

OSVALDO DOLCE  
JOSÉ NICOLAU POMPEO

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

*Geometria espacial  
posição e métrica*

10

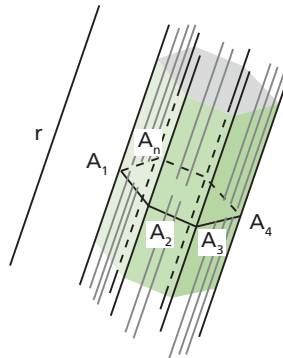
# CAPÍTULO VIII

## Prisma

### I. Prisma ilimitado

#### 129. Definição

Consideremos uma região poligonal convexa plana (polígono plano convexo)  $A_1 A_2 \dots A_n$  de  $n$  lados e uma reta  $r$  não paralela nem contida no plano da região (polígono). Chama-se **prisma ilimitado convexo** ou **prisma convexo indefinido** à reunião das retas paralelas a  $r$  e que passam pelos pontos da região poligonal dada.



Se a região poligonal (polígono)  $A_1, A_2 \dots A_n$  for côncava, o prisma ilimitado resultará côncavo.

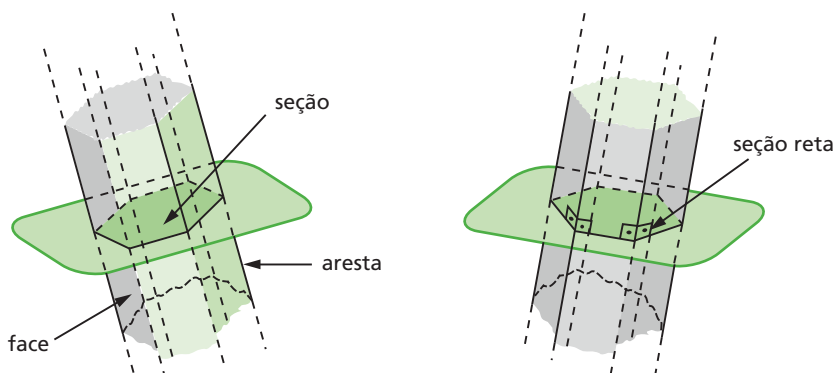
#### 130. Elementos

Um prisma ilimitado convexo possui:  $n$  arestas,  $n$  diedros e  $n$  faces (que são faixas de plano).

### 131. Seções

**Seção** é uma região poligonal plana (polígono plano) com um só vértice em cada aresta.

**Seção reta** ou **seção normal** é uma seção cujo plano é perpendicular às arestas.



### 132. Superfície

A superfície de um prisma ilimitado convexo é a reunião das faces desse prisma. É chamada **superfície prismática convexa ilimitada** ou **indefinida**.

### 133. Propriedades

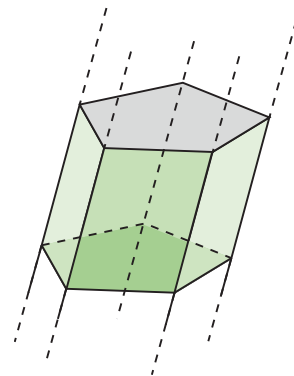
1ª) Seções paralelas de um prisma ilimitado são polígonos congruentes.

De fato, pelo paralelismo das arestas e pelo paralelismo dos planos de duas seções, podemos concluir que estas seções têm lados congruentes (lados opostos de paralelogramos) e ângulos congruentes (ângulos de lados respectivamente paralelos). Logo, as seções são congruentes.

2ª) A soma dos diedros de um prisma ilimitado convexo de  $n$  arestas é igual a  $(n - 2) \cdot 2$  retos.

Demonstração:

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual a  $(n - 2) \cdot 2$  retos.

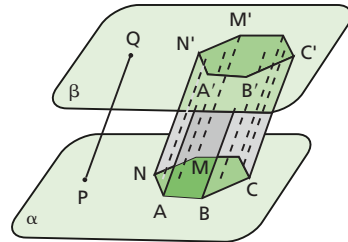


Como a seção reta do prisma é um polígono convexo de  $n$  lados, e a medida de cada ângulo desse polígono é a medida do diedro correspondente, pois o plano do polígono determina seção reta no diedro, então a soma dos diedros é igual a  $(n - 2) \cdot 2$  retos.

## II. Prisma

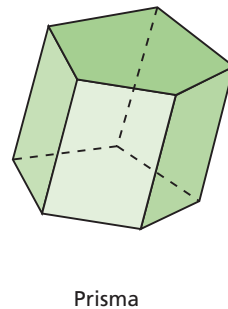
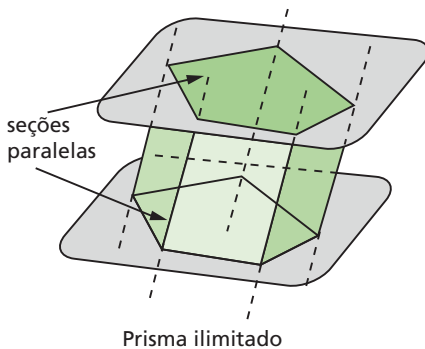
### 134. Definição

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa)  $ABCD \dots MN$  situado num plano  $\alpha$  e um segmento de reta  $PQ$ , cuja reta suporte intercepta o plano  $\alpha$ . Chama-se **prisma** (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a  $PQ$ , com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semiespaço dos determinados por  $\alpha$ .



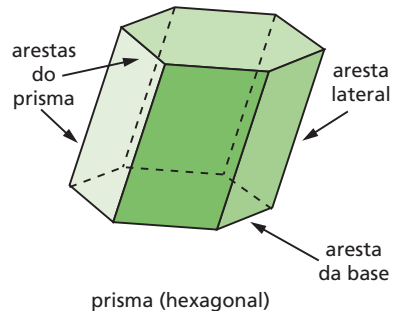
Podemos também definir o prisma como segue:

**Prisma convexo limitado** ou **prisma convexo definido** ou **prisma convexo** é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas seções paralelas e distintas, com essas seções.



### 135. Elementos

- O prisma possui:
- 2 bases congruentes (as seções citadas acima),
- $n$  faces laterais (paralelogramos),
- $(n + 2)$  faces,
- $n$  arestas laterais,
- $3n$  arestas,  $3n$  diedros,
- $2n$  vértices e  $2n$  triedros.

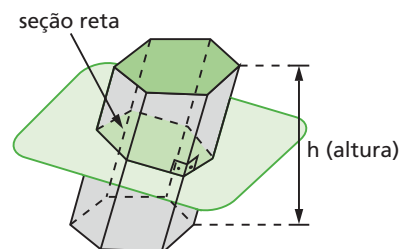


**136.** A **altura** de um prisma é a distância  $h$  entre os planos das bases. Devemos observar que para o prisma é válida a relação de Euler:  $V - A + F - 2n - 3n + (n + 2) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$ .

### 137. Seções

**Seção** de um prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos que a seção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

**Seção reta** ou **seção normal** é uma seção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.



### 138. Superfícies

**Superfície lateral** é a reunião das faces laterais. A área desta superfície é chamada área lateral e indicada por  $A_L$ .

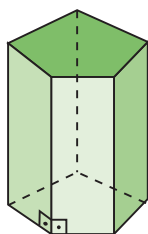
**Superfície total** é a reunião da superfície lateral com as bases. A área desta superfície é chamada área total e indicada por  $A_T$ .

### 139. Classificação

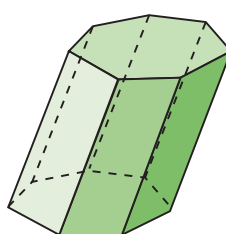
**Prisma reto** é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.

**Prisma oblíquo** é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

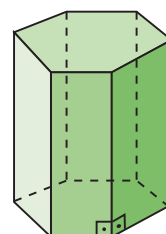
**Prisma regular** é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.



prisma reto  
(pentagonal)



prisma oblíquo  
(heptagonal)



prisma regular  
(hexagonal)

### 140. Natureza de um prisma

Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a **base** for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

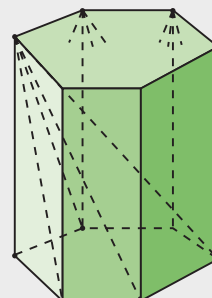


**Solução**

Observemos que, quando nos referimos às diagonais de um prisma, não levamos em consideração as diagonais das bases e das faces laterais do prisma. Seja então um prisma cuja base é um polígono convexo de  $n$  lados.

Unindo um vértice de uma das bases aos vértices da outra base, temos  $(n - 3)$  diagonais (eliminamos duas diagonais de face e uma aresta).

Como existem  $n$  vértices na base tomada, o número total de diagonais do prisma é  $n \cdot (n - 3)$ .



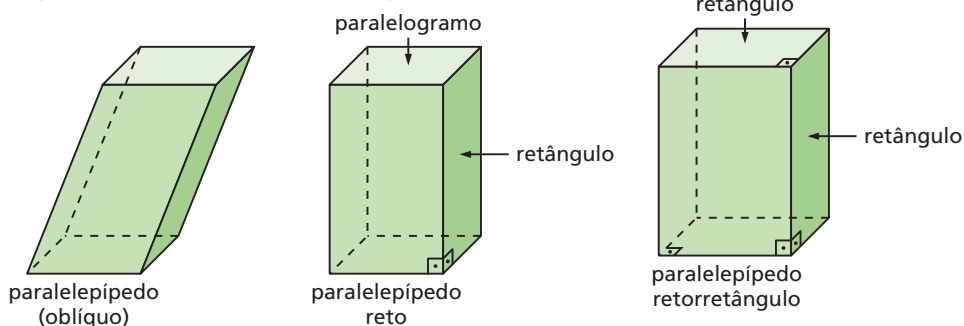
- 220.** Prove que o número de diagonais de um prisma é igual ao dobro do número de diagonais de uma de suas bases.
- 221.** Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma que possui 40 diagonais.
- 222.** Calcule a soma dos ângulos diedros de um prisma que tem por base um polígono convexo de  $n$  lados.

### III. Paralelepípedos e romboedros

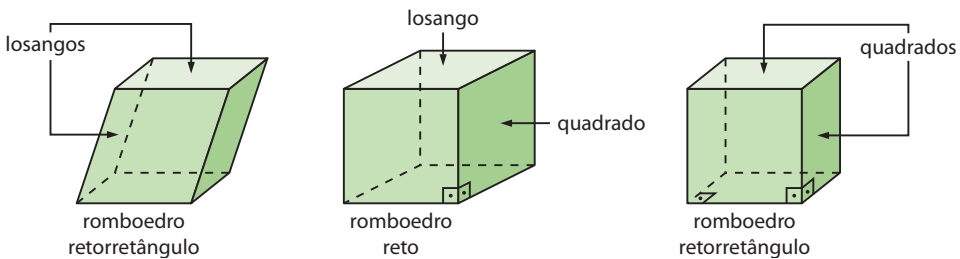
**141. Paralelepípedo** é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

**142. Paralelepípedo reto** é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

**143. Paralelepípedo retorrentângulo ou paralelepípedo retângulo ou ortoedro** é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retorrentângulo é a reunião de seis retângulos.



- 144. Cubo** é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.
- 145. Romboedro** é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro é a reunião de seis losangos.
- 146. Romboedro reto** é um paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro reto é a reunião de quatro quadrados (faces laterais) com dois losangos (bases).
- 147. Romboedro retorretângulo** ou **cubo** é um romboedro reto cujas bases são quadrados. A superfície de um romboedro reto é a reunião de seis quadrados.

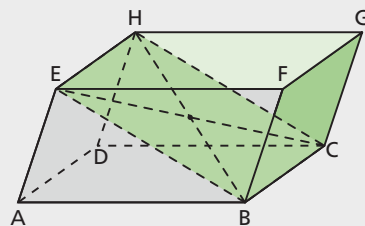


# EXERCÍCIOS

- 223.** Calcule a soma dos ângulos das faces de um paralelepípedo.
- 224.** Calcule a soma dos diedros formados pelas faces de um paralelepípedo.
- 225.** Mostre que as diagonais de um paralelepípedo retângulo são congruentes.
- 226.** Mostre que as diagonais de um paralelepípedo retângulo interceptam-se nos respectivos pontos médios.

**Solução**

Pelas arestas opostas (BC e EH, AD e FG) passam planos diagonais que determinam no paralelepípedo seções que são paralelogramos. As diagonais do paralelepípedo são diagonais desses paralelogramos. Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam nos respectivos pontos médios, as diagonais do paralelepípedo também o fazem.

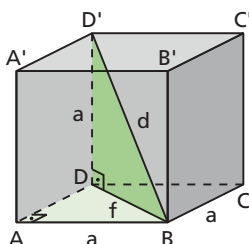


227. Mostre que a seção feita em um paralelepípedo, por um plano que intercepta 4 arestas paralelas, é um paralelogramo.

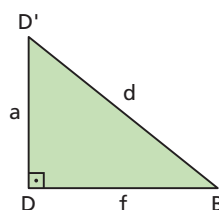
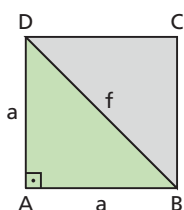
## IV. Diagonal e área do cubo

148. Dado um cubo de aresta  $a$ , calcular sua diagonal  $d$  e sua área total  $S$ .

### Solução



base (face)



a) Cálculo de  $d$

Inicialmente calculemos a medida  $f$  de uma diagonal de face:

$$\text{No } \triangle BAD: f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f^2 = 2a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}.$$

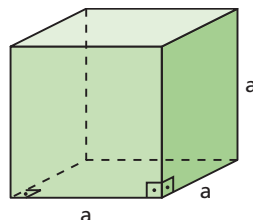
$$\text{No } \triangle BDD': d^2 = a^2 + f^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow d^2 = 3a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = a\sqrt{3}$$

b) Cálculo de  $S$

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes de lado  $a$ . A área de cada um é  $a^2$ . Então, a área total do cubo é:

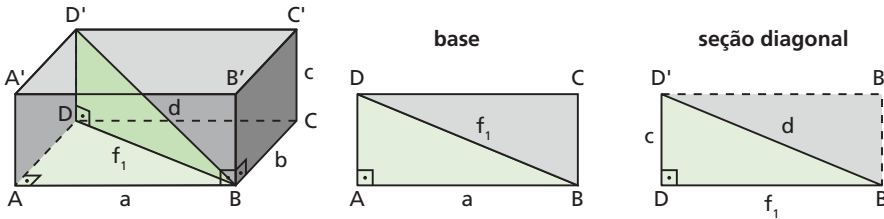
$$S = 6a^2$$



## V. Diagonal e área do paralelepípedo retângulo

**149.** Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , calcular as diagonais  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  das faces, a diagonal do paralelepípedo e sua área total  $S$ .

**Solução**



a) Cálculo de  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$

Sendo  $f_1$  a diagonal da face  $ABCD$  (ou  $A'B'C'D'$ ), temos:

$$f_1^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow f_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

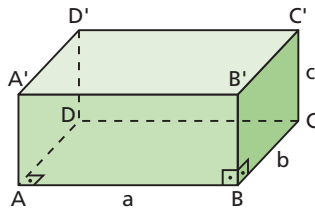
Sendo  $f_2$  a diagonal da face  $ABB'A'$  (ou  $DCC'D'$ ) e  $f_3$  a diagonal da face  $ADD'A'$  (ou  $BCC'B'$ ), temos:

$$f_2^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow f_2 = \sqrt{a^2 + c^2} \qquad f_3^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow f_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

b) Cálculo de  $d$

No  $\triangle BDD'$ :  $d^2 = f_1^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

c) Cálculo da área total  $S$



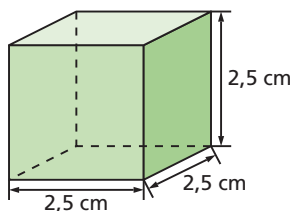
A área total do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois deles ( $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$ ) com dimensões  $a$  e  $b$ , outros dois ( $ABB'A'$ ,  $DCC'D'$ ) com dimensões  $a$  e  $c$  e os últimos dois ( $ADD'A'$ ,  $BCC'B'$ ) com dimensões  $b$  e  $c$ . Logo,

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow S = 2(ab + ac + bc)$$

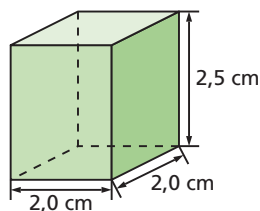
## EXERCÍCIOS

**228.** Calcule a medida da diagonal e a área total dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo:

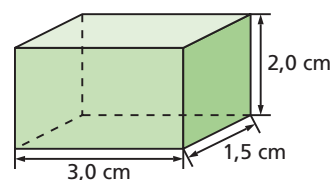
a) cubo



b) paralelepípedo retângulo

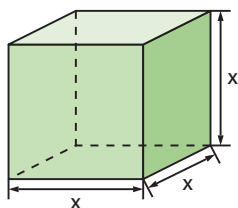


c) paralelepípedo retângulo

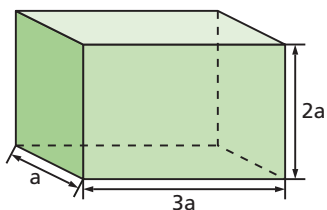


**229.** Represente através de expressões algébricas a medida da diagonal e a área total dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo:

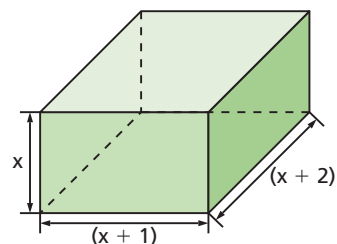
a) cubo



b) paralelepípedo retângulo



c) paralelepípedo retângulo



**230.** Calcule a medida da aresta de um cubo de  $36 \text{ m}^2$  de área total.

**231.** Calcule a diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões  $y$ ,  $(y + 1)$  e  $(y - 1)$ .

**232.** Calcule a medida da diagonal de um cubo, sabendo que a sua área total mede  $37,5 \text{ cm}^2$ .

**233.** Calcule a medida da terceira dimensão de um paralelepípedo, sabendo que duas delas medem  $4 \text{ cm}$  e  $7 \text{ cm}$  e que sua diagonal mede  $3\sqrt{10} \text{ cm}$ .

- 234.** Calcule a medida da aresta de um cubo, sabendo que a diagonal do cubo excede em 2 cm a diagonal da face.

**Solução**

$$d - f = 2 \Rightarrow a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2 \Rightarrow a = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

Resposta:  $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  cm.

- 235.** Sabe-se que a diagonal de um cubo mede 2,5 cm. Em quanto se deve aumentar a aresta desse cubo para que sua diagonal passe a medir 5,5 cm?
- 236.** A aresta de um cubo mede 2 cm. Em quanto se deve aumentar a diagonal desse cubo de modo que a aresta do novo cubo seja igual a 3 cm?
- 237.** Em quanto diminui a aresta de um cubo quando a diagonal diminui em  $3\sqrt{3}$  cm?
- 238.** A diferença entre as áreas totais de dois cubos é  $164,64 \text{ cm}^2$ . Calcule a diferença entre as suas diagonais, sabendo que a aresta do menor mede 3,5 cm.
- 239.** Calcule a aresta de um cubo, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas com todas as diagonais e com as diagonais das seis faces vale 32 cm.
- 240.** Determine a área total de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede  $25\sqrt{2}$  cm, sendo a soma de suas dimensões igual a 60 cm.

**Solução**

Considerando o paralelepípedo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com a diagonal  $d = 25\sqrt{2}$  cm:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (25\sqrt{2})^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1250$$

Dados:  $a + b + c = 60$

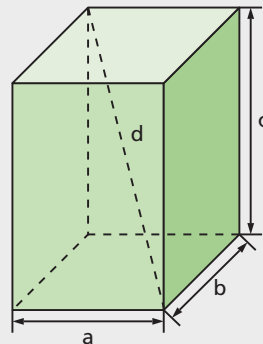
Sabendo que  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$  e observando que  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  e  $2(ab + ac + bc) = S$ , temos:

$$(a + b + c)^2 = d^2 + S.$$

Substituindo os valores, vem:

$$(60)^2 = 1250 + S \Rightarrow S = 2350.$$

Resposta: A área total do paralelepípedo é  $2350 \text{ cm}^2$ .



- 241.** Determine a diagonal de um paralelepípedo, sendo  $62 \text{ cm}^2$  sua área total e  $10 \text{ cm}$  a soma de suas dimensões.
- 242.** Prove que em um paralelepípedo retângulo a soma dos quadrados das quatro diagonais é igual à soma dos quadrados das doze arestas.
- 243.** Dois paralelepípedos retângulos têm diagonais iguais, e a soma das três dimensões de um é igual à soma das três do outro. Prove que as áreas totais de ambos são iguais.
- 244.** Determine as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que são proporcionais aos números  $1, 2, 3$  e que a área total do paralelepípedo é  $352 \text{ cm}^2$ .

**Solução**

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow (a = k, b = 2k, c = 3k) \quad (1)$$

$$S = 352 \Rightarrow 2(ab + ac + bc) = 352 \Rightarrow ab + ac + bc = 176 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$1k \cdot 2k + 1k \cdot 3k + 2k \cdot 3k = 176 \Rightarrow 11k^2 = 176 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4.$$

Retornando a (1), temos:  $a = 4, b = 8$  e  $c = 12$ .

Resposta: As dimensões são  $4 \text{ cm}, 8 \text{ cm}$  e  $12 \text{ cm}$ .

- 245.** Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que são proporcionais aos números  $5, 8, 10$  e que a diagonal mede  $63 \text{ cm}$ .
- 246.** As dimensões de um paralelepípedo são inversamente proporcionais aos números  $6, 4$  e  $3$ . Determine-as, sabendo que a área total desse paralelepípedo é  $208 \text{ m}^2$ .
- 247.** As dimensões  $x, y$  e  $z$  de um paralelepípedo retângulo são proporcionais a  $a, b$  e  $c$ . Dada a diagonal  $d$ , calcule essas dimensões.
- 248.** Com uma corda disposta em cruz, deseja-se amarrar um pacote em forma de ortoedro, cujas dimensões são  $1,40 \text{ m}, 0,60 \text{ m}$  e  $0,20 \text{ m}$ . Se para fazer os nós gastam-se  $20 \text{ cm}$ , responda: Quantos metros de corda serão necessários para amarrar o pacote?
- 249.** As dimensões de um ortoedro são inversamente proporcionais a  $r, s$  e  $t$ . Calcule essas dimensões, dada a diagonal  $d$ .

**Solução**

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as dimensões:

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{r}k \quad y = \frac{1}{s}k \quad z = \frac{1}{t}k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{st}{rst}k \quad y = \frac{rt}{rst}k \quad z = \frac{rs}{rst}k$$

Mudando a constante para  $K = \frac{k}{rst}$ , vem:

$$x = stK \quad y = rtK \quad z = rsK \quad (2)$$

$$(2) \text{ em } (1): K^2 (s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2) = d^2 \Rightarrow K = \frac{d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}$$

Substituindo em (2), vem a resposta:

$$x = \frac{std}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}; \quad y = \frac{rtd}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}};$$

$$z = \frac{rsd}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}.$$

- 250.** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são inversamente proporcionais a  $r$ ,  $s$ ,  $t$ . Calcule essas dimensões, sabendo que a área é  $S$ .
- 251.** As áreas de três faces adjacentes de um ortoedro estão entre si como  $p$ ,  $q$  e  $r$ . A área total é  $2\ell^2$ . Determine as três dimensões.
- 252.** Se a aresta de um cubo mede 100 cm, encontre a distância de um vértice do cubo à sua diagonal.

## VI. Razão entre paralelepípedos retângulos

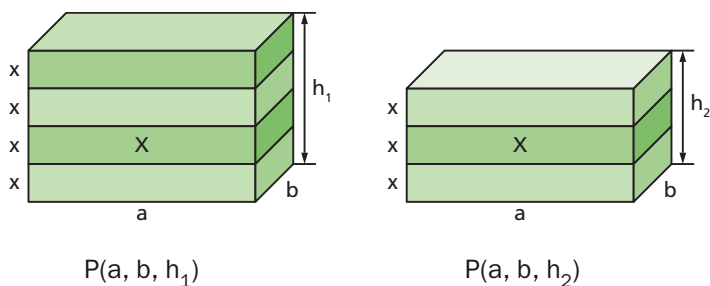
- 150.** A razão entre dois paralelepípedos retângulos de bases congruentes é igual à razão entre as alturas.

Sejam  $P(a, b, h_1)$  e  $P(a, b, h_2)$  os paralelepípedos em que  $a$ ,  $b$ ,  $h_1$  e  $a$ ,  $b$ ,  $h_2$  são as respectivas dimensões.

Trata-se de demonstrar que: 
$$\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Demonstração:

1º caso:  $h_1$  e  $h_2$  são **comensuráveis**



Se  $h_1$  e  $h_2$  comensuráveis, existe um segmento  $x$  submúltiplo comum de  $h_1$  e  $h_2$ :

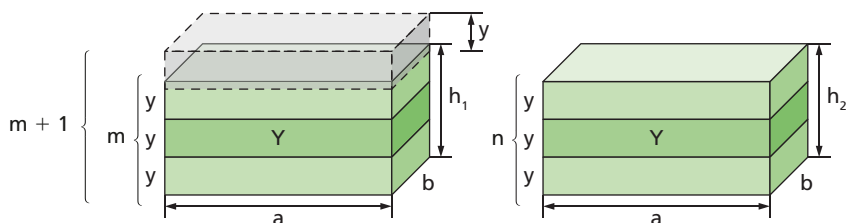
$$\left. \begin{array}{l} h_1 = p \cdot x \\ h_2 = q \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

Construindo os paralelepípedos  $X(a, b, c)$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} P(a, b, h_1) = p \cdot X \\ P(a, b, h_2) = q \cdot X \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

De (1) e (2) vem:  $\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}$ .

2º caso:  $h_1$  e  $h_2$  são **incomensuráveis**



Se  $h_1$  e  $h_2$  incomensuráveis, não existe segmento submúltiplo comum de  $h_1$  e  $h_2$ .

Tomemos um segmento  $y$  submúltiplo de  $h_2$  ( $y$  “cabe” um certo número inteiro  $n$  de vezes em  $h_2$ , isto é,  $h_2 = ny$ ).

Por serem  $h_1$  e  $h_2$  incomensuráveis, marcando sucessivamente  $y$  em  $h_1$ , temos que, chegando a um certo número inteiro  $m$  de vezes, acontece que:

$$my < h_1 < (m + 1)y.$$

Operando com as relações acima, vem:

$$\left. \begin{array}{l} my < h_1 < (m + 1)y \\ ny = h_2 = ny \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m + 1}{n} \quad (3)$$

Construindo os paralelepípedos  $Y(a, b, y)$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} mY < P(a, b, h_1) < (m + 1)Y \\ nY = P(a, b, h_2) = ny \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} < \frac{m + 1}{n} \quad (4)$$

Ora, sendo  $y$  submúltiplo de  $h_2$ , pode variar, e dividindo  $y$ , aumentamos  $n$ . Nessas condições,

$$\frac{m}{n} \text{ e } \frac{m + 1}{n}$$

formam **um par de classes contíguas** que definem **um único** número real, que é

$$\frac{h_1}{h_2} \text{ pela expressão (3) e } \frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} \text{ pela expressão (4).}$$

Como esse número é **único**, então:

$$\frac{P(a, b, h_1)}{P(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

## VII. Volume de um sólido

**151.** Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

1º) sólidos congruentes têm volumes iguais;

2º) se um sólido  $S$  é a reunião de dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  que não têm pontos **interiores** comuns, então o volume de  $S$  é a soma dos volumes de  $S_1$  com  $S_2$ .

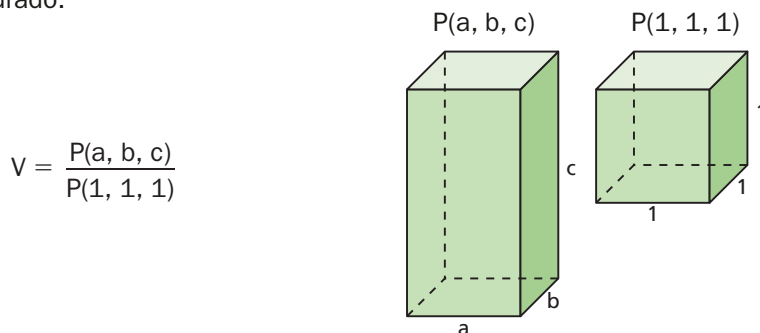
Os sólidos são medidos por uma **unidade** que, em geral, é um **caso**. Assim, o volume desse cubo é 1. Se sua aresta medir 1 cm (um centímetro), seu volume será 1 cm<sup>3</sup> (um centímetro cúbico). Se sua aresta medir 1 m, seu volume será 1 m<sup>3</sup>.

**152.** Dois sólidos são **equivalentes** se, e somente se, eles têm **volumes iguais** na mesma unidade de volume.

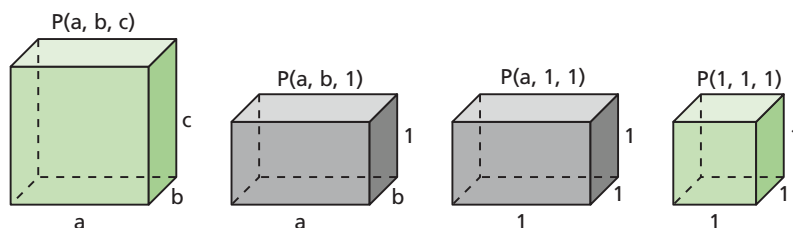
## VIII. Volume do paralelepípedo retângulo e do cubo

**153.** Seja  $P(a, b, c)$  o paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Vamos medir esse paralelepípedo com o cubo unitário, isto é, com o paralelepípedo  $P(1, 1, 1)$ . Para isso, estabeleceremos a razão  $\frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)}$ , que será o volume procurado.



Consideremos, então, os paralelepípedos  $P(a, b, c)$ ,  $P(a, b, 1)$ ,  $P(a, 1, 1)$  e  $P(1, 1, 1)$  em que 1 é a unidade de comprimento.



Com base na propriedade do item anterior, temos:

$$\frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} = \frac{c}{1} \quad (1) \quad \text{bases } (a, b) \text{ congruentes}$$

$$\frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} = \frac{b}{1} \quad (2) \quad \text{bases } (a, 1) \text{ congruentes}$$

$$\frac{P(a, 1, 1)}{P(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} \quad (3) \quad \text{bases } (1, 1) \text{ congruentes}$$

Multiplicando-se membro a membro (1), (2) e (3):

$$\begin{aligned} \frac{P(a, b, c)}{P(a, b, 1)} \cdot \frac{P(a, b, 1)}{P(a, 1, 1)} \cdot \frac{P(a, 1, 1)}{P(1, 1, 1)} &= \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{P(a, b, c)}{P(1, 1, 1)} &= \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Rightarrow V = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Rightarrow \end{aligned}$$

⇒  $V = (\text{medida de } a) \cdot (\text{medida de } b) \cdot (\text{medida de } c)$  que será representada simplesmente por

$$V = a \cdot b \cdot c$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as **medidas** das dimensões do paralelepípedo retângulo na unidade escolhida.

### 154. Conclusões

1º) O volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas três dimensões.

2º) Tomando como base a face de dimensões  $a$  e  $b$ , indicando por  $B$  a área dessa base ( $B = a \cdot b$ ) e a altura  $c$  por  $h$ , podemos escrever:

$$V = B \cdot h$$

Isto é:

O volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao **produto** da **área da base** pela medida da **altura**.

