}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right|$$

Sendo $E_1(P) \cdot E_2(P) < 0$, vem

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

que é a equação da reta t_1 .

Resumo

As equações das bissetrizes são:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$$

97. Exemplo:

Obter as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas

$$r: 3x + 4y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad s: 12x - 5y = 0$$

As equações são:

$$\frac{3x + 4y - 1}{\sqrt{9 + 16}} \pm \frac{12x - 5y}{\sqrt{144 + 25}} = 0 \Rightarrow \frac{3x + 4y - 1}{5} \pm \frac{12x - 5y}{13} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13(3x + 4y - 1) \pm 5(12x - 5y) = 0$$

Resposta: $99x + 27y - 13 = 0$ ou $-21x + 77y - 13 = 0$.

Observemos, para conferir, que as bissetrizes são perpendiculares:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = -\frac{99}{27} = -\frac{11}{3} \\ m_2 = -\frac{-21}{77} = \frac{3}{11} \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow t_1 \perp t_2$$

EXERCÍCIOS

236. Obtenha as equações das bissetrizes dos ângulos formados por $r: 3x + 4y = 0$ e $s: 8x - 6y - 1 = 0$.

Solução

Pela teoria, temos:

$$\frac{3x + 4y}{\sqrt{9 + 16}} \pm \frac{8x - 6y - 1}{\sqrt{64 + 36}} = 0$$

$$2(3x + 4y) \pm (8x - 6y - 1) = 0$$

$$(6x + 8y) \pm (8x - 6y - 1) = 0$$

Separando as equações, vem:

$$\begin{cases} (6x + 8y) + (8x - 6y - 1) = 0 \Rightarrow 14x + 2y - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ (6x + 8y) - (8x - 6y - 1) = 0 \Rightarrow -2x + 14y + 1 = 0 \end{cases}$$

Resposta: $14x + 2y - 1 = 0$ e $2x - 14y - 1 = 0$.

- 237.** Determine as equações das bissetrizes dos ângulos formados por $r: 4x + 4y - 3 = 0$ e $s: x - y + 1 = 0$.
- 238.** Qual é a equação do lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ equidistantes das retas $r: 3x + 4y - 12 = 0$ e $s: 5x + 12y - 60 = 0$?
- 239.** Qual é a bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas $r: 2x + 3y - 1 = 0$ e $s: 3x + 2y + 1 = 0$?

Solução

1º) Obtemos as duas bissetrizes

$$\frac{2x + 3y - 1}{\sqrt{4 + 9}} \pm \frac{3x + 2y + 1}{\sqrt{9 + 4}} = 0$$

$$(2x + 3y - 1) \pm (3x + 2y + 1) = 0$$

$$\text{então } \begin{cases} t_1: 2x + 3y - 1 + 3x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \\ t_2: 2x + 3y - 1 - 3x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

2º) Determinemos qual delas é a bissetriz do ângulo agudo.

Para isso tomamos qualquer

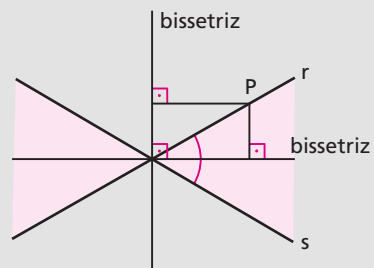
$P \in r$ e calculamos d_{P, t_1} e d_{P, t_2} .

A menor distância corresponde à bissetriz do ângulo agudo.

$$P \in r \Rightarrow 2x_P + 3y_P - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_P = \frac{1 - 2x_P}{3}$$

Fazendo $x_P = 2$, resulta $y_P = -1$.



Seja $P(2, -1) \in r$. Temos:

$$\left. \begin{aligned} d_{P, t_1} &= \left| \frac{(2) + (-1)}{\sqrt{1+1}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d_{P, t_2} &= \left| \frac{(2) - (-1) + 2}{\sqrt{1+1}} \right| = \left| \frac{5}{\sqrt{2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d_{P, t_1} < d_{P, t_2}$$

Resposta: $t_1: x + y = 0$.

- 240.** Determine a bissetriz do ângulo agudo definido pelas retas $r: 4x + 3y = 0$ e $s: 6x + 8y + 1 = 0$.
- 241.** Dê a equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas $3x + 4y + 1 = 0$ e $3x - 4y - 1 = 0$.
- 242.** Qual é a equação da bissetriz interna, por A, no triângulo de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 6)$ e $C(5, 1)$?

Solução

1º) Equações de AB e AC

$$\begin{cases} x & y & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x & y & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} = 0 \Rightarrow x - 5y = 0$$

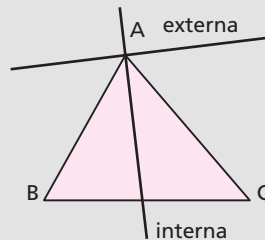
2º) Equações das bissetrizes

$$\frac{3x - y}{\sqrt{10}} \pm \frac{x - 5y}{\sqrt{26}} = 0$$

$$\sqrt{13}(3x - y) \pm \sqrt{5}(x - 5y) = 0$$

$$\text{Então } \begin{cases} t_1: (3\sqrt{13} + \sqrt{5})x - (\sqrt{13} + 5\sqrt{5})y = 0 \\ t_2: (3\sqrt{13} - \sqrt{5})x - (\sqrt{13} - 5\sqrt{5})y = 0 \end{cases}$$

3º) Uma diferença básica entre as duas bissetrizes é que a interna deixa B e C em semiplanos opostos enquanto a externa deixa no mesmo semiplano. Tomando a bissetriz t_1 e fazendo



$E_1 = (3\sqrt{13} + \sqrt{5})x - (\sqrt{13} + 5\sqrt{5})y$, temos:

$$E_1(B) = (3\sqrt{13} + \sqrt{5}) \cdot 2 - (\sqrt{13} + 5\sqrt{5}) \cdot 6 = -28\sqrt{5} < 0$$

$$E_1(C) = (3\sqrt{13} + \sqrt{5}) \cdot 5 - (\sqrt{13} + 5\sqrt{5}) \cdot 1 = 14\sqrt{13} > 0$$

Como $E_1(B)$ e $E_1(C)$ têm sinais opostos, B e C estão em semiplanos opostos em relação a t_1 .

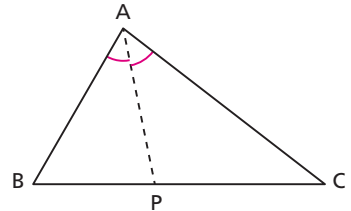
Resposta: $t_1: (3\sqrt{13} + \sqrt{5})x - (\sqrt{13} + 5\sqrt{5})y = 0$.

243. Obtenha a equação da bissetriz interna, por B, do triângulo cujos vértices são A(6, 3), B(1, 1) e C(5, -4).

244. Sejam M(-5, 2), N(-2, 5) e P(0, 0) pontos do plano cartesiano. Calcule o comprimento da bissetriz do ângulo P do triângulo MNP.

245. Dados A(1, -2), B(4, -2) e C(1, 2), obtenha o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC.

246. Dados A(0, 0), B(3, 4) e C(12, -5), calcule o comprimento da bissetriz interna AP do triângulo ABC.



Solução

1º) Aplicando determinante, obtemos as equações dos lados do triângulo:

$$(AB) 4x - 3y = 0, (BC) x + y - 7 = 0,$$

$$(CA) 5x + 12y = 0$$

2º) As equações das bissetrizes por A são:

$$\frac{4x - 3y}{\sqrt{16 + 9}} \pm \frac{5x + 12y}{\sqrt{25 + 144}} = 0 \Rightarrow 13(4x - 3y) \pm 5(5x + 12y) = 0$$

$$\text{Donde vem } \begin{cases} t_1: 11x + 3y = 0 \\ t_2: 3x - 11y = 0 \end{cases}$$

3º) Fazendo $E = 11x + 3y$, temos:

$$E(B) = 11(3) + 3(4) = 45$$

$$E(C) = 11(12) + 3(-5) = 117$$

Então a bissetriz interna é $t_2: 3x - 11y = 0$.

4º) A interseção de t_2 com BC é a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x - 11y = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11}{2}, y = \frac{3}{2} \Rightarrow P\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

5º) A distância AP é $AP = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2}$.

Resposta: $\frac{\sqrt{130}}{2}$.

- 247.** Calcule o comprimento da bissetriz interna AS do triângulo cujos vértices são $A(-3, -3)$, $B(9, 2)$ e $C(5, 12)$.

VII. Complemento — Rotação de sistema

- 98.** Seja $P(x, y)$ um ponto referido a um sistema cartesiano ortogonal xOy .

Se XOY é um sistema ortogonal com mesma origem que xOy e o ângulo entre os eixos x e X é α , dizemos que XOY foi obtido por uma rotação de xOy .

Nosso problema é estabelecer uma relação entre as coordenadas de P no novo sistema (XOY) e no antigo (xOy).

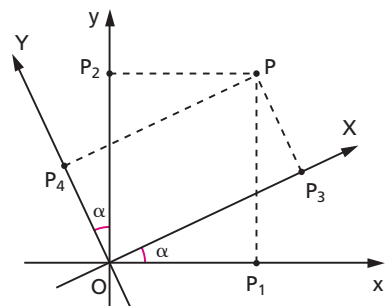
Notemos que:

$$x = \overline{OP_1}, y = \overline{OP_2}$$

$$X = \overline{OP_3} = \overline{P_4P}, Y = \overline{OP_4} = \overline{P_3P}$$

Temos:

$$1^\circ) \overline{OP} = \overline{OP_3} + \overline{P_3P}$$



Projetando os três segmentos sobre Ox, vem:

$$\text{proj. } \overline{OP} = \text{proj. } \overline{OP_3} + \text{proj. } \overline{P_3P}$$

$$\overline{OP_1} = \overline{OP_3} \cdot \cos \alpha + \overline{P_3P} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

$$x = X \cdot \cos \alpha - Y \cdot \sen \alpha$$

$$2^\circ) \overline{OP} = \overline{OP_4} + \overline{P_4P}$$

Projetando os três segmentos sobre Oy, vem:

$$\text{proj. } \overline{OP} = \text{proj. } \overline{OP_4} + \text{proj. } \overline{P_4P}$$

$$\overline{OP_2} = \overline{OP_4} \cdot \cos \alpha + \overline{P_4P} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

$$y = X \cdot \sen \alpha + Y \cdot \cos \alpha$$

Existe uma outra forma de apresentar estas relações, utilizando matrizes:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sen \alpha \\ \sen \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sen \alpha \\ -\sen \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por exemplo, se $P = (2, 3)$ e o sistema sofre uma rotação α de 60° , as novas coordenadas de P serão:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sen 60^\circ \\ -\sen 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ou seja: } X = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ e } Y = -\sqrt{3} + \frac{3}{2}.$$

CAPÍTULO V

Circunferências

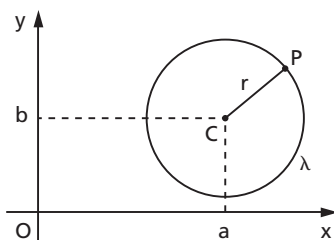
I. Equação reduzida

99. Definição

Dados um ponto C , pertencente a um plano α , e uma distância r não nula, chama-se **circunferência** o conjunto dos pontos de α que estão à distância r do ponto C .

$$\text{circunferência} = \{P \in \alpha \mid PC = r\}$$

100. Consideremos a circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio r .



Um ponto $P(x, y)$ pertence a λ se, e somente se, a distância PC é igual ao raio r .

$$P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$$

Chama-se equação da circunferência aquela que é satisfeita exclusivamente pelos pontos $P(x, y)$ pertencentes à curva. É imediato que um ponto genérico $P \in \lambda$ verifica a condição $PC = r$. Portanto, temos:

$$P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

e, daí, vem a equação reduzida da circunferência

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1)$$

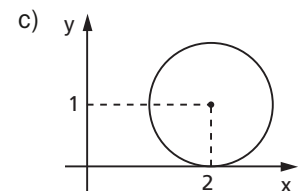
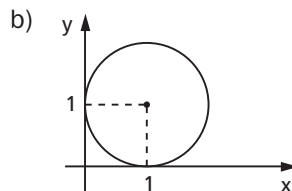
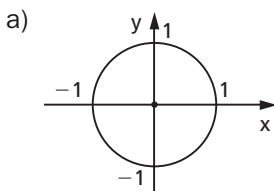
Assim, por exemplo, a circunferência de centro $C(5, 6)$ e raio $r = 2$ tem equação $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 4$; a circunferência de centro $C(-1, -2)$ e raio $r = 3$ tem equação $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$; a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 4$ tem equação $x^2 + y^2 = 16$.

