

OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Geometria plana

9



CAPÍTULO I

Noções e proposições primitivas

I. Noções primitivas

1. As **noções** (conceitos, termos, entes) geométricas são estabelecidas por meio de **definição**.

As **noções primitivas** são adotadas sem definição.

Adotaremos sem definir as noções de:

ponto, reta e plano

De cada um desses entes temos conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação.

2. Notação de ponto, reta e plano

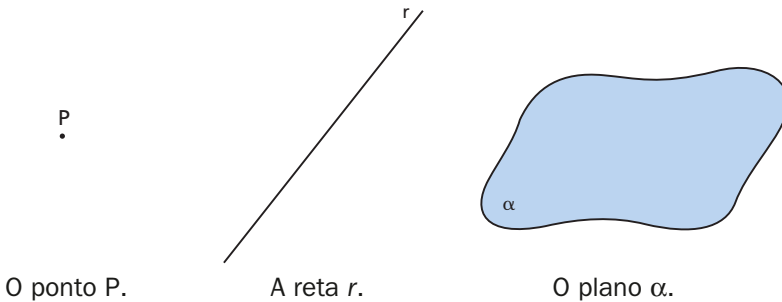
Com letras:

Ponto — letras latinas maiúsculas: A, B, C, ...

Reta — letras latinas minúsculas: a, b, c, ...

Plano — letras gregas minúsculas: α , β , γ , ...

Graficamente:



O ponto P.

A reta r.

O plano α .

II. Proposições primitivas

3. As **proposições** (propriedades, afirmações) geométricas são aceitas mediante **demonstrações**.

As **proposições primitivas** ou **postulados** ou **axiomas** são aceitos sem demonstração.

Iniciaremos a Geometria Plana com alguns postulados relacionando o **ponto**, a **reta** e o **plano**.

4. Postulado da existência

- a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
- b) Num plano há infinitos pontos.

A expressão “infinitos pontos” tem o significado de “tantos pontos quanto quisermos”.

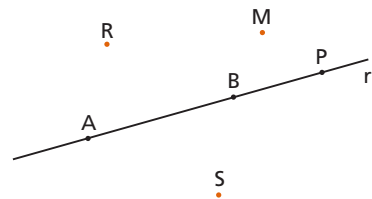
A figura ao lado representa uma reta r e os pontos A, B, P, R, S e M, sendo que:

- A, B e P estão em r , ou seja, a reta r passa por A, B e P, e indicamos

$$A \in r, B \in r, P \in r;$$

- R, S e M não estão em r , ou seja, r não passa por R, S e M, e indicamos

$$R \notin r, S \notin r, M \notin r.$$



5. Posições de dois pontos e de ponto e reta

Dados dois pontos A e B, de duas uma:
 ou A e B são coincidentes (é o mesmo ponto, um só ponto, com dois nomes: A e B)
 ou A e B são distintos.

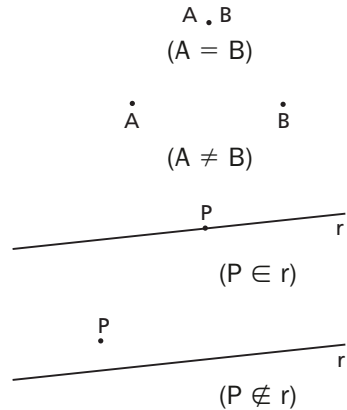
Dados um ponto P e uma reta r, de duas uma:

ou o ponto P está na reta r
 (a reta r passa por P)

$$P \in r$$

ou o ponto P não está na reta r
 (a reta r não passa por P)

$$P \notin r$$



6. Pontos **colineares** são pontos que pertencem a uma mesma reta.



Os pontos A, B e C são colineares.



Os pontos R, S e T não são colineares.

7. Postulado da determinação

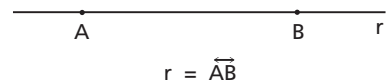
Da reta

Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por \overleftrightarrow{AB} .

$$(A \neq B, A \in r, B \in r) \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB}$$

A expressão “duas retas coincidentes” é equivalente a “uma única reta”.

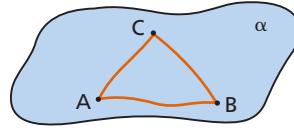


Do plano

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

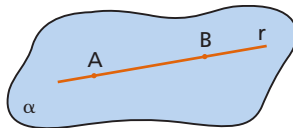
Os pontos A, B e C não colineares determinam um plano α que indicamos por (A, B, C).

O plano α é o único plano que passa por A, B e C.



8. Postulado da inclusão

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.



$$(A \neq B, r = \overleftrightarrow{AB}, A \in \alpha, B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha$$

Dados dois pontos distintos A e B de um plano, a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ tem todos os pontos no plano.

9. Pontos **coplanares** são pontos que pertencem a um mesmo plano.

Figura é qualquer conjunto de pontos.

Figura plana é uma figura que tem todos os seus pontos num mesmo plano.