3º) Volume do cubo

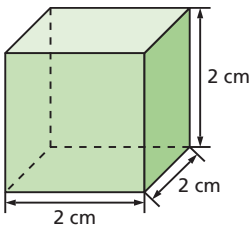
No cubo de aresta  $a$ , temos  $b = a$  e  $c = a$ .

$$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$$

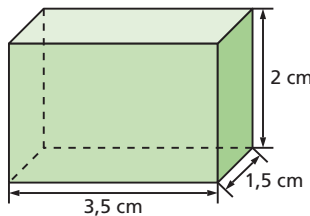
## EXERCÍCIOS

**253.** Calcule a área total e o volume dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo.

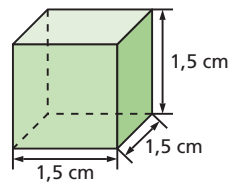
a) cubo



b) paralelepípedo retângulo

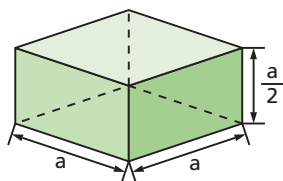


c) cubo

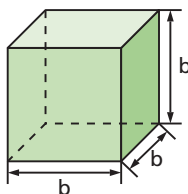


**254.** Represente através de expressões algébricas a área total e o volume dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas abaixo.

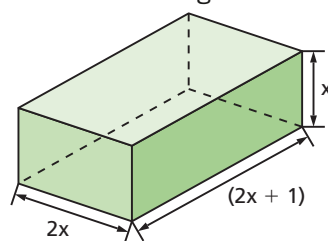
a) paralelepípedo retângulo



b) cubo



c) paralelepípedo retângulo



**255.** Calcule a medida da aresta de um cubo de  $27 \text{ m}^3$  de volume.

**256.** Calcule a diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que as suas dimensões são  $5 \text{ cm}$ ,  $7 \text{ cm}$  e  $9 \text{ cm}$ .

**257.** Determine as medidas da aresta e da diagonal de um cubo cujo volume é  $1728 \text{ cm}^3$ .

**258.** Calcule o volume de um cubo cuja área total mede  $600 \text{ cm}^2$ .

**259.** Determine o volume de um cubo de área total  $96 \text{ cm}^2$ .

**260.** Quer-se confeccionar um cubo por meio de uma folha de zinco de  $8,64 \text{ m}^2$ . Qual será o comprimento da aresta do cubo? Qual será o volume do cubo?

**261.** Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um cubo, cuja soma das medidas das arestas vale  $30 \text{ cm}$ .

**262.** Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um cubo, sabendo que a diagonal de uma face mede  $5\sqrt{2} \text{ cm}$ .

**263.** Expresse a área total e o volume de um cubo:

- em função da medida da diagonal da face ( $f$ );
- em função da medida da sua diagonal ( $d$ ).

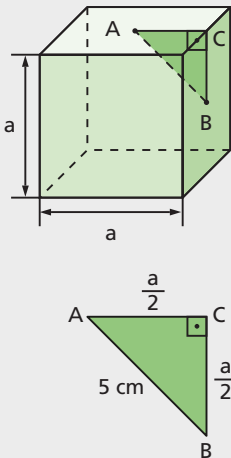
**264.** Calcule as medidas da aresta e da diagonal de um cubo, sabendo que seu volume é oito vezes o volume de um outro cubo que tem  $2 \text{ cm}$  de aresta.

**265.** Se aumentamos a aresta de um cubo em  $2\sqrt{5} \text{ cm}$ , obtemos um outro cubo cuja diagonal mede  $30 \text{ cm}$ . Determine a área total e o volume do cubo primitivo.

**266.** Em quanto aumenta o volume de um cubo, em  $\text{cm}^3$ , se a aresta de  $1 \text{ metro}$  é aumentada em  $1 \text{ cm}$ ?

- 267.** Determine o que ocorre com a área total e com o volume de um cubo quando:
- a aresta dobra;
  - a aresta é reduzida a  $\frac{1}{3}$ ;
  - a aresta é reduzida à metade;
  - sua aresta é multiplicada por  $k$ .
- 268.** Enche-se um recipiente cúbico de metal com água. Dado que um galão do líquido tem um volume de  $21\,600\text{ cm}^3$  e sendo  $120\text{ cm}$  a aresta do recipiente, calcule o número de galões que o recipiente pode conter.
- 269.** Calcule o volume de um cubo, sabendo que a distância entre os centros de duas faces contíguas é de  $5\text{ cm}$ .

**Solução**



Sejam  $A$  e  $B$  os centros das duas faces contíguas e  $C$  ponto médio da aresta comum às faces consideradas. Aplicando a relação de Pitágoras, vem:

$$5^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2}{4} = 25 \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$$

Volume:

$$V = a^3 \Rightarrow V = (5\sqrt{2})^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 250\sqrt{2}$$

Resposta: O volume do cubo é  $250\sqrt{2}\text{ cm}^3$ .

- 270.** O segmento de reta que liga um dos vértices de um cubo ao centro de uma das faces opostas mede  $60\text{ cm}$ . Calcule o volume desse cubo.
- 271.** Calcule o volume de um cubo, sabendo que, quando se aumenta sua aresta em  $1\text{ metro}$ , a área lateral do cubo cresce  $164\text{ m}^2$ .
- 272.** A medida da superfície total de um cubo é  $726\text{ cm}^2$ . Quanto devemos aumentar sua diagonal para que o volume aumente  $1413\text{ cm}^3$ ?
- 273.** Calcule a aresta e a área total de um cubo de volume igual ao do ortoedro cujas dimensões são  $8\text{ cm}$ ,  $27\text{ cm}$  e  $125\text{ cm}$ .

- 274.** Calcule o comprimento da aresta e a área total de um cubo equivalente a um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são 8 cm, 64 cm e 216 cm.
- 275.** O volume de um paralelepípedo retângulo vale  $270 \text{ dm}^3$ . Uma de suas arestas mede 5 dm e a razão entre as outras duas é  $\frac{2}{3}$ . Determine a área total desse paralelepípedo.
- 276.** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 3, 6 e 9. Calcule essas dimensões, a área total e o volume do paralelepípedo, sabendo que a diagonal mede 63 cm.
- 277.** As dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$  de um ortoedro são proporcionais a 6, 3 e 2. Sabendo que a área total é  $288 \text{ cm}^2$ , calcule as dimensões, a diagonal e o volume do paralelepípedo.
- 278.** A altura de um ortoedro mede 10 cm e as bases são quadrados de diagonal  $5\sqrt{2}$  cm. Calcule a área da superfície lateral e o volume.
- 279.** Determine a área de uma placa de metal necessária para a construção de um depósito em forma de ortoedro (aberto em cima), sabendo que o depósito tem 2 m de largura, 1,50 m de altura e 1,20 m de comprimento.
- 280.** A área de um paralelepípedo reto-retângulo é  $720 \text{ cm}^2$ . Determine seu volume, sabendo que a soma de suas dimensões vale 34 cm e que a diagonal de uma das faces vale 20 cm.

### Solução

Sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  as dimensões, temos:

$$S = 720 \Rightarrow xy + xz + yz = 360 \quad (1)$$

$$x + y + z = 34 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = f_1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400 \quad (3)$$

De (2) vem:

$$(x + y + z)^2 = 34^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{400} + z^2 + \underbrace{2(xy + xz + yz)}_{360} = 1156.$$

Com (3) e (1), temos:

$$400 + z^2 + 720 = 1156 \Rightarrow z^2 = 36 \Rightarrow z = 6.$$

Substituindo  $z = 6$  em (2), ficamos com:  $x + y = 28$ .

$$(x + y = 28, x^2 + y^2 = 400) \Rightarrow x = 16 \text{ e } y = 12 \text{ (ou } x = 12 \text{ e } y = 16).$$

$$\text{Volume: } V = x \cdot y \cdot z \Rightarrow V = 12 \cdot 16 \cdot 6 \Rightarrow V = 1152.$$

Resposta: O volume é  $1152 \text{ cm}^3$ .

- 281.** Determine as dimensões e o volume de um ortoedro, sendo a soma de suas dimensões igual a 45 cm, a diagonal da base igual a 25 cm e a área total igual a 1 300 cm<sup>2</sup>.
- 282.** Determine o volume e a área total de um paralelepípedo retângulo, dada a soma de suas dimensões 43a, a diagonal 25a e a área de uma face 180a<sup>2</sup>.
- 283.** Calcule as dimensões de um ortoedro cuja diagonal mede 13 cm, de área total 192 cm<sup>2</sup>, e sabendo que a área da seção por um plano que contém duas arestas opostas é 60 cm<sup>2</sup>.
- 284.** Determine o volume de um ortoedro de 90 cm<sup>2</sup> de superfície, supondo que quatro faces do ortoedro são retângulos congruentes e que cada uma das outras é um quadrado de área igual à metade da área do retângulo.
- 285.** Um cubo e um ortoedro têm ambos soma das arestas igual a 72 cm. A dimensão menor do ortoedro é  $\frac{2}{3}$  da aresta do cubo e a dimensão maior do ortoedro é  $\frac{4}{3}$  da dimensão menor do ortoedro. Determine a relação entre os volumes de ambos os sólidos.
- 286.** Uma banheira tem a forma de um ortoedro cujas dimensões são 1,20 m de comprimento, 0,90 m de largura e 0,50 m de altura. Quantos litros de água pode conter? Se toda a água da banheira for colocada em um depósito em forma de cubo de 3 m de aresta, que altura alcançará a água?
- 287.** A altura  $h$  de um paralelepípedo retângulo mede 60 cm, sendo a sua base um quadrado. A diagonal do paralelepípedo forma um ângulo de 60° com o plano da base. Determine o volume do paralelepípedo retângulo.

**Solução**

Com os elementos caracterizados na figura ao lado, temos:

No triângulo ABC, vem

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{d} \Rightarrow$$

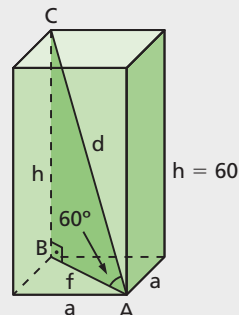
$$\Rightarrow d = 40\sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{f} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{60}{f} \Rightarrow f = 20\sqrt{3}$$

Na base, temos:  $f = a\sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{2} = 20\sqrt{3} \Rightarrow a = 10\sqrt{6}$ .

Volume:  $V = B \cdot h \Rightarrow V = a^2 \cdot h \Rightarrow V = (10\sqrt{6})^2 \cdot 60 = 36000$ .

Resposta: O volume é 36 000 cm<sup>3</sup>.



- 288.** Calcule a área total  $S$  de um paralelepípedo retângulo em função de seu volume  $V$  e do lado  $\ell$  de sua base, sabendo que a base é um quadrado.
- 289.** Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que a soma de duas delas é 25 m, o volume  $900 \text{ m}^3$  e a área total  $600 \text{ m}^2$ .
- 290.** Determine o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que duas dimensões têm igual medida e que a diagonal mede 9 cm, sendo  $144 \text{ cm}^2$  sua área total.
- 291.** A área da superfície total de um cubo é igual à de um ortoedro de área  $216 \text{ cm}^2$ . A altura do ortoedro é de 3 cm e uma das dimensões da base é  $\frac{1}{3}$  da outra. Determine a relação entre os volumes de ambos os sólidos.
- 292.** Calcule a área total de um paralelepípedo retângulo, com  $192 \text{ cm}^3$  de volume, diagonal medindo o triplo da diagonal de uma das faces de menor área, que é o triplo da menor dimensão do paralelepípedo.

### Solução

Seja  $x, y$  e  $z$  (com  $x > y > z$ ) as medidas das dimensões, temos:

$$x \cdot y \cdot z = 192 \quad (1)$$

$$d = 3f \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3\sqrt{y^2 + z^2} \quad (2)$$

$$f = 3z \Rightarrow \sqrt{y^2 + z^2} = 3z \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow y^2 + z^2 = 9z^2 \Rightarrow y^2 = 8z^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}z$$

$$(2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9(y^2 + z^2) \Rightarrow x^2 = 72z^2 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}z$$

Substituindo  $y$  e  $x$  em (1), temos:

$$6\sqrt{2}z \cdot 2\sqrt{2}z \cdot z = 192 \Rightarrow 24z^3 = 192 \Rightarrow z = 2$$

Temos, então:  $z = 2, y = 4\sqrt{2}$  e  $x = 12\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{Área: } S &= 2(xy + xz + yz) \Rightarrow S = 2(96 + 8\sqrt{2} + 24\sqrt{2}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S = 64(3 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Resposta: A área total é  $64(3 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$ .

- 293.** Cinco cubos podem ser dispostos um sobre o outro, formando um ortoedro. Também podemos dispor 6 cubos iguais aos anteriores, pondo 3 sobre 3, obtendo um outro ortoedro. Determine a razão entre os volumes e a razão entre as áreas dos ortoedros obtidos.
- 294.** Com seis cubos iguais, construímos um ortoedro, dispondo os cubos um sobre o outro de maneira que suas faces estejam exatamente superpostas. Determine a relação entre as áreas do ortoedro e de um cubo, sendo os volumes dos cubos os mesmos.

- 295.** Dos ortoedros que podemos formar dispendo de oito cubos iguais, determine o ortoedro de menor superfície.
- 296.** Sobre a base quadrada de um ortoedro, constrói-se exteriormente a ele um cubo que tem por base o quadrado cujos vértices são os pontos médios da base do ortoedro. Determine o volume e a área da superfície do sólido assim obtido, sabendo que a altura do ortoedro mede  $\frac{2}{3}$  do lado da base e a soma de suas dimensões é de 16 cm.
- 297.** Calcule as medidas  $x$  e  $y$  das arestas de dois cubos, conhecendo a soma  $x + y = \ell$  ( $\ell$  é dado) e a soma dos volumes  $v^3$  ( $v$  é dado). Discuta.

**Solução**

$$x + y = \ell \quad (1) \qquad x^3 + y^3 = v^3 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = v^3 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = \frac{v^3}{\ell} \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow (x + y)^2 = \ell^2 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = \ell^2 \quad (4)$$

Fazendo (4) - (3), vem:

$$3xy = \ell^2 - \frac{v^3}{\ell} \Rightarrow xy = \frac{\ell^3 - v^3}{3\ell} \quad (\text{com } \ell^3 - v^3 > 0)$$

Sabendo a soma (S) e o produto (P) de  $x$  e  $y$  dados por (1) e (4), montamos a equação  $z^2 - Sz + P = 0$ , cujas raízes são  $x$  e  $y$ . Assim,

$$z^2 - \ell z + \frac{\ell^3 - v^3}{3\ell} = 0 \Rightarrow 3\ell z^2 - 3\ell^2 z + \ell^3 - v^3 = 0$$

$$\text{Então, } x = z_1 = \frac{3\ell^2 + \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell} \quad \text{e } y = z_2 = \frac{3\ell^2 - \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell}.$$

Discussão: 1)  $3\ell(4v^3 - \ell^3) \geq 0 \Rightarrow 4v^3 - \ell^3 \geq 0 \Rightarrow \ell \leq \sqrt[3]{4v^3}$ .

2)  $\ell^3 - v^3 > 0 \Rightarrow \ell > v$

Logo,  $v < \ell \leq \sqrt[3]{4v^3}$ .

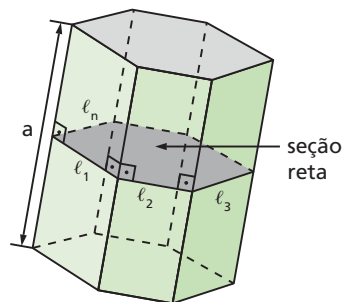
- 298.** Demonstre que:
- em um cubo as arestas são igualmente inclinadas em relação a uma diagonal qualquer.
  - em um cubo as projeções das arestas sobre qualquer das diagonais são iguais à terça parte da diagonal.
- 299.** Sabendo que as faces de um cubo são inscritíveis em círculos de  $7,29\pi \text{ cm}^2$  de área, calcule:
- a medida da sua diagonal;
  - a medida da sua área total;
  - a medida do seu volume.

- 300.** Demonstre que, em todo paralelepípedo, a soma dos quadrados das áreas das seções, determinadas pelos seis planos diagonais, é igual ao dobro da soma dos quadrados das áreas das seis faces.
- 301.** a) Entre todos os paralelepípedos retângulos de mesmo volume, qual o de menor superfície?  
b) Entre todos os paralelepípedos retângulos de mesma superfície, qual o de maior volume?

## IX. Área lateral e área total do prisma

- 155.** A **área lateral** ( $A_\ell$ ) de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.

Seja um prisma de aresta lateral medindo  $a$  e  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$  as medidas dos lados de uma seção reta. Cada face lateral é um paralelogramo de base  $a$  e altura igual a um lado da seção reta.



Assim,

$$A_\ell = a\ell_1 + a\ell_2 + \dots + a\ell_n = \underbrace{(\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n)}_{2p} \cdot a \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$A_\ell = 2p \cdot a$$

em que  $2p$  é a medida do perímetro da seção reta e  $a$  é a medida da aresta lateral.

- 156.** A **área total** de um prisma é a soma das áreas das faces laterais ( $A_\ell$ ) com as áreas das bases (duas bases).

Assim,

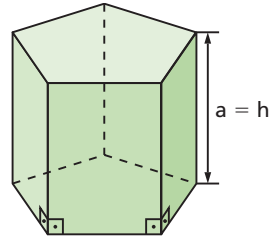
$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 2p \cdot a + 2B$$

em que  $B$  é a área de uma base.

**157.** No **prisma reto** a aresta lateral é igual à altura ( $a = h$ ) e a base é seção reta. Então:

$$A_\ell = 2p \cdot a \Rightarrow A_\ell = 2ph$$

$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 2p \cdot h + 2B$$



**158.** No **prisma regular**, a aresta lateral é igual à altura ( $a = h$ ) e a base, que é seção reta, é um polígono regular.

**Cálculo da área de base B**

A área da base (B) é a soma de  $n$  triângulos de base  $\ell$  (medida do lado) e altura  $m$  (medida do apótema). Então:

$$B = n \cdot \left( \frac{\ell \cdot m}{2} \right) \Rightarrow B = \frac{(n \cdot \ell)m}{2}$$

mas,  $n\ell = 2p =$  medida do perímetro

Daí,

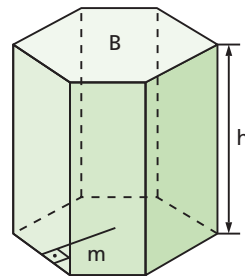
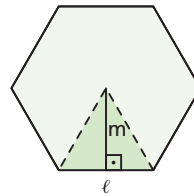
$$B = \frac{2p \cdot m}{2} \Rightarrow B = p \cdot m$$

**Cálculo da área total:  $A_t$**

$$A_\ell = 2p \cdot a \Rightarrow A_\ell = 2p \cdot h$$

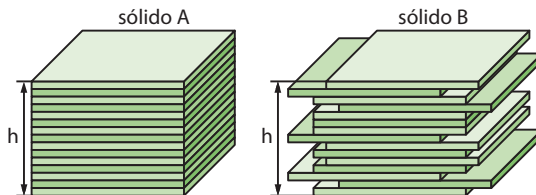
$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 2p \cdot h + 2p \cdot m \Rightarrow A_t = 2p(h + m)$$

$$A_t = 2p(h + m)$$



## X. Princípio de Cavalieri

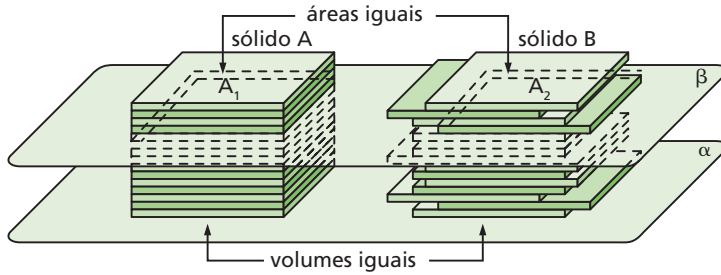
**159.** Como introdução intuitiva, suponhamos a existência de uma coleção finita de chapas retangulares (paralelepípedos retângulos) de mesmas dimensões e, conseqüentemente, de mesmo volume. Imaginemos ainda a formação de dois sólidos com essa coleção de chapas, como indicam as figuras A e B abaixo.



(pilhas de livros ou de folhas)

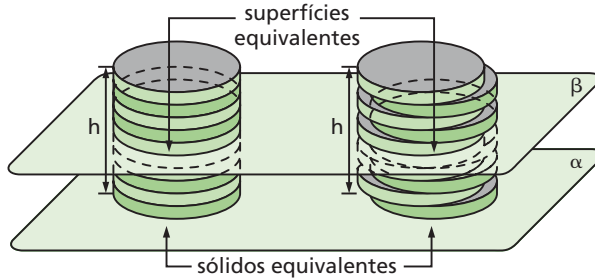
Tanto no caso A como no B, a parte de espaço ocupada (o “volume ocupado”) pela coleção de chapas é o mesmo, isto é, os sólidos A e B têm o mesmo volume.

Agora, imaginemos esses sólidos com base num mesmo plano  $\alpha$  e situados num mesmo semiespaço dos determinados por  $\alpha$ .



Qualquer plano  $\beta$ , secante aos sólidos A e B, paralelo a  $\alpha$ , determina em A e em B superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes).

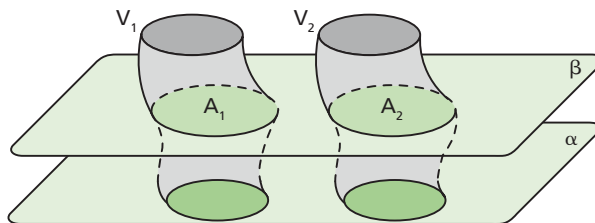
A mesma ideia pode ser estendida para duas pilhas com igual número de moedas congruentes.



O fato que acabamos de caracterizar intuitivamente é formalizado pelo **princípio de Cavalieri** ou **postulado de Cavalieri** (Francesco Bonaventura Cavalieri, 1598-1647), que segue:

**160.**

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

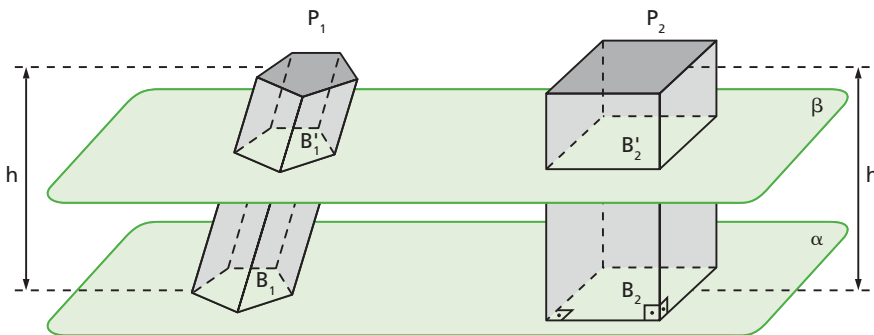


$$(A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2)$$

A aplicação do princípio de Cavalieri, em geral, implica a colocação dos sólidos com base num mesmo plano, paralelo ao qual estão as seções de áreas iguais (o que é possível usando a congruência).

## XI. Volume do prisma

**161.** Consideremos um prisma  $P_1$  de altura  $h$  e área da base  $B_1 = B$  e um paralelepípedo retângulo de altura  $h$  e área de base  $B_2 = B$  (o prisma e o paralelepípedo têm alturas congruentes e bases equivalentes).



Suponhamos, sem perda de generalidade, que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano  $\alpha$  e estão num dos semiespaços determinados por  $\alpha$ .

Qualquer plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , que secciona  $P_1$ , também secciona  $P_2$ , e as seções ( $B'_1$  e  $B'_2$ , respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$$(B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B_2 = B) \Rightarrow B'_1 = B'_2$$

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma  $P_1$  e o paralelepípedo  $P_2$  têm volumes iguais.

$$V_{P_1} = V_{P_2}$$

Como  $V_{P_2} = B_2 h$ , ou seja,  $V_{P_2} = B \cdot h$ , vem  $V_{P_1} = B \cdot h$ ; ou, resumidamente:

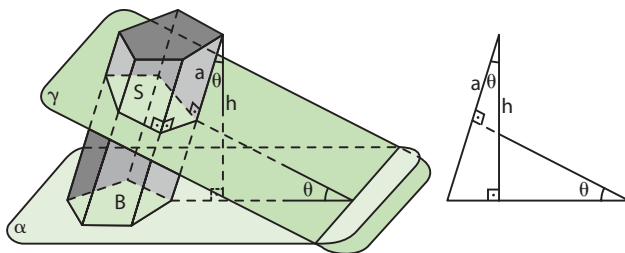
$$V = B \cdot h$$

## 162. Conclusão

O volume de um prisma é o **produto** da **área da base** pela medida da **altura**.

### 163. Observação

Consideremos um prisma oblíquo de área da base  $B$ , altura  $h$  e aresta lateral  $a$ . Seja  $\alpha$  o plano da base e  $S$  uma seção reta situada num plano  $\gamma$  que forma com  $\alpha$  um diedro de medida  $\theta$ .



Notemos que  $S$  é a projeção ortogonal de  $B$  sobre o plano  $\gamma$ . Daí vem:

$$S = B \cdot \cos \theta.$$

O ângulo entre  $a$  e  $h$  também é  $\theta$  (ângulos de lados respectivamente perpendiculares). Donde sai:

$$h = a \cdot \cos \theta.$$

Substituindo  $B$  e  $h$  na expressão do volume do prisma, vem:

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = \frac{S}{\cos \alpha} \cdot a \cos \alpha \Rightarrow V = S \cdot a$$

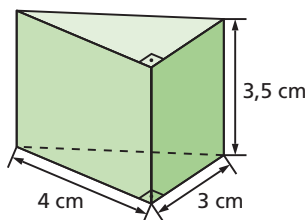
Notando que a expressão também é válida para um prisma reto, em que  $B = S$  e  $a = h$ , temos:

O volume de um prisma é o **produto** da área da **seção reta** pela medida da **aresta lateral**.

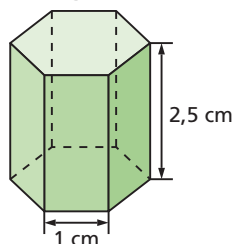
## EXERCÍCIOS

**302.** Calcule a área lateral, a área total e o volume dos prismas, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

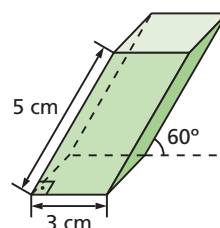
a) Prisma reto (triangular)



b) Prisma regular (hexagonal)

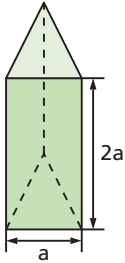


c) Prisma oblíquo (base quadrada)

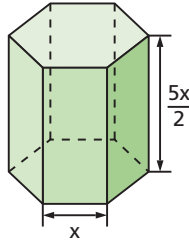


**303.** Represente através de expressões algébricas a área lateral, a área total e o volume dos prismas, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

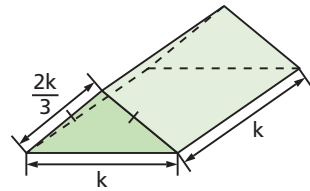
a) Prisma regular (triangular)



b) Prisma regular (hexagonal)



c) Prisma reto (triangular)



**304.** A base de um prisma de 10 cm de altura é um triângulo retângulo isósceles de 6 cm de hipotenusa. Calcule a área lateral e o volume do prisma.

**305.** Calcule o volume e a área total de um prisma, sendo sua seção reta um trapézio isósceles cujas bases medem 30 cm e 20 cm e cuja altura mede  $10\sqrt{2}$  cm e a área lateral  $640\text{ cm}^2$ .

**306.** Determine a área lateral e o volume de um prisma reto de 25 cm de altura, cuja base é um hexágono regular de apótema  $4\sqrt{3}$  cm.

**307.** Determine a medida da aresta da base de um prisma triangular regular, sendo seu volume  $8\text{ m}^3$  e sua altura 80 cm.

**308.** Um prisma reto tem por base um hexágono regular. Qual é o lado do hexágono e a altura do prisma, sabendo que o volume é de  $4\text{ m}^3$  e a superfície lateral de  $12\text{ m}^2$ ?

**309.** Num prisma oblíquo a aresta lateral mede 5 cm, a seção reta é um trapézio isósceles cuja altura mede 8 cm e as bases medem 7 cm e 19 cm, respectivamente. Calcule a área lateral desse prisma.

**310.** Determine a área total de um prisma triangular oblíquo, sendo a sua seção reta um triângulo equilátero de  $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$  de área e um dos lados da seção igual à aresta lateral do prisma.

**311.** Um prisma triangular regular tem a aresta da base medindo 10 dm. Em quanto se deve aumentar a altura, conservando-se a mesma base, para que a área lateral do novo prisma seja igual à área total do prisma dado?

**Solução**

Área de um triângulo equilátero de lado  $a$ :

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Sejam  $A_{\ell_1}$  e  $A_{t_1}$  as áreas lateral e total do prisma e  $A_{\ell_2}$  a área lateral do novo prisma.

Seja  $B$  a área da base, temos:

$$B = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}.$$

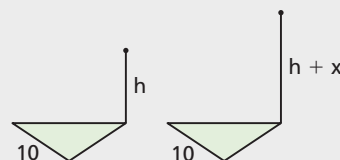
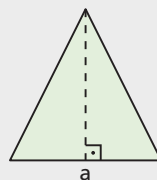
Supondo que a altura  $h$  do prisma teve um aumento  $x$ , vem:

$$A_{t_1} = A_{\ell_1} + 2B \Rightarrow A_{t_1} = 3(10 \cdot h) + 2 \cdot 25\sqrt{3} \Rightarrow A_{t_1} = 30h + 50\sqrt{3}$$

$$A_{\ell_2} = 3 \cdot (10 \cdot h_2) \Rightarrow A_{\ell_2} = 30 \cdot (h + x)$$

$$A_{t_1} = A_{\ell_2} \Rightarrow 30h + 50\sqrt{3} = 30(h + x) \Rightarrow 30x = 50\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Resposta:  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$  dm.

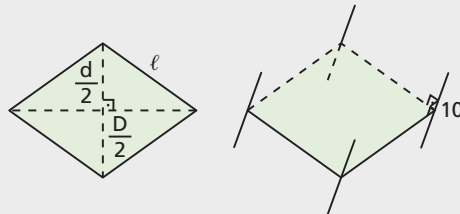


- 312.** Um prisma tem por base um triângulo equilátero cujo lado é  $a$  e a altura desse prisma é igual ao dobro da altura do triângulo da base. Determine o seu volume.
- 313.** A aresta da base de um prisma hexagonal regular é  $r$  e a aresta lateral é  $s$ . Sabendo que esse prisma é equivalente a um outro triangular regular, cuja aresta da base é  $s$  e cuja aresta lateral é  $r$ , calcule a relação entre  $r$  e  $s$ .
- 314.** Calcule o volume de um prisma hexagonal regular com 3 m de altura, sabendo que, se a altura fosse de 5 m, o volume do prisma aumentaria em  $6 \text{ m}^3$ .
- 315.** A aresta da base de um prisma hexagonal regular mede 8 cm. Em quanto se deve diminuir a altura desse prisma de modo que se tenha um novo prisma com área total igual à área lateral do prisma dado?
- 316.** Calcule o volume de um prisma triangular regular de  $5\sqrt{3}$  cm de altura, sabendo que a área lateral excede a área da base em  $56\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
- 317.** A altura de um prisma reto mede 15 cm e a base é um triângulo cujos lados medem 4 cm, 6 cm e 8 cm. Calcule a área lateral e o volume do sólido.
- 318.** Calcule a medida da aresta lateral de um prisma cuja área lateral mede  $72 \text{ dm}^2$ , sendo os lados da seção reta respectivamente 3 dm, 4 dm e 5 dm.