Inversamente, toda equação da forma (1), com $r^2 > 0$, representa em um sistema cartesiano ortogonal uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r .

Assim, por exemplo, a equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ representa uma circunferência de centro $C(2, 3)$ e raio $r = 1$; a equação $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$ representa uma circunferência de centro $C(-2, -3)$ e raio $r = 1$; a equação $x^2 + y^2 = 1$ representa uma circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 1$.

EXERCÍCIOS

248. Determine a equação de cada uma das circunferências abaixo.



249. Determine a equação da circunferência de centro C e raio r nos seguintes casos:

1º) $C(3, 5)$ e $r = 7$

4º) $C(-3, 5)$ e $r = 1$

2º) $C(0, 0)$ e $r = 9$

5º) $C(0, 2)$ e $r = 2$

3º) $C(-2, -1)$ e $r = 5$

6º) $C\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $r = 4$

- 250.** Qual é a equação da circunferência de centro $C(2, -1)$ que passa por $P(3, 3)$?
- 251.** Qual é a equação da circunferência de centro $C(-2, 5)$ que é tangente ao eixo dos y ?
- 252.** Qual é a equação da circunferência de centro $C(3, -4)$ e que passa pela origem?

II. Equação normal

101. Desenvolvendo a equação reduzida (1), obtemos:

$$(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = r^2$$

isto é,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0 \quad (2)$$

chamada equação normal da circunferência.

Assim, por exemplo, a equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ representa uma circunferência de centro $C(1, 1)$ e raio $r = 3$, pois equivale a $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

III. Reconhecimento

102. Vamos examinar agora um problema importantíssimo: "dada uma equação do 2º grau, em x e y , com coeficientes reais

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (3)$$

pergunta-se:

- 1) Quais são as condições que A, B, C, D, E, F devem satisfazer para que ela represente uma circunferência?
- 2) Quais são as coordenadas do centro?
- 3) Qual é o raio?"

Para resolver o problema, comparemos as equações:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \quad (3')$$

Notemos que (2) é certamente a equação de uma circunferência e (3') foi obtida dividindo (3) por A (suposto não nulo), portanto (3') equivale a (3).

Para que as equações (2) e (3') representem a mesma curva (circunferência), devem ser satisfeitas pelos mesmos pares ordenados (x, y) , isto é, devem ser equivalentes e, para isso, devem apresentar coeficientes respectivamente iguais:

$$\text{termo } y^2 \rightarrow \frac{B}{A} = 1 \Rightarrow B = A \neq 0$$

$$\text{termo } xy \rightarrow \frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{termo } x \rightarrow \frac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = -\frac{D}{2A}$$

$$\text{termo } y \rightarrow \frac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = -\frac{E}{2A}$$

$$\text{termo independente} \rightarrow \frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A} =$$

$$= \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

Notemos que r é número real positivo e então $r^2 > 0$.

Portanto, $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

é condição necessária para a existência da circunferência.

Vamos responder às três perguntas feitas pelo problema:

$$1) \quad B = A \neq 0, C = 0, D^2 + E^2 - 4AF > 0$$

Quer dizer que uma equação do 2º grau só representa circunferência se x^2 e y^2 tiverem coeficientes iguais, se não existir termo misto xy e se

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \text{ for real e positivo}$$

$$2) \text{ centro } \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A} \right)$$

$$3) \text{ raio } = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2 \cdot |A|}$$

103. Observações

1ª) Se uma das três condições necessárias

$$(A = B \neq 0, \quad C = 0, \quad D^2 + E^2 - 4AF > 0)$$

não for satisfeita, a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ não representa circunferência mas pode representar uma cônica ou a reunião de duas retas ou um ponto ou o conjunto vazio. Sobre este assunto deve-se ler o item 173 deste livro.

2ª) Quando a equação de uma circunferência apresenta x^2 e y^2 com coeficientes unitários ($A = B = 1$), as coordenadas do centro e o raio podem ser calculados assim:

$$a = -\frac{D}{2}, \quad b = -\frac{E}{2}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 - F}$$

3ª) Outro processo prático, quando $A = B = 1$, para obter o centro e o raio de uma circunferência é passar a equação para a forma reduzida $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, em que a leitura de a , b , r é imediata.

104. Exemplos:

1º) Qual das equações abaixo representa uma circunferência?

a) $x^2 + 3y^2 - 5x - 7y - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + xy - 4x - 6y - 9 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 15 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$

e) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

Solução

- a) Não, porque $A = 1$ e $B = 3$ (x^2 e y^2 não têm coeficientes iguais).
- b) Não, porque $C = 1$ (existe termo misto xy).
- c) Não, porque $D^2 + E^2 - 4AF = 16 + 36 - 180 = -138 < 0$
(o raio seria um número complexo).
- d) Não, porque $D^2 + E^2 - 4AF = 4 + 4 - 8 = 0$ (o raio seria nulo).
- e) Sim, porque $A = B = 2$, $C = 0$, $D^2 + E^2 - 4AF = 16 + 36 + 24 = 76 > 0$.

2º) Achar o centro e o raio da circunferência λ cuja equação é

$$x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$$

Solução

Temos $A = B = 1$, $D = -2$, $E = 1$, $F = -1$, então:

$$a = -\frac{D}{2} = 1, \quad b = -\frac{E}{2} = -\frac{1}{2}, \quad r^2 = a^2 + b^2 - F = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

Resposta: centro $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ e raio $= \frac{3}{2}$.

3º) Obter o centro e o raio da circunferência λ cuja equação é

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 12y + 6 = 0$$

Solução

Dividimos a equação por 4:

$$x^2 + y^2 - x - 3y + \frac{3}{2} = 0$$

e aplicamos as fórmulas simplificadas:

$$a = -\frac{D}{2} = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{E}{2} = \frac{3}{2}$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - F = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = 1$$

Resposta: centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e raio $= 1$.

EXERCÍCIOS

253. Determine o centro e o raio das seguintes circunferências:

1ª) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$

2ª) $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$

3ª) $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$

4ª) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 8y - 34 = 0$

5ª) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 44 = 0$

254. Quais as coordenadas do centro da circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 3$?

255. Se $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ ($A \neq 0$) é a equação de uma circunferência, determine o centro e o raio.

256. Forneça a equação da circunferência simétrica de $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 7 = 0$ em relação ao eixo das ordenadas.

257. Qual é o ponto simétrico da origem com relação ao centro da circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 4y = r^2$?

258. Ache a equação da reta que passa pelo centro da circunferência $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ e é perpendicular à reta $3x - 2y + 7 = 0$.

259. Qual é o ponto da circunferência $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$ que tem ordenada máxima?

260. Para que valores de m e k a equação $mx^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ representa uma circunferência?

Solução

$$A = B \Rightarrow m = 1$$

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0 \Rightarrow 16 + 36 - 4mk > 0 \Rightarrow 16 + 36 > 4k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k < \frac{52}{4} \Rightarrow k < 13$$

Resposta: $m = 1$ e $k < 13$.

261. Para que valores de m e k a equação abaixo representa uma circunferência?

1ª) $mx^2 + y^2 + 10x - 8y + k = 0$

2ª) $mx^2 + 2y^2 + 24x + 24y - k = 0$

3ª) $4x^2 + my^2 - 4x + 3k = 0$

262. Determine a , b e c de modo que a equação $36x^2 + ay^2 + bxy + 24x - 12y + c = 0$ represente uma circunferência.

263. Determine α , β e γ de modo que a equação $\alpha x^2 + y^2 + \beta xy + 6x + 8y + \gamma = 0$ represente uma circunferência de raio 6.

Solução

1º) Vamos impor duas condições necessárias para que a equação represente circunferência:

$$A = B \Rightarrow \alpha = 1$$

$$C = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

2º) Se $r = 6$, temos:

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = \frac{36 + 64 - 4\gamma}{4} = 36 \Rightarrow \gamma = \frac{36 + 64 - 144}{4} = -11$$

Resposta: $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\gamma = -11$.

264. Qual deve ser a relação entre m , n e p para que a circunferência de equação $x^2 + y^2 - mx - ny + p = 0$ passe pela origem?

Solução

1º) Para que a circunferência passe pela origem, o ponto $(0, 0)$ deve anular o 1º membro da equação, portanto:

$$0^2 + 0^2 - m \cdot 0 - n \cdot 0 + p = 0 \Rightarrow p = 0$$

2º) Para que a circunferência exista, devemos impor:

$$D^2 + E^2 - 4AF = m^2 + n^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = m^2 + n^2 > 0$$

Resposta: $p = 0$ e $m^2 + n^2 > 0$.

- 265.** Qual deve ser a relação entre m , n e p para que a circunferência de equação $x^2 + y^2 - mx - ny + p = 0$ tenha centro na origem?

Solução

1º) Para que a circunferência tenha centro na origem devemos impor:

$$a = -\frac{D}{2A} = \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$b = -\frac{E}{2A} = \frac{n}{2} = 0 \Rightarrow n = 0$$

2º) Para que a circunferência exista, devemos impor:

$$D^2 + E^2 - 4AF = 0^2 + 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot p > 0 \Rightarrow p < 0$$

Resposta: $m = n = 0$ e $p < 0$.

- 266.** Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - mx - ny + p = 0$, obtenha a relação entre m , n e p para que a circunferência tangencie os eixos.
- 267.** Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - ax - by + c = 0$, que condições a , b e c devem satisfazer para que ela seja tangente ao eixo dos x ?
- 268.** Um quadrado tem vértices consecutivos $A(3, 3)$ e $B(4, 2)$. Determine a equação da circunferência circunscrita ao quadrado.