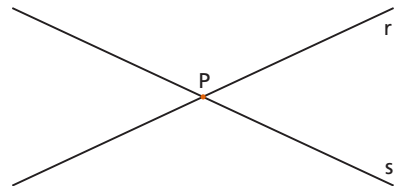
A **Geometria Plana** estuda as figuras planas.

10. Retas concorrentes

Definição

Duas retas são **concorrentes** se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

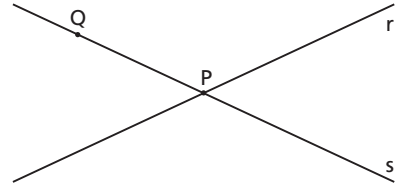
$$r \cap s = \{P\}$$



Existência

Usando o postulado da existência (item 4), tomemos uma reta r , um ponto P em r ($P \in r$) e um ponto Q fora de r ($Q \notin r$).

Os pontos P e Q são distintos, pois um deles pertence a r e o outro não.



Usando o postulado da determinação da reta (item 7), consideremos a reta s determinada pelos pontos P e Q ($s = \overleftrightarrow{PQ}$).

As retas r e s são distintas, pois se coincidisse o ponto Q estaria em r (e ele foi construído fora de r), e o ponto P pertence às duas.

Logo, r e s são concorrentes.

EXERCÍCIOS

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
 - a) Por um ponto passam infinitas retas.
 - b) Por dois pontos distintos passa uma reta.
 - c) Uma reta contém dois pontos distintos.
 - d) Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta.
 - e) Por três pontos dados passa uma só reta.

2. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
 - a) Três pontos distintos são sempre colineares.
 - b) Três pontos distintos são sempre coplanares.
 - c) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.
 - d) Por quatro pontos todos distintos pode passar uma só reta.
 - e) Três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares.

- 3.** Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
- Quaisquer que sejam os pontos A e B , se A é distinto de B , então existe uma reta a tal que $A \in a$ e $B \in a$.
 - Quaisquer que sejam os pontos P e Q e as retas r e s , se P é distinto de Q , e P e Q pertencem às retas r e s , então $r = s$.
 - Qualquer que seja uma reta r , existem dois pontos A e B tais que A é distinto de B , com $A \in r$ e $B \in r$.
 - Se $A = B$, existe uma reta r tal que $A, B \in r$.
- 4.** Usando quatro pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?
- 5.** Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
- Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.
 - Duas retas concorrentes têm um ponto comum.
 - Se duas retas distintas têm um ponto comum, então elas possuem um único ponto comum.

CAPÍTULO II

Segmento de reta

Conceitos

11. A noção “estar entre” é uma noção primitiva que obedece aos postulados (ou axiomas) que seguem:



Quaisquer que sejam os pontos A, B e P:

- 1º) Se P está entre A e B, então A, B e P são colineares;
- 2º) Se P está entre A e B, então A, B e P são distintos dois a dois;
- 3º) Se P está entre A e B, então A não está entre P e B nem B está entre A e P; e ainda
- 4º) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe um ponto P que está entre A e B.

12. Segmento de reta — definição

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um **segmento de reta**.

Assim, dados A e B, $A \neq B$, o segmento de reta AB (indicado por \overline{AB}) é o que segue:



$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid X \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

Os pontos A e B são as **extremidades** do segmento \overline{AB} e os pontos que estão entre A e B são pontos **internos** do segmento \overline{AB} .

Se os pontos A e B coincidem ($A = B$), dizemos que o segmento \overline{AB} é um **segmento nulo**.

13. Semirreta — definição

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta \overline{AB} com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada por \vec{AB}).

O ponto A é a origem da semirreta \vec{AB} :



$$\vec{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid B \text{ está entre } A \text{ e } X\}$$

Se A está entre B e C, as semirretas \vec{AB} e \vec{AC} são ditas semirretas opostas.



14. Resumo

Considerando dois pontos distintos A e B, temos:

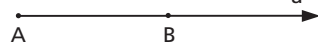
A reta \overleftrightarrow{AB} :



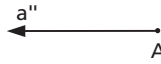
O segmento \overline{AB} :



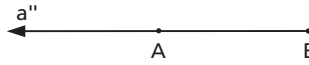
A semirreta \overrightarrow{AB} (ou Aa'):



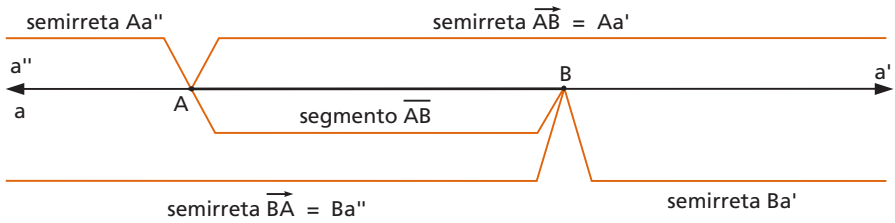
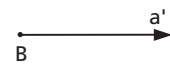
A semirreta oposta a \overrightarrow{AB} (ou semirreta Aa''):