- 319.** A aresta lateral de um prisma reto mede 12 m; a base é um triângulo retângulo de 150 m<sup>2</sup> de área e cuja hipotenusa mede 25 m. Calcule a área total e o volume desse prisma.
- 320.** Um prisma pentagonal regular tem 8 cm de altura, sendo 7 cm a medida da aresta da base. Calcule a área lateral desse prisma.
- 321.** Calcule a área lateral do prisma oblíquo cuja seção reta é um triângulo equilátero de  $4\sqrt{3}$  m<sup>2</sup> de área, sabendo que a aresta lateral é igual ao perímetro da seção reta.
- 322.** Calcule a área total e o volume de um prisma hexagonal regular de 12 m de aresta lateral e 4 m de aresta da base.
- 323.** Um prisma hexagonal regular tem a área da base igual a  $96\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. Calcule a área lateral e o volume do prisma, sabendo que sua altura é igual ao apótema da base.
- 324.** A seção reta de um prisma oblíquo é um losango, cujas diagonais são diretamente proporcionais a 3 e 4. Calcule a área lateral do prisma, sabendo que sua aresta lateral mede 10 cm e que a área de sua seção reta é igual a 54 cm<sup>2</sup>.

**Solução**

Sendo  $B$  a área,  $\ell$  o lado,  $d$  e  $D$  as diagonais do losango, temos:



$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{4} = \frac{d}{3} = k \\ B = 54 \cdot B = \frac{D \cdot d}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4k \cdot 3k}{2} = 54 \Rightarrow k = 3$$

$$\ell^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = 4k^2 + \frac{9}{4}k^2 = \frac{25k^2}{4} \Rightarrow \ell = \frac{5k}{2}$$

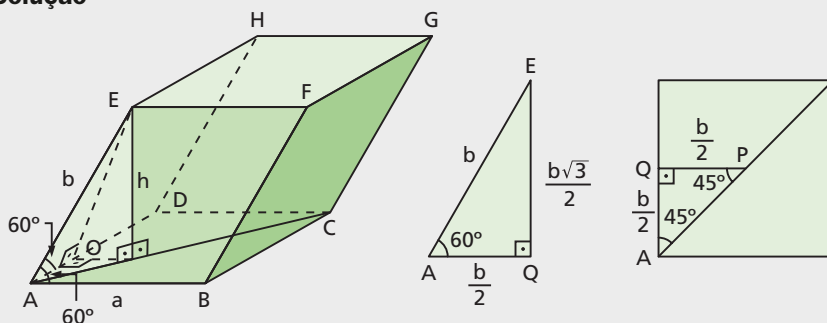
$$\ell = \frac{5k}{2} \Rightarrow \ell = \frac{5 \cdot 3}{2} \Rightarrow \ell = \frac{15}{2}$$

Sendo  $A_\ell$  a área lateral, temos:

$$A_\ell = 4 \cdot (\ell \cdot a) \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \frac{15}{2} \cdot 10 \Rightarrow A_\ell = 300$$

Resposta: 300 cm<sup>2</sup>.

- 325.** Um prisma reto tem por base um losango em que uma de suas diagonais vale  $\frac{3}{4}$  da outra, e a soma de ambas é 14 cm. Calcule a área total e o volume desse prisma, sabendo que sua altura é igual ao semiperímetro da base.
- 326.** Calcule a área lateral de um prisma oblíquo, sendo 8 cm a medida de sua aresta lateral, a seção reta do prisma um losango de  $125 \text{ cm}^2$  de área e a razão das diagonais desse losango igual a  $\frac{2}{5}$ .
- 327.** Determine a medida da aresta e a área total de um prisma reto que tem por base um triângulo equilátero, sendo a altura do prisma igual à medida do lado do triângulo equilátero, e o volume,  $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .
- 328.** Calcule o volume e a área total de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de 6 dm de perímetro, sendo a altura do prisma o dobro da altura da base.
- 329.** Calcule o volume de um prisma triangular regular, sendo todas as suas arestas de mesma medida e sua área lateral  $33 \text{ m}^2$ .
- 330.** Um prisma de 3 m de altura tem por base um quadrado inscrito em um círculo de 2 m de raio. Qual é o seu volume?
- 331.** Um prisma reto tem por base um quadrado inscrito em um círculo de 8 cm de raio. Sabendo que o volume do prisma é de  $768 \text{ cm}^3$ , determine a área total.
- 332.** Calcule o volume de um prisma quadrangular regular cuja área total tem  $144 \text{ m}^2$ , sabendo que sua área lateral é igual ao dobro da área da base.
- 333.** A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado de lado  $a$ . Uma das arestas laterais é  $b$  e forma um ângulo de  $60^\circ$  com os lados adjacentes da base. Determine o volume do paralelepípedo.

**Solução**

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = a^2 \cdot h \quad (1)$$

A aresta lateral  $AE = b$  é igualmente inclinada em relação aos lados  $AB = a$  e  $AD = a$  da base. A altura  $EP = h$  tem extremidade  $P$  sobre a diagonal  $AC$  da base. Conduzindo  $PQ$  perpendicular ao lado  $AD$  com  $Q$  em  $AD$ , temos os triângulos retângulos  $AQE$ ,  $AQP$ ,  $EPQ$  (notemos que o plano  $(EQP)$  é perpendicular a  $AD$ ).

No triângulo  $AQE$ , temos:

$$\cos 60^\circ = \frac{AQ}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AQ}{b} \Rightarrow AQ = \frac{b}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{EQ}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EQ}{b} \Rightarrow EQ = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

O triângulo  $AQP$  é isósceles, então:  $QP = AQ \Rightarrow QP = \frac{b}{2}$ .

Aplicando a relação de Pitágoras no triângulo  $EPQ$ , vem:

$$(EP)^2 = (EQ)^2 - (QP)^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo em (1), temos:

$$V = a^2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{a^2 b \sqrt{2}}{2}.$$

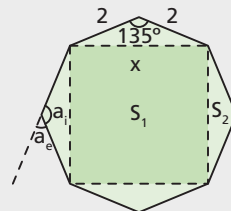
Resposta: O volume é  $\frac{a^2 b \sqrt{2}}{2}$ .

- 334.** Determine o volume de um prisma triangular oblíquo, sendo a base um triângulo equilátero de lado  $a = 4$  dm e a aresta lateral de 4 dm, que forma um ângulo de  $60^\circ$  com a base do prisma.
- 335.** Calcule o volume de um paralelepípedo reto, que tem por altura 10 cm e por base um paralelogramo cujos lados medem 8 cm e 12 cm, sabendo que o ângulo entre esses lados vale  $60^\circ$ .
- 336.** Qual é o volume de um prisma reto no qual a base é um octógono regular de 2 m de lado e a superfície lateral é  $28 \text{ m}^2$ ?

**Solução**

$$V = B \cdot h$$

$$A_\ell = 28 \Rightarrow 8 \cdot 2h = 28 \Rightarrow h = \frac{7}{4}$$



Cálculo da área da base:

$$A_{\text{octógono}} = A_{\text{quadrado}} + 4A_{\text{triângulo}}$$

$$B = S_1 + 4S_2$$

O ângulo externo  $a_e$  do octógono regular é  $a_e = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ .

Consequentemente, o ângulo interno  $a_i$  vale:

$$a_i = 180^\circ - a_e \Rightarrow a_e = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

O lado  $x$  é obtido pela lei dos cossenos:

$$x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos 135^\circ \Rightarrow x^2 = 4 + 4 + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow S_1 = 4(2 + \sqrt{2})$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 135^\circ \Rightarrow S_2 = \sqrt{2}.$$

Substituindo, temos:

$$B = S_1 + 4S_2 \Rightarrow B = 4(2 + \sqrt{2}) + 4\sqrt{2} \Rightarrow B = 8(\sqrt{2} + 1)$$

Cálculo do volume:

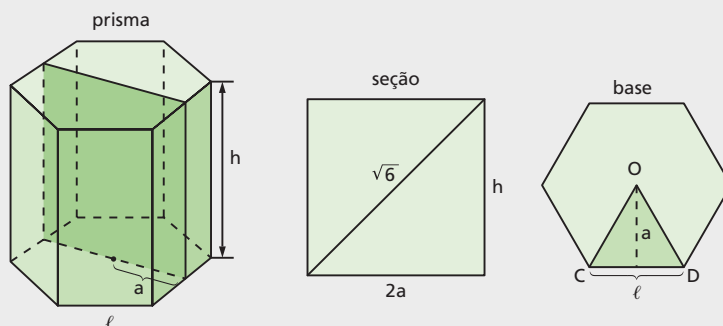
$$V = B \cdot h \Rightarrow V = 8(\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{7}{4} \Rightarrow V = 14(\sqrt{2} + 1)$$

Resposta: O volume é  $14(\sqrt{2} + 1) \text{ m}^3$ .

**337.** Calcule o volume de um prisma regular cuja área lateral mede  $240 \text{ m}^2$ , sendo a base um dodecágono regular de  $2 \text{ m}$  de lado.

**338.** Um prisma regular hexagonal é cortado por um plano perpendicular a uma aresta de uma base, segundo um quadrado de diagonal  $\sqrt{6} \text{ m}$ . Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume do prisma.

**Solução**



Cálculo dos elementos (indicados na figura):

Do quadrado vem:  $2a = h = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \sqrt{3}$  e  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Do triângulo equilátero OCD, vem:  $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = a \Rightarrow \ell = 1$ .

1º) Área da base: B

$$B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot a \Rightarrow B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2º) Área lateral:  $A_\ell$

$$A_\ell = 6 \cdot \ell \cdot h \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_\ell = 6\sqrt{3}$$

3º) Área total:  $A_t$

$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 6\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_t = 9\sqrt{3}$$

4º) Volume

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{9}{2}$$

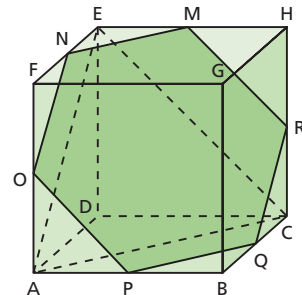
Resposta:  $B = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2$ ;  $A_\ell = 6\sqrt{3} \text{ m}^2$ ;  $A_t = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$  e  $V = \frac{9}{2} \text{ m}^3$ .

- 339.** Calcule o volume de um prisma hexagonal regular, sabendo que o plano que contém a menor diagonal da base e o centro do sólido produz uma seção quadrada de 2 m de lado.
- 340.** Calcule o volume de um prisma hexagonal regular de área total igual a 12 dm<sup>2</sup>, sendo 1 dm a altura do prisma.
- 341.** Calcule o lado da base e a altura de um prisma hexagonal regular, sendo A sua área lateral e V o volume.
- 342.** Calcule o perímetro da base de um prisma hexagonal regular, sabendo que o prisma é equivalente a um cubo de aresta a, cuja diagonal tem medida igual à altura do prisma.

## XII. Seções planas do cubo

### 164. Seção hexagonal do cubo

Consideremos o cubo ABCDEFGH (vide figura) e sejam M, N, O, P, Q e R os respectivos pontos médios de EH, EF, AF, AB, BC e CH.



1º) Os pontos M, N, O, P, Q e R pertencem ao plano mediador da diagonal DG.

Demonstração:

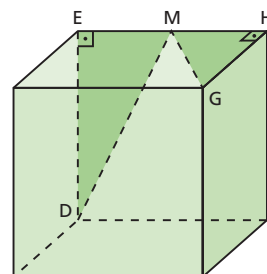
Os segmentos DM e GM, DN e GN, DO e GO, DP e GP, DQ e GQ, DR e GR são congruentes entre si por serem hipotenusas de triângulos retângulos congruentes entre si.

Por exemplo:

$$\triangle DME \cong \triangle GMH \Rightarrow DM \cong GM.$$

Portanto, os pontos M, N, O, P, Q e R, sendo equidistantes de D e G, estão no plano mediador de DG.

Note-se que esse plano é perpendicular à **diagonal** do cubo pelo **centro** dele.



2º) MNOPQR é um hexágono regular.

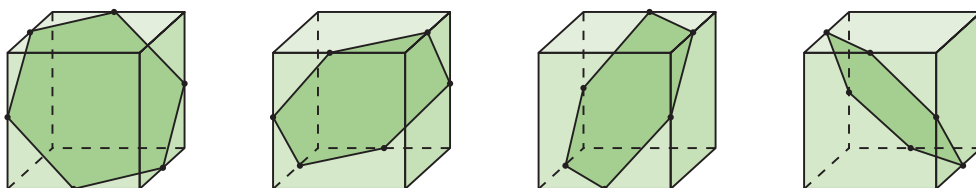
Demonstração:

Os lados são congruentes, pois a medida deles é metade da medida da diagonal da face do cubo.

$$\left( \text{Sendo } a \text{ a aresta do cubo, temos } MN = NO = OP = PQ = QR = RM = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \right)$$

Os ângulos internos do hexágono MNOPQR são todos congruentes entre si por serem congruentes ao ângulo externo do triângulo equilátero ACE (ângulos de lados respectivamente paralelos).

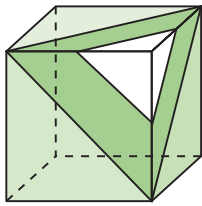
3º) Fixado um cubo, como ele possui quatro diagonais, os planos mediadores dessas diagonais determinam quatro hexágonos regulares como seção no cubo.



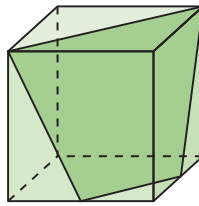
## 165. Outras seções planas do cubo

As seções planas de um cubo podem ser polígonos de 3, 4, 5 e 6 lados, isto é, triângulo, quadrilátero, pentágono e hexágono.

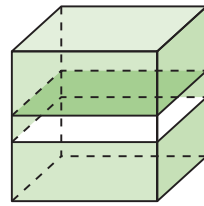
Vejamos isso nas figuras:



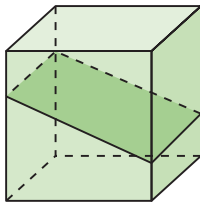
Triângulo



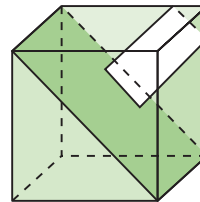
Trapézio



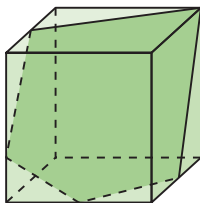
Quadrado



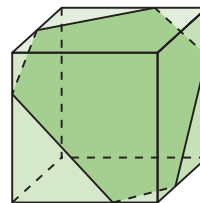
Retângulo



Retângulo  
(seção diagonal)



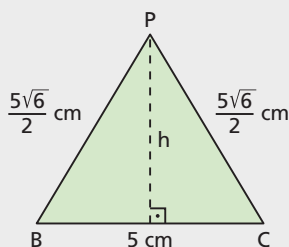
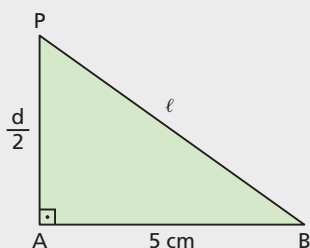
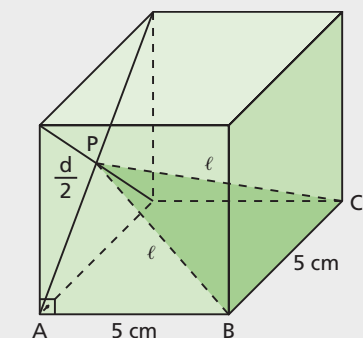
Pentágono



Hexágono

## EXERCÍCIOS

- 343.** Por duas arestas opostas e paralelas de um cubo de aresta  $a$  passa um plano. Determine a natureza do polígono da seção e calcule sua área.
- 344.** Se a aresta de um cubo mede 6 m, calcule a área da sua seção diagonal.
- 345.** Secciona-se um cubo de aresta  $a$  por um plano que contém duas arestas opostas, obtendo-se um retângulo cuja área mede  $S$ . Exprima a área total do sólido em função da área da seção diagonal.
- 346.** Calcule a área do triângulo que se obtém unindo-se o centro de uma face de um cubo com as extremidades de uma aresta da face oposta, sabendo que a medida da aresta do cubo vale 5 cm.

**Solução**

Cálculo da área do  $\triangle BPC$ :

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{25\sqrt{5}}{4}.$$

Resposta: A área da seção é  $\frac{25\sqrt{5}}{4}$  cm<sup>2</sup>.

Cálculo dos elementos indicados na figura:

$$d^2 = 5^2 \Rightarrow d = 5\sqrt{2}.$$

Do triângulo ABP, em que P é o centro de uma das faces opostas a  $\overline{BC}$ :

$$\begin{aligned} \ell^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 5^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ell^2 &= \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ell^2 &= \frac{50}{4} + 25 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ell &= \frac{5\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Da seção BPC, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 &= h^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{150}{4} &= h^2 + \frac{25}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= \frac{5\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

**347.** A seção determinada por um plano em um cubo é um hexágono regular. Calcule a razão entre a área desse hexágono e a área do círculo circunscrito a ele.

**348.** Um cubo de área total igual a 31,74 cm<sup>2</sup> é cortado por um plano, de modo a se obter uma seção hexagonal regular. Calcule o lado do quadrado inscrito no triângulo equilátero de perímetro igual ao do hexágono obtido.

- 349.** Seja dado um cubo ABCDEFGH cuja aresta mede  $a$ . Pela diagonal BE de uma das faces e o ponto médio P da aresta GH, paralela a essa face, faz-se passar um plano.
- Demonstre que a seção do cubo por esse plano é um trapézio isósceles.
  - Calcule os lados do trapézio e a área da seção em função da aresta do cubo.
- 350.** Pelas extremidades de três arestas que partem de um vértice A de um cubo traçamos um plano. Mostre que a seção é um triângulo equilátero. Mostre também que a diagonal do cubo que parte de A é perpendicular ao plano da seção e precise a posição do ponto onde ela é perpendicular. Calcule também a área do triângulo equilátero.

### XIII. Problemas gerais sobre prismas

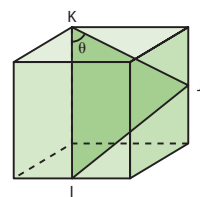
## EXERCÍCIOS

- 351.** Calcule os ângulos formados pelos pares de faces laterais de um prisma cuja seção reta é um triângulo de lados respectivamente iguais a  $13$  m,  $13\sqrt{2}$  m e  $13$  m.
- 352.** Calcule a medida do menor ângulo diedro formado pelas faces laterais de um prisma, sabendo que os lados da seção reta desse prisma triangular medem, respectivamente,  $3$  cm,  $3\sqrt{3}$  cm e  $6$  cm.
- 353.** Calcule a medida do ângulo que a diagonal de um cubo forma com:
- as faces;
  - as arestas.
- 354.** Calcule o ângulo que a diagonal de um prisma quadrangular regular de  $64\sqrt{2}$  m<sup>3</sup> de volume forma com as arestas laterais, sabendo que as arestas da base do prisma medem  $4$  m.
- 355.** Dado um prisma hexagonal regular de  $2$  m de aresta da base e  $2\sqrt{3}$  m de altura, considere duas diagonais paralelas de uma das bases e as diagonais da outra base paralelas àquelas. Calcule o volume de um dos prismas triangulares em que fica dividido o prisma hexagonal dado quando são traçados os quatro planos diagonais definidos por pares daquelas quatro diagonais das bases.
- 356.** Calcule o volume de um prisma triangular oblíquo cujos lados da base medem  $13a$ ,  $14a$  e  $15a$ , uma aresta lateral mede  $26a$  e sua projeção sobre o plano da base mede  $10a$ .

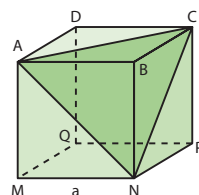
- 357.** Calcule o volume de um prisma quadrangular oblíquo, sendo 20 cm a medida de sua aresta lateral, sabendo que a seção reta é um paralelogramo em que dois lados consecutivos medem 9 cm e 12 cm e formam um ângulo de  $30^\circ$ .
- 358.** A seção de um paralelepípedo oblíquo é um quadrilátero que tem um ângulo de  $45^\circ$  compreendido entre lados que medem 4 cm e 8 cm. O comprimento da aresta lateral é igual ao semiperímetro dessa seção. Calcule o volume do poliedro.
- 359.** Calcule o volume de um prisma oblíquo, sabendo que a base é um hexágono regular de lado  $R = 2$  cm e que a aresta  $L$ , inclinada  $60^\circ$  em relação ao plano da base, mede 5 cm.
- 360.** Determine o volume e a área lateral de um prisma reto de 10 cm de altura e cuja base é um hexágono regular de apótema  $3\sqrt{3}$  cm.
- 361.** Qual é a altura de um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero de lado  $a$ , para que o seu volume seja igual ao volume de um cubo de aresta  $a$ ?
- 362.** Se um cubo tem suas arestas aumentadas em 50%, em quanto aumentará seu volume?
- 363.** Procura-se construir um cubo grande empilhando cubos pequenos e todos iguais. Quando se coloca um certo número de cubos pequenos em cada aresta, sobram cinco; se se tentasse acrescentar um cubo a mais em cada aresta, ficariam faltando trinta e dois. Quantos são os cubos pequenos?

- 364.** Os pontos  $J$  e  $I$  são os pontos médios das arestas do cubo sugerido na figura.

- Calcule, em função da medida  $a$  da aresta do cubo, a distância de  $I$  a  $J$ .
- Determine a medida  $\theta$  do ângulo  $\widehat{IKJ}$ .

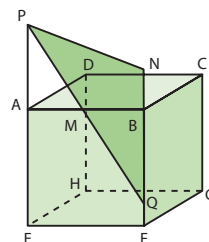


- 365.** No cubo ao lado, faz-se um corte pelo plano que passa pelos vértices  $A$ ,  $C$  e  $N$ , retirando-se o sólido  $(ABCN)$  assim obtido. Determine o volume do sólido restante em função de  $a$ , sabendo que  $a$  é a medida do lado.



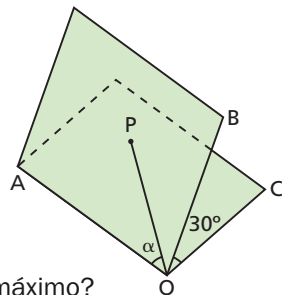
- 366.** Considere um cubo  $ABCDEFGH$  de lado 1 unidade de comprimento, como na figura.  $M$  e  $N$  são os pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente. Para cada ponto  $P$  da reta  $AE$ , seja  $Q$  o ponto de interseção das retas  $PM$  e  $BF$ .

- Prove que o  $\triangle PQN$  é isósceles.
- A que distância do ponto  $A$  deve estar o ponto  $P$  para que o  $\triangle PQN$  seja retângulo?



- 367.** Uma caixa-d'água com a forma de um paralelepípedo reto de  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$  de base e  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  m de altura está sobre uma laje horizontal com água até a altura  $h$ . Suponhamos que a caixa fosse erguida lateralmente, apoiada sobre uma das arestas da base (que é mantida fixa), sem agitar a água. Assim sendo, a água começaria a transbordar exatamente quando o ângulo da base da caixa com a laje medisse  $30^\circ$ . Calcule a altura  $h$ .
- 368.** Calcule as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que elas estão em progressão aritmética, que a área total é  $S$  e a diagonal é  $d$ . Discuta.
- 369.** Mostre que a soma dos diedros formados pelas faces laterais de um prisma triangular com uma de suas bases está compreendida entre dois e quatro retos.
- 370.** Prove que a soma dos diedros formados pelas faces laterais de um prisma convexo de  $n$  faces com uma de suas bases é superior a 2 retos e inferior a  $2(n - 1)$  retos.
- 371.** Prove que se a seção reta de um prisma é um polígono equilátero, a soma das distâncias de um ponto, tomado no interior do sólido às faces laterais e às bases, é constante.
- 372.** Mostre que a soma das distâncias dos vértices de um paralelepípedo a um plano que não o intercepta é igual a 8 vezes a distância do ponto de concurso de suas diagonais a esse plano.
- 373.** Prove que a soma dos quadrados das distâncias de um ponto qualquer aos oito vértices de um paralelepípedo é igual a oito vezes o quadrado da distância desse ponto ao ponto de concurso das diagonais, mais a metade da soma dos quadrados das diagonais.
- 374.** Um cubo é seccionado por um plano que passa por uma de suas diagonais. Como deverá ser traçado esse plano para que a área da seção seja mínima?
- 375.** É dado um cubo de aresta  $a$ . Secciona-se o cubo por um plano que forma um ângulo de  $30^\circ$  com uma das faces e passa por uma diagonal dessa face. Determine os volumes dos sólidos resultantes.

- 376.** Na figura ao lado, os planos  $OAB$  e  $OAC$  formam entre si um ângulo de  $30^\circ$ . As retas  $OB$  e  $OC$  são perpendiculares à reta  $OA$ . O segmento  $OP$ , do plano  $OAB$ , é unitário e forma um ângulo  $\alpha$  com  $OA$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ). Seja  $ORSTQP$  o prisma assim construído:  $T$  e  $S$  são as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $OA$  e  $OB$ ;  $Q$  e  $R$  são as projeções ortogonais de  $P$  e  $S$  sobre o plano  $OAC$ .



- a) Determine o volume do prisma em função de  $\alpha$ .
- b) Qual o valor de  $\text{tg } \alpha$  quando o volume do prisma é máximo?

De alcance maior foram certos teoremas estabelecidos por Cavalieri relacionando os indivisíveis de um paralelogramo com aqueles dos triângulos determinados por uma de suas diagonais. Se  $a$  indica genericamente os primeiros e  $x$  os segundos (Figura 2), Cavalieri “provou” que

$$\Sigma a = 2\Sigma x; \quad \Sigma a^2 = 3\Sigma x^2; \quad \dots (*)$$

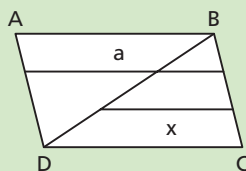


Figura 2

onde os somatórios não têm o sentido atual (são infinitos e correspondem à ideia de “integrar” os indivisíveis para formar as figuras). Se o paralelogramo é um retângulo de altura  $b$ , sua área  $\Sigma a$  é igual ao produto de um divisível pelo “número”  $b$  de indivisíveis, isto é,  $\Sigma a = ab$ .

Usando então a primeira das relações de (\*), obtém-se a área do triângulo:  $\Sigma x = \frac{1}{2} \Sigma a = \frac{1}{2} ab$ .

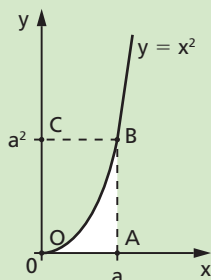


Figura 3

A segunda das relações de (\*) permite calcular a área compreendida entre a curva  $y = x^2$  e o eixo  $x$ , de  $O$  até  $a$  (Figura 3). Segundo as ideias de Cavalieri, essa área vale  $\Sigma x^2$ , pois cada um de seus indivisíveis (ordenadas) vale  $x^2$ . Mas, pela relação citada:

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3} \Sigma a^2,$$

onde  $\Sigma a^2$  é a área do retângulo OABC.

Mas essa área é dada também por  $a \cdot a^2 = a^3$  (base vezes altura). Logo, a área sombreada é  $\frac{a^3}{3}$ , resultado correto.

Foram tantas as críticas que Cavalieri recebeu pelo seu método, embora este funcionasse (como no exemplo anterior), que certa vez disse: “O rigor é algo que diz respeito à filosofia, e não à matemática”.

# CAPÍTULO IX

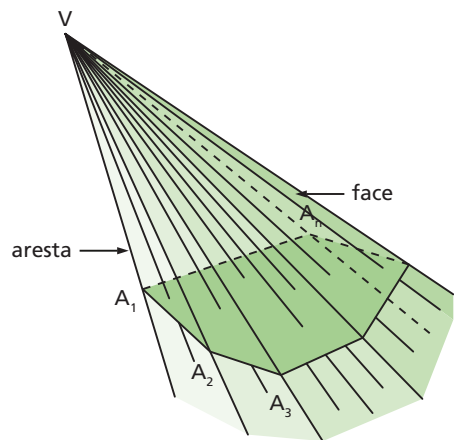
## Pirâmide

### I. Pirâmide ilimitada

#### 166. Definição

Consideremos uma região poligonal plano-convexa (polígono plano-convexo)  $A_1 A_2 \dots A_n$  de  $n$  lados e um ponto  $V$  fora de seu plano. Chama-se **pirâmide ilimitada convexa** ou **pirâmide convexa indefinida** (ou ângulo poliédrico ou ângulo sólido) à reunião das semirretas de origem em  $V$  e que passam pelos pontos da região poligonal (polígono) dada.

Se a região poligonal (polígono)  $A_1 A_2 \dots A_n$  for côncava, a pirâmide ilimitada resulta côncava.



#### 167. Elementos

Uma pirâmide ilimitada convexa possui:  $n$  arestas,  $n$  diedros e  $n$  faces (que são ângulos ou setores angulares planos).

### 168. Seção

É uma região poligonal plana (polígono plano) com um só vértice em cada aresta.

### 169. Superfície

A superfície de uma pirâmide ilimitada convexa é a reunião das faces dessa pirâmide. É uma superfície poliédrica convexa ilimitada.

## II. Pirâmide

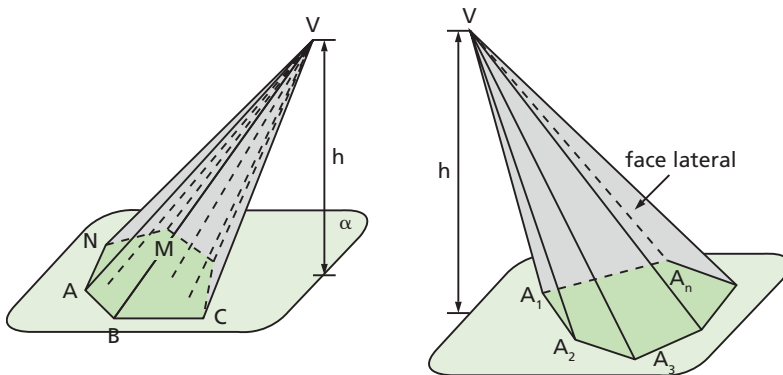
### 170. Definição

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa)  $ABC\dots MN$  situado num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Chama-se **pirâmide** (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos do polígono.

$V$  é o vértice, e o polígono  $ABC \dots MN$  e a base da pirâmide.

Podemos também definir a pirâmide como segue:

**Pirâmide convexa limitada** ou **pirâmide convexa definida** ou **pirâmide convexa** é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide essa pirâmide pelo plano de uma seção, reunida com essa seção.



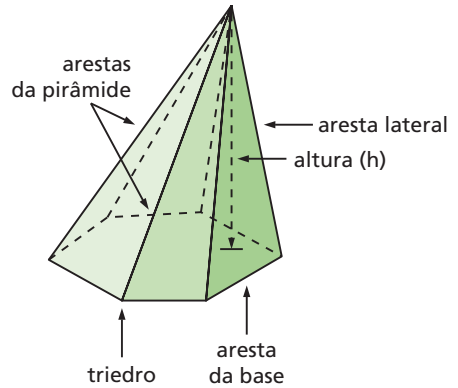
### 171. Elementos

Uma pirâmide possui:

1 base (a seção citada),  $n$  faces laterais (triângulos),  $n + 1$  faces,  $n$  arestas laterais,  $2n$  arestas,  $2n$  diedros,  $n + 1$  vértices,  $n + 1$  ângulos poliédricos e  $n$  triedros.

