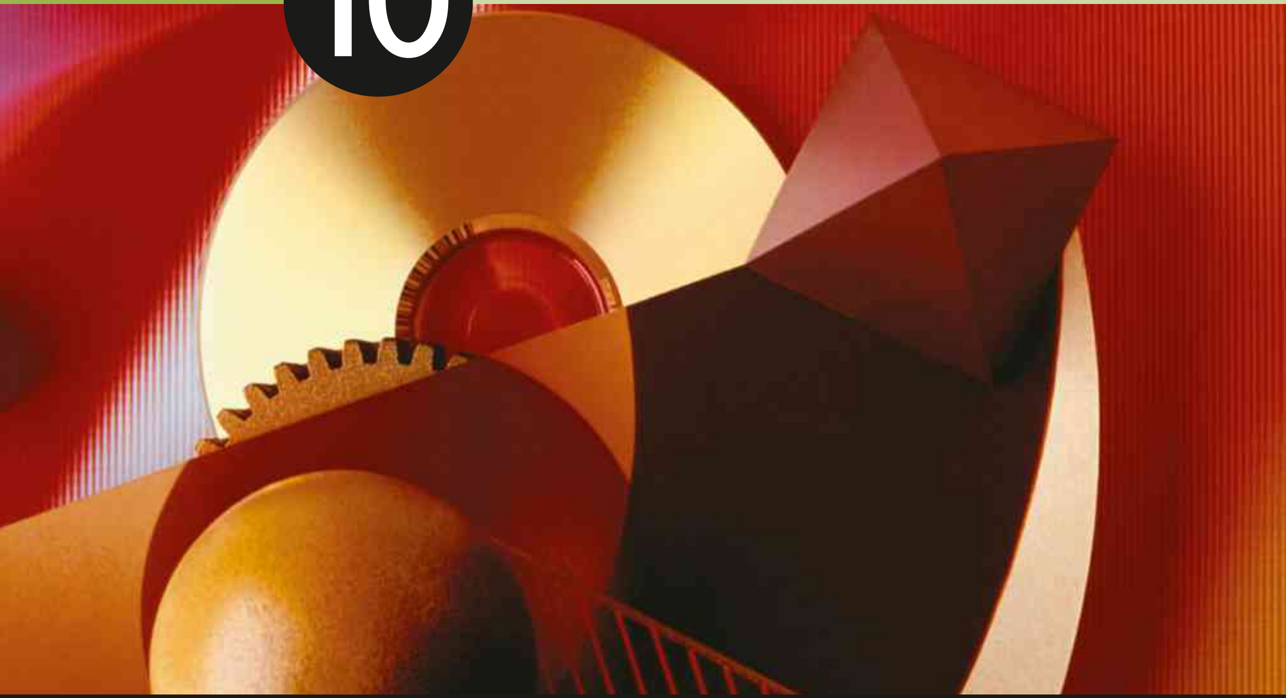
OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria espacial
posição e métrica

10



Atual Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

CAPÍTULO VII
Poliedros convexos

I. Poliedros convexos

117. Superfície poliédrica limitada convexa

Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;

b) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;

c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;

d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas **abertas**. As que não têm contorno são chamadas **fechadas**.

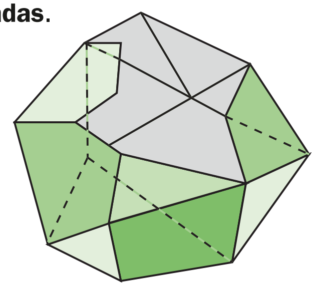
Elementos: uma superfície poliédrica limitada convexa tem:

faces: são os polígonos;

arestas: são os lados dos polígonos;

vértices: são os vértices dos polígonos;

ângulos: são os ângulos dos polígonos.



118. Nota

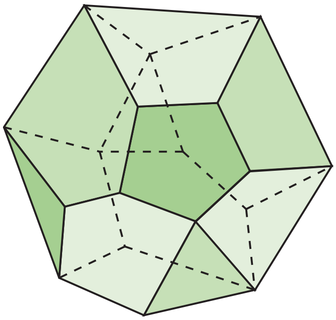
Uma superfície poliédrica limitada convexa aberta ou fechada não é uma região convexa.

119. Poliedro convexo

Consideremos um número finito n(n $\geqslant$ 4) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço.

Nessas condições, ficam determinados *n* semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semiespaços é chamado **poliedro convexo**.



Um poliedro convexo possui: **faces**, que são os polígonos convexos; **arestas**, que são os lados dos polígonos e **vértices**, que são os vértices dos polígonos.