A semirreta \overrightarrow{BA} (ou Ba''):



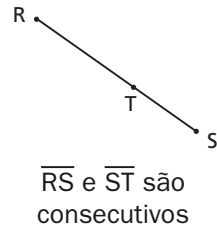
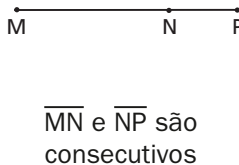
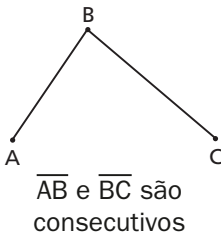
A semirreta oposta a \overrightarrow{BA} (ou semirreta Ba'):



Notamos ainda que: $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

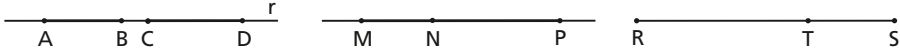
15. Segmentos consecutivos

Dois segmentos de reta são **consecutivos** se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro (uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro).



16. Segmentos colineares

Dois segmentos de reta são **colineares** se, e somente se, estão numa mesma reta.



\overline{AB} e \overline{CD} são colineares
(não são consecutivos)

\overline{MN} e \overline{NP} são colineares
(e consecutivos)

\overline{RS} e \overline{ST} são colineares
(e consecutivos)

17. Segmentos adjacentes

Dois segmentos consecutivos e colineares são **adjacentes** se, e somente se, possuem em comum apenas uma extremidade (não têm pontos internos comuns).



\overline{MN} e \overline{NP} são adjacentes (são consecutivos colineares, tendo somente N comum)

\overline{RS} e \overline{ST} não são adjacentes (são consecutivos colineares e além de S têm outros pontos comuns)

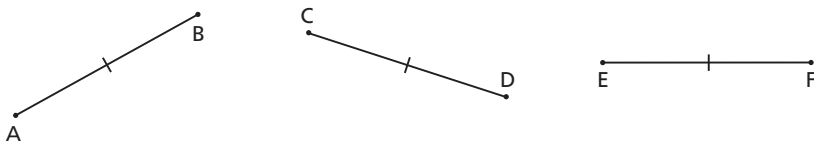
$$\overline{MN} \cap \overline{NP} = \{N\}$$

$$\overline{RS} \cap \overline{ST} = \overline{ST}$$

18. Congruência de segmentos

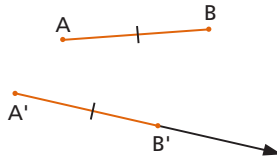
A **congruência** (símbolo: \equiv) de segmentos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

- 1º) Reflexiva. Todo segmento é congruente a si mesmo: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.
- 2º) Simétrica. Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.
- 3º) Transitiva. Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.



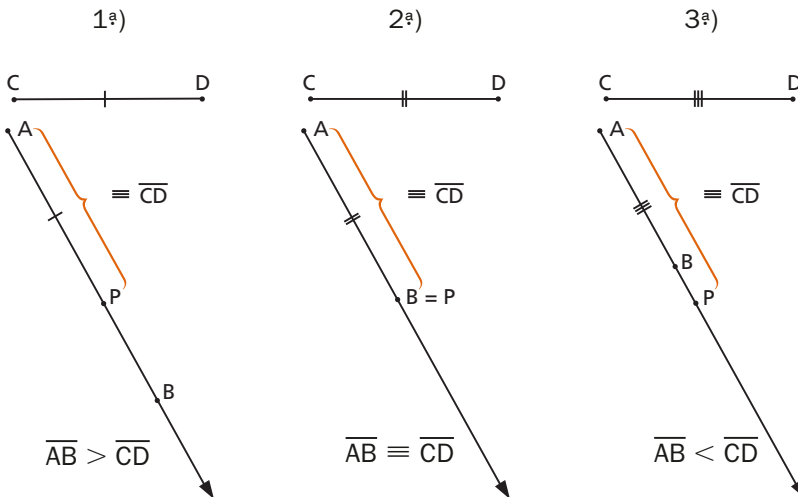
4º) **Postulado do transporte de segmentos**

Dados um segmento \overline{AB} e uma semirreta de origem A' , existe sobre esta semirreta um *único* ponto B' tal que $A'B'$ seja congruente a \overline{AB} .



19. Comparação de segmentos

Dados dois segmentos, \overline{AB} e \overline{CD} , pelo postulado do transporte, podemos obter na semirreta \overrightarrow{AB} um ponto P tal que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$. Temos três hipóteses a considerar:



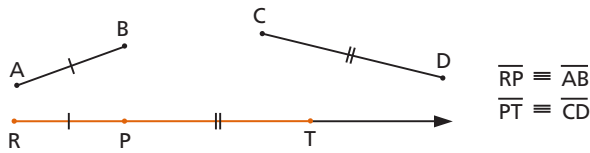
- 1ª) O ponto P está entre A e B . Neste caso, dizemos que \overline{AB} é **maior** que \overline{CD} ($\overline{AB} > \overline{CD}$).
- 2ª) O ponto P coincide com B , caso em que \overline{AB} é **congruente** a \overline{CD} ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$).
- 3ª) O ponto B está entre A e P . Neste caso, dizemos que \overline{AB} é **menor** que \overline{CD} ($\overline{AB} < \overline{CD}$).