Para uma pirâmide é válida a relação de Euler:

$$V - A + F = (n + 1) - 2n + (n + 1) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$$



### 172. Altura

A **altura** de uma pirâmide é a distância  $h$  entre o vértice e o plano da base.

### 173. Superfícies

**Superfície lateral** é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por  $A_L$ .

**Superfície total** é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área total e indicada por  $A_T$ .

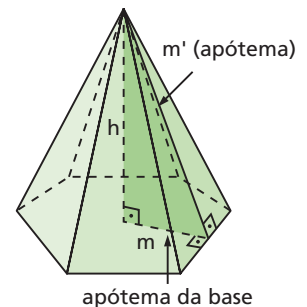
### 174. Natureza

Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a **base** for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

### 175. Pirâmide regular

**Pirâmide regular** é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

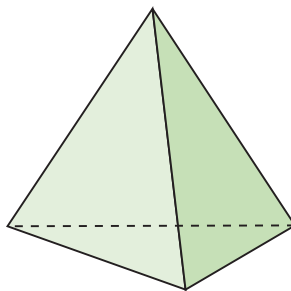
Chama-se **apótema** de uma pirâmide regular à altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.



Pirâmide regular hexagonal

## 176. Tetraedro

**Tetraedro** é uma pirâmide triangular.



tetraedro regular

**Tetraedro regular** é um tetraedro que tem as seis arestas congruentes entre si.

## 177. Nota

É comum encontrarmos referências a **pirâmide reta** para diferenciar de **pirâmide oblíqua**. Deve-se, então, entender que a **pirâmide reta** é aquela cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Caso a base seja um polígono circunscritível, isto é, admita uma circunferência inscrita, o centro dessa circunferência (incentro do polígono), em geral, é adotado como o **centro da base**.

# EXERCÍCIOS

- 377.** Ache a natureza de uma pirâmide, sabendo que a soma dos ângulos das faces é igual a 20 retos.
- 378.** Ache a natureza de uma pirâmide, sabendo que a soma dos ângulos das faces é igual a 56 retos.
- 379.** Calcule o número de diagonais da base de uma pirâmide, sabendo que a soma dos ângulos internos de todas as suas faces é igual a 32 retos.

- 380.** Determine a soma dos ângulos internos da base de uma pirâmide, sendo 24 retos a soma dos ângulos internos de todas as faces dessa pirâmide.
- 381.** Prove que a soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide de  $n$  faces laterais vale  $S = (n - 1) \cdot 4r$ .

**Solução**

A soma dos ângulos ( $S$ ) de todas as faces é a soma dos ângulos da base, que é  $(n - 2) \cdot 2r$ , com a soma dos ângulos das faces laterais, que é  $n \cdot 2r$ :

$$S = (n - 2) \cdot 2r + n \cdot 2r = 2 \cdot n \cdot 2r - 4r = (n - 1) \cdot 4r.$$

- 382.** Calcule a soma dos ângulos das faces de uma pirâmide cuja base é um polígono convexo de  $n$  lados.
- 383.** Ache a natureza de uma pirâmide que possui:  
 a) 6 faces                      b) 8 faces                      c) 12 arestas                      d) 20 arestas

### III. Volume da pirâmide

#### 178. Seção paralela à base de um tetraedro

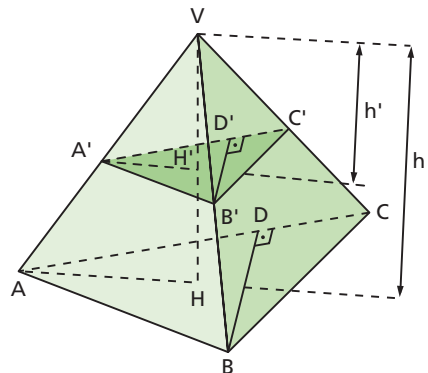
Quando se secciona uma pirâmide triangular (**tetraedro**) por um plano paralelo à base:

1º)

As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.

De fato, as retas  $\overleftrightarrow{A'H'}$  e  $\overleftrightarrow{AH}$  são paralelas, pois são interseções de planos paralelos por um terceiro; logo, os triângulos  $VH'A'$  e  $VHA$  são semelhantes e portanto:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$



2º)

A seção e a base são triângulos semelhantes.

De fato, os ângulos da seção ( $\triangle A'B'C'$ ) e os ângulos da base ( $\triangle ABC$ ), por terem lados respectivamente paralelos, são congruentes. Disso se conclui que a seção  $A'B'C'$  e a base  $ABC$  são triângulos semelhantes.

A razão de semelhança é  $\frac{h'}{h}$ , como segue:

$$\triangle VA'B' \sim \triangle VAB \Rightarrow \frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}$$

Portanto, os triângulos  $A'B'C'$  e  $ABC$  são semelhantes, sendo  $\frac{h'}{h}$  a razão de semelhança.

3º)

A razão entre as áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.

De fato, sendo  $B'D'$  e  $BD$  duas respectivas alturas da seção e da base, vale:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h}$$

$$\text{Logo, } \frac{\text{Área}(\triangle A'B'C')}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{\frac{1}{2}(A'C') \cdot (B'D')}{\frac{1}{2}(AC) \cdot (BD)} = \frac{A'C'}{AC} \cdot \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow$$

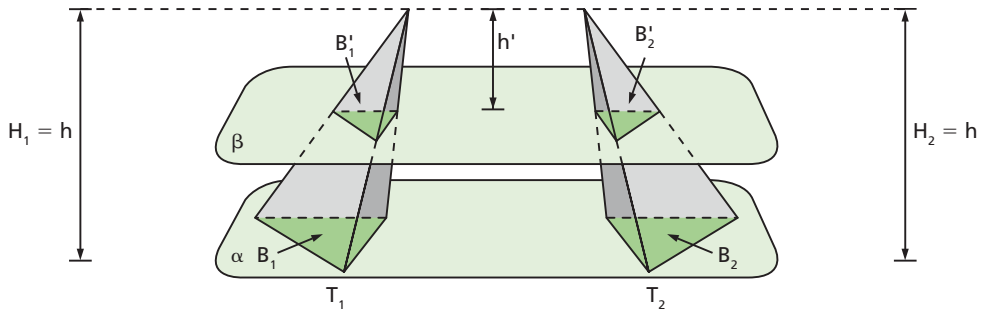
$$\Rightarrow \frac{\text{Área}(\triangle A'B'C')}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

### 179. Equivalência de tetraedros

Duas pirâmides triangulares (tetraedros) de bases de áreas iguais (bases equivalentes) e alturas congruentes têm volumes iguais (são equivalentes).

Sejam  $T_1$  e  $T_2$  os dois tetraedros,  $B_1$  e  $B_2$  as áreas das bases e  $H_1$  e  $H_2$  as alturas, temos, por hipótese:

$$B_1 = B_2 \quad \text{e} \quad H_1 = H_2 = h.$$



Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que as bases equivalentes estão num plano  $\alpha$  e que os vértices estão num mesmo semiespaço dos determinados por  $\alpha$ .

Considerando qualquer plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , distando  $h'$  dos vértices e determinando em  $T_1$  e  $T_2$  seções de áreas  $B'_1$  e  $B'_2$ , temos:

$$\left[ \frac{B'_1}{B_1} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{B'_2}{B_2} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \right] \Rightarrow \frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}.$$

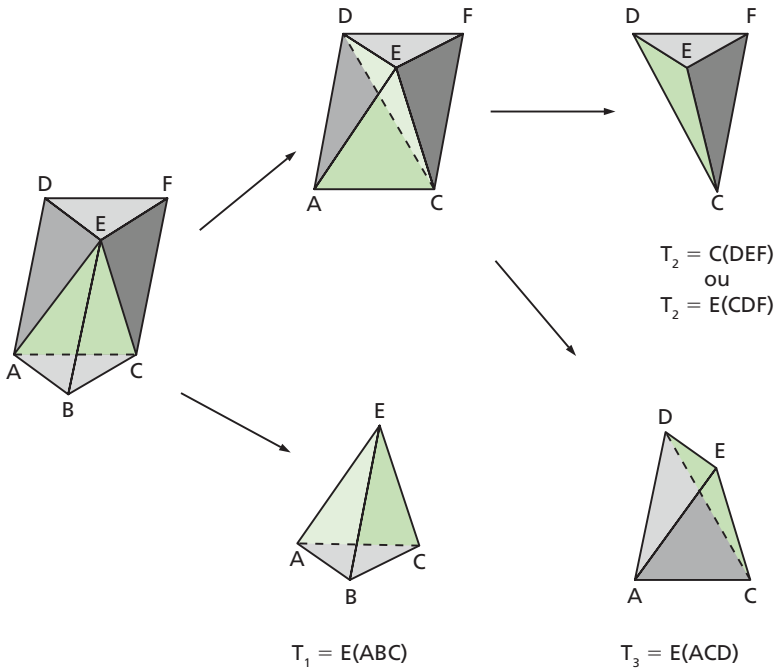
Como  $B_1 = B_2$ , da igualdade acima vem  $B'_1 = B'_2$ .

Se as seções têm áreas iguais ( $B'_1 = B'_2$ ), pelo princípio de Cavalieri os sólidos  $T_1$  e  $T_2$  têm volumes iguais (são equivalentes), isto é,  $V_{T_1} = V_{T_2}$ .

## 180. Decomposição de um prisma triangular

Todo prisma triangular é soma de três pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si (de volumes iguais).

Seja o prisma triangular ABCDEF.



Cortando esse prisma pelo plano (A, C, E), obtemos o tetraedro  $T_1 = E(ABC)$  e a pirâmide quadrangular E(ACFD).

Cortando a pirâmide E(ACFD) pelo plano (C, D, E), obtemos o tetraedro  $T_2 = C(DEF)$  [ou  $T_2 = ECDF$ ] e  $T_3 = E(ACD)$ .

Temos, então:

$$\text{Prisma } ABCDEF = T_1 + T_2 + T_3 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3}.$$

As pirâmides  $T_1 = E(ABC)$  e  $T_2 = C(DEF)$  têm o mesmo volume, pois possuem as bases (ABC e DEF) congruentes e a mesma altura (a do prisma). Então,  $V_{T_1} = V_{T_2}$ . (1)

As pirâmides  $T_2 = E(CDF)$  e  $T_3 = E(ACD)$  têm o mesmo volume, pois têm as bases (CDF e ACD) congruentes (note que CD é diagonal do paralelogramo ACFD) e mesma altura (distância de E ao plano ACFD). Então,  $V_{T_2} = V_{T_3}$ . (2)

De (1) e (2) vem:  $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$ .

### 181. Volume do tetraedro

Seja  $B$  a área da base e  $h$  a medida da altura do prisma do item anterior. Notemos que  $B$  é a área da base e  $h$  é a medida da altura do tetraedro  $T_1$ .

Em vista do teorema anterior e fazendo  $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3} = V_T$ :

$$V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} = V_{\text{prisma}} \Rightarrow 3V_T = B \cdot h \Rightarrow V_T = \frac{1}{3}B \cdot h$$

### 182. Volume de uma pirâmide qualquer

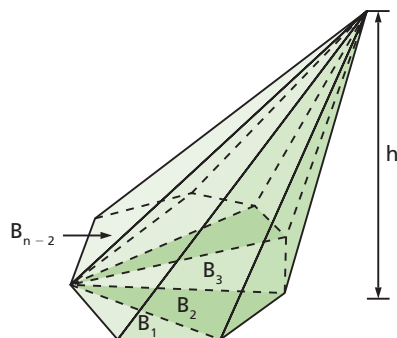
Seja  $B$  a área da base e  $h$  a medida da altura de uma pirâmide qualquer. Esta pirâmide é soma de  $(n - 2)$  tetraedros.

$$V = V_{T_1} + V_{T_2} + \dots + V_{T_{n-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}B_1h + \frac{1}{3}B_2h + \dots + \frac{1}{3}B_{n-2}h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \dots + B_{n-2})h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}B \cdot h$$



### 183. Conclusão

O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

## IV. Área lateral e área total da pirâmide

**184.** A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais.

$A_\ell$  = soma das áreas dos triângulos que são faces laterais.

**185.** A área total de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais com a área da base.

$A_t = A_\ell + B$  em que  $B$  = área da base.

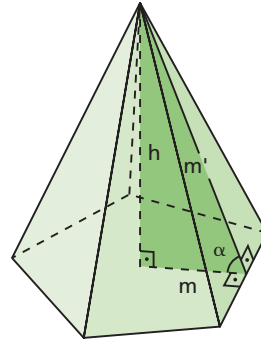
### 186. Pirâmide regular

Numa pirâmide regular, sendo:

$2p$  = medida do perímetro da base

$m$  = medida do apótema da base

$m'$  = medida do apótema da pirâmide,



Temos:

$$\text{Área lateral: } A_\ell = nA_\Delta = n \cdot \frac{2p}{2} \ell m' \Rightarrow A_\ell = pm'$$

$$\text{Área total: } A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = pm' + pm \Rightarrow A_t = p(m + m')$$

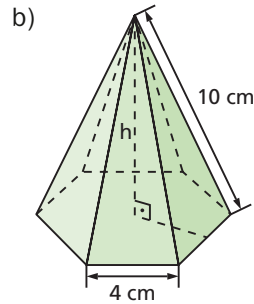
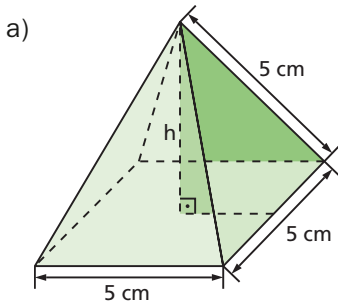
$$\text{Volume: } V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot p \cdot m \cdot h$$

$$\text{Relação: } m'^2 = h^2 + m^2.$$

O ângulo  $\alpha$  entre o apótema da base  $m$  e o apótema da pirâmide  $m'$  é o ângulo que a face lateral forma com a base.

# EXERCÍCIOS

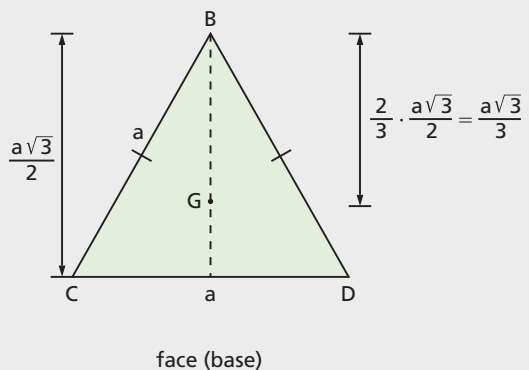
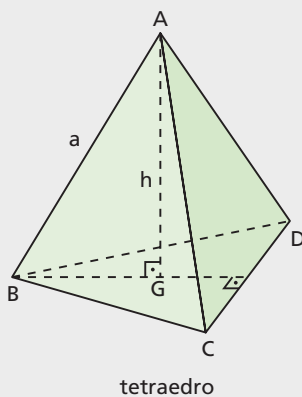
**384.** Calcule a área lateral, a área total e o volume das pirâmides regulares, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.



**385.** De um tetraedro regular de aresta  $a$ , calcule:

- a) a área total ( $A_t$ )
- b) a medida  $h$  da altura
- c) o seu volume ( $V$ )

## Solução



a) Área total:  $A_t = 4 \cdot B \Rightarrow A_t = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow A_t = a^2\sqrt{3}$

b) Cálculo da altura:

$$\triangle AGB \Rightarrow h^2 = a^2 - (BG)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ ou ainda } h = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

c) Volume:  $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ , em que  $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  e  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ , então

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Resposta:  $A_t = a^2\sqrt{3}$ ,  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$  e  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ .

**386.** Sabendo que a aresta de um tetraedro regular mede 3 cm, calcule a medida de sua altura, sua área total e seu volume.

**387.** Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que sua superfície total mede  $9\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.

**388.** Calcule a altura e o volume de um tetraedro regular de área total  $12\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.

**389.** Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que seu volume mede  $18\sqrt{2}$  m<sup>3</sup>.

**390.** Calcule a área total de um tetraedro regular cujo volume mede  $144\sqrt{2}$  m<sup>3</sup>.

**391.** Determine a medida da aresta de um tetraedro regular, sabendo que, aumentada em 4 m, sua área aumenta em  $40\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>.

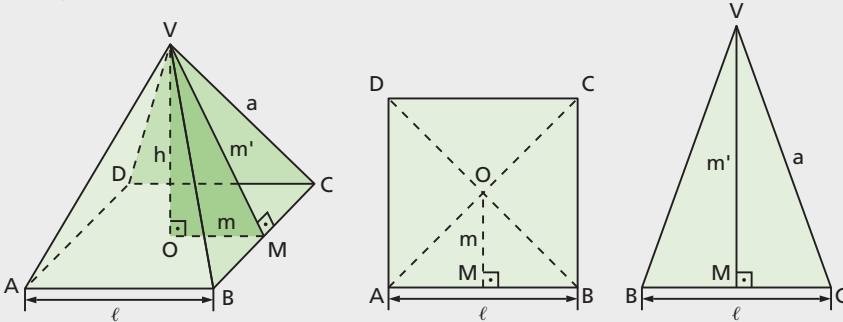
**392.** Calcule a medida da altura de um tetraedro regular, sabendo que o perímetro da base mede 9 cm.

**393.** Calcule a aresta da base de uma pirâmide regular, sabendo que o apótema da pirâmide mede 6 cm e a aresta lateral 10 cm.

**394.** De uma pirâmide regular de base quadrada sabe-se que a área da base é  $32 \text{ dm}^2$  e que o apótema da pirâmide mede  $6 \text{ dm}$ . Calcule:

- a) a aresta da base ( $\ell$ );                      d) a aresta lateral ( $a$ );  
 b) o apótema da base ( $m$ );                e) a área lateral ( $A_\ell$ );  
 c) a altura da pirâmide ( $h$ );              f) a área total ( $A_t$ ).

**Solução**



a) aresta da base

$$\ell^2 = B \Rightarrow \ell^2 = 32 \Rightarrow \ell = \sqrt{32} \Rightarrow \ell = 4\sqrt{2} \text{ dm}$$

b) apótema da base

$$m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{2} \text{ dm}$$

c) altura da pirâmide

$$\triangle VOM: h^2 = m'^2 - m^2 \Rightarrow h^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{7} \text{ dm}$$

d) aresta lateral

$$\triangle VMC: a^2 = (m')^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 6^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{11} \text{ dm}$$

e) área lateral

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{1}{2} \ell \cdot m' \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 \Rightarrow A_\ell = 48\sqrt{2} \text{ dm}^2$$

f) área total

$$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 48\sqrt{2} + 32 \Rightarrow A_t = 16(3\sqrt{2} + 2) \text{ dm}^2$$

**395.** A base de uma pirâmide de  $6 \text{ cm}$  de altura é um quadrado de  $8 \text{ cm}$  de perímetro. Calcule o volume.

**396.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede  $82 \text{ cm}$  e cuja aresta da base mede  $36 \text{ cm}$ .

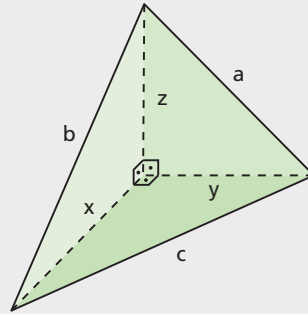
- 397.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide quadrangular regular, sendo 7 m a medida do seu apótema e 8 m o perímetro da base.
- 398.** Determine a área lateral e a área total de uma pirâmide triangular regular de 7 cm de apótema, sendo 2 cm o raio do círculo circunscrito à base.
- 399.** Calcule a medida da área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que a área da base mede  $64 \text{ m}^2$  e que a altura da pirâmide é igual a uma das diagonais da base.
- 400.** Calcule o volume de um tetraedro trirretangular, conhecendo os lados  $a, b, c$ , da face oposta ao triedro trirretangular.

**Solução**

Sejam  $x, y$  e  $z$  as medidas das arestas do triedro trirretângulo. O tetraedro é uma pirâmide de altura  $z$  cuja base é um triângulo retângulo de catetos  $x$  e  $y$ .

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}xy\right) \cdot z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}xyz \quad (a)$$



Cálculo de  $x, y$  e  $z$ :

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (1) \qquad x^2 + z^2 = b^2 \quad (2) \qquad y^2 + z^2 = a^2 \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad (4)$$

$$(4) - (1) \Rightarrow z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

$$(4) - (2) \Rightarrow y^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}}$$

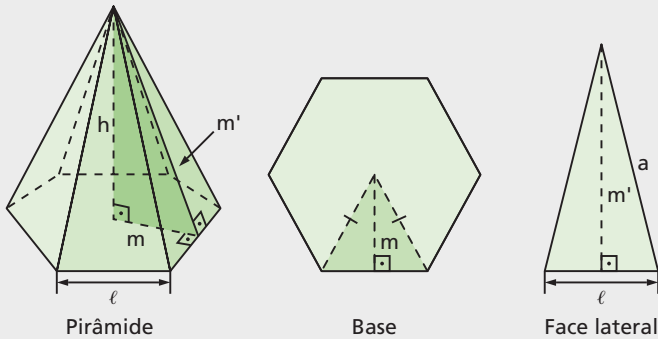
$$(4) - (3) \Rightarrow x^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

Substituindo em (a), vem:

$$V = \frac{1}{24} \sqrt{2(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

- 401.** Numa pirâmide triangular PABC, o triedro de vértice P é triângulo. O triângulo ABC da base é equilátero de lado 4 cm. Calcule o volume da pirâmide.
- 402.** Uma pirâmide tem por base um retângulo cuja soma das dimensões vale 34 cm, sendo uma delas equivalente a  $\frac{5}{12}$  da outra. Determine as dimensões da base e a área total da pirâmide, sabendo que a altura mede 5 cm e a sua projeção sobre a base é o ponto de interseção das diagonais da base.
- 403.** Uma pirâmide tem por base um retângulo cujas dimensões medem 10 cm e 24 cm, respectivamente. As arestas laterais são iguais à diagonal da base. Calcule a área total da pirâmide.
- 404.** Calcule a área da base de uma pirâmide quadrangular regular cujas faces laterais são triângulos equiláteros, sendo  $81\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> a soma das áreas desses triângulos.
- 405.** Calcule a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que uma diagonal da base mede  $3\sqrt{2}$  cm e que o apótema da pirâmide mede 5 cm.
- 406.** Determine a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, sendo 144 cm<sup>2</sup> a área da base da pirâmide e 10 cm a medida da aresta lateral.
- 407.** Determine a área da base, a área lateral e a área total de uma pirâmide triangular regular, sabendo que a altura e a aresta da base medem 10 cm cada uma.
- 408.** Calcule a área lateral de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que a diagonal da base da pirâmide mede  $8\sqrt{2}$  cm e a aresta lateral é igual à diagonal da base.
- 409.** Sendo 192 m<sup>2</sup> a área total de uma pirâmide quadrangular regular e  $3\sqrt{2}$  m o raio do círculo inscrito na base, calcule a altura da pirâmide.
- 410.** Uma pirâmide regular hexagonal de 12 cm de altura tem aresta da base medindo  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$  cm. Calcule: apótema da base (m), apótema da pirâmide (m'), aresta lateral (a), área da base (B), área lateral ( $A_l$ ), área total ( $A_t$ ) e volume (V).

**Solução**



Apótema da base:  $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 5 \text{ cm.}$

Apótema da pirâmide:  $(m')^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow (m')^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow m' = 13 \text{ cm.}$

Aresta lateral:  $a^2 = (m')^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 13^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}\sqrt{399} \text{ cm.}$

Área da base:  $B = 6 \cdot \frac{1}{2}\ell m \Rightarrow B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2.$

Área lateral:  $A_\ell = 6 \cdot \frac{1}{2}\ell m' \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 130\sqrt{3} \text{ cm}^2.$

Área total:  $A_t = A_\ell + B = 130\sqrt{3} + 50\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 180\sqrt{3} \text{ cm}^2.$

Volume:  $V = \frac{1}{3}B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 50\sqrt{3} \cdot 12 \Rightarrow V = 200\sqrt{3} \text{ cm}^3.$

- 411.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide regular hexagonal cujo apótema mede 4 cm e a aresta da base mede 2 cm.

- 412.** Calcule a aresta lateral de uma pirâmide regular, sabendo que sua base é um hexágono de 6 cm de lado, sendo 10 cm a altura da pirâmide.
- 413.** A base de uma pirâmide regular é um hexágono inscrito em um círculo de 12 cm de diâmetro. Calcule a altura da pirâmide, sabendo que a área da base é a décima parte da área lateral.
- 414.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide regular hexagonal, sendo 3 cm sua altura e 10 cm a medida da aresta da base.
- 415.** Calcule a área lateral e a área total de uma pirâmide regular hexagonal cujo apótema mede 20 cm, sendo 6 cm a medida do raio da base.
- 416.** Uma pirâmide regular de base quadrada tem o lado da base medindo 8 cm e a área lateral igual a  $\frac{3}{5}$  da área total. Calcule a altura e a área lateral dessa pirâmide.
- 417.** A aresta lateral de uma pirâmide quadrangular regular mede 15 cm e a aresta da base 10 cm. Calcule o volume.
- 418.** Calcule o volume de uma pirâmide de 12 cm de altura, sendo a base um losango cujas diagonais medem 6 cm e 10 cm.
- 419.** Se a altura de uma pirâmide regular hexagonal tem medida igual à aresta da base, calcule o seu volume, sendo  $a$  a aresta da base.
- 420.** Determine a razão entre os volumes de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta da base mede  $a$ , sendo  $a$  a medida de sua altura, e uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero de lado  $a$  e altura  $a$ .
- 421.** Calcule a razão entre os volumes de duas pirâmides,  $P_1$  e  $P_2$ , sabendo que os vértices são os mesmos e que a base de  $P_2$  é um quadrado obtido ligando-se os pontos médios da base quadrada de  $P_1$ .
- 422.** A área da base de uma pirâmide regular hexagonal é igual a  $216\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>. Determine o volume da pirâmide, sabendo que sua altura mede 16 m.
- 423.** Determine o volume de uma pirâmide triangular regular, sendo 2 m a medida da aresta da base e 3 m a medida de suas arestas laterais.
- 424.** O volume de uma pirâmide triangular regular é  $64\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. Determine a medida da aresta lateral, sabendo que a altura é igual ao semiperímetro da base.

- 425.** Uma pirâmide triangular tem como base um triângulo de lados 13, 14 e 15; as outras arestas medem  $\frac{425}{8}$ . Calcule o volume.

**Solução**

As arestas laterais sendo congruentes, a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o circuncentro O (centro da circunferência circunscrita) do triângulo ABC. A altura é VO.

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h \quad (1)$$

Tomando a como unidade, vem:  
Área da base:

$$B = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left. \begin{array}{l} a = 13, b = 14, c = 15 \\ p = 21 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \Rightarrow B = 84$$

Altura:

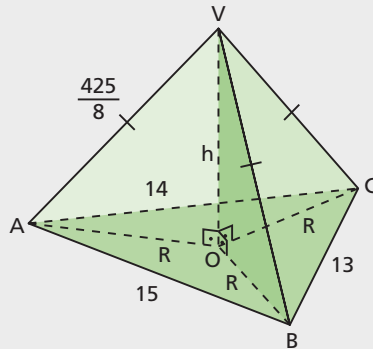
$$R = \frac{abc}{4B} \Rightarrow R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} \Rightarrow R = \frac{65}{8}$$

$$\triangle VOA \Rightarrow h^2 = \left(\frac{425}{8}\right)^2 - \left(\frac{65}{8}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{105}{2}$$

Substituindo em (1), vem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{105}{2} \Rightarrow V = 1470$$

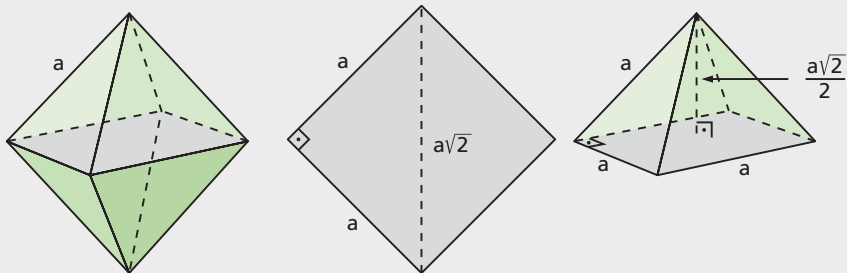
Resposta: 1470.



- 426.** Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, sabendo que o apótema da base mede 4 cm e o apótema da pirâmide 5 cm.
- 427.** Uma pirâmide triangular regular tem as medidas da altura e da aresta da base iguais a 6 cm. Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume dessa pirâmide.

**428.** Calcule a área total e o volume de um octaedro regular de aresta  $a$ .

**Solução**



Área:

A área de uma face ( $S$ ) é a área de um triângulo equilátero de lado  $a$ ; portanto,  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

A superfície total é a reunião de 8 faces; então:

$$A_t = 8 \cdot S \Rightarrow A_t = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = 2a^2\sqrt{3}.$$

Volume:

O octaedro regular é a reunião de 2 pirâmides de base quadrada de lado  $a$  e de altura igual à metade da diagonal do quadrado; então:

$$V = 2\left(\frac{1}{3}B \cdot h\right) \Rightarrow V = 2\left(\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

**429.** Calcule a área total e o volume de um octaedro regular de 2 cm de aresta.

**430.** Calcule o volume da pirâmide quadrangular regular, sabendo que sua base é circunscrita a um círculo de 6 cm de raio e que a aresta lateral mede 12 cm.

**431.** Uma pirâmide regular de base quadrada tem lado da base medindo 6 cm e área lateral igual a  $\frac{5}{8}$  da área total. Calcule a altura, a área lateral e o volume dessa pirâmide.

**432.** Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, sendo 24 cm o perímetro da base e 30 cm a soma dos comprimentos de todas as arestas laterais.

**433.** Calcule o volume de uma pirâmide regular hexagonal, sendo 6 cm a medida da aresta da base e 10 cm a medida da aresta lateral.

- 434.** O volume de uma pirâmide regular hexagonal é  $60\sqrt{3} \text{ m}^3$ , sendo 4 m o lado do hexágono. Calcule a aresta lateral e a altura da pirâmide.
- 435.** A aresta da base de uma pirâmide regular hexagonal mede 3 m. Calcule a altura e o volume dessa pirâmide, sendo a superfície lateral 10 vezes a área da base.
- 436.** A base de uma pirâmide é um triângulo cujos lados medem 13 m, 14 m e 15 m. As três arestas laterais são iguais, medindo cada uma 20 m. Calcule o volume da pirâmide.
- 437.** O volume de uma pirâmide é  $27 \text{ m}^3$ , sua base é um trapézio de 3 m de altura, seus lados paralelos têm por soma 17 m. Qual é a altura dessa pirâmide?
- 438.** Determine o volume de uma pirâmide triangular cujas arestas laterais são de medidas iguais, sabendo que o triângulo da base tem os lados medindo 6 m, 8 m e 10 m e que sua maior face lateral é um triângulo equilátero.
- 439.** A área lateral de uma pirâmide triangular regular é o quádruplo da área da base. Calcule o volume, sabendo que a aresta da base mede 3 cm.
- 440.** Calcule as áreas lateral e total de uma pirâmide triangular regular, sabendo que sua altura mede 12 cm e que o perímetro da base mede 12 cm.
- 441.** Determine a altura de uma pirâmide triangular regular, sabendo que a área total é  $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$  e o raio do círculo inscrito na base mede 2 cm.
- 442.** Calcule a medida do diedro formado pelas faces laterais com a base de uma pirâmide regular, sabendo que o apótema da pirâmide mede o dobro do apótema da base.
- 443.** Determine a medida da altura e da aresta lateral de uma pirâmide que tem por base um triângulo equilátero de lado 16 cm, sabendo que as faces laterais formam com o plano da base ângulos de  $60^\circ$ .