IV. Ponto e circunferência

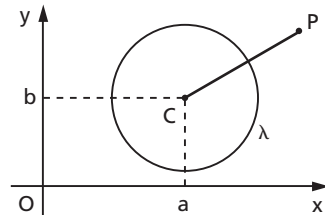
- 105.** Vamos resolver o problema: "dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma circunferência λ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, qual é a posição de P em relação a λ ?"

Calculemos a distância de $P(x_0, y_0)$ até o centro $C(a, b)$ e comparemos com o raio r .

São possíveis três casos:

1º caso: P é exterior a λ .

Isto ocorre se, e somente se, $PC > r$



isto é,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2$$

ou ainda $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0$

2º caso: P pertence a λ .

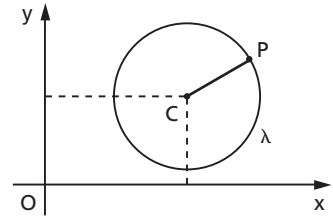
Isto ocorre se, e somente se, $PC = r$

isto é,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$$

ou ainda

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$$



3º caso: P é interior a λ .

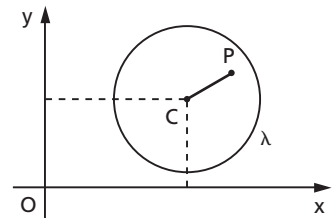
Isto ocorre se, e somente se, $PC < r$

isto é,

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2$$

ou ainda

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$$



Podemos resumir esta teoria assim: dada a circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, seja $f(x, y)$ o polinômio do primeiro membro, isto é:

$$f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$$

Quando é dado $P(x_0, y_0)$, cuja posição em relação a λ queremos determinar, substituímos (x_0, y_0) em f , isto é, calculamos:

$$f(x_0, y_0) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

então, conforme vimos:

$$f(x_0, y_0) > 0 \Leftrightarrow P \text{ exterior a } \lambda$$

$$f(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow P \in \lambda$$

$$f(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow P \text{ interior a } \lambda$$

106. Exemplos:

1º) Qual é a posição de $P(2, 3)$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 4x = 0$?

Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$

Então:

$$f(2, 3) = 2^2 + 3^2 - 4 \cdot 2 = 5 > 0 \Rightarrow P \text{ exterior a } \lambda$$

2º) Qual é a posição de $P(0, 0)$ e $\lambda: x^2 + y^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 0$?

Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2}y$

Então:

$$f(0, 0) = 0^2 + 0^2 - \sqrt{3} \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0 \Rightarrow P \in \lambda$$

3º) Determinar a posição de $P(0, 1)$ e $\lambda: 2x^2 + 2y^2 + 5x + y - 11 = 0$.

Temos $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 5x + y - 11 = 0$

Então:

$$f(0, 1) = 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 0 + 1 - 11 = -8 < 0 \Rightarrow P \text{ interior a } \lambda$$

107. Notemos que substituir $P(x_0, y_0)$ na função $f(x, y)$ é muito mais simples que calcular PC e comparar com o raio r , pois obter C e r é uma operação trabalhosa, principalmente se a equação da circunferência tiver coeficientes irracionais.

EXERCÍCIOS

269. Qual é a posição do ponto $P(3, 2)$ em relação à circunferência

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4?$$

Solução

A equação da circunferência fica:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

Substituindo as coordenadas de P no 1º membro:

$$f(3, 2) = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 = 9 + 4 - 6 - 4 - 2 = 1 > 0$$

Resposta: P é exterior.

- 270.** Qual é a posição do ponto $A(1, \sqrt{2})$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$?
- 271.** Determine a posição de P em relação à circunferência λ nos seguintes casos:
 1º) $P(-1, -4)$ e $(\lambda) x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$
 2º) $P(1, 1)$ e $(\lambda) x^2 + y^2 + 2y - 80 = 0$
 3º) $P(0, 0)$ e $(\lambda) 16x^2 + 16y^2 + 16\sqrt{2}x - 8y - 71 = 0$
- 272.** Determine p de modo que o ponto $A(7, 9)$ seja exterior à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - p = 0$.

Solução

Fazendo $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - p$, devemos ter: $f(7, 9) > 0$

$$f(7, 9) = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 - 2 \cdot 9 - p = 98 - p > 0$$

portanto: $p < 98$.

Para a existência da circunferência, devemos ter

$$D^2 + E^2 - 4AF = 4 + 4 + 4p > 0 \Rightarrow p > -2.$$

Resposta: $-2 < p < 98$.

V. Inequações do 2º grau

108. A principal consequência da teoria que acabamos de expor é o método para resolver inequações do 2º grau da forma:

$$f(x, y) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0,$$

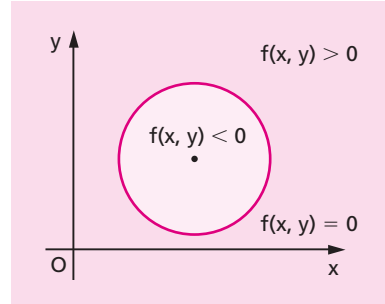
em que $f(x, y) = 0$ é equação de uma circunferência com coeficiente de x^2 positivo.

Dada a circunferência λ de equação $f(x, y) = 0$, o plano cartesiano fica dividido em três subconjuntos:

a) subconjunto dos pontos (x, y) exteriores a λ , que é a solução para $f(x, y) > 0$.

b) subconjunto dos pontos (x, y) pertencentes a λ , que é a solução para $f(x, y) = 0$.

c) subconjunto dos pontos (x, y) interiores a λ , que é a solução para $f(x, y) < 0$.



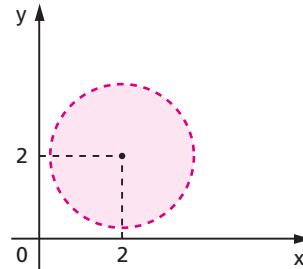
109. Exemplos:

1º) Resolver a inequação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 < 0$.

Temos:

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5$ e $f(x, y) = 0$ é a equação da circunferência λ de centro $C(2, 2)$ e raio $r = \sqrt{3}$.

O conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) < 0$ é o conjunto dos pontos interiores a λ (círculo aberto ou disco aberto).

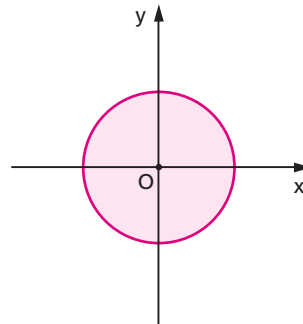


2º) Resolver a inequação $x^2 + y^2 \leq 1$.

Temos:

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $f(x, y) = 0$ é a equação da circunferência λ de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 1$.

O conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) \leq 0$ é o conjunto dos pontos de λ reunido com o dos pontos interiores a λ (círculo).

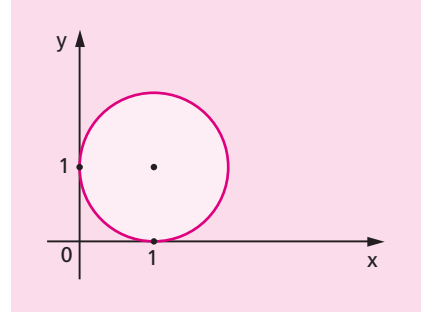


3º) Resolver a inequação $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \geq 0$.

Temos:

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ e $f(x, y) = 0$ representa uma circunferência λ de centro $C(1, 1)$ e raio $r = 1$.

O conjunto solução de $f(x, y) = 0$ é o plano cartesiano menos o conjunto dos pontos interiores a λ .



EXERCÍCIOS

273. Resolva as seguintes inequações:

1ª) $x^2 + y^2 \leq 16$

3ª) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 < 0$

2ª) $x^2 + y^2 \geq 9$

4ª) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 > 0$

274. Calcule a área do círculo que é a solução de $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 \leq 0$.

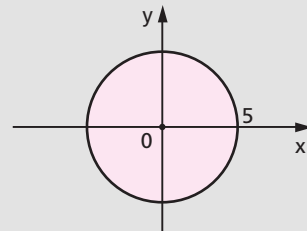
275. Resolva o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

Solução

1º) O conjunto solução da inequação

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 \leq 0$$

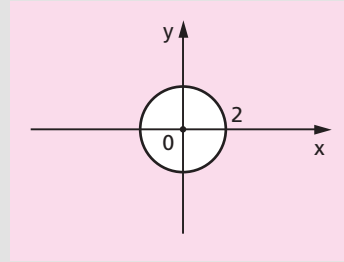
é o círculo de centro na origem e raio 5.



2º) O conjunto solução da inequação

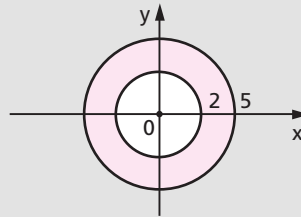
$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \geq 0$$

é o plano cartesiano menos o conjunto dos pontos interiores à circunferência de centro na origem e raio 2.



3º) Como as condições são simultâneas, basta fazer a interseção dos dois conjuntos já obtidos.

Resposta: O conjunto solução do sistema é a coroa circular da figura ao lado.



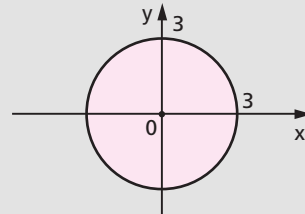
276. Resolva o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

Solução

1º) Conforme vimos, o conjunto solução da inequação

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9 \leq 0$$

é o círculo de centro na origem e raio 3.

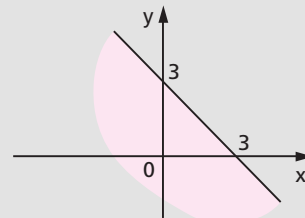


2º) Conforme vimos no capítulo V, que o conjunto solução da inequação

$$E(x, y) = x + y - 3 \leq 0$$

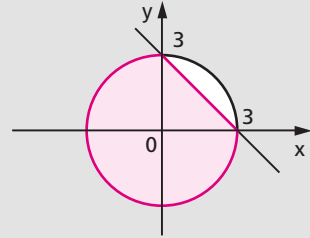
é o semiplano que contém a origem, definido pela reta

$$x + y - 3 = 0$$



3º) Como as inequações são simultâneas, basta fazer a interseção dos dois conjuntos já obtidos.

Resposta: O conjunto solução do sistema é o segmento circular da figura ao lado.



277. Resolva os seguintes sistemas:

$$1^\circ) \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$3^\circ) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 \geq 0 \end{cases}$$

$$2^\circ) \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ (x + 1)^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$4^\circ) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 \leq 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 10y + 18 \leq 0 \end{cases}$$

278. Qual é a representação gráfica do sistema $x^2 + y^2 > 9$ ou $x^2 + y^2 < 25$ no plano cartesiano?

279. Ache a região do plano de pontos P, cujas coordenadas (x, y) satisfazem as relações $x + y \leq 3$ e $x^2 + y^2 \leq 81$. Faça o gráfico da solução.

280. Dados os conjuntos:

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$B = \{(x, y) \mid x - y \leq k\}$$

determine k para que A seja subconjunto de B.