20. Adição de segmentos

Dados dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , tomando-se numa semirreta qualquer de origem R os segmentos adjacentes \overline{RP} e \overline{PT} tais que

$$\overline{RP} \equiv \overline{AB} \text{ e } \overline{PT} \equiv \overline{CD},$$

dizemos que o segmento \overline{RT} é a **soma** de \overline{AB} com \overline{CD} .



$$\overline{RT} = \overline{AB} + \overline{CD} \text{ e também } \overline{RT} = \overline{RP} + \overline{PT}$$

O segmento \overline{RS} , que é a soma de n segmentos congruentes a \overline{AB} , é **múltiplo** de \overline{AB} segundo n ($\overline{RS} = n \cdot \overline{AB}$). Se $\overline{RS} = n \cdot \overline{AB}$, dizemos que \overline{AB} é **submúltiplo** de \overline{RS} segundo n .



21. Ponto médio de um segmento

Definição

Um ponto M é **ponto médio** do segmento \overline{AB} se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

$$M \in \overline{AB} \text{ e } \overline{MA} \equiv \overline{MB}$$



Unicidade do ponto médio

Se X e Y distintos ($X \neq Y$) fossem pontos médios de \overline{AB} , teríamos:

$$\overline{AX} \equiv \overline{XB} \text{ (1) e } \overline{AY} \equiv \overline{YB} \text{ (2)}$$



$$\left. \begin{array}{l} X \text{ está entre } A \text{ e } Y \Rightarrow \overline{AY} > \overline{AX} \\ \text{e} \\ Y \text{ está entre } X \text{ e } B \Rightarrow \overline{XB} > \overline{YB} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ \Rightarrow \end{array} \overline{AY} > \overline{AX} \equiv \overline{XB} > \overline{YB}, \text{ o que é absurdo,} \\ \text{de acordo com (2)} \end{array}$$

ou

$$\left. \begin{array}{l} Y \text{ está entre } A \text{ e } X \Rightarrow \overline{AX} > \overline{AY} \\ \text{e} \\ X \text{ está entre } Y \text{ e } B \Rightarrow \overline{YB} > \overline{XB} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (2) \\ \Rightarrow \end{array} \overline{AX} > \overline{AY} \equiv \overline{YB} > \overline{XB}, \text{ o que é absurdo,} \\ \text{de acordo com (1)} \end{array}$$

Logo, o ponto médio de \overline{AB} é único.

A **existência** do ponto médio está provada no item 56.

22. Medida de um segmento — comprimento

A medida de um segmento \overline{AB} será indicada por $m(\overline{AB})$ ou simplesmente por AB . A medida de um segmento (não nulo) é um número real positivo associado ao segmento de forma tal que:

- 1º) Segmentos **congruentes** têm medidas **iguais** e, reciprocamente, segmentos que têm medidas **iguais** são **congruentes**.

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$$

- 2º) Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$\overline{AB} > \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})$$

- 3º) A um **segmento soma** está associada uma medida que é a soma das medidas dos segmentos parcelas.

$$\overline{RS} = \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{RS}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{CD})$$

À medida de um segmento dá-se o nome de **comprimento** do segmento.

Em geral, associa-se um número (medida) a um segmento estabelecendo a razão (quociente) entre este segmento e outro segmento tomado como unidade.

O segmento unitário usual é o **metro** (símbolo m). Seus múltiplos — decâmetro (dam), hectômetro (hm) e quilômetro (km) — ou submúltiplos — decímetro (dm), centímetros (cm) e milímetro (mm) — também são utilizados.

23. Nota

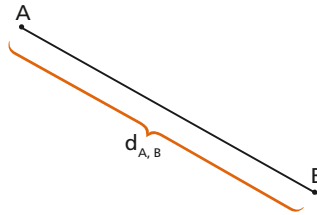
A congruência, a desigualdade e a adição de segmentos, aliadas ao postulado de Eudócio-Arquimedes (Eudócio: 408-355 a.C.; Arquimedes: 278-212 a.C.), cujo enunciado é:

“dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro”, permitem-nos estabelecer a razão entre dois segmentos quaisquer. Podemos então medir um deles tomando o outro como unidade de comprimento.

24. Distância entre dois pontos

Distância geométrica

Dados dois pontos distintos, A e B, a distância entre A e B (indicada por $d_{A, B}$) é o segmento \overline{AB} ou qualquer segmento congruente a \overline{AB} .