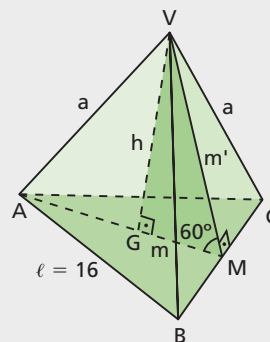
**Solução**

O apótema da base  $m$  é dado por

$$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

em que  $\ell = 16$ . Portanto,

$$m = \frac{16\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$



Cálculo da altura  $h$ :

No triângulo VGM, temos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{m} \Rightarrow h = m\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 8$$

Cálculo da aresta lateral  $a$ :

1º modo:

O apótema  $m'$  da pirâmide é dado por:

$$(m')^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow (m')^2 = 8^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m')^2 = 64 + \frac{192}{9} = \frac{768}{9}$$

No  $\triangle VMC$ , vem:

$$a^2 = (m')^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{768}{9} + 8^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{768}{9} + 64 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1344}{9}} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{21}}{3}$$

2º modo:

No  $\triangle VGA$ , temos:

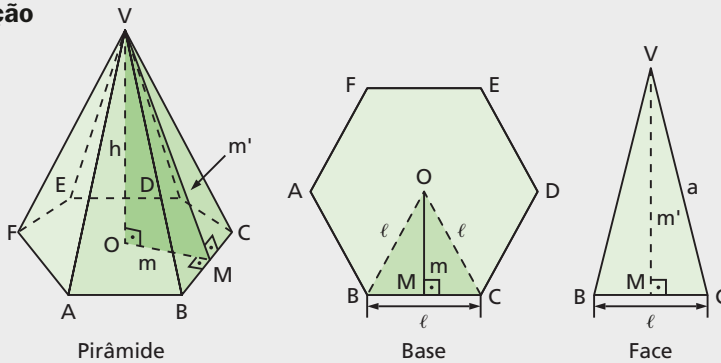
$$a^2 = h^2 + (AG)^2 \Rightarrow a^2 = 8^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{8^2 \cdot 21}{9} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{21}}{3}$$

Resposta: A altura mede 8 cm e a aresta lateral  $\frac{8\sqrt{21}}{3}$  cm.

- 444.** Uma pirâmide tem por base um triângulo equilátero de lado  $a$ . As faces laterais formam com o plano da base diedros de  $60^\circ$ . Calcule a altura, o comprimento das arestas e o volume da pirâmide.
- 445.** Uma pirâmide tem por base um hexágono regular de lado  $a$ , e cada aresta lateral da pirâmide mede  $2a$ .
- Qual o ângulo que cada aresta lateral forma com o plano da base?
  - Calcule, em função de  $a$ , a área lateral, a área total e o volume da pirâmide.
- 446.** Uma pirâmide quadrangular regular tem 4 cm de aresta da base e  $2\sqrt{5}$  cm de aresta lateral. Calcule o ângulo que a face lateral forma com a base.

- 447.** As faces laterais de uma pirâmide quadrangular regular de 6 m de aresta da base formam  $60^\circ$  com o plano da base. Calcule o volume  $V$  e a área total dessa pirâmide.
- 448.** Duas arestas opostas de uma pirâmide quadrangular regular medem 2 m e formam, no interior do sólido, um ângulo de  $120^\circ$ . Calcule o volume da pirâmide.
- 449.** Determine o volume de uma pirâmide cuja aresta lateral forma um ângulo de  $60^\circ$  com a diagonal do retângulo da base, sendo 28 m o perímetro desse retângulo e  $\frac{3}{4}$  a razão entre suas dimensões.
- 450.** A base de uma pirâmide é um losango de lado 15 dm. A face lateral forma com a base um ângulo de  $45^\circ$ . A maior diagonal da base mede 24 dm. Determine o volume da pirâmide.
- 451.** Calcule o volume de uma pirâmide triangular cuja base tem os lados medindo 12 cm, 15 cm e 9 cm, a aresta lateral 12,5 cm, e sabendo que a projeção do vértice da pirâmide coincide com o circuncentro da base.
- 452.** Calcule a aresta da base de uma pirâmide regular hexagonal, sendo  $30\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> a área lateral e  $2\sqrt{7}$  cm a medida da aresta lateral.

**Solução**



$$A_\ell = 30\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell m'\right) = 30\sqrt{3} \Rightarrow \ell m' = 10\sqrt{3} \Rightarrow m' = \frac{10\sqrt{3}}{\ell}$$

$$\triangle VMC: (m')^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow (m')^2 + \frac{\ell^2}{4} = (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow 4(m')^2 + \ell^2 = 112$$

$$4\left(\frac{10\sqrt{3}}{\ell}\right)^2 + \ell^2 = 112 \Rightarrow \frac{1200}{\ell^2} + \ell^2 = 112 \Rightarrow \ell^4 - 112\ell^2 + 1200 = 0$$

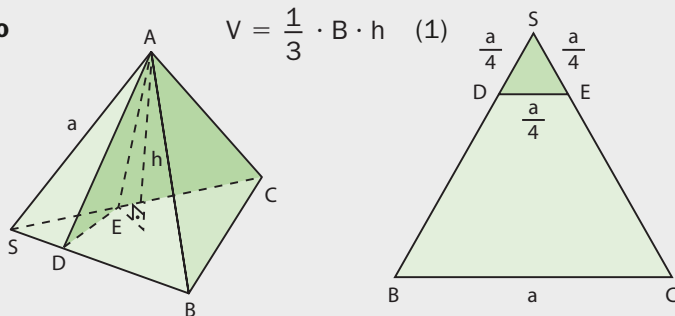
Resolvendo a equação acima, obtemos:  $\ell = 2\sqrt{3}$  ou  $\ell = 10$ .

A solução  $\ell = 10$  não convém, pois, sendo  $\ell = 10$ , o apótema  $m' = \frac{10\sqrt{3}}{\ell}$  resulta  $m' = \sqrt{3}$  e o apótema da base  $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$  resulta  $m = 5\sqrt{3}$  e, com isso, teremos a hipotenusa  $m'$  menor que o cateto  $m$ .

Resposta: A aresta da base mede  $2\sqrt{3}$  cm.

- 453.** Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, sendo 20 cm a medida de sua aresta lateral e  $36\sqrt{3}$  cm o perímetro do triângulo da base.
- 454.** Consideremos uma pirâmide de base quadrada, em que uma aresta lateral é perpendicular ao plano da base. A maior das arestas laterais mede 6 cm e forma um ângulo de  $45^\circ$  com a base. Calcule a área da base e o volume da pirâmide.
- 455.** A água da chuva é recolhida em um pluviômetro em forma de pirâmide quadrangular regular. Sabendo que a água alcança uma altura de 9 cm e forma uma pequena pirâmide de 15 cm de aresta lateral e que essa água é vertida em um cubo de 10 cm de aresta, responda: que altura alcançará a água no cubo?
- 456.** Calcule a superfície lateral, a superfície total e o volume de uma pirâmide que tem por vértice o centro da face de um cubo de aresta  $a$  e por base a face oposta.
- 457.** Uma pirâmide regular tem a base coincidente com uma das faces de um cubo de aresta  $a$  e é exterior ao cubo. Calcule a altura da pirâmide em função da aresta  $a$  do cubo, sabendo que o volume do cubo somado com o volume da pirâmide é  $3a^3$ .
- 458.** Um tetraedro regular  $SABC$  de aresta  $a$  é cortado por um plano que passa pelo vértice  $A$  e pelos pontos  $D$  e  $E$  situados respectivamente sobre as arestas  $SB$  e  $SC$ . Sabendo que  $SD = SE = \frac{1}{4} SC$ , ache o volume da pirâmide  $ASDE$ .

**Solução**



$$\text{Área da base: } B = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{4}\right) \cdot \left(\frac{a}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}.$$

Altura: A altura de ASDE é a distância entre A e o plano SDE; então  $h$  é igual à altura do tetraedro regular de aresta  $a$ , isto é,

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3}.$$

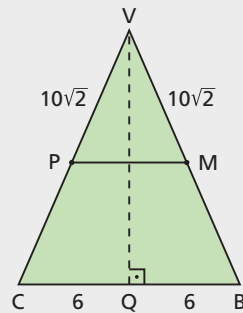
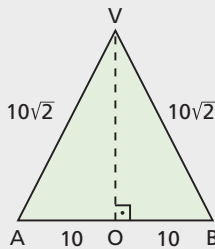
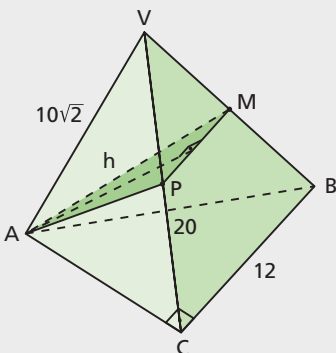
Substituindo  $B$  e  $h$  em (1), vem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{64} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{192}.$$

**459.** Uma pirâmide quadrangular regular tem as arestas laterais congruentes às arestas da base. Determine a área da seção obtida nesse poliedro por um plano que passa pelo vértice e pelos pontos médios de dois lados opostos da base, sendo  $a$  a medida das arestas laterais.

**460.** Os lados da base de uma pirâmide triangular são  $AB = 20$  cm,  $BC = 12$  cm e  $AC = 16$  cm. As três arestas laterais são  $VA = VB = VC = 10\sqrt{2}$  cm. Faz-se passar um plano secante pelo vértice  $A$  e pelos pontos médios  $M$  e  $P$  das arestas  $VB$  e  $VC$ , respectivamente. Calcule os volumes das pirâmides de vértice  $A$  e de bases  $VMP$  e  $MPCB$ , respectivamente.

**Solução**



$$(VO)^2 = (10\sqrt{2})^2 - 10^2 \Rightarrow VO = 10$$

$$(VQ)^2 = (10\sqrt{2})^2 - 6^2 \Rightarrow VQ = 2\sqrt{41}$$

Chamemos de  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  os volumes das pirâmides VABC, AVMP e AMPCB, respectivamente.

Cálculo de  $V_1$ :

$$V = \frac{1}{3}(\text{Área } \triangle ABC) \cdot (VO) \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16\right) \cdot 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_1 = 320 \text{ cm}^3$$

Cálculo de  $h$ :

Distância de A ao plano VBC.

$$\text{Área } \triangle VBC = \frac{1}{2}(BC)(VQ) \Rightarrow \text{Área } \triangle VBC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{41} = 12\sqrt{41} \text{ cm}^2$$

$$V_1 = \frac{1}{3}(\text{Área } \triangle VBC) \cdot h \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{41} \cdot h = 320 \Rightarrow \\ \Rightarrow h = \frac{320}{4\sqrt{41}} \Rightarrow h = \frac{80}{\sqrt{41}} \text{ cm}$$

Cálculo de  $V_2$ :

$$\text{Área } \triangle VMP = \frac{1}{4}(\text{Área } \triangle VBC) \Rightarrow \text{Área } \triangle VMP = 3\sqrt{41} \text{ cm}^2$$

$$V_2 = \frac{1}{3}(\text{Área } \triangle VMP) \cdot h \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{41} \cdot \frac{80}{\sqrt{41}} \Rightarrow V_2 = 80 \text{ cm}^3$$

Cálculo de  $V_3$ :

$$V_3 = V_1 - V_2 \Rightarrow V_3 = 320 - 80 \Rightarrow V_3 = 240 \text{ cm}^3$$

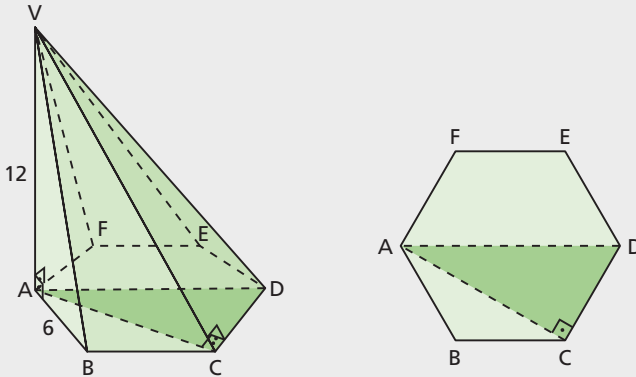
Resposta: Os volumes são respectivamente  $80 \text{ cm}^3$  e  $240 \text{ cm}^3$ .

**461.** Calcule a área da seção determinada em um tetraedro regular, por um plano que contém uma aresta do tetraedro e é perpendicular à aresta oposta, sabendo que a área total do tetraedro vale  $64\sqrt{3} \text{ m}^2$ .

**462.** Seja um triedro de vértice S, cujos ângulos das faces medem  $60^\circ$ . Tomamos  $SA = a$  e pelo ponto A traçamos um plano perpendicular a SA, que corta as outras arestas em B e C. Calcule as arestas do tetraedro SABC, sua área total e seu volume.

**463.** A base de uma pirâmide de vértice  $V$  é um hexágono regular  $ABCDEF$ , sendo  $AB = 6$  cm. A aresta lateral  $VA$  é perpendicular ao plano da base e igual ao segmento  $AD$ . Prove que quatro faces laterais são triângulos retângulos e ache as suas áreas.

**Solução**



a) Prova de que quatro faces laterais são triângulos retângulos:

$$VA \perp \text{plano } (ABCDEF) \Rightarrow \begin{cases} VA \perp AB & \Rightarrow \triangle VAB \text{ é retângulo em } A \\ VA \perp AF & \Rightarrow \triangle VAF \text{ é retângulo em } A \\ VA \perp CD \\ C \text{ pertence à circunfe-} \\ \text{rência de diâmetro } AD & \Rightarrow AC \perp CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD \perp \text{plano } (VAC) \Rightarrow \\ \Rightarrow \triangle VCD \text{ é retângulo} \end{cases}$$

Analogamente,  $\triangle VED$  é retângulo em  $E$ .

b) Cálculo das áreas:

1º) Os triângulos  $VAB$  e  $VAF$  têm área igual a  $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36 \text{ cm}^2$ .

2º) Os triângulos  $VCD$  e  $VED$  têm áreas  $S$  iguais.

Cálculo de  $S$ :

$$S = \frac{1}{2}(CD) \cdot (VC) \Rightarrow S = 3 \cdot (VC) \quad (1)$$

$$\triangle ACD \Rightarrow (AC)^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow (AC)^2 = 108$$

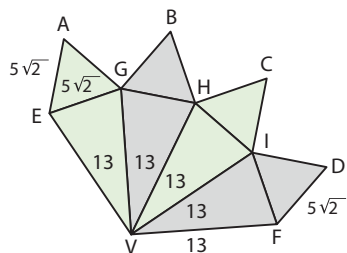
$$\triangle VAC \Rightarrow (VC)^2 = (VA)^2 \Rightarrow (VC)^2 = 252 \Rightarrow VC = 6\sqrt{7}$$

Substituindo em (1), vem:

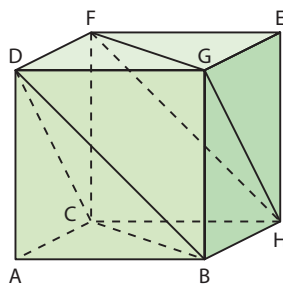
$$S = 3 \cdot 6\sqrt{7} \Rightarrow S = 18\sqrt{7} \text{ cm}^2.$$

- 464.** Calcule o volume de uma pirâmide regular de altura  $h$ , sabendo que essa pirâmide tem por base um polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é  $n\pi$  e a relação entre a superfície lateral e a área da base é  $k$ .
- 465.** Se  $K$  é a medida da aresta de um tetraedro regular, calcule a altura do tetraedro em função de  $K$ .
- 466.** A base de uma pirâmide reta de altura  $3r$  é um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio  $r$ . Determine o volume da pirâmide.
- 467.** Seja  $ABCD$  um tetraedro regular. Do vértice  $A$  traça-se a altura  $AH$ . Seja  $M$  o ponto médio do segmento  $AH$ . Mostre que as semirretas  $MB$ ,  $MC$  e  $MD$  são as arestas de um triedro trirretângulo.

- 468.** A figura é a planificação de um poliedro convexo ( $A = B = C = D$ ;  $E = F$ ). Calcule seu volume.

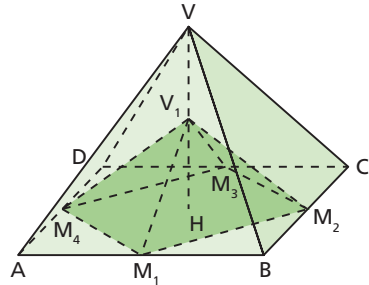


- 469.** Seja  $ABCDEFGH$  um cubo no qual  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $EF$ ,  $EG$ ,  $EH$  são seis de suas 12 arestas, de sorte que  $A$  e  $E$  são vértices opostos. Calcule o volume do sólido  $BCDFGH$  em termos do comprimento  $\ell$  das arestas do cubo.



- 470.** É possível construir uma pirâmide regular de 7 vértices com todas as arestas congruentes, isto é, da mesma medida? Justifique.
- 471.** Calcule o volume de uma pirâmide  $P_1$  quadrangular regular, dado o volume de uma pirâmide  $P_2$  igual a  $48 \text{ m}^3$  e sabendo que a base de  $P_1$  é formada pelos pontos médios das arestas da base de  $P_2$ , e cujo vértice é um ponto pertencente à altura de  $P_2$ , estando esse ponto situado a  $\frac{1}{3}$  do vértice de  $P_2$ .

**472.** Na figura, a pirâmide regular de base ABCD e altura  $\overline{VH}$  possui todas as arestas medindo 4 m. Sabendo que  $V_1$  é ponto médio de  $\overline{VH}$  e que  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  são pontos médios dos lados da base ABCD, forneça:



- o valor do lado  $M_1M_2$ ;
- a área do polígono  $M_1M_2M_3M_4$ ;
- o volume da pirâmide  $V_1M_1M_2M_3M_4$ .

**473.** Na pirâmide ABCDE, a base é um retângulo de 6 m por 4 m. A aresta DE é a altura e mede 8 m. Prove que as quatro faces laterais são triângulos retângulos e calcule a área total da pirâmide.

**474.** Entre o volume  $V$ , a área lateral  $A$ , a área total  $S$  de uma pirâmide quadrangular regular existe a relação:  
 $36V^2 = S(S - A)(2A - S)$ .

**475.** Prove que o volume de um tetraedro ABCD é a sexta parte do produto da menor distância entre duas arestas opostas AB, CD, pela área do paralelogramo cujos lados são iguais e paralelos a essas arestas.

**476.** Prove que o volume de um tetraedro é igual à terça parte do produto de uma aresta pela área do triângulo, projeção do sólido sobre um plano perpendicular a essa aresta.

**477.** Todo plano conduzido por uma aresta de um tetraedro e pelo ponto médio da aresta oposta divide o tetraedro em duas partes equivalentes.

**478.** Sejam  $a, b, c$  as arestas do triedro trirretângulo de um tetraedro e  $h$  a altura relativa ao vértice desse triedro. Demonstre que:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

**479.** Consideremos um triedro trirretângulo ABCD de vértice A, um ponto P interior, cujas distâncias às faces ABC, ABD, ACD são  $a, b, c$ , e pelo ponto P façamos passar um plano que corta as arestas AB, AC, AD em M, N, Q.

- Demonstre que  $e \frac{a}{AQ} + \frac{b}{AN} + \frac{c}{AM} = 1$  e reciprocamente.
- Como deve ser escolhido esse plano para que o volume do tetraedro AMNQ seja mínimo?

**480.** Prove que o plano bissetor do ângulo diedro de um tetraedro divide a aresta oposta em segmentos proporcionais às áreas das faces do diedro.

- 481.** Demonstre que os segmentos que unem os vértices de uma pirâmide triangular com os baricentros das faces opostas se interceptam em um ponto e se dividem por esse ponto na relação  $\frac{1}{3}$ .
- 482.** Obtenha um ponto do interior de um tetraedro que, unido aos quatro vértices, determine quatro tetraedros equivalentes.
- 483.** Consideremos um tetraedro ABCD e um ponto P em seu interior. Traçamos AP, BP, CP e DP, que cortam as faces opostas em M, N, R e Q. Demonstre que:
- $$\frac{PM}{AM} + \frac{PN}{BN} + \frac{PR}{CR} + \frac{PQ}{DQ} = 1.$$
- 484.** Mostre que, se dois tetraedros têm um triedro comum, seus volumes são proporcionais aos produtos das arestas desse triedro.

**Solução**

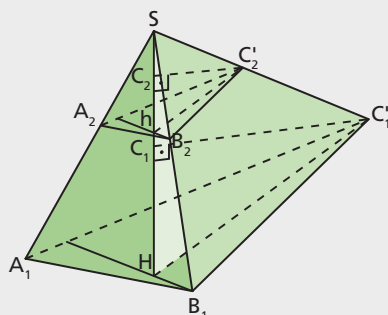
Sejam  $S(A_1B_1C_1)$  e  $S(A_2B_2C_2)$  os tetraedros com o triedro S comum.

$C_1C'_1$  = altura relativa à face  $SA_1B_1$

$C_2C'_2$  = altura relativa à face  $SA_2B_2$

H = altura de  $SA_1B_1$  relativa a  $SA_1$

h = altura de  $SA_2B_2$  relativa a  $SA_2$



$$\frac{\text{Volume } S(A_1B_1C_1)}{\text{Volume } S(A_2B_2C_2)} = \frac{\frac{1}{3}(\text{Área } SA_1B_1) \cdot C_1C'_1}{\frac{1}{3}(\text{Área } SA_2B_2) \cdot C_2C'_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}(SA_1) \cdot H \cdot C_1C'_1}{\frac{2}{3}(SA_2) \cdot h \cdot C_2C'_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{SA_1}{SA_2} \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{C_1C'_1}{C_2C'_2}$$

Por semelhança de triângulo:  $\frac{H}{h} = \frac{SB_1}{SB_2}$  e  $\frac{C_1C'_1}{C_2C'_2} = \frac{SC_1}{SC_2}$ .

Substituindo  $\frac{H}{h}$  e  $\frac{C_1C'_1}{C_2C'_2}$ , vem:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{SA_1}{SA_2} \cdot \frac{SB_1}{SB_2} \cdot \frac{SC_1}{SC_2}$ .

**485.** Seja uma pirâmide triangular regular ABCD e um ponto P situado na sua altura AH. Por esse ponto passamos um plano qualquer que intercepta as arestas do triedro de vértice A, sendo M, N, Q os pontos de interseção. Demonstre que:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{AQ} = k, \text{ sendo } k \text{ constante.}$$

**486.** A base de uma pirâmide é um paralelogramo. Determine o plano que a divide em dois sólidos de iguais volumes, sabendo que esse plano contém um dos lados da base.

**487.** Prove que, em todo tetraedro de arestas opostas ortogonais:

- a) os produtos das arestas opostas estão na razão inversa das mais curtas distâncias entre essas arestas;
- b) as somas dos quadrados das arestas opostas são iguais e a soma dos quadrados dos produtos das arestas opostas é igual a quatro vezes a soma dos quadrados das quatro faces;
- c) a soma dos seis diedros e dos doze ângulos formados pela interseção de cada aresta com as duas faces que ela corta é igual a doze ângulos retos.

**488.** Mostre que a seção obtida da interseção de um plano com um tetraedro é um paralelogramo.

**489.** Prove que a soma dos volumes das pirâmides que têm por bases as faces laterais de um prisma e por vértice comum um ponto O qualquer interior a uma das bases é constante. Calcule o valor dessa constante, se o volume do prisma é V.

**490.** Consideremos um triedro de vértice P e sobre suas arestas os segmentos PA = a, PB = b, PC = c, de maneira que a área lateral da pirâmide PABC seja igual a 3d<sup>2</sup>. Determine as medidas de a, b, c, de modo que o volume dessa pirâmide seja máximo sabendo que BCP = α, CPA = β e APB = φ.

**491.** Em um tetraedro:

- a) a soma dos quadrados de dois pares de arestas é igual à soma dos quadrados das arestas opostas do terceiro par mais quatro vezes o quadrado da distância entre os pontos médios destas duas últimas arestas;
- b) a soma dos quadrados das seis arestas é igual ao quádruplo da soma dos quadrados dos três segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas.

**492.** Se um tetraedro tiver três faces equivalentes, a reta que une o vértice comum a essas três faces ao ponto de concurso das medianas da face oposta estará igualmente inclinada sobre os planos dessas três faces e reciprocamente.

**493.** Seja um triedro de faces iguais, e consideremos os segmentos AM = AN = AP = a, todos partindo do vértice A. Qual deve ser o valor comum do ângulo dessas faces para que:

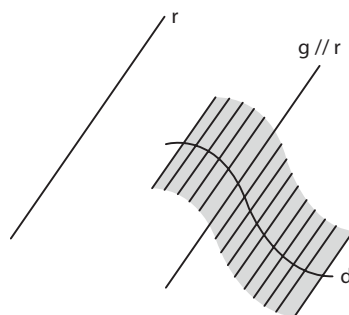
- a) a superfície lateral do tetraedro AMNP, de base MNP, seja máxima?
- b) o volume desse tetraedro seja máximo?

# CAPÍTULO X

## Cilindro

### I. Preliminar: noções intuitivas de geração de superfícies cilíndricas

**187. Superfícies regradas desenvolvíveis cilíndricas** são superfícies geradas por uma reta  $g$  (geratriz) que se mantém paralela a uma reta dada  $r$  (direção) e percorre os pontos de uma linha dada  $d$  (diretriz).

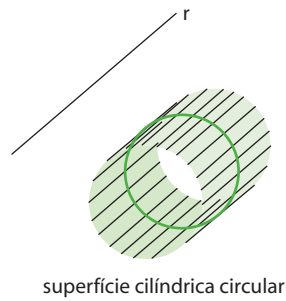
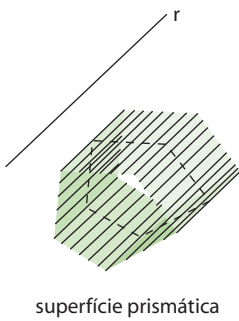
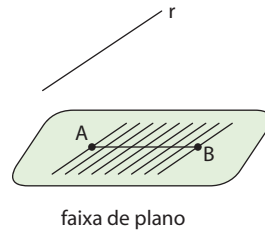
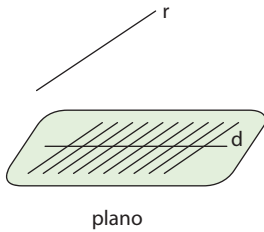


São superfícies **regradas** por serem geradas por **retas** e **desenvolvíveis** por poderem ser aplicadas, estendidas ou desenvolvidas num plano (planificadas) sem dobras ou rupturas.

**188.** Como exemplos, temos:

- se a diretriz é uma **reta** não paralela a  $r$ , a superfície cilíndrica gerada é um **plano**.
- se a diretriz é um **segmento de reta** não paralelo a  $r$ , a superfície cilíndrica gerada é uma **faixa de plano**.
- se a diretriz é um **polígono** (linha poligonal fechada), cujo plano concorre com  $r$ , a superfície cilíndrica gerada é uma **superfície prismática ilimitada**.

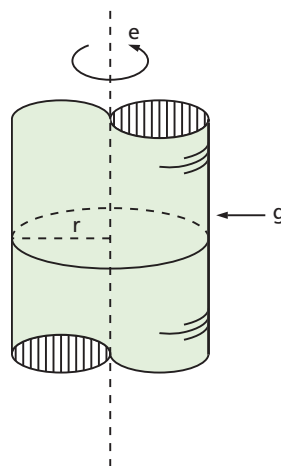
- se a diretriz é uma **circunferência** cujo plano concorre com  $r$ , a superfície cilíndrica gerada é uma superfície cilíndrica circular. E, ainda, se o plano da circunferência é **perpendicular** a  $r$ , temos uma **superfície cilíndrica circular reta**.



**189. Superfície cilíndrica de rotação** ou **revolução** é uma superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma reta  $g$  (geratriz) em torno de uma reta  $e$  (eixo), fixa, sendo a reta  $g$  paralela e distinta da reta  $e$ .

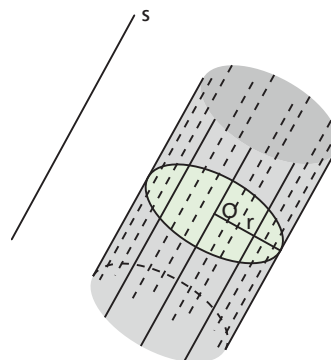
Considera-se que cada ponto da geratriz descreve uma circunferência com centro no eixo e cujo plano é perpendicular ao eixo.

A superfície cilíndrica de revolução de eixo  $e$ , geratriz  $g$  e raio  $r$  é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância dada ( $r$ ) de uma reta dada ( $e$ ).



**190.** Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$  e uma reta  $s$  não paralela nem contida no plano do círculo.

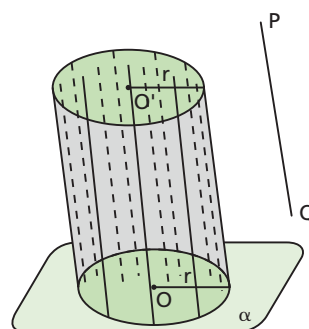
Chama-se **cilindro circular ilimitado** ou **cilindro circular indefinido** à reunião das retas paralelas a  $s$  e que passam pelos pontos do círculo.



## II. Cilindro

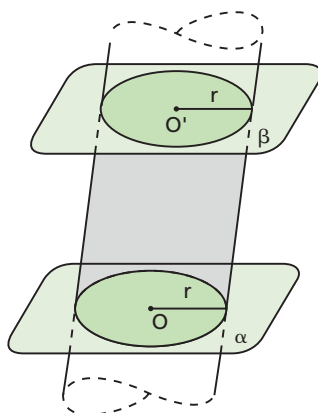
### 191. Definição

Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$ , situado num plano  $\alpha$ , e um segmento de reta  $PQ$ , não nulo, não paralelo e não contido em  $\alpha$ . Chama-se **cilindro circular** ou **cilindro** à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a  $PQ$ , com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por  $\alpha$ .



Podemos também definir o cilindro como segue.

**192. Cilindro** é a reunião da parte do cilindro circular ilimitado, compreendida entre as seções circulares formadas por dois planos paralelos e distintos.



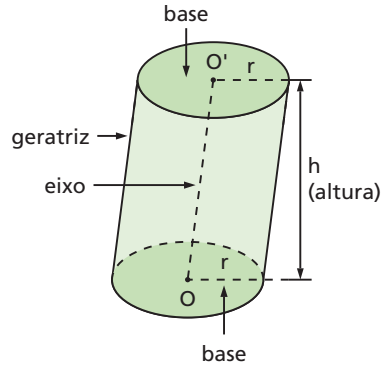
### 193. Elementos

O cilindro possui:

**2 bases:** círculos congruentes situados em planos paralelos (as seções citadas no item 192).

**Geratrizes:** são os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  e a outra no ponto correspondente da circunferência de centro  $O'$  e raio  $r$ .

$r$  é o raio da base.



**194.** A **altura** de um cilindro é a distância  $h$  entre os planos das bases.

### 195. Superfícies

**Superfície lateral** é a reunião das geratrizes. A **área** dessa superfície é chamada **área lateral** e indicada por  $A_L$ .