281. São dados os conjuntos:

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4x + 10y \leq -25\}$$

$$B = \{(x, y) \mid 3x + 4y \leq k\}$$

a) Determine os valores de k para os quais A é um subconjunto de B.

b) Determine os valores de k para os quais A e B são disjuntos.

VI. Reta e circunferência

110. Interseção

Dadas uma reta $s: Ax + By + C = 0$ e uma circunferência

$\lambda: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, achar a interseção de r com λ é determinar os pontos $P(x, y)$ que pertencem às duas curvas.

É imediato que, se $P \in r$ e $P \in \lambda$, P satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

que pode ser resolvido facilmente por substituição.

111. Exemplos:

1º) Obter a interseção de $s: y = x$ com $\lambda: x^2 + y^2 = 2$.

Substituindo, temos:

$$x^2 + (x)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 = y \\ \text{ou} \\ x = -1 = y \end{cases}$$

Os pontos comuns a s e λ são $P(1, 1)$ e $Q(-1, -1)$.

Resposta: $s \cap \lambda = \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

2º) Obter a interseção de $t: y = x - 2$ com $\lambda: x^2 + y^2 = 2$.

Substituindo, temos:

$$x^2 + (x - 2)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

Só há um ponto comum a t e λ , que é $P(1, -1)$.

Resposta: $t \cap \lambda = \{(1, -1)\}$.

3º) Obter a interseção de $e: y = x - 3$ com $\lambda: x^2 + y^2 = 2$.

Substituindo, temos:

$$x^2 + (x - 3)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 7 = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

Não há ponto comum a e e λ .

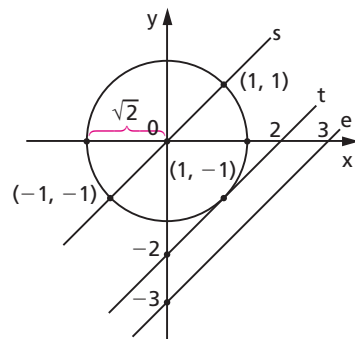
Resposta: $e \cap \lambda = \emptyset$.

A interpretação geométrica que podemos dar a esses exemplos é clara:

s e λ são secantes

t e λ são tangentes

e e λ são exteriores



112. Posições relativas

A posição relativa de uma reta $s: Ax + By + C = 0$ e uma circunferência $\lambda: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é determinada pesquisando o número de soluções do sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

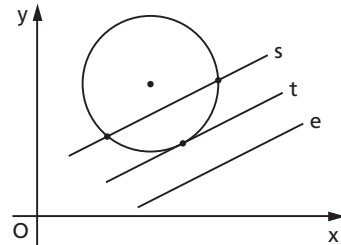
Conforme vimos, aplicando o método da substituição, a equação da circunferência se reduz a uma equação do 2º grau a uma incógnita.

É o discriminante (Δ) dessa equação que define o número de soluções do sistema e, portanto, a posição da reta e da circunferência.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \text{secantes}$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \text{tangentes}$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \text{exteriores}$$



113. Exemplos:

1º) A reta $y = 2x + 1$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$ são exteriores pois, substituindo y , temos:

$$x^2 + (2x + 1)^2 - 2x = 0 \Rightarrow 5x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16 < 0$$

2º) A reta $3x + 4y = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$ são secantes pois, substituindo y , temos:

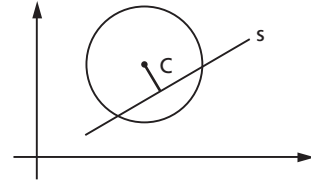
$$x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 + x + \left(-\frac{3x}{4}\right) - 1 = 0 \Rightarrow 25x^2 + 4x - 16 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4(25)(-16) = 1616 > 0$$

114. A posição relativa de uma reta $u: Ax + By + C = 0$ e uma circunferência $\lambda: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ pode ser determinada com mais facilidade comparando a distância entre o centro e a reta com o raio. São possíveis três casos:

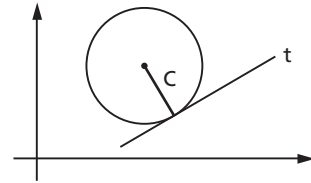
1º caso:

$$\left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| < r \Leftrightarrow \text{secantes}$$



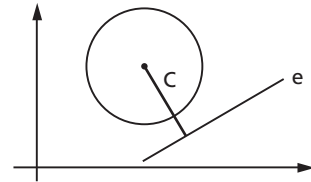
2º caso:

$$\left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = r \Leftrightarrow \text{tangentes}$$



3º caso:

$$\left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| > r \Leftrightarrow \text{exteriores}$$



Assim, por exemplo, qual é a posição da reta $u: 3x + 4y - 10 = 0$ e da circunferência $\lambda: x^2 + y^2 = 9$?

$$d_{u, C} = \left| \frac{3(0) + 4(0) - 10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 2 < 3 = r$$

então u e λ são secantes.

EXERCÍCIOS

282. Calcule a distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ à reta $12x + 5y = 0$.

283. Qual é a posição da reta $r: 4x + 3y = 0$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 1 = 0$?

Solução 1

Da 1ª equação $x = -\frac{3y}{4}$; substituindo na segunda:

$$\left(-\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 + 5\left(-\frac{3y}{4}\right) - 7y - 1 = 0$$

$$9y^2 + 16y^2 - 60y - 112y - 16 = 0$$

$$25y^2 - 172y - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow r \text{ é secante}$$

Solução 2

A circunferência tem centro $C\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e raio

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - F} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{49}{4} + 1} = \frac{\sqrt{78}}{2} \cong 4,4.$$

A distância do centro à reta r é:

$$d = \left| \frac{4\left(-\frac{5}{2}\right) + 3\left(\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{16 + 9}} \right| = \left| \frac{21 - 20}{10} \right| = \frac{1}{10} = 0,1$$

Como $d < R$, r é secante.

- 284.** Qual é a posição da reta $r: 5x + 12y + 8 = 0$ em relação à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 2x = 0$?
- 285.** Dadas a reta $r: 3x + y = 0$ e a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$, obtenha:
 a) a posição relativa de r e λ . b) a interseção de r com λ .
- 286.** Determine o ponto P onde a circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ encontra o eixo dos x .
- 287.** Determine os pontos P e Q onde a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 = 0$ encontra a reta cuja equação é $3x + 2y + 7 = 0$.
- 288.** Dadas a circunferência $(x - 3)^2 + y^2 = 25$ e a reta $x = k$, para que valores de k a reta intercepta a circunferência em pontos distintos?

- 289.** Determine c de modo que a reta $r: 4x - 3y + c = 0$ seja exterior à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Solução 1

Da 1ª equação tiramos $y = \frac{4x + c}{3}$ e substituindo na 2ª:

$$x^2 + \left(\frac{4x + c}{3}\right)^2 - 2x - 2\left(\frac{4x + c}{3}\right) + 1 = 0$$

donde vem: $25x^2 + (8c - 42)x + (c^2 - 6c + 9) = 0$ cujo discriminante é $\Delta = (8c - 42)^2 - 100(c^2 - 6c + 9) = -36c^2 - 72c + 864$

Para que r seja exterior a λ devemos impor $\Delta < 0$; portanto:

$$-36c^2 - 72c + 864 < 0 \Rightarrow c^2 + 2c - 24 > 0 \Rightarrow c < -6 \text{ ou } c > 4$$

Solução 2

A circunferência λ tem equação reduzida $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$, portanto seu centro é $C(1, 1)$ e seu raio é $R = 1$.

Para que a reta r seja exterior a λ , devemos impor $d_{Cr} > R$, portanto:

$$d_{Cr} = \left| \frac{4(1) - 3(1) + c}{\sqrt{16 + 9}} \right| = \left| \frac{c + 1}{5} \right| > 1$$

isto é, $(c + 1)^2 > 25 \Rightarrow c^2 + 2c - 24 > 0 \Rightarrow c < -6 \text{ ou } c > 4$

Resposta: $c < -6$ ou $c > 4$.

- 290.** Dadas a reta $r: x + y + c = 0$ e a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$, obtenha c de modo que r seja exterior a λ .
- 291.** Determine as equações das paralelas à reta $12x - 5y + 7 = 0$ exteriores à circunferência $x^2 + y^2 = 9$.
- 292.** Quais são as equações das retas paralelas ao eixo dos x e tangentes à circunferência $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$?
- 293.** Determine a equação da reta que passa pelo centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ e é perpendicular à reta da equação $x + 2y - 14 = 0$.
- 294.** Obtenha a equação da circunferência de centro $C(1, 2)$ e que tangencia a reta de equação $5x + 12y + 10 = 0$.

- 295.** Qual é o comprimento da corda que a reta $s: 7x - 24y - 4 = 0$ determina na circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$?

Solução 1

Vamos resolver o sistema formado pelas equações de s (1) e λ (2):

$$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow x^2 + \left(\frac{7x-4}{24}\right)^2 - 2x + 6\left(\frac{7x-4}{24}\right) - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 8x - 368 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -\frac{92}{25}$$

$$\text{em } (1) \ y = \frac{7x-4}{24} \text{ portanto } \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 1 \\ x = -\frac{92}{25} \Rightarrow y = -\frac{31}{25} \end{cases}$$

Assim, os pontos de interseção de r com λ são $A(4, 1)$ e $B\left(-\frac{92}{25}, -\frac{31}{25}\right)$, logo:

$$\ell = d_{AB} = \sqrt{\left(4 + \frac{92}{25}\right)^2 + \left(1 + \frac{31}{25}\right)^2} = \frac{200}{25} = 8$$

Solução 2

A circunferência λ tem equação reduzida:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 - 25 = 0$$

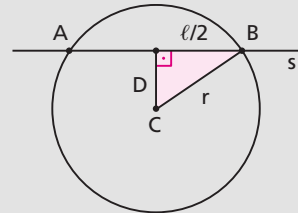
então seu centro é $C(1, -3)$ e seu raio é $r = 5$.

$$d_{Cs} = \left| \frac{7(1) - 24(-3) - 4}{\sqrt{49 + 576}} \right| = \frac{75}{25} = 3$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\frac{\ell^2}{4} + d^2 = r^2 \Rightarrow \frac{\ell}{2} = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow \ell = 8$$

Resposta: $\ell = 8$.



- 296.** Determine o comprimento da corda determinada pela reta $x - y = 0$ sobre a circunferência $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 36$.

- 297.** Determine o comprimento da corda determinada pela reta $x + y - 1 = 0$ sobre a circunferência de centro $C(-2, 3)$ e raio $2\sqrt{2}$.

- 298.** Determine as áreas dos triângulos isósceles inscritos na circunferência $\lambda: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 100$ e que têm base sobre a reta $r: 3x - 4y + 19 = 0$.
- 299.** Determine os vértices do triângulo retângulo inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, o qual tem hipotenusa paralela à reta $2x + y - 6 = 0$ e um cateto paralelo à reta $x - 6 = 0$.
- 300.** Dadas a circunferência $x^2 + y^2 - 3y - 1 = 0$ e a reta $3x + 2y - 508 = 0$, determine a área de um triângulo inscrito na circunferência e com lados paralelos aos eixos cartesianos e à reta dada.