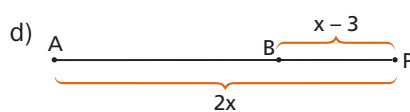
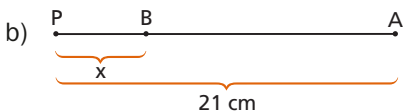
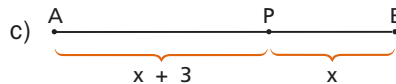
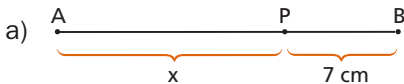
Distância métrica

Dados dois pontos distintos, A e B, a distância entre A e B é a medida (comprimento) do segmento \overline{AB} .

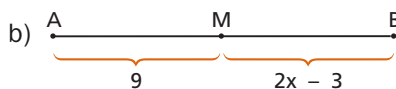
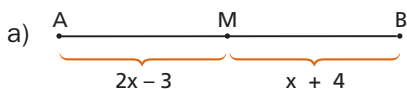
Se A e B coincidem, dizemos que a distância geométrica entre A e B é nula e a distância métrica é igual a zero.

EXERCÍCIOS

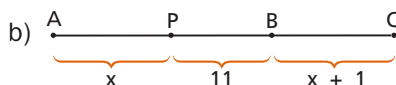
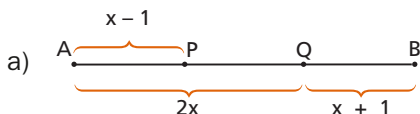
6. Se o segmento \overline{AB} mede 17 cm, determine o valor de x nos casos:



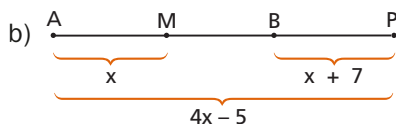
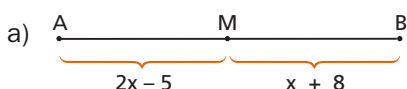
7. Determine x , sendo M ponto médio de \overline{AB} :



8. Determine PQ , sendo $AB = 31$:



9. Determine AB , sendo M ponto médio de \overline{AB} :



10. Quantas semirretas há numa reta, com origem nos quatro pontos A, B, C e D da reta?

11. Quantos segmentos distintos podem determinar três pontos distintos de uma reta?

12. Quantos segmentos passam pelos pontos A e B distintos? Quantos há com extremidades A e B ?

13. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

- Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares.
- Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos.
- Se dois segmentos são adjacentes, então eles são colineares.
- Se dois segmentos são colineares, então eles são adjacentes.
- Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos.
- Se dois segmentos são consecutivos, então eles são adjacentes.

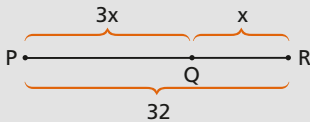
14. O segmento \overline{AB} de uma reta é igual ao quádruplo do segmento \overline{CD} dessa mesma reta. Determine a medida do segmento \overline{AB} , considerando como unidade de medida a quinta parte do segmento \overline{CD} .

15. P, A e B são três pontos distintos de uma reta. Se P está entre A e B, que relação deve ser válida entre os segmentos \overline{PA} , \overline{PB} e \overline{AB} ?
16. P, Q e R são três pontos distintos de uma reta. Se \overline{PQ} é igual ao triplo de \overline{QR} e $PR = 32$ cm, determine as medidas dos segmentos \overline{PQ} e \overline{QR} .

Solução

Temos duas possibilidades:

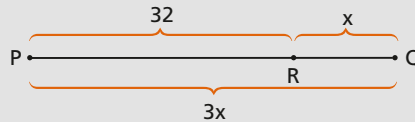
1ª) Q está entre P e R



$$3x + x = 32 \Rightarrow x = 8$$

$$PQ = 24 \quad QR = 8$$

2ª) R está entre P e Q



$$3x = 32 + x \Rightarrow x = 16$$

$$PQ = 48 \quad QR = 16$$

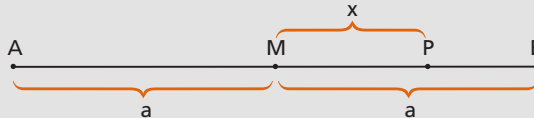
Resposta: $PQ = 24$ cm e $QR = 8$ cm ou $PQ = 48$ cm e $QR = 16$ cm.

17. Os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} , \overline{BC} e \overline{CD} são adjacentes, de tal maneira que \overline{AB} é o triplo de \overline{BC} , \overline{BC} é o dobro de \overline{CD} , e $AD = 36$ cm. Determine as medidas dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} .
18. Sejam P, A, Q e B pontos dispostos sobre uma reta r , nessa ordem. Se \overline{PA} e \overline{QB} são segmentos congruentes, mostre que \overline{PQ} e \overline{AB} são congruentes.
19. Se A, B e C são pontos colineares, determine AC, sendo $AB = 20$ cm e $BC = 12$ cm.
20. \overline{AB} e \overline{BC} são dois segmentos adjacentes. Se \overline{AB} é o quádruplo de \overline{BC} e $AC = 42$ cm, determine AB e BC.
21. Sendo \overline{AB} e \overline{BC} segmentos colineares consecutivos, \overline{AB} o quádruplo de \overline{BC} e $AC = 45$ cm, determine AB e BC.
22. Numa reta r , tomemos os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} e um ponto P de modo que \overline{AB} seja o quádruplo de \overline{PC} , \overline{BC} seja o quádruplo de \overline{PC} e $AP = 80$ cm. Sendo M e N os pontos médios de \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente, determine MN.