A reunião das faces é a **superfície** do poliedro.

120. Congruência

Dois poliedros são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos de um sejam ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro.

Da congruência entre dois poliedros sai a congruência das faces, arestas, ângulos e diedros.

121. Relação de Euler

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação

$$V - A + F = 2$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração:

a) Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar, em **caráter preliminar**, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa **aberta**, vale a relação:

$$\boxed{V_a + A_a + F_a = 1}$$

em que

V_a é o número de vértices,
A_a é o número de arestas e
F_a é o número de faces da superfície poliédrica limitada aberta.

1) Para $F_a = 1$.

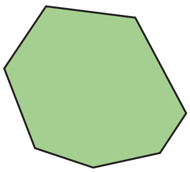
Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de *n* lados e, então, $V_a = n$, $A_a = n$. Temos:

$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad V_a - A_a + F_a = 1.$

Logo, a relação está verificada para $F_a = 1$.

Exemplo:

Para o polígono abaixo



$V_a = 7$

$A_a = 7$

$V_a - A_a + F_a = 1 \Rightarrow 7 - 7 + F_a = 1 \Rightarrow F_a = 1$

2) Admitindo que a relação vale para uma superfície de F' faces (que possui V' vértices e A' arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de F' + 1 faces (que possui $F' + 1 = F_1$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Por hipótese, para a superfície de F' faces, A' arestas e V' vértices vale:

$V' - A' + F' = 1.$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de *p* arestas (lados) e considerando que *q* dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tais que:

$F_a = F' + 1$

$A_a = A' + p - q$ (*q* arestas coincidiram)

$V_a = V' + p - (q + 1)$ (*q* arestas coincidindo, q + 1 vértices coincidem)

Formando a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores da página anterior, vem:

$$V_a - A_a + F_a = \underbrace{V' + p - (q + 1)} - (\overbrace{A' + p - q}) + (\overbrace{F' + 1}) =$$

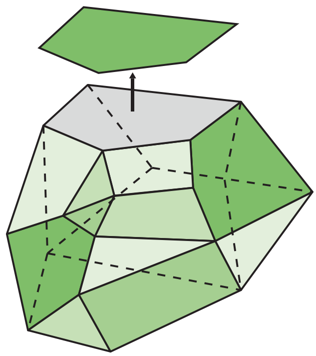
$$= V' + p - q - 1 - A' - p + q - F' + 1 = V' - A' + F'$$

Com $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ provamos que essa expressão não se altera se acrescentamos (ou retiramos) uma face da superfície.

Como, por hipótese, $V' - A' + F' = 1$, vem que

$V_a - A_a + F_a = 1$,

o que prova a relação preliminar.



b) Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com V vértices, A arestas e F faces) e dela retiremos uma face. Ficamos, então, com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) para a qual vale a relação

$V_a - A_a + F_a = 1$.

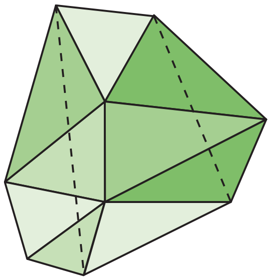
Como

$V_a = V$, $A_a = A$ e $F_a = F - 1$, vem $V - A + (F - 1) = 1$, ou seja:

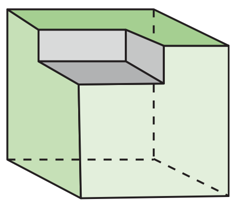
$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Nota: O teorema de Euler está ligado a um conceito que engloba o de poliedro convexo, razão pela qual vale para este.

Exemplos:



$V - A + F = 9 - 18 + 11 = 2$



$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$

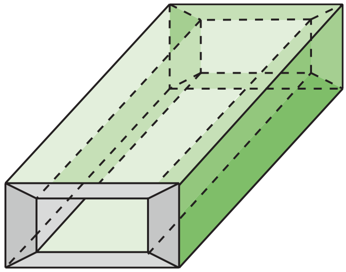
Veja ao lado a figura de um poliedro para o qual não vale a relação de Euler.

Note que ele possui:

$V = 16$, $A = 32$ e $F = 16$.

Então:

$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$.



122. Poliedro euleriano

Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados **poliedros eulerianos**.

Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

EXERCÍCIOS

180. Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Calcule o número de arestas e de vértices do poliedro.

Solução

Número de arestas:

nas 6 faces triangulares

temos 6×3 arestas e nas 5 faces quadrangulares 5×4 arestas.