VII. Duas circunferências

115. Interseção

Dadas duas circunferências

$$\lambda_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$$

e

$$\lambda_2: (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$$

achar a interseção de λ_1 com λ_2 é determinar os pontos $P(x, y)$ que pertencem às duas curvas.

Se $P(x, y)$ pertence a λ_1 e λ_2 , então P satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

que pode ser resolvido assim:

- 1) subtrai-se membro a membro as equações;
- 2) isola-se uma das incógnitas da equação do 1º grau obtida e substitui-se em uma das equações do sistema.

116. Exemplo:

Obter a interseção da circunferência de centro $C_1(0, 2)$ e raio $r_1 = 2$ com a circunferência de centro $C_2(1, 0)$ e raio $r_2 = 1$.

Temos:

$$\begin{cases} (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Subtraindo, vem: $-4y + 2x = 0 \Rightarrow x = 2y$.

Substituindo na 1ª circunferência, vem:

$$(2y - 0)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow 5y^2 - 4y = 0$$

$$\text{donde } \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 2y = 0 \\ \text{ou} \\ y = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 2y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Assim, as circunferências têm dois pontos em comum: $P(0, 0)$ e $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Resposta: $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \left\{ (0, 0), \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\}$.

117. Posições relativas

A posição relativa de duas circunferências

$$\lambda_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2 \quad \text{e} \quad \lambda_2: (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$$

é determinada comparando a distância C_1C_2 entre os centros com a soma $r_1 + r_2$ ou com a diferença $|r_1 - r_2|$ dos raios.

Calculada a distância entre os centros:

$$d = C_1C_2 = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

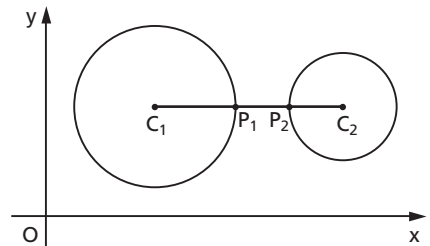
são possíveis seis casos distintos, conforme figuras a seguir.

1º caso:

$$d > r_1 + r_2 \quad \text{pois}$$

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{P_1P_2}_{> 0} + \underbrace{P_2C_2}_{r_2} > r_1 + r_2$$

circunferências exteriores



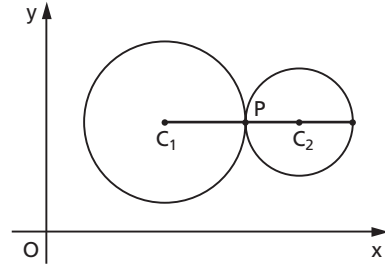
CIRCUNFERÊNCIAS

2º caso:

$$d = r_1 + r_2 \quad \text{pois}$$

$$d = \underbrace{C_1P}_{r_1} + \underbrace{PC_2}_{r_2}$$

circunferências tangentes exteriormente

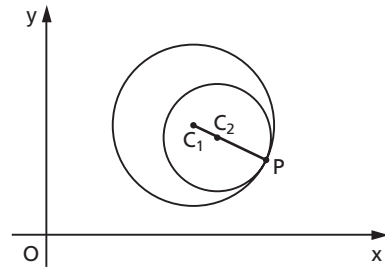


3º caso:

$$d = |r_1 - r_2| \quad \text{pois}$$

$$d = \underbrace{C_1P}_{r_1} - \underbrace{PC_2}_{r_2}$$

circunferências tangentes interiormente



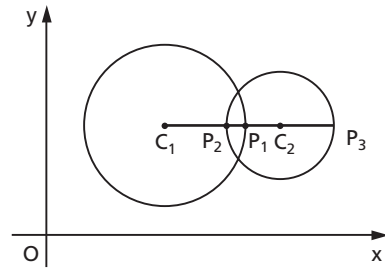
4º caso:

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \quad \text{pois}$$

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{C_2P_2}_{r_2} - \underbrace{P_1P_2}_{>0} < r_1 + r_2$$

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} + \underbrace{P_1P_3}_{>0} - \underbrace{P_3C_2}_{r_2} > r_1 - r_2$$

circunferências secantes

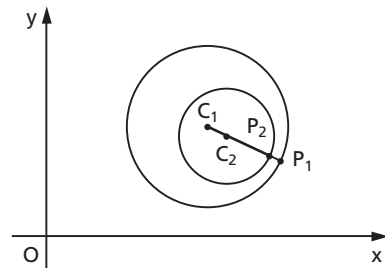


5º caso:

$$0 \leq d < |r_1 - r_2| \quad \text{pois}$$

$$d = \underbrace{C_1P_1}_{r_1} - \underbrace{C_2P_2}_{r_2} - \underbrace{P_1P_2}_{>0} < r_1 - r_2$$

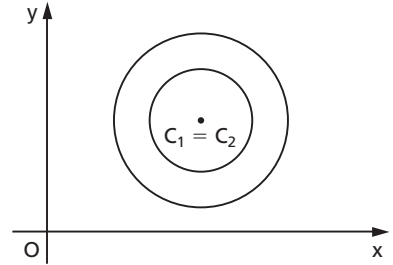
circunferência de menor raio é interior à outra.



6º caso:

$$d = 0$$

circunferências concêntricas (caso particular do 5º)



118. Exemplo:

Qual é a posição das circunferências

$$\lambda_1: x^2 + y^2 = 49 \text{ e } \lambda_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0?$$

Temos:

$$\lambda_1: \text{centro } C_1(0, 0) \text{ e raio } r_1 = 7$$

$$\lambda_2: \text{centro } C_2(3, 4) \text{ e raio } r_2 = 6$$

$$d_{C_1C_2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$

Comparando com a soma dos raios: $C_1C_2 = 5$ e $r_1 + r_2 = 13$, portanto $C_1C_2 < r_1 + r_2$, concluímos que λ_1 e λ_2 não podem ser exteriores, nem tangentes exteriormente.

Comparando com a diferença dos raios: $C_1C_2 = 5$ e $r_1 - r_2 = 1$, portanto $C_1C_2 > r_1 - r_2$, concluímos que λ_1 e λ_2 não podem ser concêntricas, uma interior à outra ou tangentes interiormente.

Por exclusão, λ_1 e λ_2 são secantes.

Notemos que este é o caso que exige mais cuidado, pois são necessárias duas comparações ($C_1C_2 < r_1 + r_2$ e $C_1C_2 > r_1 - r_2$); nos demais casos, ao comparar C_1C_2 com $r_1 + r_2$ ou com $r_1 - r_2$, já podemos tirar a conclusão.

EXERCÍCIOS

301. Qual é a posição relativa das circunferências

$$x^2 + y^2 = 49 \text{ e } x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0?$$

Solução

$$\text{Temos: } x^2 + y^2 = 49 \Rightarrow C_1(0, 0) \text{ e } r_1 = 7$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \Rightarrow C_2(3, 4) \text{ e } r_2 = 2$$

$$d_{C_1C_2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5 = r_1 - r_2$$

Resposta: Tangentes interiormente.

302. Qual é a posição relativa de λ e λ' nos seguintes casos:

$$1^\circ) \lambda: x^2 + y^2 = 16$$

$$\text{e } \lambda': x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$

$$2^\circ) \lambda: 4x^2 + 4y^2 - 4y - 3 = 0$$

$$\text{e } \lambda': x^2 + y^2 - y = 0$$

$$3^\circ) \lambda: x^2 + y^2 = 18$$

$$\text{e } \lambda': x^2 + y^2 + 20x - 10y + 124 = 0$$

$$4^\circ) \lambda: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$$

$$\text{e } \lambda': x^2 + y^2 + 4x - 12y + 24 = 0$$

$$5^\circ) \lambda: x^2 + y^2 = 81$$

$$\text{e } \lambda': x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$$

303. Obtenha a interseção das circunferências

$$\lambda: x^2 + y^2 = 100 \text{ e } \lambda': x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68 = 0.$$

Solução

Subtraindo membro a membro, temos:

$$(x^2 + y^2 - 100) - (x^2 + y^2 - 12x - 12y + 68) = 0$$

$$12x + 12y - 168 = 0 \Rightarrow x + y - 14 = 0 \Rightarrow y = 14 - x$$

Subtraindo y em λ :

$$x^2 + (14 - x)^2 = 100 \Rightarrow 2x^2 - 28x + 96 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \begin{cases} x = 6 \Rightarrow y = 14 - 6 = 8 \\ \text{ou} \\ x = 8 \Rightarrow y = 14 - 8 = 6 \end{cases}$$

Resposta: $\lambda \cap \lambda' = \{(6, 8), (8, 6)\}$.

304. Dadas as circunferências

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0,$$

ache seus pontos de interseção.

- 305.** As circunferências de equação
 $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 16 = 0$
 $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$
interceptam-se nos pontos A e B. Determine a distância do centro da circunferência de raio maior à reta AB.
- 306.** Obtenha as circunferências de centro $C(2, -1)$ e tangentes à circunferência
 $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$
- 307.** Dadas as circunferências $C_1: x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$ e $C_2: x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$, seja Q o ponto de interseção de C_1 com C_2 que tem ordenada positiva. Seja O_2 o centro de C_2 . Determine as coordenadas de P, ponto de interseção da reta QO_2 com a circunferência C_1 .

CAPÍTULO VI

Problemas sobre circunferências

Há duas coleções de problemas clássicos sobre circunferências que merecem um destaque especial: problemas de tangência (entre reta e circunferência) e problemas de determinação de circunferências.

I. Problemas de tangência

119. 1º problema

"Conduzir as tangentes a uma circunferência dada, paralelas a uma reta dada."

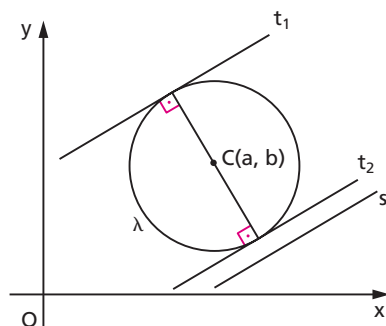
$$\text{Dados } \begin{cases} \lambda: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ s: Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

$$\text{Obter: } t_1 \text{ e } t_2 \begin{cases} \text{paralelas a } s \\ \text{tangentes a } \lambda \end{cases}$$

Solução

1) Consideremos a equação do feixe de retas paralelas a s (veja item 45):

$$Ax + By + k = 0$$



2) As retas t_1 e t_2 desse feixe correspondem dois valores particulares de k na equação do feixe. Para determinar esses dois valores (k_1 e k_2), devemos impor a condição de tangência:

$$d_{C, t_1} = d_{C, t_2} = r$$

Logo,

$$\left| \frac{A \cdot a + B \cdot b + k}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = r$$

$$(Aa + Bb + k)^2 = r^2 \cdot (A^2 + B^2)$$

Donde vem:

$$k^2 + 2(Aa + Bb)k + (A^2a^2 + B^2b^2 + 2AaBb - A^2r^2 - B^2r^2) = 0$$

equação do 2º grau cujas raízes são k_1 e k_2 .