- 23.** Sejam quatro pontos, A, B, C, D, dispostos sobre uma mesma reta r , nessa ordem, e tais que \overline{AB} e \overline{CD} sejam congruentes. Demonstre que os segmentos \overline{AD} e \overline{BC} têm o mesmo ponto médio.
- 24.** Sejam quatro pontos, A, B, C, D, dispostos sobre uma mesma reta, nessa ordem, e tais que \overline{AC} e \overline{BD} sejam congruentes. Demonstre que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são congruentes e que os segmentos \overline{BC} e \overline{AD} têm o mesmo ponto médio.
- 25.** Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} , contidos numa mesma reta, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, com $A \neq C$. Demonstre que \overline{MN} é congruente a \overline{AB} .
- 26.** Dados três pontos, A, B, C, sobre uma mesma reta, consideremos M e N os pontos médios dos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} . Demonstre que \overline{MN} é igual à semissoma ou à semidiferença dos segmentos \overline{AB} e \overline{BC} .
- 27.** Seja \overline{AB} um segmento de reta e M o seu ponto médio. Consideremos um ponto P entre os pontos M e B. Demonstre que \overline{PM} é dado pela semidiferença positiva entre \overline{PA} e \overline{PB} .

Solução

Indicando a medida de \overline{AB} por $2a$ e a de \overline{PM} por x , temos:



$$\left. \begin{array}{l} PA = a + x \\ PB = a - x \end{array} \right\} \Rightarrow PA - PB = 2x \Rightarrow x = \frac{PA - PB}{2} \Rightarrow PM = \frac{PA - PB}{2}$$

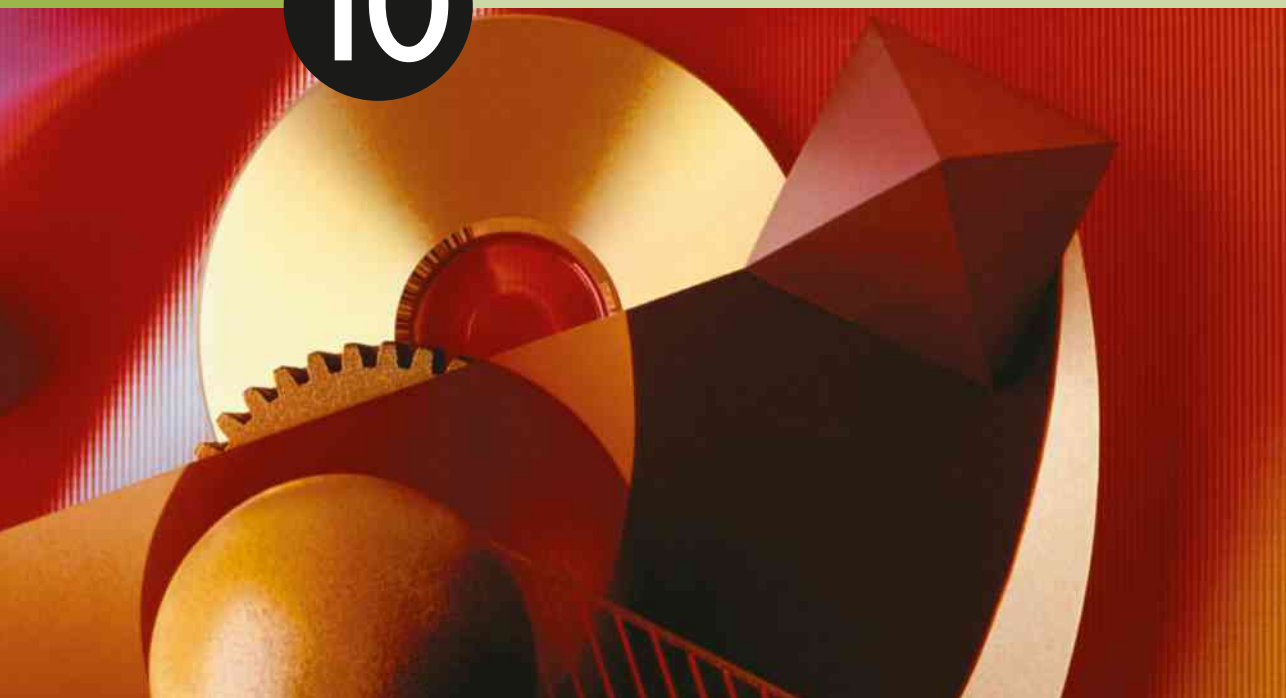
- 28.** Consideremos sobre uma reta r um segmento fixo \overline{AB} e um ponto móvel P. Seja M o ponto médio de \overline{AP} e N o ponto médio de \overline{BP} . O que podemos dizer a respeito do segmento \overline{MN} ?

OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

*Geometria espacial
posição e métrica*

10



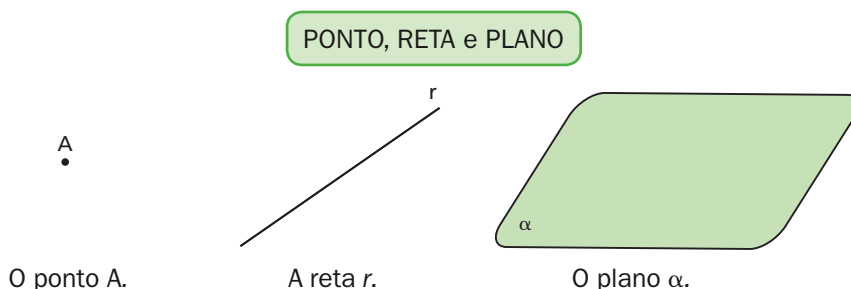
CAPÍTULO I

Introdução

I. Conceitos primitivos e postulados

1. As **noções (conceitos, termos, entes)** geométricas são estabelecidas por meio de **definições**. Em particular, as primeiras noções, os **conceitos primitivos** (noções primitivas) da Geometria, são adotadas sem definição.

Adotaremos sem definir os conceitos de:



Do ponto, da reta e do plano temos um conhecimento intuitivo decorrente da experiência e da observação.

O **espaço** é o conjunto de todos os pontos. Nesse conjunto desenvolveremos a Geometria Espacial.

2. As **proposições (propriedades)** geométricas são aceitas mediante **demonstrações**. Em particular, as primeiras proposições, as **proposições primitivas** ou **postulados** são aceitos sem demonstração.

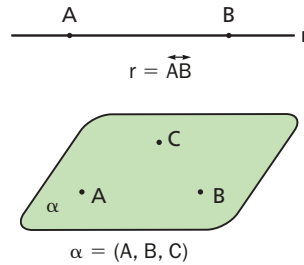
Assim, iniciamos a Geometria com alguns **postulados**, relacionando o ponto, a reta e o plano.

3. Postulado da existência

- a) Existe reta e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
- b) Existe plano e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

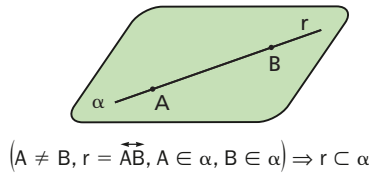
4. Postulado da determinação

- a) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.
- b) Três pontos **não colineares** determinam um único plano que passa por eles.



5. Postulado da inclusão

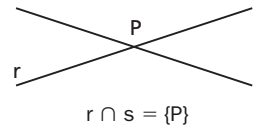
Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.



6. Retas concorrentes

Definição

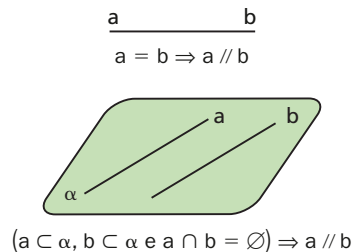
Duas retas são **concorrentes** se, e somente se, elas têm um único ponto comum.



7. Retas paralelas

Definição

Duas retas são **paralelas** se, e somente se, ou são coincidentes ou são coplanares e não têm ponto comum.



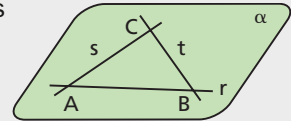
EXERCÍCIOS

1. Demonstre que num plano existem infinitas retas.

Solução

Consideremos um plano α e nele dois pontos distintos A e B. Estes pontos determinam uma reta r , que está contida em α , pois tem dois pontos distintos em α . Consideremos em α e fora de r um ponto C. Os pontos A e C determinam uma reta s , que está em α . Os pontos B e C determinam uma reta t que está em α .

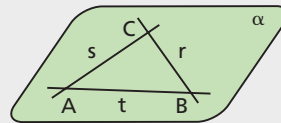
Desse modo podemos construir em α “tantas retas quantas quisermos”, isto é, “infinitas” retas.



2. Quantas retas há no espaço? Demonstre.
3. Quantas e quais são as retas determinadas por pares de pontos A, B, C e D, dois a dois distintos, se:
- a) A, B e C são colineares? b) A, B, C e D não são coplanares?
4. Quantos são os planos determinados por quatro pontos distintos dois a dois?
5. Mostre que três retas, duas a duas concorrentes, não passando por um mesmo ponto, estão contidas no mesmo plano.

Solução

Sejam r , s e t as retas tais que $r \cup s = \{C\}$, $r \cup t = \{B\}$, $s \cup t = \{A\}$ e A, B e C não colineares.



Pelo postulado da determinação existe o plano $\alpha = (A, B, C)$.

Pelo postulado da inclusão, temos: $(A \neq B; A, B \in \alpha) \Rightarrow t \subset \alpha$.

Analogamente temos: $A \subset \alpha$ e $r \subset \alpha$.