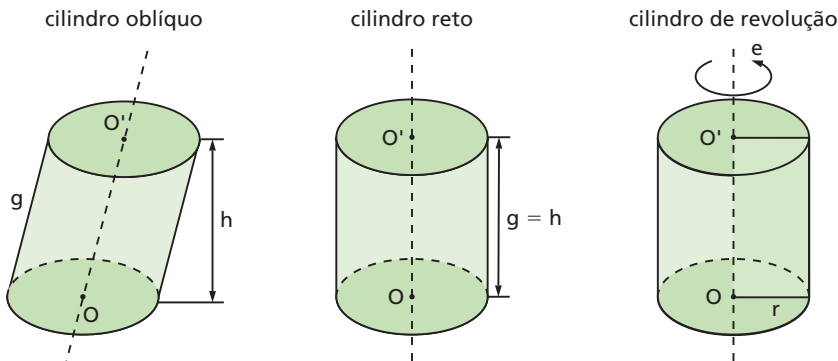
**Superfície total** é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. A **área** dessa superfície é a **área total** e indicada por  $A_T$ .

### 196. Classificação

Se as geratrizes são oblíquas aos planos das bases, temos um **cilindro circular oblíquo**.

Se as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases, temos um **cilindro circular reto**.

O **cilindro circular reto** é também chamado **cilindro de revolução**, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.

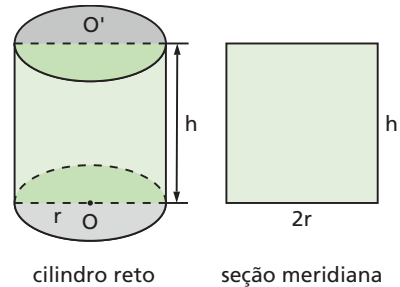


O **eixo** de um cilindro é a reta determinada pelos centros das bases.

### 197. Seção meridiana

**Seção meridiana** é a interseção do cilindro com um plano que contém a reta  $OO'$  determinada pelos centros das bases.

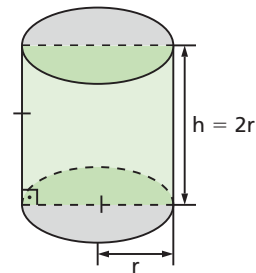
A seção meridiana de um cilindro oblíquo é um paralelogramo e a seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.



### 198. Cilindro equilátero

**Cilindro equilátero** é um cilindro cuja seção meridiana é um quadrado; portanto, apresenta:

$$g = h = 2r.$$



## III. Áreas lateral e total

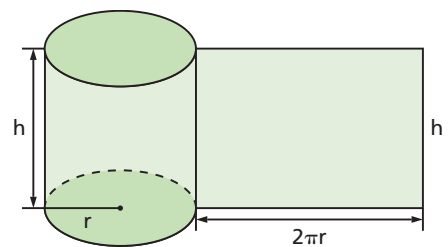
### 199. Área lateral

A superfície lateral de um cilindro circular reto ou cilindro de revolução é equivalente a um retângulo de dimensões  $2\pi r$  (comprimento da circunferência da base) e  $h$  (altura do cilindro).

Isso significa que a superfície lateral de um cilindro de revolução desenvolvida num plano (planificada) é um retângulo de dimensões  $2\pi r$  e  $h$ .

Portanto, a área lateral do cilindro é

$$A_\ell = 2\pi r h$$



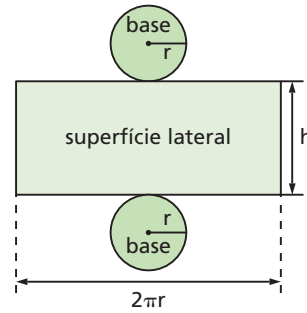
Nota: A dedução mais rigorosa desta fórmula encontra-se no final do capítulo XII, no item 230.

### 200. Área total

A área total de um cilindro é a soma da área lateral ( $A_\ell$ ) com as áreas das duas bases ( $B = \pi r^2$ ); logo:

$$A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 \Rightarrow$$

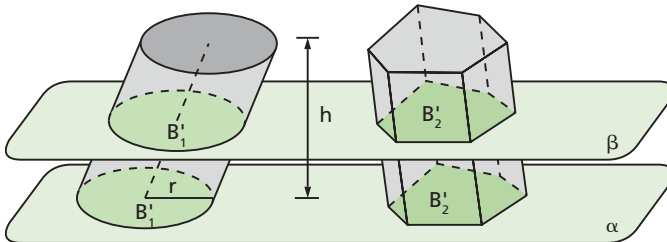
$$\Rightarrow A_t = 2\pi r (h + r)$$



## IV. Volume do cilindro

**201.** Consideremos um cilindro de altura  $h$  e área da base  $B_1 = B$  e um prisma de altura  $h$  e área da base  $B_2 = B$  (o cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes).

Suponhamos que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano  $\alpha$  e estão num dos semiespaços determinados por  $\alpha$ .



Qualquer plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , que secciona o cilindro, também secciona o prisma e as seções ( $B'_1$  e  $B'_2$ , respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$$(B'_1 = B_1, B'_2 = B_2, B_1 = B_2 = B) \Rightarrow B'_1 = B'_2$$

Então, pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm volumes iguais.

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{prisma}}$$

Como  $V_{\text{prisma}} = B_2 h$ , ou seja,  $V_{\text{prisma}} = B \cdot h$ , vem que  $V_{\text{cilindro}} = B \cdot h$ ; ou resumidamente:

$$V = B \cdot h$$

Conclusão:

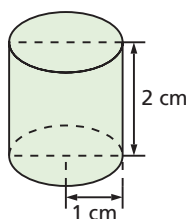
O volume de um cilindro é o produto da **área da base** pela medida da **altura**.

Se  $B = \pi r^2$ , temos:  $V = \pi r^2 h$

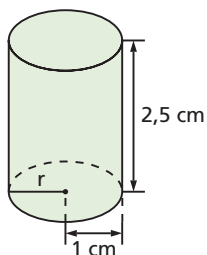
## EXERCÍCIOS

**494.** Calcule a área lateral, a área total e o volume dos sólidos cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

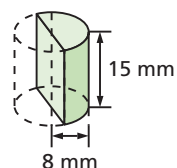
a) cilindro equilátero



b) cilindro reto

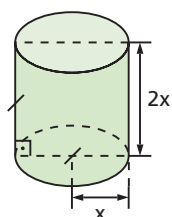


c) semicilindro reto

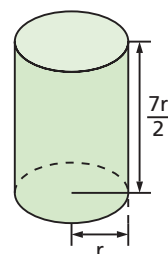


**495.** Represente através de expressões algébricas a área lateral, a área total e o volume dos cilindros cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

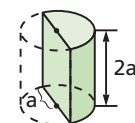
a) cilindro equilátero



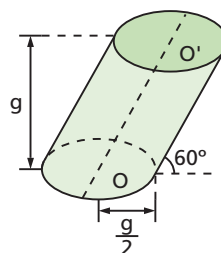
b) cilindro reto



c) semicilindro reto



**496.** Calcule o volume do cilindro oblíquo da figura ao lado em função de  $g$ .



- 497.** A área lateral de um cilindro de revolução de 10 cm de raio é igual à área da base. Calcule a altura do cilindro.
- 498.** Calcule a medida da área lateral de um cilindro circular reto, sabendo que o raio da base mede 4 cm e a geratriz 10 cm.
- 499.** O raio de um cilindro circular reto mede 3 cm e a altura 3 cm. Determine a área lateral desse cilindro.
- 500.** Determine o raio de um círculo cuja área é igual à área lateral de um cilindro equilátero de raio  $r$ .
- 501.** Demonstre que, se a altura de um cilindro reto é a metade do raio da base, a área lateral é igual à área da base.
- 502.** Um cilindro tem 2,7 cm de altura e 0,4 cm de raio da base. Calcule a diferença entre a área lateral e a área da base.
- 503.** Qual a altura de um reservatório cilíndrico, sendo 150 m o raio da base e  $900\pi \text{ m}^2$  sua área lateral?
- 504.** Constrói-se um depósito em forma cilíndrica de 8 m de altura e 2 m de diâmetro. Determine a superfície total do depósito.
- 505.** Calcule a medida do raio da base de um cilindro equilátero, sabendo que sua área total mede  $300\pi \text{ cm}^2$  e a geratriz 40 cm.
- 506.** Determine a medida da geratriz de um cilindro reto, sendo  $250\pi \text{ cm}^2$  a medida de sua área lateral e 10 cm o raio de sua base.
- 507.** A área lateral de um cilindro de 1 m de altura é  $16 \text{ m}^2$ . Calcule o diâmetro da base do cilindro.
- 508.** Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de raio igual a  $r$ .

**Solução**

a) área lateral

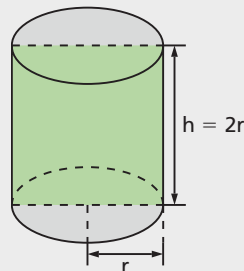
$$\left. \begin{array}{l} A_\ell = 2\pi r h \\ h = 2r \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_\ell = 2\pi r \cdot 2r \\ A_\ell = 4\pi r^2 \end{array}$$

b) área total

$$\left. \begin{array}{l} A_t = A_\ell + 2B \\ B = \pi r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_t = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 \\ A_t = 6\pi r^2 \end{array}$$

c) volume

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow V = 2\pi r^3$$



- 509.** Determine a área lateral de um cilindro equilátero, sendo 15 cm a medida de sua geratriz.
- 510.** Calcule a área total de um cilindro que tem 24 cm de diâmetro da base e 38 cm de altura.
- 511.** Determine a medida do raio de um círculo cuja área é igual à área total de um cilindro equilátero de raio  $r$ .
- 512.** Determine a área lateral e o volume de um cilindro de altura 10 cm, sabendo que a área total excede em  $50 \text{ cm}^2$  sua área lateral.
- 513.** Quantos metros cúbicos de terra foram escavados para a construção de um poço que tem 10 m de diâmetro e 15 m de profundidade?
- 514.** Um vaso cilíndrico tem 30 dm de diâmetro interior e 70 dm de profundidade. Quantos litros de água pode conter aproximadamente?
- 515.** O raio interno de uma torre circular é de 120 cm, a espessura 50 cm e o volume  $145\pi \text{ m}^3$ . Qual é a altura da torre?
- 516.** Um pluviômetro cilíndrico tem um diâmetro de 30 cm. A água colhida pelo pluviômetro depois de um temporal é colocada em um recipiente também cilíndrico, cuja circunferência da base mede  $20\pi \text{ cm}$ . Que altura havia alcançado a água no pluviômetro, sabendo que no recipiente alcançou 180 mm?
- 517.** Qual o valor aproximado da massa de mercúrio, em quilogramas, necessária para encher completamente um vaso cilíndrico de raio interno 6 cm e altura 18 cm, se a densidade do mercúrio é  $13,6 \text{ g/cm}^3$ ?

**Solução**

a) Volume

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 18 = \pi \cdot 36 \cdot 18 = 648\pi \text{ cm}^3$$

b) Densidade

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow 13,6 = \frac{m}{648\pi} \Rightarrow m = 8812,8\pi$$

$$m \cong 8812,8 \cdot 3,14 = 27\,672,192 \cong 27\,672,2 \text{ g} \cong 27,672 \text{ kg}$$

- 518.** Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro reto de 5 cm de raio, sabendo que a seção meridiana é equivalente à base.

- 519.** O que ocorre com o volume de um cilindro quando o diâmetro da base dobra? E quando quadruplica? E quando fica reduzido à metade?
- 520.** Determine o volume de um cilindro de revolução de 10 cm de altura, sendo sua área lateral igual à área da base.
- 521.** Determine o volume de um cilindro reto, sabendo que a área de sua base é igual à sua área lateral e a altura igual a 12 m.
- 522.** O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro é um quadrado de lado  $a$ . Determine o volume do cilindro.
- 523.** Determine a altura de um cilindro reto de raio da base  $r$ , sabendo que é equivalente a um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ .
- 524.** A altura de um cilindro reto é igual ao triplo do raio da base. Calcule a área lateral, sabendo que seu volume é  $46875\pi$  cm<sup>3</sup>.
- 525.** Qual é a altura aproximada de um cilindro reto de 12,56 cm<sup>2</sup> de área da base, sendo a área lateral o dobro da área da base?
- 526.** Determine a área lateral de um cilindro reto, sendo  $S$  a área de sua seção meridiana.
- 527.** Determine a razão entre a área lateral e a área da seção meridiana de um cilindro reto.
- 528.** Calcule a área lateral de um cilindro equilátero, sendo 289 cm<sup>2</sup> a área de sua seção meridiana.
- 529.** Determine o volume de um cilindro reto de raio  $r$ , sabendo que sua área total é igual à área de um círculo de raio  $5r$ .
- 530.** Determine a área total de um cilindro, sabendo que a área lateral é igual a 80 cm<sup>2</sup> e a sua seção meridiana é um quadrado.
- 531.** Determine a área total de um cilindro equilátero, sendo  $S$  a área de sua seção meridiana.
- 532.** Qual a razão entre a área total e a área lateral de um cilindro equilátero?
- 533.** Uma pipa cilíndrica tem profundidade de 4,80 dm. Determine a medida do seu diâmetro, sabendo que a sua capacidade é de 37 680 litros. (Adote  $\pi = 3,14$ .)
- 534.** A altura de um cilindro é os  $\frac{5}{3}$  do raio da base. Determine a área da base desse cilindro, sendo  $64\pi$  cm<sup>2</sup> sua área lateral.
- 535.** A área total de um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$  é o triplo da área lateral de um outro cilindro de raio  $h$  e altura  $r$ . Calcule  $r$  em função de  $h$ .

- 536.** Se a altura de um cilindro reto é igual ao raio da base, então a superfície lateral é igual à metade da superfície total.
- 537.** Calcule o raio da base de um cilindro reto em função do seu volume  $V$  e da sua área lateral  $A_\ell$ .
- 538.** Calcule a área lateral de um cilindro de revolução, conhecendo seu volume  $V$  e seu raio da base  $r$ .
- 539.** Determine a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de altura  $h$ .
- 540.** Num cilindro de revolução com água colocamos uma pedra. Determine o volume dessa pedra, se em virtude de sua imersão total a água se elevou 35 cm, sendo 50 cm o raio da base do cilindro.
- 541.** O desenvolvimento de uma superfície cilíndrica de revolução é um retângulo de 4 cm de altura e 7 cm de diagonal. Calcule a área lateral do cilindro.
- 542.** Determine a área lateral de um cilindro reto de  $30\pi$  cm<sup>2</sup> de área total, sendo o raio da base  $\frac{3}{2}$  da medida da altura do cilindro.

**Solução**

Seja  $r$  o raio da base e  $h$  a altura, temos:

$$A_t = 30\pi \Rightarrow A_\ell + 2B = 30\pi \Rightarrow 2\pi rh + 2\pi r^2 = 30\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rh + r^2 = 15 \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{3}{2}h \end{array} \right. \Rightarrow \frac{3}{2}h^2 + \frac{9}{4}h^2 = 15 \Rightarrow 15h^2 = 60 \Rightarrow h = 2$$

Com  $h = 2$  e  $r = \frac{3}{2}h$ , vem que  $r = 3$ .

$$\text{Área lateral: } A_\ell = 2\pi rh \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow A_\ell = 12\pi$$

Resposta:  $12\pi$  cm<sup>2</sup>.

- 543.** Determine a medida da altura e do raio de um cilindro reto, sendo  $\frac{9}{5}$  sua razão, nessa ordem, e  $270\pi$  cm<sup>2</sup> a área lateral.
- 544.** Calcule a área lateral de um cilindro, sabendo que a base está circunscrita a um hexágono regular de 30 cm de perímetro e cuja altura é o dobro do raio da base.
- 545.** Determine a medida da altura de um cilindro de  $30\pi$  m<sup>2</sup> de área lateral e  $45\pi$  m<sup>3</sup> de volume.



$$V_A = V_B \Rightarrow \pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi R^2 H \Rightarrow 2r^2 h = R^2 H \quad (1)$$

$$A_{\ell(A)} = A_{\ell(B)} \Rightarrow 2\pi r h = R H (\pi + 2) \quad (2)$$

$$(1) \div (2) \Rightarrow \frac{2r^2 h}{2\pi r h} = \frac{R^2 H}{R H (\pi + 2)} \Rightarrow \frac{r}{\pi} = \frac{R}{\pi + 2} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\pi}{\pi + 2}$$

- 556.** Um cilindro de revolução é dividido em dois semicilindros. Sendo  $20\pi \text{ cm}^2$  sua área da base e 8 cm sua altura, determine a área total do semicilindro.
- 557.** Determine a altura de um cilindro reto em função da altura  $h$  de um semicilindro, sabendo que as áreas laterais são iguais e as bases equivalentes.
- 558.** Calcule a altura de um cilindro em função de sua área lateral  $A_{\ell}$  e da área da base  $B$ .
- 559.** Calcule o raio da base de um cilindro de área total  $\pi a^2$  e altura  $h$ .
- 560.** A geratriz de um cilindro oblíquo mede 8 cm e forma um ângulo de  $45^\circ$  com a base, que é um círculo de 3 cm de raio. Calcule o volume do cilindro.
- 561.** Calcule o volume de um cilindro cujo raio da base mede 5 cm, sabendo que as geratrizes de 15 cm formam com o plano da base um ângulo de  $60^\circ$ .
- 562.** Quanto se deve aumentar a geratriz de um cilindro reto para que a área total do novo cilindro seja o triplo da área lateral do primeiro?
- 563.** Dois cilindros têm a mesma área lateral e raios de 9 cm e 12 cm. Calcule a relação entre seus volumes e a relação entre suas áreas totais, sabendo que a altura do primeiro é 10 cm.
- 564.** A diferença entre a área da base e a área lateral de um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$  é igual à área de um círculo de raio  $h$ . Calcule a medida de  $r$  em função de  $h$ .

### Solução

Dado:  $h$ .

Pede-se:  $r$ .

$$B - A_{\ell} = A_{\text{círculo}} \Rightarrow \pi r^2 - 2\pi r h = \pi h^2 \Rightarrow r^2 - 2hr - h^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4h^2 + 4h^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r = (1 + \sqrt{2})h \\ \text{ou} \\ r = (1 - \sqrt{2})h \quad (\text{esta não convém}) \end{cases}$$

$$\text{Resposta: } r = (1 + \sqrt{2})h.$$

- 565.** Com uma folha de cartolina em forma retangular, de base  $\ell$  e altura  $h$ , construímos a superfície lateral de um cilindro de altura  $h$  e volume  $V$ . Calcule  $\ell$  em função de  $h$  e  $V$ .
- 566.** Determine a área total  $A_t$  de um cilindro reto, em função do seu volume  $V$  e da sua altura  $h$ .
- 567.** Calcule o raio, a altura e a área total de um cilindro circular reto que tem volume igual ao de um cubo de aresta  $a$  e área lateral igual à área da superfície do cubo.

**Solução**

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{cubo}} \Rightarrow \pi r^2 h = a^3 \quad (1)$$

$$A_{\ell_{\text{cilindro}}} = A_{t_{\text{cubo}}} \Rightarrow 2\pi r h = 6a^2 \Rightarrow \pi r h = 3a^2 \quad (2)$$

$$(1) \div (2) \Rightarrow r = \frac{1}{3}a$$

$$\text{Substituindo em (2): } \pi \frac{1}{3} a h = 3a^2 \Rightarrow h = \frac{9}{\pi} a.$$

$$\text{Área total: } A_t = A_{\ell} + 2B.$$

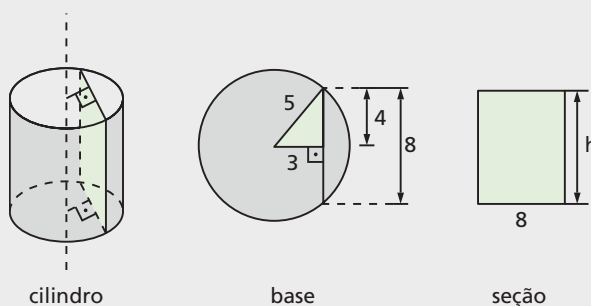
$$A_t = 6a^2 + 2\pi \cdot \frac{1}{9} a^2 \Rightarrow A_t = \frac{54a^2 + 2\pi a^2}{9} \Rightarrow A_t = \frac{2}{9}(27 + \pi)a^2$$

$$\text{Resposta: } r = \frac{a}{3}, h = \frac{9a}{\pi}, A_t = \frac{2}{9}(27 + \pi)a^2.$$

- 568.** Determine a razão entre o volume de um cilindro reto e um prisma triangular regular, sendo a área lateral do cilindro igual à área lateral do prisma e o raio do cilindro o dobro da aresta da base do prisma.
- 569.** Um prisma quadrangular regular e um cilindro circular reto têm mesma altura e mesmo volume. Sabendo que a área lateral do prisma é  $\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ cm}^2$ , calcule a área lateral do cilindro.
- 570.** Determine a razão entre a área lateral de um cilindro reto e a área lateral de um semicilindro, sabendo que seus volumes e suas alturas são iguais.
- 571.** Determine a relação entre os volumes de dois cilindros retos, sabendo que suas áreas laterais são iguais e seus raios são, respectivamente,  $R$  e  $r$ .
- 572.** Dados dois cilindros com altura igual a 5 cm, a diferença entre os volumes é igual a  $400\pi \text{ cm}^3$  e a diferença entre os raios é igual a 8 cm. Determine o raio do cilindro de maior volume.

- 573.** Dão-se as áreas totais  $18\pi \text{ m}^2$  e  $32\pi \text{ m}^2$  de dois cilindros. Cada um tem por raio e por altura, respectivamente, a altura e o raio do outro. Determine os dois volumes.
- 574.** Calcule a altura de um cilindro circular reto em função de sua área total  $2\pi S$  e sua área lateral  $2\pi A$ .
- 575.** Calcule o volume de um cilindro de revolução de raio igual a 5 dm, sabendo que esse cilindro cortado por um plano paralelo ao eixo e a uma distância de 3 dm desse eixo apresenta uma seção retangular equivalente à base.

**Solução**



$$\text{Área do retângulo} = \text{Área da base} \Rightarrow 8h = \pi 5^2 \Rightarrow h = \frac{25}{8}\pi.$$

$$\text{Volume: } V = B \cdot h \Rightarrow V = \pi 5^2 \cdot \frac{25}{8}\pi \Rightarrow V = \frac{625}{8}\pi^2.$$

$$\text{Resposta: } \frac{625}{8}\pi^2 \text{ dm}^3.$$

- 576.** Um cilindro equilátero de raio da base  $r$  é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo e a uma distância  $d$  desse eixo. Calcule a medida da distância  $d$ , se a área da seção do plano com o cilindro é igual à área da base do cilindro.
- 577.** Um plano secciona um cilindro paralelamente ao eixo e forma um arco de  $60^\circ$  com a base do cilindro. A altura do cilindro é de 20 cm. Determine a área da seção, se a distância do plano ao eixo é de 4 cm.
- 578.** Dentre os cilindros de revolução de área total  $2\pi a^2$ , determine o raio da base e a altura daquele de maior volume.

- 579.** Dentre os cilindros de revolução abertos em uma das bases, de área total  $2\pi a^2$ , determine o raio da base e a altura daquele de volume máximo.
- 580.** Dentre os cilindros de revolução equivalentes, determine o raio da base e a altura daquele de menor área total.
- 581.** Determine o volume de um cilindro de revolução em função de sua área total  $2\pi S$  e sua área lateral  $2\pi A$ .
- 582.** Trace um plano paralelo à base de um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$ , de modo que a base seja a média proporcional entre as duas partes em que fica dividida a superfície lateral.
- 583.** Um suco de frutas é vendido em dois tipos de latas cilíndricas: uma de raio  $r$  cheia até a altura  $h$  e outra de raio  $\frac{r}{2}$  e cheia até a altura  $2h$ . A primeira é vendida por R\$ 3,00 e a segunda por R\$ 1,60. Qual a embalagem mais vantajosa para o comprador?
- 584.** Um cilindro circular reto tem raio da base  $R$  e altura  $H$ . A média harmônica entre  $R$  e  $H$  é 4. A área total do cilindro é  $54\pi$ . Calcule o volume do cilindro e suas áreas da base e lateral.

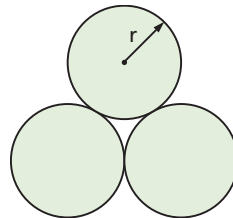
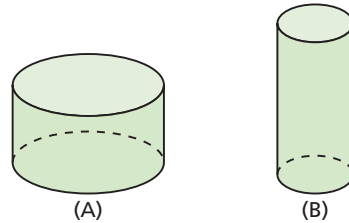
- 585.** Um produto é embalado em latas cilíndricas (cilindros de revolução). O raio da embalagem A é igual ao diâmetro de B e a altura de B é o dobro da altura de A. Assim,

$$\text{Cilindro A} \begin{cases} \text{altura } h \\ \text{raio da base } 2R \end{cases}$$

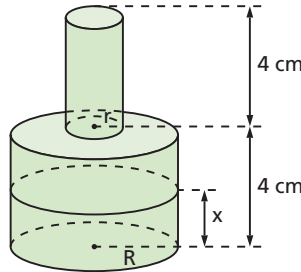
$$\text{Cilindro B} \begin{cases} \text{altura } 2h \\ \text{raio da base } R \end{cases}$$

- a) As embalagens são feitas do mesmo material (mesma chapa). Qual delas gasta mais material para ser montada?
- b) O preço do produto na embalagem A é R\$ 780,00 e na embalagem B é R\$ 400,00. Qual das opções é mais econômica para o consumidor, supondo-se as duas latas completamente cheias?

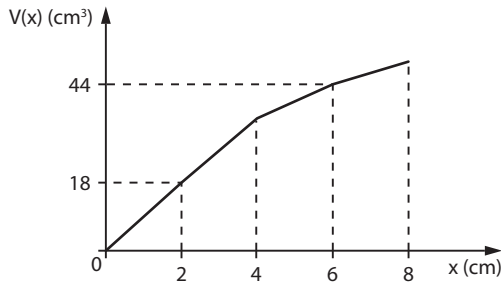
- 586.** Três canos de forma cilíndrica e de mesmo raio  $r$ , dispostos como indica a figura, devem ser colocados dentro de outro cano cilíndrico de raio  $R$ , de modo a ficarem presos sem folga. Expresse o valor de  $R$  em termos de  $r$  para que isso seja possível.



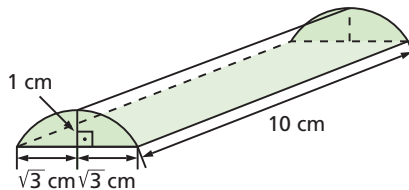
- 587.** Começando com um cilindro de raio 1 e altura também 1, define-se o procedimento de colocar sobre um cilindro anterior um outro cilindro de igual altura e raio  $\frac{2}{3}$  do raio do anterior. Embora a altura do sólido fictício resultante seja infinita, seu volume pode ser calculado. Faça esse cálculo.
- 588.** Uma garrafa de vidro tem a forma de dois cilindros sobrepostos. Os cilindros têm a mesma altura 4 cm e raios das bases  $R$  e  $r$ , respectivamente.



Se o volume  $V(x)$  de um líquido que atinge uma altura  $x$  da garrafa se expressa segundo o gráfico a seguir, quais os valores de  $R$  e de  $r$ ?



- 589.** O sólido da figura foi obtido seccionando um cilindro circular reto de 10 cm de altura por um plano perpendicular às bases. Calcule o volume desse sólido.



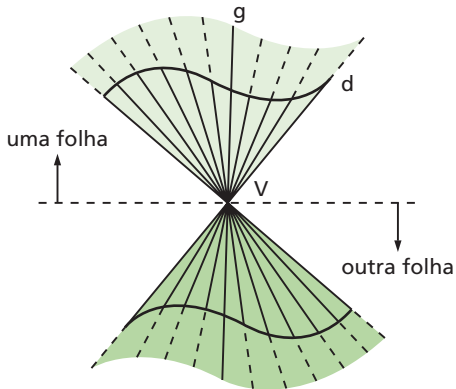
- 590.** Um sólido  $S$  está localizado entre dois planos horizontais  $\alpha$  e  $\beta$  cuja distância é 1 metro. Cortando o sólido por qualquer plano horizontal compreendido entre  $\alpha$  e  $\beta$  obtém-se como seção um disco de raio 1 metro.
- Pode-se garantir que o sólido  $S$  é um cilindro? Por quê?
  - Calcule o volume de  $S$ .

# CAPÍTULO XI

## Cone

### I. Preliminar: noções intuitivas de geração de superfícies cônicas

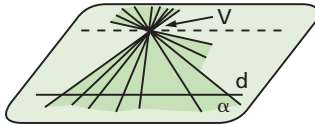
**202.** Superfícies regradas desenvolvíveis cônicas são superfícies geradas por uma reta  $g$  (geratriz) que passa por um ponto dado  $V$  (vértice) e percorre os pontos de uma linha dada  $d$  (diretriz), com  $V$  fora de  $d$ .



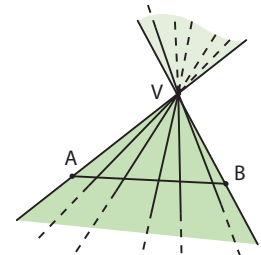
**203.** Como exemplos, temos:

- se a diretriz é uma **reta**, a superfície cônica gerada é um **plano**, menos a reta paralela à diretriz.
- se a diretriz é um **segmento de reta**, a superfície cônica gerada é a reunião de **dois ângulos** (setores angulares) opostos pelo vértice.
- se a diretriz é uma linha **poligonal fechada** (polígono) cujo plano não contém o vértice ( $V$ ), a superfície cônica gerada é a reunião de **duas superfícies** de ângulos poliédricos (superfícies poliédricas ilimitadas ou superfícies de pirâmides ilimitadas) opostas pelo vértice.

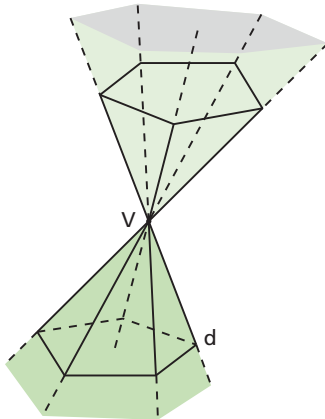
- se a diretriz é uma **circunferência** cujo plano não contém o vértice, a superfície cônica gerada é uma superfície cônica **circular** (de duas folhas).
- se a diretriz é uma **circunferência** de centro  $O$  e a reta  $VO$  é **perpendicular** a seu plano, a superfície cônica é uma superfície cônica **circular reta** (de duas folhas).



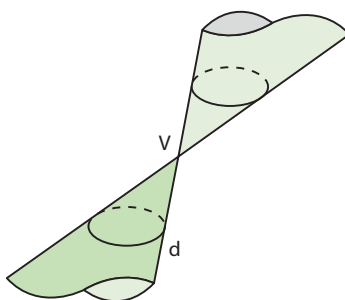
plano, menos a paralela a  $d$  por  $V$



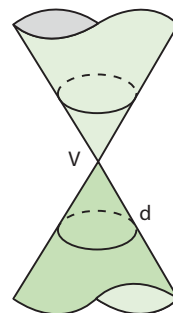
reunião de dois ângulos opostos pelo vértice



reunião de duas superfícies piramidais indefinidas (superfície de uma pirâmide ilimitada de segunda espécie)



superfície cônica circular



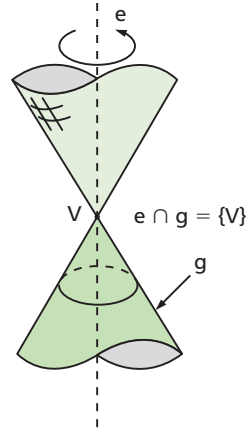
superfície cônica circular reta

**204. Superfície cônica de rotação ou revolução**

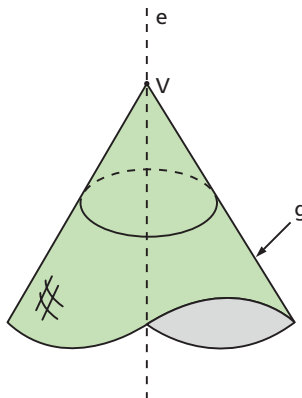
é uma superfície gerada pela rotação (ou revolução) de uma reta  $g$  (geratriz) em torno de uma reta  $e$  (eixo), fixa, sendo a reta  $g$  oblíqua ao eixo  $e$ . O vértice ( $V$ ) é a interseção das retas  $g$  e  $e$ .