Resposta: $Ax + By + k_1 = 0$ e
 $Ax + By + k_2 = 0$

120. Exemplo:

Determinar as equações das retas t que são paralelas a $s: 12x + 5y + 1 = 0$ e tangentes a $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

Solução

1º) centro e raio de λ

$$\lambda: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 25 = 0 \Rightarrow C(1, 2) \text{ e } r = 5$$

2º) equação de t

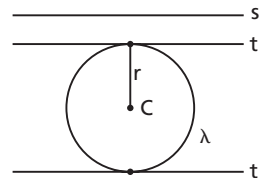
$$t // s \Rightarrow (t) 12x + 5y + c = 0$$

$$d_{C, t} = r \Rightarrow \left| \frac{12(1) + 5(2) + c}{\sqrt{144 + 25}} \right| = 5$$

$$|c + 22| = 65 \Rightarrow c + 22 = \pm 65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 43 \text{ ou } c = -87$$

Resposta: $12x + 5y + 43 = 0$ ou $12x + 5y - 87 = 0$.



EXERCÍCIOS

308. Determine as equações das retas (t) tangentes à circunferência (λ) e paralelas à reta (r) nos seguintes casos:

$$1^\circ) \lambda: x^2 + y^2 = 9 \quad \text{e} \quad r: \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$$

$$2^\circ) \lambda: x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \quad \text{e} \quad r: y = 2x$$

$$3^\circ) \lambda: x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0 \quad \text{e} \quad r: 3x + 4y - 10 = 0$$

309. Escreva as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$, paralelas à reta $y = x$.

310. Determine as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ e perpendiculares à reta $x = -y$.

311. Obtenha as equações das retas t tangentes à circunferência λ e que formam ângulos θ com a reta r nos seguintes casos:

$$1^\circ) \lambda: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 34 = 0, \theta = 90^\circ \quad \text{e} \quad r: x + 3y = 0$$

$$2^\circ) \lambda: x^2 + y^2 + 2y - 24 = 0, \theta = 90^\circ \quad \text{e} \quad r: x - 2y = 0$$

$$3^\circ) \lambda: x^2 + y^2 = 49, \theta = 45^\circ \quad \text{e} \quad r: 4x + y - 3 = 0$$

312. Obtenha a equação de uma reta paralela a $r: y = 2x$ que determine na circunferência $\lambda: x^2 + y^2 = 100$ uma corda de comprimento $\ell = 16$.

121. 2º problema

"Conduzir por um ponto dado as retas tangentes a uma circunferência dada."

$$\text{Dados} \begin{cases} \lambda: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ P(x_0, y_0) \end{cases}$$

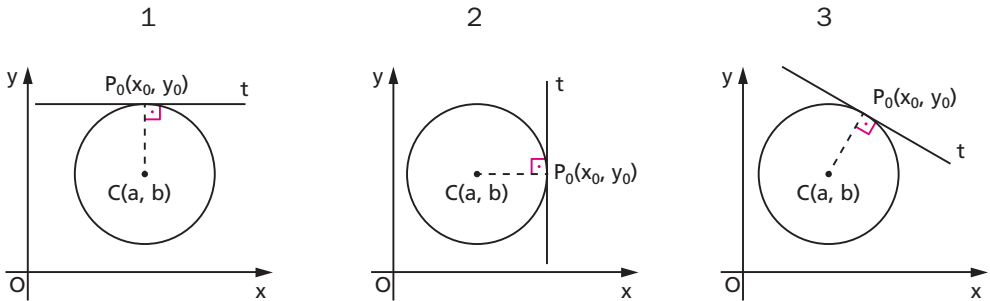
$$\text{Obter: } t_1 \text{ e } t_2 \begin{cases} \text{passando por } P \\ \text{tangentes a } \lambda \end{cases}$$

Solução

Utilizando a teoria do item 105, verificamos inicialmente qual é a posição de P em relação a λ . Existem três casos possíveis:

1º caso: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2 \Rightarrow P_0$ é interior à circunferência e o problema não tem solução.

2º caso: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2 \Rightarrow P_0$ pertence à circunferência e o problema tem uma única solução: $t_1 = t_2$.



1) Se $x_0 = a$, a equação da tangente é $y = y_0$

2) Se $y_0 = b$, a equação da tangente é $x = x_0$

3) Se $x_0 \neq a$ e $y_0 \neq b$, consideremos o feixe de retas de centro P_0 :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

e determinemos m impondo a condição de tangência:

$$t \perp P_0C \Rightarrow m = -\frac{1}{m_{P_0C}} = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b} = \frac{a - x_0}{y_0 - b}$$

a equação da tangente é $y - y_0 = \frac{a - x_0}{y_0 - b} (x - x_0)$

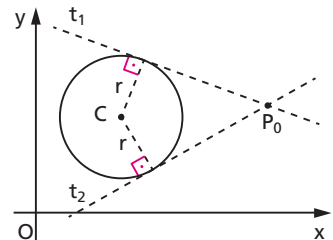
3º caso: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2 \Rightarrow P_0$ é exterior à circunferência e o problema tem duas soluções.

1) Consideremos o feixe de retas concorrentes em P_0 . Sua equação é:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

isto é,

$$mx - y + (y_0 - mx_0) = 0$$



2) As retas t_1 e t_2 constituem retas particulares desse feixe que obedecem à condição de tangência:

$$d_{C, t_1} = d_{C, t_2} = r$$

Logo:

$$\left| \frac{m \cdot a - b + (y_0 - m \cdot x_0)}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = r$$

e daí resulta uma equação do 2º grau cujas raízes são m_1 e m_2 .

Resposta: $y - y_0 = m_1(x - x_0)$ e $y - y_0 = m_2(x - x_0)$

122. Exemplos:

1º) Determinar as equações das retas t que passam por $P(2, 3)$ e são tangentes a $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$.

Solução

1º) centro e raio de λ

$$\lambda: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 5 = 0 \Rightarrow C(1, 1) \text{ e } r = \sqrt{5}$$

2º) número de soluções

$$d_{CP} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{5} = r \Rightarrow P \in \lambda \Rightarrow 1 \text{ solução}$$

3º) t , por P , perpendicular a \overline{CP}

$$m_{CP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2 \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_{CP}} = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in t \\ m_t = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow t: y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

Resposta: $x + 2y - 8 = 0$.

2º) Determinar as equações das retas t que passam por $P(-2, 2)$ e são tangentes a $\lambda: x^2 + y^2 = 1$.

Solução

1º) centro e raio de λ :

$$C(0, 0) \text{ e } r = 1$$

2º) número de soluções:

$$d_{CP} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} > r \Rightarrow P \text{ externo } \lambda \Rightarrow 2 \text{ soluções}$$

3º) t passa por P , então sua equação é:

$$y - 2 = m(x + 2)$$

$$\text{ou seja, } mx - y + 2(m + 1) = 0$$

4º) $d_{C,t} = r$, então:

$$\left| \frac{m(0) - 0 + 2(m + 1)}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = 1$$

e daí:

$$4(m + 1)^2 = (\sqrt{m^2 + 1})^2 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 = m^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m^2 + 8m + 3 = 0 \Rightarrow m = -4 - \sqrt{7} \text{ ou } m = -4 + \sqrt{7}$$

$$\text{Resposta: } y - 2 = (-4 - \sqrt{7})(x + 2) \text{ ou } y - 2 = (-4 + \sqrt{7})(x + 2).$$

EXERCÍCIOS

313. Obtenha as equações das retas (t) tangentes à circunferência (λ) conduzidas pelo ponto P nos seguintes casos:

1º) $\lambda: x^2 + y^2 = 100$ e $P(-6, 8)$

2º) $\lambda: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 164 = 0$ e $P(-3, 11)$

3º) $\lambda: x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ e $P(-5, 5)$

4º) $\lambda: x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ e $P(-1, 2)$

314. Dada a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e um ponto (x_0, y_0) pertencente a ela, qual é a equação da reta que passa por (x_0, y_0) e é tangente à circunferência dada?

315. É dada a circunferência $x^2 + y^2 + 2ay = 0$, $a > 0$, e a reta $x + a = 0$. Seja P um ponto do eixo Ox de abscissa λ . Por esse ponto conduzem-se as tangentes à circunferência.

a) Exprima as coordenadas dos pontos de tangência em função de λ e de a .

b) Prove que os pontos de tangência e o ponto Q , de ordenada λ , da reta $x + a = 0$, estão alinhados.

- 316.** Determine as tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ nos seus pontos de abscissa 1.
- 317.** Determine as retas do feixe: $\lambda(2x + y + 5) + \mu(x + y + 1) = 0$ tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.
- 318.** Determine as retas do feixe $\lambda(3x - y) + \mu(x + y - 4) = 0$ tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 2y = 0$.
- 319.** Determine o coeficiente angular das retas que passam pelo ponto $P(3, 0)$ e são externas à circunferência $x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0$.
- 320.** Determine as equações das retas que passam pela origem e são externas às circunferências
 $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$ e
 $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0$
- 321.** A circunferência $x^2 + y^2 + 5x + 8y + a = 0$ determina no eixo Ox uma corda de comprimento 9. Calcule a .
- 322.** Obtenha a equação de uma reta que passe pela origem e determine na circunferência $\lambda: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ uma corda de comprimento $\ell = \frac{12\sqrt{85}}{17}$.
- 323.** Obtenha a equação de uma reta que contenha $P(2, 1)$ e determine na circunferência $\lambda: (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$ uma corda de comprimento $\ell = 2\sqrt{5}$.
- 324.** A reta $3x + y = 0$ contém o diâmetro de uma circunferência. Uma reta, que forma ângulo de 45° com a primeira e tem declive positivo, corta a circunferência no ponto $(0, 2)$ e determina sobre ela uma corda de comprimento $\sqrt{5}$ unidades. Estabeleça as equações da segunda reta e da circunferência.
- 325.** Obtenha a equação da reta que contém $P(3, -2)$ e determina na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 36$ uma corda cujo ponto médio é P .
- 326.** Determine a área da superfície delimitada pelos eixos e pela tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 20$ no seu ponto $(2, -4)$.
- 327.** Obtenha as equações das tangentes comuns às circunferências $x^2 + y^2 = 64$ e $\left(x - \frac{25}{3}\right)^2 + y^2 = 9$.

II. Determinação de circunferências

123. Em Geometria Analítica, "obter" ou "construir" ou "determinar" uma circunferência significa obter a sua equação:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

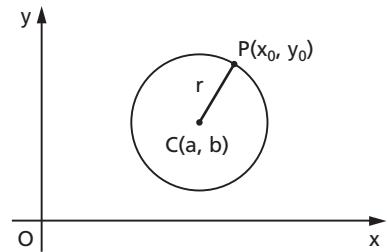
pois, tendo-se a equação então determinados o centro $C(a, b)$ e o raio r e, assim, a circunferência está localizada perfeitamente no plano cartesiano.

A maioria dos problemas de determinação de circunferência apresenta como incógnitas a , b e r , e portanto necessita de três equações independentes para ser resolvida.