Cada aresta é comum a duas faces; todas as arestas foram contadas 2 vezes. Então:

$2A = 6 \times 3 + 5 \times 4 \quad \Rightarrow \quad 2A = 38 \quad \Rightarrow \quad A = 19$.

Número de vértices:

com $F = 11$ e $A = 19$ na relação $V - A + F = 2$, temos:

$V - 19 + 11 = 2$, ou seja, $V = 10$.

181. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 pentagonal e 2 hexagonais.

182. Num poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

183. Num poliedro convexo o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro.

184. Um poliedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares e o número, de faces quadrangulares é igual a 5.

185. Um poliedro convexo tem 11 vértices, o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e uma face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro.

186. Calcule o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares de um poliedro com 20 arestas e 10 vértices.

187. Um poliedro de sete vértices tem cinco ângulos tetraédricos e dois ângulos pentaédricos. Quantas arestas e quantas faces tem o poliedro?

Solução

Arestas: O número de arestas dos 5 ângulos tetraédricos é 5×4 e o número de arestas dos 2 pentaédricos é 2×5; notando que cada aresta foi contada duas vezes, pois é comum a dois ângulos poliédricos, temos:

$2A = 5 \times 4 + 2 \times 5 \quad \Rightarrow \quad 2A = 30 \quad \Rightarrow \quad A = 15.$

Faces: Com $V = 7$ e $A = 15$ em $V - A + F = 2$, vem $F = 10$.

188. Ache o número de faces de um poliedro convexo que possui 16 ângulos triedros.

189. Determine o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo formado por cinco triedros, sete ângulos tetraédricos, nove ângulos pentaédricos e oito ângulos hexaédricos.

190. Um poliedro convexo possui 1 ângulo pentaédrico, 10 ângulos tetraédricos, e os demais triedros. Sabendo que o poliedro tem: número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares, 11 faces pentagonais, e no total 21 faces, calcule o número de vértices do poliedro convexo.

191. O “cubo-octaedro” possui seis faces quadradas e oito triangulares. Determine o número de faces, arestas e vértices desse sólido euleriano.

192. O tetraexaedro possui 4 faces triangulares e 6 faces hexagonais. Determine o número de faces, arestas e vértices desse sólido, sabendo que ele é euleriano.

193. Num poliedro convexo, 4 faces são quadriláteros e as outras triângulos. O número de arestas é o dobro do número de faces triangulares. Quantas são as faces?

194. Um poliedro convexo possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sabendo que os números de faces triangulares e quadrangulares são diretamente proporcionais aos números 2 e 3 e que o número de arestas é o dobro do número de vértices, calcule o número total de faces desse poliedro.

195. Um poliedro convexo possui, apenas, faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces triangulares excede o de faces pentagonais em duas unidades. Calcule o número de faces de cada tipo, sabendo que o poliedro tem 7 vértices.

196. Um poliedro convexo de 24 arestas é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Seccionado por um plano convenientemente escolhido, dele se pode destacar um novo poliedro convexo, sem faces triangulares, com uma face quadrangular a mais e um vértice a menos que o poliedro primitivo. Calcule o número de faces do poliedro primitivo.

197. Ache o número de vértices de um poliedro convexo que tem a faces de ℓ lados, b faces de m lados e c faces de n lados. Discuta.

123. Propriedade

> A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é
> $S = (V - 2) \cdot 4r$
> em que V é o número de vértices e *r* é um ângulo reto.

Demonstração:

V, A e F são, nessa ordem, os números de vértices, arestas e faces do poliedro. Sejam $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_F$ os números de lados das faces 1, 2, 3, ... F, ordenadamente. A soma dos ângulos de uma face é $(n - 2) \cdot 2r$.

Para todas as faces, temos:

$$S = (n_1 - 2) \cdot 2r + (n_2 - 2) \cdot 2r + (n_3 - 2) \cdot 2r + \ldots + (n_F - 2) \cdot 2r =$$
$$= n_1 \cdot 2r - 4r + n_2 \cdot 2r - 4r + n_3 \cdot 2r - 4r + \ldots + n_F \cdot 2r - 4r =$$
$$= (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_F) \cdot 2r - \underbrace{4r - 4r - \ldots - 4r}_{\text{F vezes}}$$

Sendo

$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_F = 2A$

(pois cada aresta foi contada duas vezes em $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_F$), Substituindo, vem:

$S = 2A \cdot 2r - F \cdot 4r \quad \Rightarrow \quad S = (A - F) \cdot 4r.$ (1)

Como vale a relação de Euler,

$V - A + F = 2 \quad \Rightarrow \quad V - 2 = A - F.$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos:

$$\boxed{S = (V - 2) \cdot 4r}$$

II. Poliedros de Platão

124. Definição

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

a) todas as faces têm o mesmo número (*n*) de arestas;

b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (*m*) de arestas;

c) vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$).

125. Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, **classes** de poliedros de Platão.

Demonstração:

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos:

a) cada uma das F faces tem *n* arestas ($n \geqslant 3$), e como cada aresta está em duas faces:

$$n \cdot F = 2A \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2A}{n} \quad (1)$$

b) cada um dos V ângulos poliédricos tem *m* arestas ($m \geqslant 3$), e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2A}{m} \quad (2)$$

c) $V - A + F = 2$ (3)

Substituindo (1) e (2) em (3) e depois dividindo por 2A, obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad (4)$$

Sabemos que $n \geqslant 3$ e $m \geqslant 3$. Notemos, porém, que se *m* e *n* fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{1}{m} \leqslant \dfrac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant 0$$

o que contraria a igualdade (4), pois A é um número positivo.

Concluímos então que, nos poliedros de Platão, $m = 3$ ou $n = 3$ (isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, **triedro** ou **triângulo**):

1º) Para $m = 3$ (supondo que tem **triedro**).

Em (4) vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6.$$

Então, $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$ (respectivamente faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais).

m	n
3	3
3	4
3	5

2º) Para $n = 3$ (supondo que tem **triângulo**).

Em (4):

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6.$$

Então, $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$ (respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos).

m	n
3	3
4	3
5	3

Resumindo os resultados encontrados no 1º e no 2º, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (m, n) da tabela ao lado, sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

m	n
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Consequência:

Para saber o número de arestas A, o número de faces F e o número de vértices V de cada poliedro de Platão, basta substituir em (4) os valores de *m* e *n* encontrados e depois trabalhar com (1) e (2).

Exemplo:

Uma das possibilidades encontradas para *m* e *n* foi m = 3 e n = 5.

Com esses valores em (4), temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 30.$$

Em (2): $V = \dfrac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow V = 20.$

Em (1): $F = \dfrac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow F = 12.$

Como é o número de faces que determina o nome, o poliedro de nosso exemplo é **dodecaedro**.

Notemos que m = 3 significa ângulos **triédricos** (ou triedros) e n = 5, faces **pentagonais**.

126. Nomes dos poliedros de Platão

Procedendo como indicamos no problema acima, temos, em resumo:

m	n	A	V	F	nome
3	3	6	4	4	**Tetraedro**
3	4	12	8	6	**Hexaedro**
4	3	12	6	8	**Octaedro**
3	5	30	20	12	**Dodecaedro**
5	3	30	12	20	**Icosaedro**

III. Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular quando:

a) suas faces são polígonos regulares e congruentes;

b) seus ângulos poliédricos são congruentes.

127. Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros regulares.

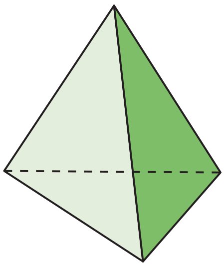
Demonstração:

Usando as condições para um poliedro ser regular, temos:

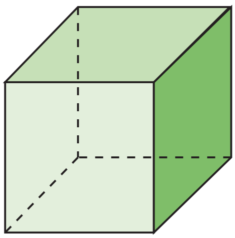
a) suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas;

b) seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas.

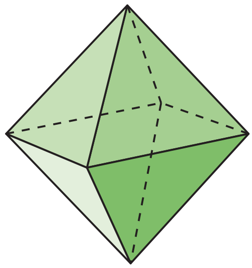
Por essas conclusões temos que os poliedros regulares são poliedros de Platão e portanto existem cinco e somente cinco tipos de poliedros regulares: **tetraedro regular**, **hexaedro regular**, **octaedro regular**, **dodecaedro regular** e **icosaedro regular**.



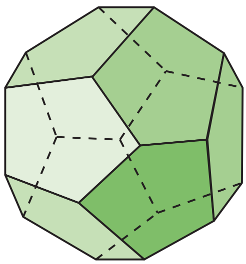
tetraedro regular



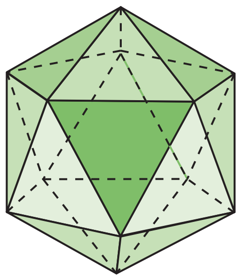
hexaedro regular



octaedro regular



dodecaedro regular



icosaedro regular

128. Observação

Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

EXERCÍCIOS

198. Um poliedro convexo de 15 arestas tem somente faces quadrangulares e pentagonais. Quantas faces tem de cada tipo se a soma dos ângulos das faces é 32 ângulos retos?