Considera-se que cada ponto da geratriz (com exceção de  $V$ ) descreve uma circunferência com centro no eixo e cujo plano é perpendicular ao eixo.

A superfície cônica de revolução acima citada é dita de segunda espécie. Ela possui duas folhas.



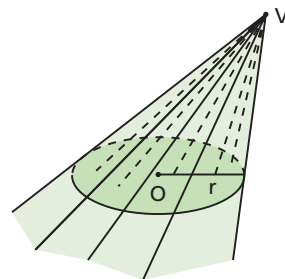
Se a geratriz é uma semirreta ( $Vg$ ), oblíqua ao eixo ( $e$ ) e de origem ( $V$ ) nele, temos uma superfície cônica de primeira espécie. É a mais comum; possui uma folha.



**205. Cone circular ilimitado**

Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$  e um ponto  $V$  fora de seu plano.

Chama-se **cone circular ilimitado** ou **cone circular indefinido** à reunião das semirretas de origem em  $V$  e que passam pelos pontos do círculo

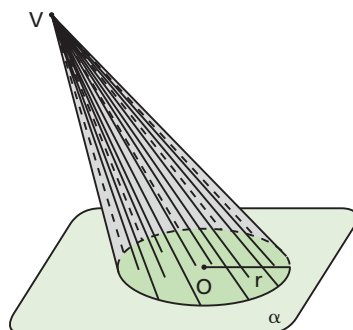


## II. Cone

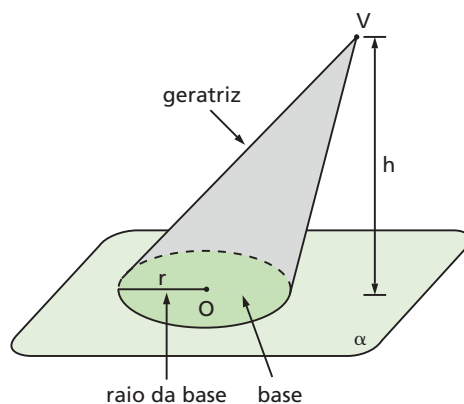
### 206. Definição

Consideremos um círculo (região circular) de centro  $O$  e raio  $r$  situado num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Chama-se **cone circular** ou **cone** à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos do círculo.

Podemos também definir o cone como segue.



**207. Cone** é a parte do cone ilimitado que contém o vértice quando se divide este cone pelo plano de uma seção circular, reunida com esta seção.



### 208. Elementos

O cone possui:

**uma base:** o círculo de centro  $O$  e raio  $r$  ou a seção citados acima.

**geratrizes:** são os segmentos com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos da circunferência da base.

**vértice:** o ponto  $V$  citado acima.

**209.** A **altura** de um cone é a distância entre o vértice e o plano da base.

### 210. Superfícies

**Superfície lateral** é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por  $A_l$ .

**Superfície total** é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. A área dessa superfície é chamada área total e indicada por  $A_t$ .

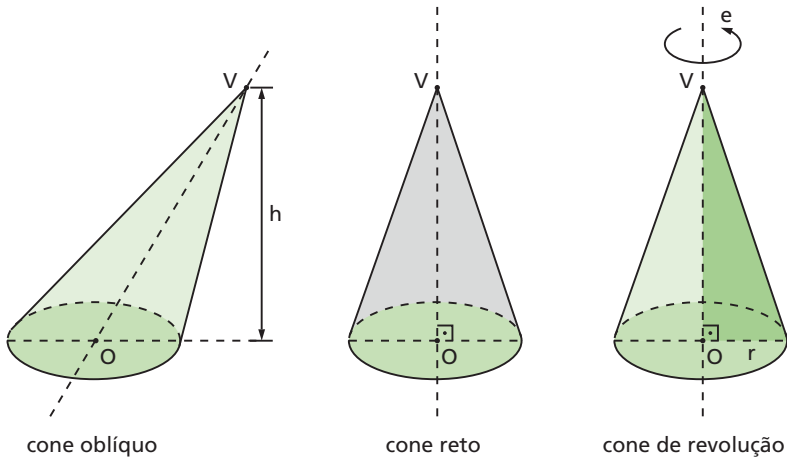
## 211. Classificação

Os cones podem ser classificados pela posição da reta VO em relação ao plano da base:

Se a reta VO é oblíqua ao plano da base, temos um **cone circular oblíquo**.

Se a reta VO é perpendicular ao plano da base, temos um **cone circular reto**.

O **cone circular reto** é também chamado **cone de revolução**, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.



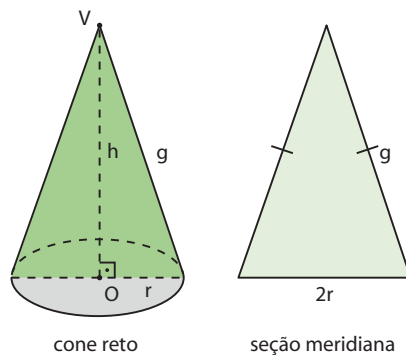
O **eixo** de um cone é a reta determinada pelo vértice e pelo centro da base.

A geratriz de um cone circular reto é também dita **apótema** do cone.

## 212. Seção meridiana

É a interseção do cone com um plano que contém a reta VO.

A seção meridiana de um cone circular reto ou cone de revolução é um triângulo isósceles.

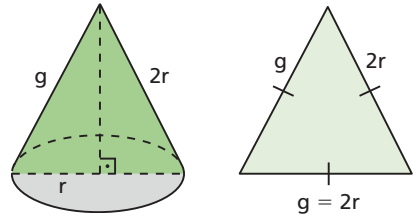


### 213. Cone equilátero

É um cone cuja seção meridiana é um triângulo equilátero.

$$g = 2r$$

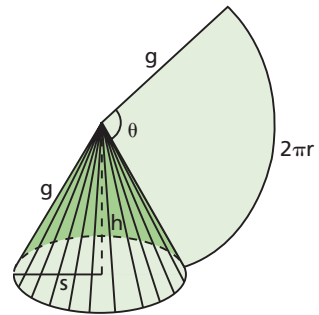
$$h = r\sqrt{3}$$



## III. Áreas lateral e total

**214.** A superfície lateral de um cone circular reto ou cone de revolução de raio da base  $r$  e geratriz  $g$  é equivalente a um setor circular de raio  $g$  e comprimento do arco  $2\pi r$ .

Isso significa que a superfície lateral de um cone de revolução desenvolvida num plano (planificada) é um setor circular cujo raio é  $g$  (geratriz) e comprimento do arco  $2\pi r$ .



Sendo  $\theta$  o ângulo do setor, este ângulo é dado por:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad ou } \theta = \frac{360r}{g} \text{ graus}$$

**215.** A área lateral do cone pode então ser calculada como segue:

a)	comprimento do arco	área do setor	}	$\Rightarrow$	$A_\ell = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g}$	$\Rightarrow$	$A_\ell = \pi r g$
	$\frac{2\pi g}{2\pi r}$	$\frac{\pi g^2}{A_\ell}$					

b) A área de um setor circular é dada pela fórmula da área de um triângulo:

$$A_{\text{setor}} = \frac{1}{2} (\text{comprimento do arco}) \cdot (\text{raio})$$

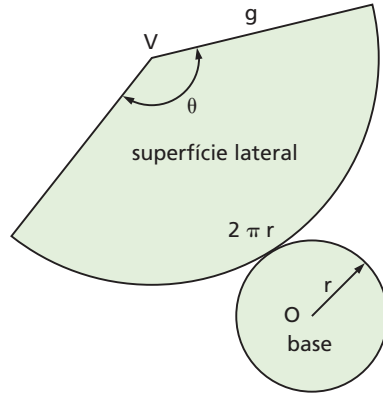
$$\text{Assim, } A_\ell = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot g \Rightarrow A_\ell = \pi r g$$

Nota: A dedução mais rigorosa desta fórmula encontra-se no final do capítulo XII, no item 232.

### 216. Área total

A área total de um cone é a soma da área lateral ( $A_l$ ) com a área da base ( $B = \pi r^2$ ); logo:

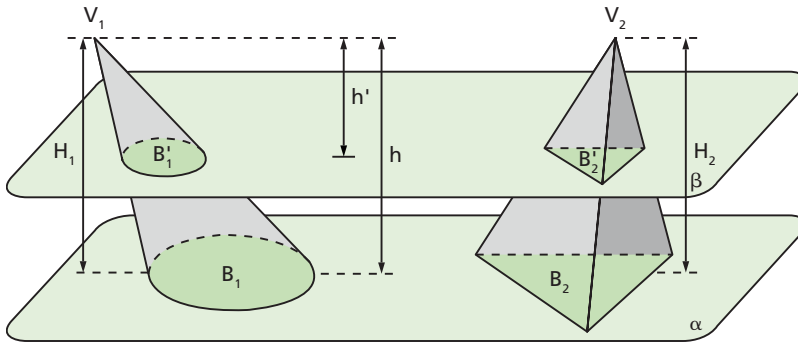
$$A_t = A_l + B \Rightarrow A_t = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow A_t = \pi r (g + r)$$



## IV. Volume do cone

**217.** Consideremos um cone de altura  $H_1 = h$  e área da base  $B_1 = B$  e um tetraedro de altura  $H_2 = h$  e área da base  $B_2 = B$  (o cone e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes).

Suponhamos que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano  $\alpha$  e que os vértices estão num mesmo semiespaço dos determinados por  $\alpha$ .



Qualquer plano secante  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , distando  $h'$  dos vértices que seccionam o cone, também secciona o tetraedro, e sendo as áreas das seções  $B'_1$  e  $B'_2$ , respectivamente, temos:

$$\left( \frac{B'_1}{B_1} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2, \frac{B'_2}{B_2} = \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \right) \Rightarrow \frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}$$

Como  $B_1 = B_2 = B$ , vem que  $B'_1 = B'_2$ .

Então, pelo princípio de Cavalieri, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$V_{\text{cone}} = V_{\text{tetraedro}}$$

Como  $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} B_2 h$ , ou seja,  $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} B \cdot h$ , vem que  $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} Bh$ ;  
 ou resumidamente:

$$V = \frac{1}{3} Bh.$$

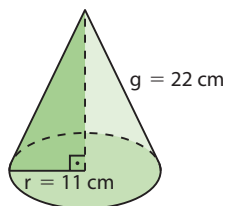
Conclusão: O volume de um cone é **um terço** do produto da **área da base** pela medida da altura.

Se  $B = \pi r^2$ , temos:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

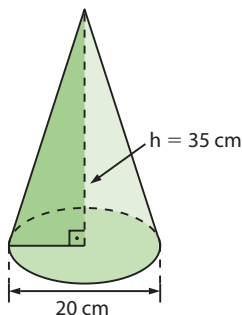
# EXERCÍCIOS

**591.** Calcule a área lateral, a área total e o volume dos cones cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

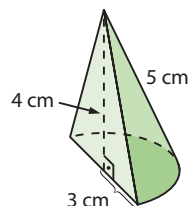
a) cone equilátero



b) cone reto

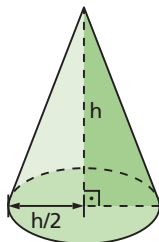


c) semicone

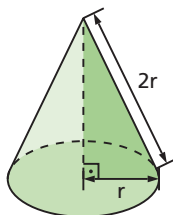


**592.** Represente através de expressões algébricas a área lateral, a área total e o volume dos sólidos cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

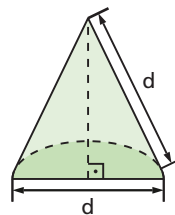
a) cone reto



b) cone equilátero



c) semicone equilátero



- 593.** Determine a medida da altura de um cone cuja geratriz mede 10 cm, sendo 12 cm o diâmetro de sua base.
- 594.** Determine a medida do diâmetro da base de um cone de revolução cuja geratriz mede 65 cm, sendo 56 cm a altura do cone.
- 595.** Calcule a medida da altura de um cone de raio  $r$ , sabendo que sua base é equivalente à seção meridiana.
- 596.** Determine a medida do raio da base de um cone de revolução cuja altura mede 3 cm e cujo volume é  $9\pi \text{ cm}^3$ .
- 597.** Determine a medida do raio da base de um cone de revolução de altura 3 cm, sendo  $16\pi \text{ cm}^3$  o seu volume.
- 598.** Um cone equilátero tem raio da base  $r$ . Calcule:
- a área lateral;
  - a medida em radianos do ângulo do setor circular equivalente à superfície lateral;
  - a área total;
  - o volume.

**Solução**

Notemos que  $g = 2r$  e

$$h = 2r \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

1º) Área lateral

$$A_\ell = \pi r g \Rightarrow A_\ell = 2\pi r^2$$

2º) Ângulo do setor circular

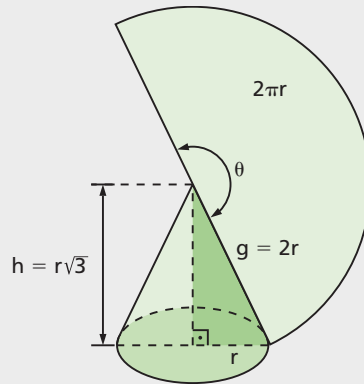
$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi r}{2r} \Rightarrow \theta = \pi \text{ rad}$$

3º) Área total

$$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 2\pi r^2 + \pi r^2 \Rightarrow A_t = 3\pi r^2$$

4º) Volume

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3$$



- 599.** Calcule o raio e a altura de um cone de revolução cujo desenvolvimento é um semicírculo de raio  $a$ .
- 600.** A geratriz de um cone mede 14 cm e a área da base  $80\pi$  cm<sup>2</sup>. Calcule a medida da altura do cone.
- 601.** Determine a medida da área lateral de um cone equilátero, sendo 20 cm a medida da sua geratriz.
- 602.** Determine a área total de um cone, cuja seção meridiana é um triângulo equilátero de 8 dm de lado.
- 603.** Determine a medida da área lateral e da área total de um cone de revolução, sabendo que sua altura mede 12 cm e sua geratriz 13 cm.
- 604.** Determine a medida da altura de um cone equilátero cuja área total mede  $54\pi$  cm<sup>2</sup>.
- 605.** Calcule a área total e o volume de um cone equilátero, sabendo que a área lateral é igual a  $24\pi$  cm<sup>2</sup>.
- 606.** Determine a área lateral de um cone cujo raio da base mede 5 cm, sendo 60° o ângulo que a geratriz forma com a base do cone.
- 607.** Determine a área total de um cone cuja altura mede 12 cm e forma um ângulo de 45° com a geratriz.
- 608.** O raio da base de um cone mede 12 cm. Sabendo que a altura forma um ângulo de 60° com a geratriz do cone, determine sua área lateral.
- 609.** A geratriz de um cone de revolução forma com o eixo do cone um ângulo de 45°. Sendo  $A$  a área da seção meridiana do cone, calcule sua área total.
- 610.** A planificação da superfície lateral de um cone de revolução é um setor circular de 90°. Calcule a razão entre o raio da base do cone e a geratriz do cone.

**Solução**

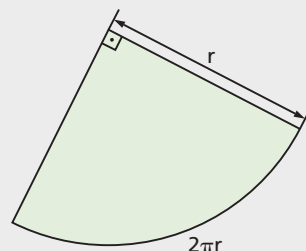
Ângulo do setor circular:

$$\theta = \frac{360r}{g} \text{ graus} = \frac{r}{g} 360^\circ.$$

Razão entre o raio da base do cone e a geratriz:

$$\frac{r}{g} = \frac{\theta}{360} = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$$

Resposta: A razão entre o raio da base e a geratriz do cone é  $\frac{1}{4}$ .



- 611.** Determine a razão entre o raio da base e a geratriz de um cone de revolução, sabendo que o desenvolvimento da superfície lateral do cone é um setor circular cujo ângulo mede  $60^\circ$ .
- 612.** Determine a altura de um cone, sabendo que o desenvolvimento de sua superfície lateral é um setor circular de  $135^\circ$  e raio igual a 10 cm.
- 613.** Determine o ângulo central de um setor circular obtido pelo desenvolvimento da superfície lateral de um cone cuja geratriz mede 18 cm e o raio da base 3 cm.
- 614.** Determine a medida do ângulo do setor circular resultante do desenvolvimento sobre um plano da superfície lateral de um cone cuja altura e cujo raio estão na razão  $\frac{3}{4}$ .
- 615.** A área da base de um cone de revolução é  $\frac{1}{3}$  da área total. Calcule o ângulo do setor circular que é o desenvolvimento da superfície lateral do cone.
- 616.** O diâmetro da base de um cone circular reto mede 3 m e a área da base é  $\frac{2}{5}$  da área total. Calcule o ângulo do setor circular que é o desenvolvimento da superfície lateral do cone.
- 617.** Determine a área total de um cone, sendo 40 cm o diâmetro de sua base e  $420 \text{ cm}^2$  a área de sua seção meridiana.
- 618.** Determine a superfície lateral de um cone cuja área da base mede  $6,25\pi \text{ cm}^2$ , sendo 4 cm a medida da sua altura.
- 619.** Um cone tem 8 cm de altura e 15 cm de raio. Outro cone tem 15 cm de altura e 8 cm de raio. Quanto a área lateral do primeiro excede a área lateral do segundo?
- 620.** Determine a medida da altura de um cone, sendo 42 cm o diâmetro da base e  $1050\pi \text{ cm}^2$  sua área total.
- 621.** A altura de um cone circular reto cujo raio da base mede  $r$  é  $\pi r$ . Sendo 3 cm a medida do apótema do hexágono regular inscrito na base, determine a área da seção meridiana do cone.
- 622.** O que ocorre com o volume de um cone de revolução se duplicarmos sua altura? E se duplicarmos o raio de sua base?
- 623.** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Qual é a altura de um cone equivalente se o raio da base do cone mede  $a$ ?
- 624.** O volume de um cilindro reto é  $1225\pi \text{ cm}^3$  e sua altura é 35 cm. Determine o volume de um cone de revolução, sendo sua base a mesma do cilindro e sua geratriz a geratriz do cilindro.

- 625.** Determine o volume de um cone de revolução cuja seção meridiana é um triângulo isósceles de área  $4,8 \text{ dm}^2$ , sendo  $3 \text{ dm}$  a altura do cone.
- 626.** Determine a área lateral de um cone, sendo  $3 \text{ cm}$  sua altura e  $5 \text{ cm}$  a soma da medida da geratriz com o raio da base.
- 627.** Determine a geratriz do cone de revolução, sabendo que a área da base é equivalente à seção meridiana do cone e que a altura desse cone mede  $9\pi \text{ cm}$ .
- 628.** O volume de um cone de revolução é  $128\pi \text{ cm}^3$ , sendo  $8 \text{ cm}$  o lado do hexágono inscrito em sua base. Determine a relação entre a área total do cone e a área total de um cilindro que tenha o mesmo volume e a mesma base do cone. Calcule ainda a medida do ângulo do setor circular obtido do desenvolvimento da superfície lateral do cone.

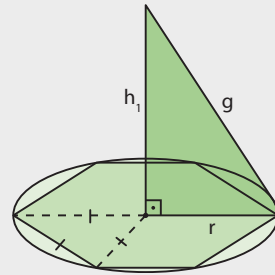
**Solução**

$r$  = raio da base comum

$h_1$  = altura do cone

$h_2$  = altura do cilindro

Dados:  $r = 8 \quad V_{\text{cone}} = V_{\text{cil.}} = 128\pi$ .



1º) Relação entre as áreas totais

$$V_{\text{cone}} = 128\pi \Rightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot h_1 = 128\pi \Rightarrow h_1 = 6$$

$$(r = 8, h_1 = 6, g^2 = r^2 + h_1^2) \Rightarrow g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10$$

$$A_{\text{t.cone}} = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow A_{\text{t.cone}} = \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 8 \cdot 10 \Rightarrow A_{\text{t.cone}} = 144\pi$$

$$V_{\text{cil.}} = 128\pi \Rightarrow \pi r^2 h_2 = 128\pi \Rightarrow \pi \cdot 8^2 \cdot h_2 = 128\pi \Rightarrow h_2 = 2$$

$$A_{\text{t.cil.}} = 2\pi r h_2 + 2\pi r^2 \Rightarrow A_{\text{t.cil.}} = 2\pi \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A_{\text{t.cil.}} = 160\pi$$

$$\frac{A_{\text{t.cone}}}{A_{\text{t.cil.}}} = \frac{144\pi}{160\pi} \Rightarrow \frac{A_{\text{t.cone}}}{A_{\text{t.cil.}}} = \frac{9}{10}$$

2º) Ângulo do setor

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \cdot g \text{ — } 360^\circ \\ 2\pi \cdot r \text{ — } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2\pi \cdot 10 \text{ — } 360^\circ \\ 2\pi \cdot 8 \text{ — } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 288^\circ$$

- 629.** Com um setor circular de  $120^\circ$  e raio  $R$ , construímos um cone. Calcule a área total e o volume do cone.

- 630.** Determine o ângulo central de um setor obtido pelo desenvolvimento da superfície lateral de um cone cujo raio da base mede 1 cm e cuja altura é 3 cm.
- 631.** Um cone circular reto tem 24 cm de altura e 7 cm de raio. Calcule em radianos a medida do ângulo do setor circular que se obtém pelo desenvolvimento da superfície lateral do cone.
- 632.** Um cone circular reto de altura  $h = 3$  m tem área lateral igual a  $6\pi$  m<sup>2</sup>. Determine o ângulo que a geratriz  $g$  faz com a reta suporte da altura  $h$ .
- 633.** Um cilindro e um cone têm mesmo volume e igual altura  $h$ . Determine o raio do cilindro em função do raio  $r$  da base do cone.
- 634.** Calcule a altura, a área lateral e o volume de um cone de revolução de raio  $R$  e base equivalente à seção meridiana.
- 635.** Determine a razão entre a base e a superfície lateral de um cone que tem altura igual ao diâmetro da base.
- 636.** Sendo  $\frac{7}{5}$  a razão entre a área lateral e a área da base de um cone, determine a medida do raio da base e da geratriz, sabendo que a altura do cone mede  $4\sqrt{6}$  cm.
- 637.** Um cilindro e um cone têm altura  $h$  e raio da base  $r$ . Sendo  $r$  o dobro de  $h$ , determine a razão entre a área lateral do cilindro e a área lateral do cone.
- 638.** Determine o volume de um cone cujo raio da base mede  $r$ , sendo  $3r$  a soma das medidas da geratriz com a altura do cone.
- 639.** Calcule o raio da base de um cone de revolução, conhecendo sua área total  $\pi a^2$  e sua geratriz  $g$ .
- 640.** Determine o volume de um cone de revolução cuja área lateral é igual a  $A$ , sabendo que a geratriz do cone é igual a  $\frac{4}{5}$  do diâmetro da base do cone.
- 641.** Determine o volume de um cone de revolução, sendo  $126\pi$  cm<sup>2</sup> sua área lateral e  $200\pi$  cm<sup>2</sup> sua área total.
- 642.** Calcule o volume de um cone equilátero em função de sua área total  $S$ .
- 643.** O raio da base, a altura e a geratriz de um cone reto formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Determine esses elementos, sabendo que o volume do cone é  $144\pi$  cm<sup>3</sup>.

- 644.** Desenvolvendo a superfície lateral de um cone reto, obtém-se um setor circular de raio 10 cm e ângulo central  $135^\circ$ . Calcule o volume desse cone.
- 645.** Um semicone reto tem altura igual ao raio e o volume é  $576\pi \text{ cm}^3$ . Calcule a área lateral do semicone.
- 646.** A geratriz de um cone de revolução mede 25 cm e a diagonal menor do hexágono regular inscrito na base do cone mede  $7\sqrt{3}$  cm. Determine a área total e o volume do cone.
- 647.** Determine o volume de um cone de revolução cuja área lateral é  $60\pi \text{ cm}^2$ , sendo 4,8 cm a distância do centro da base à geratriz do cone.
- 648.** O diâmetro da base de um cone mede os  $\frac{3}{5}$  da sua altura e a área lateral é  $100 \text{ dm}^2$ . Calcule a medida da geratriz do cone.
- 649.** Demonstre que o volume de um cone é igual ao produto da sua área lateral pela terça parte da distância do centro de sua base à geratriz do cone.
- 650.** Um sólido é formado pela superposição de um cone sobre um cilindro de raio da base  $r$ . Sendo a altura do sólido o triplo do raio  $r$  e a área lateral do sólido o quántuplo da área da base do cilindro, calcule o volume do sólido em função de  $r$ .
- 651.** Um semicone tem área lateral igual a  $(\sqrt{2}\pi + 2) \text{ cm}^2$ . Determine a medida da sua geratriz, sabendo que o raio da base tem medida igual à altura do semicone.
- 652.** Determine a medida do raio da base e da geratriz de um cone, sendo  $h$  a medida de sua altura e  $\pi \text{ m}^2$  sua área total.
- 653.** Calcule o volume de um cone de revolução, conhecendo a área lateral  $A$  e o apótema  $g$ .
- 654.** Calcule o volume de um cone de revolução, conhecendo a área total  $S$  e a altura  $h$ .
- 655.** Calcule o volume  $V$  de um cone de revolução em função de sua área lateral  $A$  e de sua área total  $S$ .
- 656.** Determine o volume de um cone de revolução, conhecendo o raio da base  $r$  e sua área total  $S$ .
- 657.** Mostre que, entre o volume  $V$ , a área lateral  $A$  e a área total  $S$  de um cone de revolução, tem-se:  
$$9\pi V^2 = S(S - A)(2A - S).$$

- 658.** São dados um cone e um cilindro de revolução. Esses sólidos têm a mesma altura e são equivalentes. A área lateral do cilindro é igual à área total do cone. Exprima o volume do cone em função do seu raio  $R$ .

**Solução**

Elementos:

do cilindro:  $r, h$                       do cone:  $R$  (dado),  $h, g$

$$V_{\text{cil.}} = V_{\text{cone}} \Rightarrow \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$A_{\ell_{\text{cil.}}} = A_{t_{\text{cone}}} \Rightarrow 2\pi r h = \pi R g + \pi R^2 \Rightarrow 2rh = Rg + R^2$$

Substituindo  $r$  e considerando  $g = \sqrt{h^2 + R^2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{2R\sqrt{3}}{3} h &= R\sqrt{h^2 + R^2} + R^2 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} h - R = \sqrt{h^2 + R^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{12}{9} h^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} hR + R^2 &= h^2 + R^2 \Rightarrow \frac{h}{3} (h - 4\sqrt{3}R) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= 4\sqrt{3}R \text{ ou } h = 0 \text{ (não convém)}. \end{aligned}$$

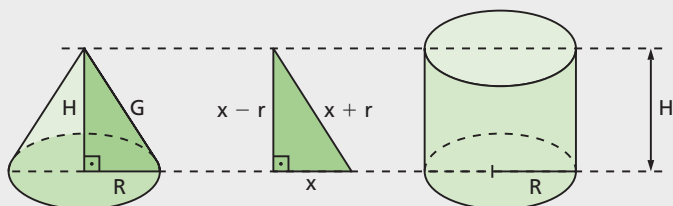
Calculando o volume do cone, vem:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 4\sqrt{3} R \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi R^3.$$

Resposta:  $V_{\text{cone}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi R^3.$

- 659.** O raio da base, a altura e o apótema (geratriz) de um cone reto formam, nessa ordem, uma progressão aritmética. Determine esses elementos, sendo  $37,68 \text{ cm}^3$  o volume do cone. Adote  $\pi = 3,14$ .
- 660.** Quanto se deve aumentar a altura e diminuir o raio da base de um cone de revolução para que seu volume permaneça constante?
- 661.** Dado um cone circular reto e um cilindro circular reto de mesma altura e mesma base, mostre que a área lateral do cilindro é menor que 2 vezes a área lateral do cone.
- 662.** Pediu-se para calcular o volume de um cone circular reto, sabendo-se que as dimensões da geratriz, do raio da base e da altura estão, nessa ordem, em progressão aritmética. Por engano, ao se calcular o volume do cone, usou-se a fórmula do volume do cilindro circular reto de mesmo raio e de mesma altura do cone. O erro obtido foi de  $4\pi \text{ m}^3$ . Dê a altura e o raio do cone.

**Solução**



$$G, R \text{ e } H \text{ em P. A.} \Rightarrow (G = x + r, R = x, H = x - r)$$

em que  $r$  é a razão (positiva) e  $x$  é o termo médio da P. A.

Do triângulo retângulo, temos:

$$x^2 + (x - r)^2 = (x + r)^2 \Rightarrow x^2 - 4xr = 0 \Rightarrow x(x - 4r) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4r \text{ ou } x = 0 \text{ (não convém)}$$

As dimensões são  $G = 5r$ ,  $R = 4r$  e  $H = 3r$ .

$$\text{erro} = BH - \frac{1}{3} BH = \frac{2}{3} BH \Rightarrow \frac{2}{3} BH = 4\pi$$

Substituindo  $B = \pi R^2 = \pi(4r)^2$  e  $H = 3r$ , vem:

$$\frac{2}{3} \pi \cdot 16r^2 \cdot 3r = 4\pi \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}.$$

Calculando a altura  $H$  e o raio:

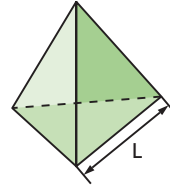
$$H = 3r \Rightarrow H = \frac{3}{2} \qquad R = 4r \Rightarrow R = 2$$

$$\text{Respostas: } H = \frac{3}{2} \text{ m e } R = 2 \text{ m.}$$

- 663.** No cálculo do volume de um cone reto, o calculista se enganou, trocando as medidas do raio e da altura. O volume do cone aumentou ou diminuiu? Discuta.
- 664.** A base de um cone reto é equivalente à seção meridiana. Se o raio da base mede 1 m, calcule a altura do cone.
- 665.** Um cone circular tem raio 2 m e altura 4 m. Qual é a área da seção transversal, feita por um plano, distante 1 m do seu vértice?

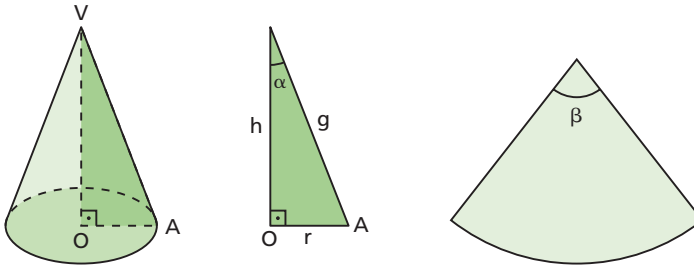
**666.** Dado um tetraedro regular de aresta  $L$ :

- Determine, em função de  $L$ , o volume  $V$  do cone circular circunscrito, isto é, do cone que tem vértice num vértice do tetraedro e base circunscrita à face oposta do tetraedro.
- Determine, em função de  $L$ , a área lateral  $A$  do cilindro circular reto circunscrito, isto é, do cilindro que tem uma base circunscrevendo uma face do tetraedro e altura igual à altura do tetraedro.