124. Não devemos, na resolução desses problemas, esquecer os seguintes tópicos da teoria já dada:

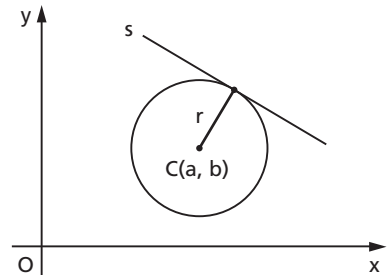
1º) Um ponto $P(x_0, y_0)$ pertence a uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio r se, e somente se, a distância entre C e P é igual ao raio.

$$P \in \lambda \Leftrightarrow (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 = r^2$$



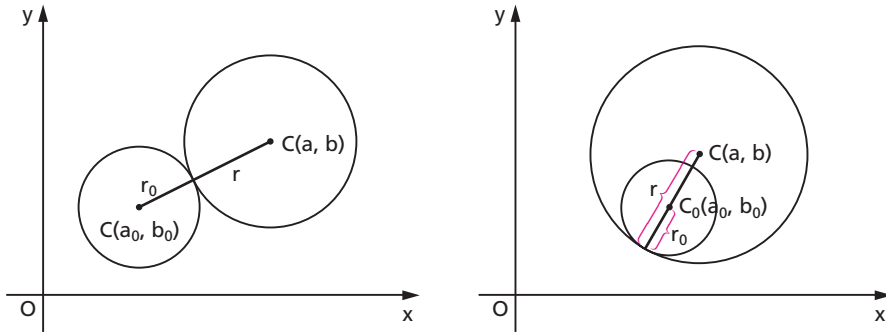
2º) Uma reta $(s) Ax + By + C = 0$ é tangente a uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio r se, e somente se, a distância entre s e C é igual ao raio.

$$s \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow \left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = r$$



3º) Uma circunferência λ_0 de centro $C_0(a_0, b_0)$ e raio r_0 é tangente a outra circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio r se, e somente se, a distância entre C_0 e C é igual à soma ou à diferença dos raios.

$$\lambda_0 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 = (r \pm r_0)^2$$



Vejamos agora alguns problemas clássicos.

125. 1º problema

"Determinar uma circunferência λ que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$."

Solução

$$P_1 \in \lambda \Leftrightarrow (a - x_1)^2 + (b - y_1)^2 = r^2$$

$$P_2 \in \lambda \Leftrightarrow (a - x_2)^2 + (b - y_2)^2 = r^2$$

$$P_3 \in \lambda \Leftrightarrow (a - x_3)^2 + (b - y_3)^2 = r^2$$

Este sistema é equivalente ao seguinte:

$$x_1(-2a) + y_1(-2b) + 1(a^2 + b^2 - r^2) = -(x_1^2 + y_1^2)$$

$$x_2(-2a) + y_2(-2b) + 1(a^2 + b^2 - r^2) = -(x_2^2 + y_2^2)$$

$$x_3(-2a) + y_3(-2b) + 1(a^2 + b^2 - r^2) = -(x_3^2 + y_3^2)$$

cujas incógnitas são $-2a$, $-2b$, $a^2 + b^2 - r^2$.

Resolvido o sistema, tiramos a , b e r .

Um exemplo deste problema é o exercício 13 do capítulo 1.

126. 2º problema

"Determinar uma circunferência λ que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e tem raio r (dado)."

Solução

$$\left. \begin{aligned} P_1 \in \lambda &\Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2 \\ P_2 \in \lambda &\Leftrightarrow (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = r^2 \end{aligned} \right\} (S)$$

O sistema (S), resolvido, dá os valores de a e b (incógnitos).

127. Exemplo:

Determinar a equação da circunferência que contém $A(-3, 0)$ e $B(0, 3)$ e tem raio 3.

$$\left. \begin{aligned} A \in \lambda &\Leftrightarrow (a + 3)^2 + (b - 0)^2 = 9 \quad (1) \\ B \in \lambda &\Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 3)^2 = 9 \quad (2) \end{aligned} \right\}$$

Desenvolvendo e subtraindo membro a membro, obtemos:

$$6a + 6b = 0 \Rightarrow a = -b \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), vem:

$$(a + 3)^2 + (-a - 0)^2 = 9 \Rightarrow 2a^2 + 6a = 0$$

$$\text{donde } \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow C(0, 0) \\ \text{ou} \\ a = -3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow C(-3, 3) \end{cases}$$

Resposta: $x^2 + y^2 = 9$ ou $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

128. 3º problema

"Determinar uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ dado, que é tangente à reta $s: Ax + By + C = 0$ dada."

Solução 1

$$(S) \begin{cases} Ax + By + C = 0 \rightarrow \text{equação da reta tangente} \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \rightarrow \begin{cases} \text{equação de uma circunferência} \\ \text{de centro } C \text{ e raio } r \end{cases} \end{cases}$$

Por substituição obtemos uma equação do 2º grau em x ou em y . A condição de tangência é que $\Delta = 0$ nessa equação. Impondo essa condição, calculamos r (única incógnita).

Solução 2

Notamos que r é a distância de C à reta dada, isto é:

$$r = \left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

129. Exemplo:

Obter uma circunferência de centro no ponto $C(1, 2)$ e tangente à reta $s: x - y + 3 = 0$.

$$r = d_{C, s} = \left| \frac{1 - 2 + 3}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Resposta: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

130. 4º problema

"Determinar uma circunferência λ que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dados e é tangente à reta $s: Ax + By + C = 0$ dada."

Solução

$$\left. \begin{aligned} P_1 \in \lambda &\Leftrightarrow (a - x_1)^2 + (b - y_1)^2 = r^2 \\ P_2 \in \lambda &\Leftrightarrow (a - x_2)^2 + (b - y_2)^2 = r^2 \\ s \text{ tg } \lambda &\Leftrightarrow \left(\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = r^2 \end{aligned} \right\} (S)$$

Resolvido o sistema (S), obtemos as incógnitas a, b e r .

131. Exemplo:

Obter uma circunferência que passa por $A(0, 1)$ e $B(1, 0)$ e é tangente à reta $s: x + y + 1 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} A \in \lambda &\Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 1)^2 = r^2 \quad (1) \\ B \in \lambda &\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 0)^2 = r^2 \quad (2) \\ s \text{ tg } \lambda &\Leftrightarrow \left(\frac{a + b + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 = r^2 \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

Desenvolvendo e subtraindo (1) e (2) membro a membro, temos:

$$2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b \quad (4)$$

$$(4) \text{ em } (1) \Rightarrow a^2 + (a - 1)^2 = r^2$$

$$(4) \text{ em } (3) \Rightarrow \left(\frac{a + a + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 = r^2$$

Donde vem:

$$a^2 + (a - 1)^2 = \left(\frac{2a + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 \Rightarrow 2a^2 - 2a + 1 = \frac{4a^2 + 4a + 1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{8} \quad (4)$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{8} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} r^2 = \frac{1}{64} + \frac{49}{64} = \frac{25}{32}$$

$$\text{Resposta: } \left(x - \frac{1}{8} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{8} \right)^2 = \frac{25}{32}.$$

132. 5º problema

"Determinar uma circunferência λ que passa por $P(x_1, y_1)$ dado e é tangente às retas $s: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e $t: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ dadas."

Solução

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \in \lambda \Leftrightarrow (a - x_1)^2 + (b - y_1)^2 = r^2 \\ s \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{A_1a + B_1b + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right)^2 = r^2 \\ t \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{A_2a + B_2b + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right)^2 = r^2 \end{array} \right\} (S)$$

Resolvido o sistema (S), obtemos as incógnitas a , b e r .

133. Exemplo:

Obter uma circunferência que passa por $P(0, 0)$ e é tangente às retas $s: 3x + 4y + 2 = 0$ e $t: 4x - 3y + 1 = 0$.

$$P \in \lambda \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = r^2 \quad (1)$$

$$s \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow \left| \frac{3a + 4b + 2}{5} \right| = r \quad (2)$$

$$t \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow \left| \frac{4a - 3b + 1}{5} \right| = r \quad (3)$$

$$\text{Comparando (2) e (3), vem: } \left| \frac{3a + 4b + 2}{5} \right| = \left| \frac{4a - 3b + 1}{5} \right|$$

Temos, então, duas possibilidades:

$$1^a) 3a + 4b + 2 = 4a - 3b + 1 \Rightarrow a = 7b + 1 \quad (4)$$

ou

$$2^a) 3a + 4b + 2 = -(4a - 3b + 1) \Rightarrow b = -7a - 3 \quad (5)$$

Substituindo (4) em (2), decorre:

$$\left| \frac{3(7b + 1) + 4b + 2}{5} \right| = r \Rightarrow r = |5b + 1| \quad (4')$$

Substituindo (4) e (4') em (1), decorre:

$$(7b + 1)^2 + b^2 = (5b + 1)^2 \Rightarrow 25b^2 + 4b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} a = 1 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} r = 1 & (1^a \text{ solução}) \\ \text{ou} \\ b = -\frac{4}{25} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} a = -\frac{3}{25} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} r = \frac{1}{5} & (2^a \text{ solução}) \end{cases}$$

Por outro lado, substituindo (5) em (2), decorre:

$$\left| \frac{3a + 4(-7a - 3) + 2}{5} \right| = r \Rightarrow r = |-5a - 2| \quad (5')$$

Substituindo (5) e (5') em (1), decorre:

$$a^2 + (7a + 3)^2 = (5a + 2)^2 \Rightarrow 25a^2 + 22a + 5 = 0$$

donde $a \notin \mathbb{R}$, pois $\Delta < 0$, isto é, não há solução.

$$\text{Resposta: } (x - 1)^2 + y^2 = 1 \text{ ou } \left(x + \frac{3}{25}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{25}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

134. 6º problema

"Determinar uma circunferência λ tangente às retas dadas
 s: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, t: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ e u: $A_3x + B_3y + C_3 = 0$."

Solução

$$(S) \begin{cases} s \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{A_1a + B_1b + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right)^2 = r^2 \\ t \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{A_2a + B_2b + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right)^2 = r^2 \\ u \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{A_3a + B_3b + C_3}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}} \right)^2 = r^2 \end{cases}$$

135. 7º problema

"Determinar uma circunferência λ que tem centro em $C(a, b)$ dado e é tangente à circunferência λ_0 : $(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r_0^2$ dada."

Solução

Vamos impor a condição de tangência:

$$\lambda \text{ tg } \lambda_0 \Leftrightarrow d_{CC_0} = r \pm r_0 \Leftrightarrow (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 = (r \pm r_0)^2$$

Dessa equação tiramos r , que é a única incógnita.

136. Exemplo:

Obter uma circunferência λ de centro $C(4, 5)$ tangente a

$$\lambda_0: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

$$\lambda \text{ tg } \lambda_0 \Leftrightarrow d_{CC_0} = r \pm r_0 \Leftrightarrow (4 - 1)^2 + (5 - 1)^2 = (r \pm 2)^2$$

$$\text{então } (r \pm 2)^2 = 25 \Rightarrow r \pm 2 = 5 \Rightarrow r = 7 \text{ ou } r = 3.$$

$$\text{Resposta: } (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 49 \text{ ou } (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9.$$

137. 8º problema

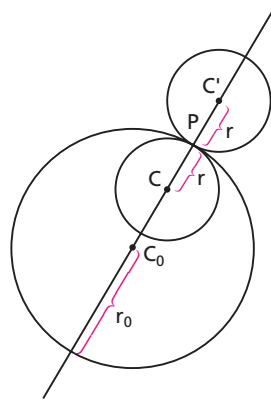
"Determinar uma circunferência λ de raio r dado que tangencia a circunferência $\lambda_0: (x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r_0^2$ dada no ponto $P(x_0, y_0)$ dado."