Solução

$S = 32r \Rightarrow (V - 2) \cdot 4r = 32r \Rightarrow V = 10$

$(A = 15, V = 10, V - A + F = 2) \Rightarrow F = 7$

x faces quadrangulares e *y* pentagonais, então:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 4x + 5y = 30 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ e } y = 2$$

199. Calcule em graus a soma dos ângulos das faces de um:

a) tetraedro; b) hexaedro; c) octaedro; d) dodecaedro; e) icosaedro.

200. Um poliedro convexo de 28 arestas possui faces triangulares e heptagonais. Quantas tem de cada espécie, se a soma dos ângulos das faces é 64 retos?

201. A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 720°. Calcule o número de faces, sabendo que é os $\frac{2}{3}$ do número de arestas.

202. Primeira generalização das relações entre número de vértices, arestas e faces de um poliedro euleriano.

Solução

Seja um poliedro convexo em que:

F_3 representa o número de faces triangulares,

F_4 representa o número de faces quadrangulares,

F_5 representa o número de faces pentagonais,

F_6 representa o número de faces hexagonais,

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Então $F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + \ldots \quad (1)$

Sendo cada aresta comum a duas faces, teremos:

$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + \ldots \quad (2)$

203. Um poliedro apresenta faces triangulares e quadrangulares. A soma dos ângulos das faces é igual a 2 160°. Determine o número de faces de cada espécie desse poliedro, sabendo que ele tem 15 arestas.

204. Da superfície de um poliedro regular de faces pentagonais tiram-se as três faces adjacentes a um vértice comum. Calcule o número de arestas, faces e vértices da superfície poliédrica aberta que resta.

205. Demonstre que, em qualquer poliedro convexo, é par o número de faces que têm número ímpar de lados.

Solução

Tese $\{F_3 + F_5 + F_7 + \ldots\}$ é par

De fato, da relação (2) temos:

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 + \ldots = 2A \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_3 + F_5 + F_7 + \ldots = 2A - 2F_3 - 4F_4 - 4F_5 - 6F_6 - \ldots \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_3 + F_5 + F_7 + \ldots = 2(A - F_3 - 2F_4 - 2F_5 - 3F_6 - 3F_7 - \ldots)$$

o que prova a tese.

206. Segunda generalização das relações entre número de vértices, arestas e faces de um poliedro euleriano.

Solução

Seja um poliedro convexo em que:

V_3 representa o número de ângulos triédricos,

V_4 representa o número de ângulos tetraédricos,

V_5 representa o número de ângulos pentaédricos,

V_6 representa o número de ângulos hexaédricos,

$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$

Então:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \ldots \quad (3)$$

Se cada aresta une dois vértices, temos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + \ldots \quad (4)$$

207. Demonstre que, em qualquer poliedro convexo, é par o número de ângulos poliédricos que têm número ímpar de arestas.

208. Demonstre que em qualquer poliedro convexo vale a relação:
$2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + \ldots$

209. Demonstre que em qualquer poliedro convexo vale a relação:
$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 6F_7 + \ldots$

Solução

Tomando as relações (1) e (2) do exercício 202, a relação de Euler e eliminando A nessas relações, obtemos:

$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + \ldots$

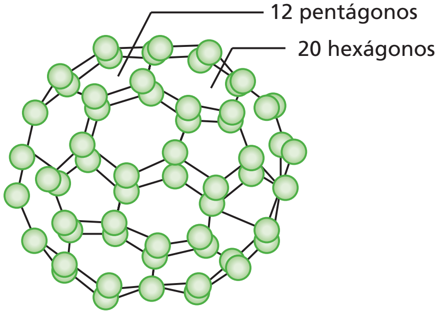
210. Em qualquer poliedro euleriano, a soma do número de faces triangulares com o número de triedros é superior ou igual a 8.

211. Demonstre que os números F, V, A, das faces, vértices e arestas de um poliedro qualquer estão limitados por:

a) $A + 6 \leqslant 3F \leqslant 2A$

b) $A + 6 \leqslant 3V \leqslant 2A$

212. Numa molécula tridimensional de carbono, os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo com 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais regulares, como em uma bola de futebol.



Qual é o número de átomos de carbono na molécula? E o número de ligações entre esses átomos?