**667.** A geratriz de um cone reto forma um ângulo  $\alpha$  com o plano da base. Sendo  $V$  o volume do cone, determine o raio da base e a altura do cone.

**668.** As figuras abaixo representam um cone de revolução, seus elementos e a planificação de sua superfície lateral.



Expresse  $\beta$  em função de  $\alpha$ .

# CAPÍTULO XII

## Esfera

### I. Definições

#### 218. Esfera

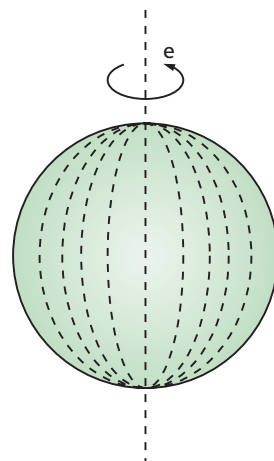
Consideremos um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ . Chama-se **esfera** de **centro  $O$**  e **raio  $r$**  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $\overline{OP}$  seja menor ou igual a  $r$ .

A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

#### 219. Superfície

Chama-se **superfície** da esfera de centro  $O$  e raio  $r$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $OP$  seja igual a  $r$ .

A **superfície** de uma esfera é também a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo.



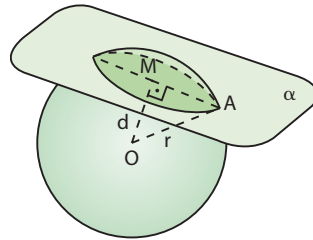
### 220. Seção

Toda seção plana de uma esfera é um círculo.

Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um **círculo máximo** da esfera.

Sendo  $r$  o raio da esfera,  $d$  a distância do plano secante ao centro e  $s$  o raio da seção, vale a relação:

$$s^2 = r^2 - d^2.$$



Teorema de Pitágoras no  $\triangle OMA$ :  
 $r^2 = d^2 + s^2.$

### 221. Elementos: polos — equador — paralelo — meridiano

Polos relativos a uma seção da esfera são as extremidades do diâmetro perpendicular ao plano dessa seção.

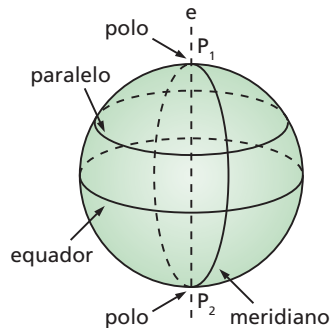
Considerando a superfície de uma esfera de eixo  $e$ , temos:

**polos:** são as interseções da superfície com o eixo.

**equador:** é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.

**paralelo:** é uma seção (circunferência) perpendicular ao eixo. É "paralela" ao equador.

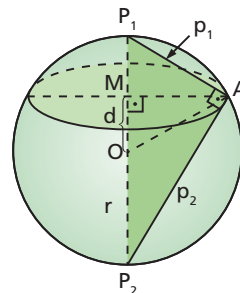
**meridiano:** é uma seção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.



### 222. Distância polar

**Distância polar** é a distância de um ponto qualquer de um paralelo ao polo.

Um ponto  $A$  da superfície de uma esfera tem duas distâncias polares:  $P_1 A$  e  $P_2 A$ .



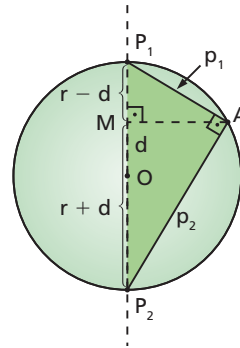
Sendo:  
 $r$  o raio da esfera,  
 $d$  a distância do plano de uma seção ao centro,

$p_1$  e  $p_2$  as distâncias polares de um ponto  $A$ .

Usando relações métricas no  $\triangle P_1 A P_2$ , temos:

$$(AP_1)^2 = (P_1P_2) \cdot (P_1M) \Rightarrow p_1^2 = 2r(r - d)$$

$$(AP_2)^2 = (P_1P_2) \cdot (P_2M) \Rightarrow p_2^2 = 2r(r + d)$$



## II. Área e volume

### 223. Área da esfera

A área da superfície de uma esfera de raio  $r$  é igual a  $4\pi r^2$ .

$$A = 4\pi r^2$$

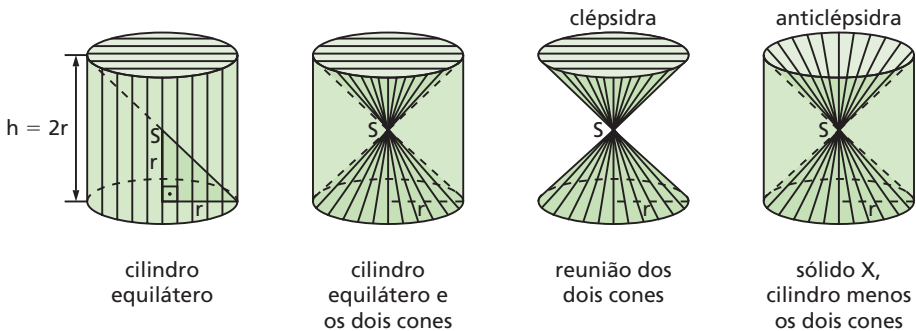
A dedução dessa fórmula encontra-se no final deste capítulo, no item 231.

### 224. Volume da esfera

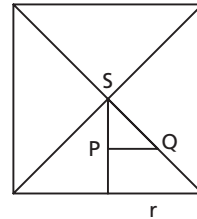
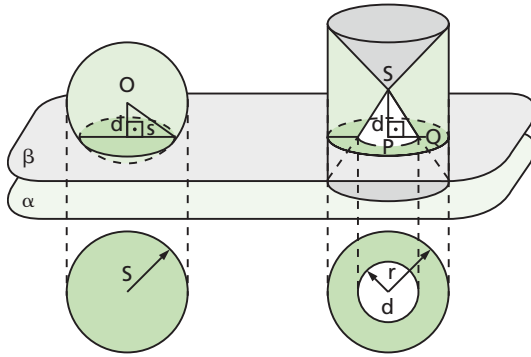
Consideremos um cilindro equilátero de raio da base  $r$  (a altura é  $2r$ ) e seja  $S$  o ponto médio do eixo do cilindro.

Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e  $S$  como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado **clépsidra**).

Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido  $X$  (este sólido  $X$  é chamado **anticlépsidra**).



Consideremos agora uma esfera de raio  $r$  e o sólido X descrito na página anterior.



$\triangle SPQ$  é isósceles:  
 $SP = d \Rightarrow PQ = d$ .

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano  $\alpha$ , que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em  $\alpha$  e que os dois sólidos, esfera e sólido X, estejam num mesmo semiespaço dos determinados por  $\alpha$ .

Qualquer plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , distando  $d$  do centro da esfera (e do vértice do sólido X), também secciona o sólido X. Temos:

$$\text{Área da seção na esfera} = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$$

(círculo)

$$\text{Área da seção no sólido X} = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$$

(coroa circular)

As áreas das seções na esfera e no sólido X são iguais; então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm volumes iguais.

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{sólido X}}$$

Mas:

$$V_{\text{sólido X}} = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r \right) =$$

$$= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

ou seja:  $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

Conclusão: O volume de uma esfera de raio  $r$  é  $\frac{4}{3} \pi r^3$ .

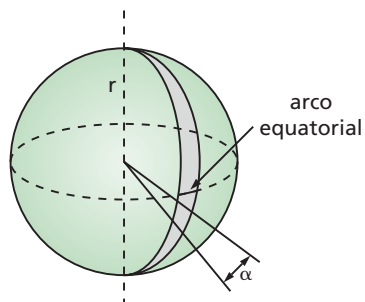
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

### III. Fuso e cunha

#### 225. Fuso esférico

É a interseção da **superfície** de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica.

O ângulo  $\alpha$ , medida do diedro, medido na seção equatorial, é o que caracteriza o fuso.



#### 226. Área do fuso

Sendo  $\alpha$  a medida do diedro, temos:

a) com  $\alpha$  em graus

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } 4\pi r^2 \\ \alpha^\circ \text{ — } A_{\text{fuso}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$

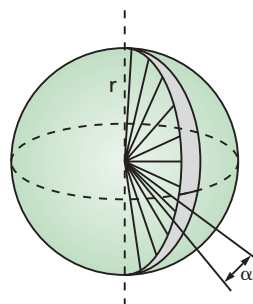
b) com  $\alpha$  em radianos

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ — } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ — } A_{\text{fuso}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = 2r^2 \alpha$$

#### 227. Cunha esférica

É a interseção de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.

A cunha é caracterizada pelo raio da esfera e pela medida do diedro.



#### 228. Volume da cunha

Sendo  $\alpha$  a medida do diedro, temos:

a) com  $\alpha$  em graus:

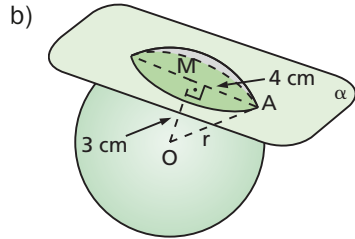
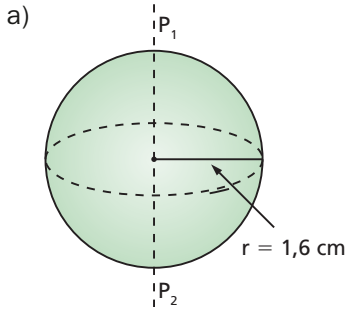
$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } \frac{4}{3} \pi r^3 \\ \alpha^\circ \text{ — } V_{\text{cunha}} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$

b) com  $\alpha$  em radianos:

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \text{ — } \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha^\circ \text{ — } V_{\text{cunha}} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{2r^3\alpha}{3}$$

# EXERCÍCIOS

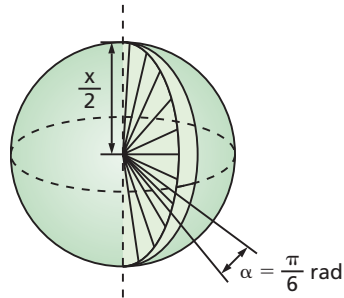
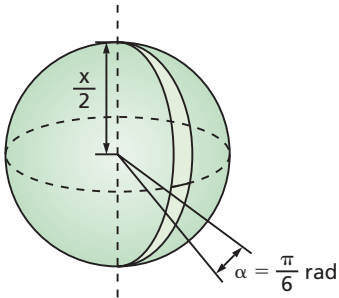
**669.** Calcule a área e o volume das esferas, cujas medidas estão indicadas abaixo.



**670.** Represente, nas esferas abaixo, através de expressões algébricas:

a) a área do fuso

b) a área total e o volume da cunha



**671.** Obtenha o raio de uma esfera, sabendo que um plano determina na esfera um círculo de raio  $20 \text{ cm}$ , sendo  $21 \text{ cm}$  a distância do plano ao centro da esfera.

**672.** O raio de uma esfera mede  $53 \text{ cm}$ . Um plano que secciona essa esfera determina nela um círculo de raio  $45 \text{ cm}$ . Obtenha a distância do plano ao centro da esfera.

- 673.** Um plano secciona uma esfera de 34 cm de diâmetro. Determine o raio da seção obtida, sendo 8 cm a distância do plano ao centro da esfera.
- 674.** Determine o diâmetro de um círculo cuja área é igual à superfície de uma esfera de raio  $r$ .
- 675.** Determine o raio de uma esfera de superfície  $36\pi$  cm<sup>2</sup>.
- 676.** Determine a área do círculo da esfera cujas distâncias polares são de 5 cm e 3 cm.

**Solução**

Seja  $r$  o raio da seção e  $d$  o diâmetro da esfera, vem:

$$d^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow d = \sqrt{34}.$$

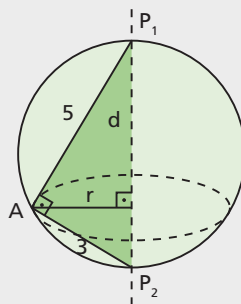
Relações métricas ( $ah = bc$ ) no  $\triangle P_1AP_2$ , retângulo em A:

$$d \cdot r = 5 \cdot 3 = \sqrt{34} \cdot r = 15 \Rightarrow r = \frac{15}{\sqrt{34}}$$

Área da seção: S.

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi \left( \frac{15}{\sqrt{34}} \right)^2 \Rightarrow S = \frac{225\pi}{34}$$

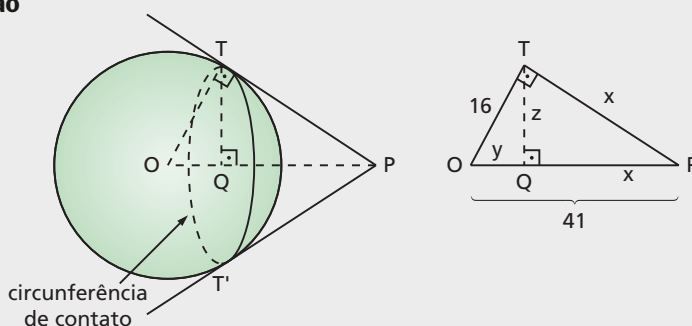
Resposta: A área do círculo é  $\frac{225\pi}{34}$  cm<sup>2</sup>.



- 677.** Calcule a área de uma seção plana feita a uma distância de 12 cm do centro de uma esfera de 37 cm de raio.
- 678.** A seção plana de uma esfera feita a 35 cm do centro tem  $144\pi$  cm<sup>2</sup> de área. Calcule a área do círculo máximo dessa esfera.
- 679.** Calcule a distância de uma seção plana de uma esfera ao centro da esfera, sabendo que o círculo máximo tem área igual ao quádruplo da área determinada pela seção plana e que o raio da esfera mede 17 cm.
- 680.** O raio de uma esfera mede 41 cm. Determine a razão entre as áreas das seções obtidas por dois planos, sendo de 40 cm e 16 cm as respectivas distâncias desses planos ao centro da esfera.
- 681.** Determine a área e o volume de uma esfera de 58 cm de diâmetro.
- 682.** Determine a área de uma esfera, sendo  $2304\pi$  cm<sup>3</sup> o seu volume.

- 683.** Calcule a distância polar de um círculo máximo de uma esfera de 34 cm de diâmetro.
- 684.** Determine a superfície de uma esfera, sendo  $26\pi$  cm o comprimento da circunferência do círculo máximo.
- 685.** Determine o raio de uma esfera, sendo  $288\pi$  cm<sup>3</sup> o seu volume.
- 686.** Uma esfera oca tem 1 dm de raio exterior e 1 cm de espessura. Determine o volume da parte oca da esfera.
- 687.** Determine o volume de uma esfera de  $100\pi$  cm<sup>2</sup> de superfície.
- 688.** Determine a medida do raio de uma esfera, sabendo que seu volume e sua superfície são expressos pelo mesmo número.
- 689.** Um plano secciona uma esfera determinando um círculo de raio igual à distância  $m$  do plano ao centro da esfera. Obtenha a superfície e o volume da esfera em função de  $m$ .
- 690.** Determine a medida da superfície e do volume de uma esfera, sabendo que o seu raio mede  $\frac{1}{5}$  do raio de outra esfera cujo volume é  $4500\pi$  cm<sup>3</sup>.
- 691.** A cúpula de uma igreja é uma semiesfera apoiada sobre um quadrado de 12 m de lado (isto é, o círculo base da semiesfera está inscrito nesse quadrado). Determine a superfície da cúpula.
- 692.** Determine a medida do raio de uma esfera, sabendo que o raio de um círculo menor mede 5 cm e que sua distância polar mede 13 cm.
- 693.** Determine a distância polar de um círculo menor de uma esfera, sendo 10 cm o raio da esfera e 6 cm a distância do círculo ao centro da esfera.
- 694.** Os polos de um círculo menor de uma esfera distam, respectivamente, 5 cm e 10 cm do plano do círculo. Determine o raio desse círculo.
- 695.** Uma bola de ouro de raio  $r$  se funde, transformando-se em um cilindro de raio  $r$ . Determine a altura do cilindro.
- 696.** Um cone é equivalente a um hemisfério de 25 cm de diâmetro. Determine a área lateral do cone, sabendo que as bases do cone e do hemisfério são coincidentes.
- 697.** Duas esferas de metal de raios  $2r$  e  $3r$  se fundem para formar uma esfera maior. Determine o raio dessa nova esfera.

- 698.** Um sólido é formado por dois cones retos de volumes iguais, tendo como base comum um círculo de 6 cm de raio. A área do sólido é igual à superfície de uma esfera de raio 6 cm. Determine a relação entre os volumes do sólido e da esfera.
- 699.** Os raios de duas esferas concêntricas medem, respectivamente, 15 cm e 8 cm. Calcule a área da seção feita na esfera de raio maior por um plano tangente à outra esfera.
- 700.** Determine o diâmetro de uma esfera obtida da fusão de duas esferas de 10 cm de diâmetro.
- 701.** Sabendo que o diâmetro de uma esfera é os  $\frac{3}{5}$  do diâmetro de uma outra esfera, calcule a razão entre as áreas dessas duas esferas.
- 702.** O que ocorre com o volume de uma esfera quando duplicamos a medida de seu raio? E quando triplicamos a medida do seu raio?
- 703.** O que ocorre com o volume de uma esfera quando o raio aumenta 100%? E quando aumenta 300%? E quando diminui 50%?
- 704.** O que ocorre com a superfície de uma esfera quando o raio aumenta 200%? E quando aumenta 150%? E quando diminui 25%?
- 705.** O raio de uma esfera mede 16 cm. De um ponto P situado a 41 cm do centro da esfera traçam-se tangentes à esfera. Determine o comprimento dos segmentos com extremidades em P e nos pontos de tangência com a esfera, bem como a distância do centro da esfera ao plano do círculo de contato e o raio desse círculo.

**Solução**

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, o comprimento do segmento  $PT$ , a distância  $OQ$  do centro da esfera ao plano do círculo e o raio do círculo de tangência.

Aplicando relações métricas (Pitágoras,  $b^2 = a \cdot m$ ,  $ah = bc$ ) no triângulo PTO retângulo em T, vem:

$$x^2 = 41^2 - 16^2 \Rightarrow x^2 = 1425 \Rightarrow x = 5\sqrt{57}$$

$$41 \cdot y = 16^2 \Rightarrow y = \frac{256}{41}$$

$$41 \cdot z = 16 \cdot x \Rightarrow 41 \cdot z = 16 \cdot 5\sqrt{57} \Rightarrow z = \frac{80\sqrt{57}}{41}$$

Resposta: Na ordem pedida:  $5\sqrt{57}$  cm,  $\frac{256}{41}$  cm e  $\frac{80\sqrt{57}}{41}$  cm.

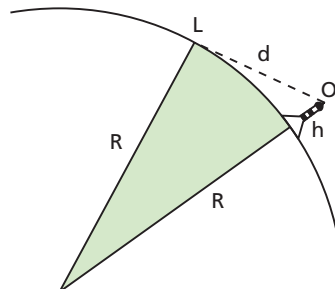
- 706.** Supondo a Terra esférica e o metro a décima milionésima parte do quarto do meridiano, determine a superfície da Terra em  $\text{km}^2$ .
- 707.** Determine a superfície de uma esfera de 5 cm de raio. Em quanto aumenta a superfície, ao aumentar o raio em 1 cm?
- 708.** A área de uma seção plana de uma esfera é  $144\pi \text{ cm}^2$ . Calcule a superfície da esfera, sabendo que a distância ao centro da esfera é 5 cm.
- 709.** Uma esfera tem  $25\pi \text{ cm}^2$  de superfície. Em quanto devemos aumentar o raio, para que a área passe a ser  $64\pi \text{ cm}^2$ ?
- 710.** Determine a área de um círculo obtido da seção plana de uma esfera, sendo o raio da esfera  $r$  e 15 cm a distância desse plano ao centro da esfera.
- 711.** Determine a superfície de uma esfera em função do comprimento da circunferência  $c$  do círculo máximo da esfera.
- 712.** Determine a superfície de uma esfera em função da área  $A$  do círculo máximo da esfera.
- 713.** O círculo máximo de uma esfera tem um triângulo equilátero inscrito. Determine a superfície da esfera em função da medida  $a$  do lado desse triângulo.
- 714.** A área obtida da seção plana em uma esfera é  $A$ . Sendo  $r$  o raio da esfera, determine a distância do plano ao centro da esfera.
- 715.** Determine o volume de uma esfera em função do comprimento da circunferência  $C$  do círculo máximo da esfera.
- 716.** Uma esfera tem 1 m de raio. Qual será o raio de uma esfera cujo volume é  $\frac{1}{5}$  do volume da primeira esfera?

- 717.** Determine a razão entre as áreas de um cubo e uma esfera, sabendo que seus volumes são iguais.
- 718.** Um cubo de chumbo de aresta  $a$  foi transformado numa esfera. Determine a superfície da esfera em função de  $a$ .
- 719.** Calcule em  $\text{cm}^3$  o volume de uma esfera, sabendo que o diâmetro perpendicular a um círculo menor de 10 cm de raio é dividido por esse círculo em dois segmentos de razão  $\frac{2}{5}$ .
- 720.** Uma esfera, um cilindro e um cone têm o mesmo volume e o mesmo raio. Calcule a razão entre a altura do cilindro e a do cone.
- 721.** Determine a diferença entre a área da maior e da menor das seções obtidas por um ponto  $P$ , a uma distância  $d$  do centro da esfera.
- 722.** A superfície de uma esfera mede  $144\pi \text{ cm}^2$  e é igual à área total de um cilindro que tem o mesmo raio da esfera. Determine a relação entre os volumes de ambos os sólidos.
- 723.** Uma esfera é equivalente a um cilindro reto cuja área total é igual a  $42\pi \text{ cm}^2$ . Sendo 3 cm o raio do cilindro, determine:
- o raio da esfera;
  - a relação entre a área da esfera e a área total de um cone reto que tenha a mesma base e a mesma altura do cilindro dado.
- 724.** Fabricou-se uma caldeira de tal maneira que as bases de dois hemisférios coincidiram com as bases de um cilindro. Sendo o diâmetro do cilindro os  $\frac{3}{5}$  de sua altura e a superfície da caldeira equivalente a uma esfera de raio  $R$ , determine a relação entre o volume da caldeira e o volume da esfera de raio  $R$ .
- 725.** Duas esferas tangentes entre si tangenciam internamente uma outra esfera. Sendo 10 cm o diâmetro da esfera maior, determine a relação entre os volumes das esferas tangentes internamente, sabendo que sua soma é  $\frac{2}{3}$  do volume da esfera maior.
- 726.** Um cubo e uma esfera têm igual superfície. Qual dos sólidos tem maior volume?
- 727.** A área total de um cubo e a área de uma superfície esférica são iguais. Qual a razão entre o raio da superfície esférica e a medida de uma aresta do cubo?

- 728.** A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é  $12\pi \text{ dm}^3$  e o raio da base é 3 dm.
- 729.** Determine o ângulo do fuso de uma esfera, sendo  $324\pi \text{ cm}^2$  a área da esfera e  $54\pi \text{ cm}^2$  a área do fuso.
- 730.** Qual é a área de um fuso de  $28^\circ$  pertencente a uma esfera de  $4\pi \text{ m}^2$  de superfície?
- 731.** Determine a área de um fuso de  $45^\circ$  em uma esfera de 10 cm de raio.
- 732.** Um fuso de  $10^\circ$  de uma esfera de 1 cm de raio é equivalente a uma seção plana da esfera. Determine a distância da seção ao centro da esfera.
- 733.** Determine a área de um fuso, cujo ângulo mede  $30^\circ$ , em uma esfera de 18 cm de raio.
- 734.** Determine a distância de uma seção plana de uma esfera ao centro dessa esfera, sabendo que o raio da esfera mede 12 cm e que a área do fuso de  $60^\circ$  é equivalente à área dessa seção.
- 735.** Calcule a área total e o volume de uma cunha esférica de  $30^\circ$ , sendo  $r$  o raio da esfera.
- 736.** Determine o volume de uma cunha, cujo ângulo mede  $60^\circ$ , em uma esfera cujo volume mede  $288\pi \text{ m}^3$ .
- 737.** Qual é o volume de uma cunha de  $30^\circ$ , pertencente a uma esfera de  $972\pi \text{ m}^3$  de volume?
- 738.** Determine as medidas dos raios de duas esferas, sabendo que sua soma vale 20 cm e que o fuso de  $60^\circ$  na primeira é equivalente ao fuso de  $30^\circ$  na segunda.
- 739.** Um fuso de  $60^\circ$  de uma esfera é equivalente a um fuso de  $30^\circ$  de uma outra esfera. Determine os raios dessas esferas, sendo 24 cm sua soma.
- 740.** Determine o raio de uma cunha esférica de  $45^\circ$ , sabendo que é equivalente a um hemisfério de 10 cm de diâmetro.
- 741.** Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio 0,5 cm podemos fazer a partir de um brigadeiro de raio 1,0 cm?

**742.** Um observador (O), do ponto mais alto de um farol, vê a linha do horizonte (L) a uma distância  $d$ . Sejam  $h$  e  $R$  a altura do farol e o raio da Terra, respectivamente.

- a) Como  $R$  é muito maior que  $h$ , pode-se admitir que  $2R + h = 2R$ . Assim, prove, usando a aproximação indicada, que  $d = \sqrt{2Rh}$ .
- b) O raio da Terra tem, aproximadamente, 6 300 km. Usando a fórmula do item a, calcule a distância ( $d$ ) do horizonte, quando o observador está a uma altura  $h = 35$  m.



**743.** Uma esfera de raio 5 cm, ao ser seccionada por um plano distante 3 cm do seu centro, determina uma área  $S$ . Então, calcule o valor de  $\frac{S}{4\pi}$ .

**744.** Um plano intercepta uma esfera perpendicularmente a um de seus diâmetros num ponto P distinto do centro e interior a esse diâmetro.

- a) Prove que a interseção é um círculo.
- b) Determine (em função do raio  $r$  da esfera) a distância do ponto P ao centro, a fim de que o círculo interseção tenha área igual à metade da de um círculo máximo da esfera.

## IV. Dedução das fórmulas das áreas do cilindro, do cone e da esfera

Colocamos no final deste capítulo a dedução das expressões das áreas laterais do cilindro e do cone e da área da superfície esférica. É a melhor maneira que encontramos para justificar as expressões já incluídas nos itens 199, 214 e 223.

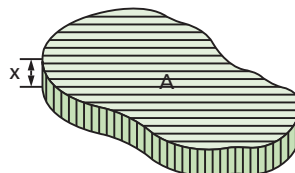
### 229. Noção intuitiva

Se considerarmos uma superfície limitada de área  $A$  e sobre ela formarmos um sólido de altura  $x$  de bases “paralelas”, teremos, indicando com  $V$ , o volume do sólido (“prismas” reunidos com “cilindros”) de base  $A$  e altura  $x$ .

$$V = Ax \Rightarrow A = \frac{V}{x}$$

Esta última igualdade é verificada para qualquer  $x$ .

Intuitivamente, uma superfície é imaginada como uma “placa sólida” de “espessura infinitamente pequena”.

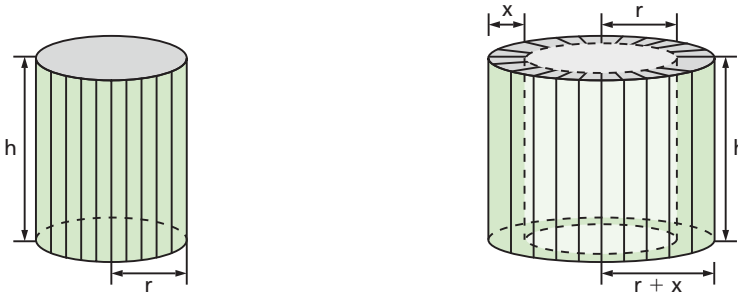


Por isso, se uma “placa sólida” de volume  $V_p$  e espessura  $x$  for tal que a expressão (função)  $\frac{V_p}{x}$  tem sentido (é definida) para  $x \rightarrow 0$ , então:

$\frac{V_p}{x}$  (para  $x \rightarrow 0$ ) será definida como a **área da placa**.

Assim agindo, poderemos deduzir as expressões das áreas: lateral do cilindro, superfície esférica, lateral do cone. Nestes casos, o artifício que acima procuramos generalizar é mais real e simples, como veremos a seguir.

### 230. Área lateral do cilindro de revolução



$$V_p = \pi(r+x)^2 h - \pi r^2 h \Rightarrow \frac{V_p}{x} = \pi h(2r+x)$$

Então, para  $x = 0$ , vem:

$$A_L = \pi h(2r+0) \Rightarrow \boxed{A_L = 2\pi r h}$$

### 231. Área da superfície esférica

$$V_p = \frac{4}{3} \pi(r+x)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow$$

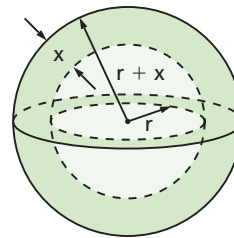
$$\Rightarrow V_p = \frac{4}{3} \pi[(r+x)^3 - r^3] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{4}{3} \pi[3r^2x + 3rx^2 + x^3] \Rightarrow$$

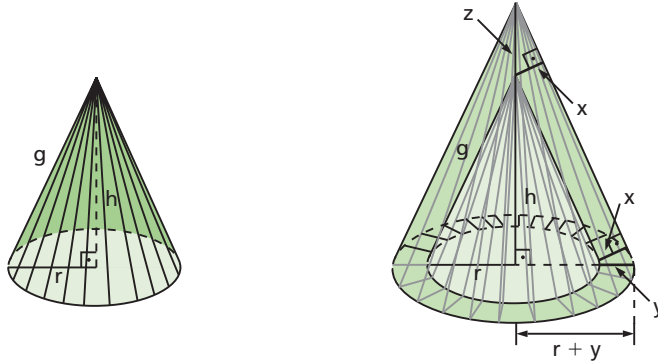
$$\Rightarrow \frac{V_p}{x} = \frac{4}{3} \pi(3r^2 + 3rx + x^2)$$

Então, para  $x = 0$ , vem:

$$A = \frac{4}{3} \pi[3r^2 + 3r \cdot 0 + 0^2] \Rightarrow \boxed{A = 4\pi r^2}$$



### 232. Área lateral do cone de revolução



Por semelhança entre triângulos, calculamos  $y$  e  $z$  em função de  $x$ .

$$\frac{z}{x} = \frac{g}{r} \Rightarrow z = \frac{g}{r} x \quad \frac{y}{x} = \frac{g}{h} \Rightarrow y = \frac{g}{h} x$$

Segue-se:

$$V_p = \frac{1}{3} \pi (r + y)^2 \cdot (h + z) - \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Substituindo  $y$  e  $z$ , temos:

$$V_p = \frac{1}{3} \pi \left[ \left( r + \frac{g}{h} x \right)^2 \cdot \left( h + \frac{g}{r} x \right) - r^2 h \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{1}{3} \pi \left[ r g x + 2 r g x + \frac{2 g^2}{h} x^2 + \frac{g^2}{h} x^2 + \frac{g^3}{h^2 r} x^3 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_p}{x} = \frac{1}{3} \pi \left[ 3 r g + \frac{3 g^2}{h} x + \frac{g^3}{h^2 r} x^2 \right]$$

Então, para  $x = 0$ , vem:

$$A_L = \frac{1}{3} \pi \left[ 3 r g - \frac{3 g^2}{h} 0 + \frac{g^3}{h^2 r} 0^2 \right] \Rightarrow A_L = \pi r g$$