Solução

Para obter os centros (C ou C') das soluções do problema é conveniente usar a teoria da razão de segmentos:

$$\frac{\overline{C_0C}}{CP} = \frac{r_0 - r}{r}$$

$$\frac{\overline{C_0C'}}{C'P} = \frac{r_0 + r}{-r}$$



138. Exemplo:

Obter uma circunferência de raio 3 que tangencia $\lambda_0: x^2 + y^2 = 25$ no ponto $P(4, 3)$.

λ_0 tem centro $C_0(0, 0)$ e raio $r = 5$.

Temos $\frac{\overline{C_0C}}{CP} = \frac{5 - 3}{3} = \frac{2}{3}$; então:

$$\frac{a - 0}{4 - a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 8 - 2a = 3a \Rightarrow a = \frac{8}{5}$$

$$\frac{b - 0}{3 - b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3b = 6 - 2b \Rightarrow b = \frac{6}{5}$$

Temos também $\frac{\overline{C_0C'}}{C'P} = \frac{5 + 3}{-3} = -\frac{8}{3}$; então:

$$\frac{a' - 0}{4 - a'} = -\frac{8}{3} \Rightarrow 3a' = -32 + 8a' \Rightarrow a' = \frac{32}{5}$$

$$\frac{b' - 0}{3 - b'} = -\frac{8}{3} \Rightarrow 3b' = -24 + 8b' \Rightarrow b' = \frac{24}{5}$$

Resposta: $\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{6}{5}\right)^2 = 9$ ou $\left(x - \frac{32}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{24}{5}\right)^2 = 9$.

139. 9º problema

"Determinar uma circunferência λ que passa por $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e é tangente a $\lambda_0: (x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r_0^2$."

Solução

$$(S) \begin{cases} P_1 \in \lambda \Leftrightarrow (a - x_1)^2 + (b - y_1)^2 = r^2 \\ P_2 \in \lambda \Leftrightarrow (a - x_2)^2 + (b - y_2)^2 = r^2 \\ \lambda_0 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 = (r \pm r_0)^2 \end{cases}$$

Resolvido o sistema (S), obtemos as incógnitas a , b e r .

140. Exemplo:

Obter uma circunferência λ que passa por $P_1(4, -1)$ e $P_2(0, 3)$ e é tangente a $\lambda_0: x^2 + y^2 = 1$.

$$\begin{cases} P_1 \in \lambda \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b + 1)^2 = r^2 & (1) \\ P_2 \in \lambda \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 3)^2 = r^2 & (2) \\ \lambda_0 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = (r \pm 1)^2 & (3) \end{cases}$$

Comparando (1) e (2), resulta:

$$(a - 4)^2 + (b + 1)^2 = a^2 + (b - 3)^2 \Rightarrow a = b + 1 \quad (4)$$

Comparando (2) e (3), resulta:

$$a^2 + (b - 3)^2 = a^2 + b^2 \pm 2r - 1 \Rightarrow r = \pm(3b - 5) \quad (5)$$

Substituindo (4) e (5) em (1), resulta:

$$(b - 3)^2 + (b + 1)^2 = (3b - 5)^2 \Rightarrow 7b^2 - 26b + 15 = 0$$

$$\text{Então: } \begin{cases} b = 3 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow r = 4 \\ \text{ou} \\ b = \frac{5}{7} \Rightarrow a = \frac{12}{7} \Rightarrow r = \frac{20}{7} \end{cases}$$

$$\text{Resposta: } (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16 \text{ ou } \left(x - \frac{12}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{7}\right)^2 = \frac{400}{49}.$$

141. 10º problema

"Determinar uma circunferência λ que passa por $P_1(x_1, y_1)$ e é tangente às circunferências $\lambda_0: (x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r_0^2$ e $\lambda_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$."

Solução

$$(S) \begin{cases} P_1 \in \lambda \Leftrightarrow (a - x_1)^2 + (b - y_1)^2 = r^2 \\ \lambda_0 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 = (r \pm r_0)^2 \\ \lambda_1 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 = (r \pm r_1)^2 \end{cases}$$

Resolvido o sistema (S), obtemos as incógnitas a, b e r .

142. Exemplo:

Obter uma circunferência λ que passa por $P(0, 2)$ e é tangente a $\lambda_0: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$ e $\lambda_1: (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$.

Solução

$$\begin{cases} P \in \lambda \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (b - 2)^2 = r^2 & (1) \\ \lambda_0 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 4)^2 = (r \pm 3)^2 & (2) \\ \lambda_1 \text{ tg } \lambda \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b + 4)^2 = (r \pm 3)^2 & (3) \end{cases}$$

Há quatro possibilidades por causa dos duplos sinais em (2) e (3):

1ª) usando $+$ e $+$ e resolvendo, obtemos:

$$a = 0, b = 0 \text{ e } r = 2$$

2ª) usando $-$ e $-$, obtemos:

$$a = 0, b = 0 \text{ e } r = -2 < 0 \text{ (não serve)}$$

3ª) usando $+$ e $-$, obtemos:

$$a = \frac{2 - 4\sqrt{7}}{3}, b = -2 - 2\sqrt{7}, r = \frac{8 + 8\sqrt{7}}{3}$$

4ª) usando $-$ e $+$, obtemos:

$$a = \frac{2 + 4\sqrt{7}}{3}, b = -2 + 2\sqrt{7}, r = \frac{-8 + 8\sqrt{7}}{3}$$

EXERCÍCIOS

- 328.** Determine o centro e o raio da circunferência que passa pelos pontos de interseção das retas $x + y + 2 = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.
- 329.** Determine a circunferência circunscrita ao triângulo de vértice $A(-4, 4)$, $B(-7, 3)$ e $C(-8, -4)$.
- 330.** Obtenha uma circunferência de raio 4 que tem centro na bissetriz do 1º e 3º quadrantes e tangencia a reta $5x - 12y + 3 = 0$.
- 331.** Determine a equação da circunferência que tangencia os eixos Ox e Oy e cujo centro está na reta $2x + y - 3 = 0$.
- 332.** Obtenha uma circunferência cujo centro está no eixo dos x , sabendo que é tangente às retas $2x + 3y - 1 = 0$ e $2x - 3y - 7 = 0$.
- 333.** Ache as circunferências de raio 5 que são tangentes à reta $3x + 4y - 35 = 0$ no ponto $(5, 5)$.
- 334.** Considere a circunferência C de raio R com centro sobre a reta $y = 3x$. Se C é tangente à reta $y = x$ no ponto $(4, 4)$, qual é o valor de R^2 ?
- 335.** Obtenha a equação da circunferência que passa pela origem, tem centro na reta $y = -2$ e tangencia a reta $r: x + y - 4 = 0$.
- 336.** Ache as equações das circunferências tangentes aos eixos e cujos centros estão sobre a reta $x - 3y - 6 = 0$.
- 337.** Obtenha a equação da circunferência que passa pela origem e é tangente às retas $r: 4x - 3y - 25 = 0$ e $s: 4x + 3y + 1 = 0$.
- 338.** Ache a equação da circunferência de raio não unitário que passa pelo ponto $A(-1, 2)$ e tangencia as retas $x = 0$ e $y = 0$.
- 339.** Obtenha a equação da circunferência que passa por $A(8, 0)$ e é tangente à reta $x - y = 0$ na origem.
- 340.** Ache as circunferências que passam por $P(1, 1)$ e $P'(8, 0)$ e são tangentes à reta $t: x = 0$.
- 341.** Ache a equação da circunferência que tangencia o eixo dos y no ponto $(0, 6)$ e determina no semieixo negativo dos x uma corda de comprimento 16.

- 342.** Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são $A(0, 0)$, $B(0, 4)$ e $C(4, 0)$.
- 343.** As retas r , s e t são tais que:
- 1º) A equação de r é $3x - 4y - 25 = 0$
 - 2º) O ângulo entre r e s é $\arctg \frac{24}{7}$ e $-1 < m_s < 0$
 - 3º) s passa por $(-3, 5)$
 - 4º) t passa por $(3, -12)$
 - 5º) s é paralela a t
- Obtenha:
- a) a equação de s b) a equação de t
 - c) a equação de uma das circunferências tangentes a r , s e t .
- 344.** Ache as circunferências de raio 2 que são tangentes a $\lambda: x^2 + y^2 = 25$ no ponto $P(3, -4)$.
- 345.** Ache as circunferências de centro $C(-8, 6)$ e tangentes a $x^2 + y^2 = 36$.
- 346.** Determine as equações das circunferências tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 225$ no ponto $(-9, 12)$ e que têm raio unitário.
- 347.** Ache as circunferências que passam por $P(0, 12)$ e $P'(5, 7)$ e são tangentes externas a $\lambda: x^2 + y^2 = 64$.
- 348.** Obtenha a equação da circunferência tangente à reta $3x + 4y - 24 = 0$ e à circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ no ponto $P(1, 0)$.
- 349.** Mostre que existem duas circunferências, C_1 e C_2 , de centros fora do eixo Ox , raio 12, passando pela origem e tangentes à circunferência C de equação $x^2 + y^2 - 40x + 384 = 0$. Determine as coordenadas dos centros e as coordenadas dos pontos de contato de C com C_1 e de C com C_2 .
- 350.** Escreva a equação da circunferência que tangencia a reta $x + 2y - 6 = 0$ no ponto de ordenada -1 e determina na circunferência $x^2 + y^2 = 4$ uma corda paralela ao eixo dos x .
- 351.** Prove que as circunferências $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 5$ e $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$ são ortogonais, isto é, as retas que ligam cada centro a um ponto de interseção das circunferências são perpendiculares.

III. Complemento

143. Dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma circunferência $\lambda: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, chama-se potência de P em relação a λ o número real

$$k = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$$

Confrontando com a teoria do item 105, observamos que:

- a) se P é exterior a λ , então $k > 0$
- b) se P pertence a λ , então $k = 0$
- c) se P é interior a λ , então $k < 0$

144. Dadas duas circunferências não concêntricas

$$\lambda_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2 \text{ e } \lambda_2: (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2,$$

chama-se eixo radical o conjunto dos pontos do plano cartesiano que são equipotentes em relação às duas.

Se $P(x, y)$ é ponto do eixo radical, então $k_1 = k_2$, isto é:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$$

donde vem:

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 + r_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - r_1^2) = 0$$

que é a equação do eixo radical. Como $a_2 \neq a_1$ ou $b_2 \neq b_1$ (pois as circunferências não são concêntricas), está provado que o eixo radical é uma reta.

145. Assim, por exemplo, o eixo radical das circunferências $x^2 + y^2 = 9$ e $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ tem equação:

$$x^2 + y^2 - 9 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4$$

donde vem:

$$2x + 2y - 7 = 0$$