6. É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique, usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

II. Determinação de plano

8. Existem quatro modos de determinar planos.

1º modo: por três pontos não colineares.

2º modo: por uma reta e um ponto fora dela.

3º modo: por duas retas concorrentes.

4º modo: por duas retas paralelas distintas.

O primeiro modo é postulado e os demais são os três teoremas que seguem.

9. Teorema 1

Se uma reta e um ponto são tais que o ponto não pertence à reta, então eles determinam um único plano que os contém.

Hipótese

Tese

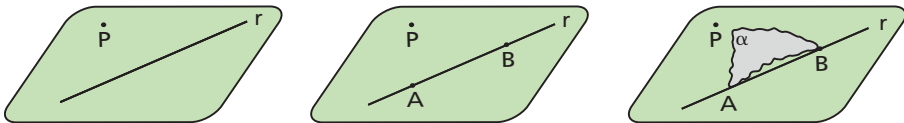
$$(P \notin r) \Rightarrow (\exists \alpha \mid P \in \alpha \text{ e } r \subset \alpha)$$

Demonstração:

Sendo um problema de existência e unicidade, dividimos a demonstração nessas duas partes.

1ª parte: Existência

a) Construção:



Tomamos em r dois pontos distintos, A e B .

Os pontos A , B e P , não sendo colineares ($A, B \in r$ e $P \notin r$), determinam um plano α .

b) Prova de que α é o plano de r e P .

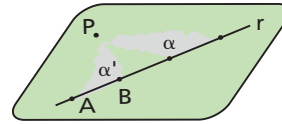
$$\left. \begin{array}{l} \alpha = (A, B, P) \Rightarrow P \in \alpha \\ \alpha = (A, B, P) \\ A \neq B; A, B \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

Logo, existe pelo menos o plano α construído por r e P . Indicaremos por $\alpha = (r, P)$. (1)

2ª parte: Unicidade

Provemos que α é o único plano determinado por r e P .

Se existissem α e α' por r e P , teríamos:



$$\left. \begin{array}{l} (\alpha = (r, P); A, B \in r) \Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, P); A, B \in r) \Rightarrow \alpha' = (A, B, P) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano (r, P) . (2)

Conclusão: ((1) e (2)) $\Rightarrow \exists \alpha \mid P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$.

10. Teorema 2

Se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém.

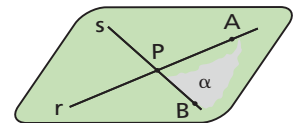
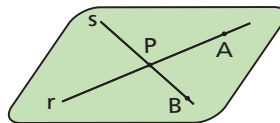
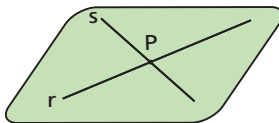
Hipótese	Tese
$(r \cap s = \{P\})$	$(\exists \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$

\Rightarrow

Demonstração:

1ª parte: Existência

a) Construção:



Tomamos um ponto A em r e um ponto B em s , ambos distintos de P . Os pontos A, B e P , não sendo colineares ($A, P \in r$ e $B \notin r$), determinam um plano α .

b) Prova de que α é o plano de r e s .

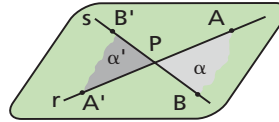
$$(\alpha = (A, B, P); A, P \in r; A \neq P) \Rightarrow r \subset \alpha$$

$$(\alpha = (A, B, P); B, P \in s; B \neq P) \Rightarrow s \subset \alpha$$

Logo, existe pelo menos o plano α construído, passando por r e s . Indicaremos por $\alpha = (r, s)$. (1)

2ª parte: Unicidade

Se existissem α e α' , por r e s concorrentes, teríamos:



$$\left. \begin{aligned} (\alpha = (r, s); A, P \in r; B \in s) &\Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, s); A, P \in r; B \in s) &\Rightarrow \alpha' = (A', B', P) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano (r, s) . (2)

Conclusão: ((1) e (2)) $\Rightarrow \exists \alpha \mid r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

11. Teorema 3

Se duas retas são paralelas entre si e distintas, então elas determinam um único plano que as contém.

Hipótese

Tese

$$(t \parallel s, r \neq s) \Rightarrow (\exists \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$$

Demonstração:

1ª parte: Existência

A existência do plano $\alpha = (r, s)$ é consequência da definição de retas paralelas (ou da existência dessas retas), pois:

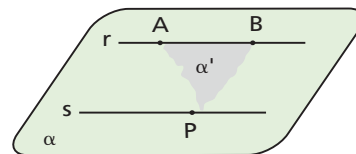
$$(r \parallel s, r \neq s) \Rightarrow (\exists \alpha \mid r \subset \alpha, s \subset \alpha \text{ e } r \cap s = \emptyset).$$

Logo, existe pelo menos o plano α (da definição), passando por r e s . (1)

2ª parte: Unicidade

Vamos supor que por r e s passam dois planos α e α' e provemos que eles coincidem.

Se existissem α e α' , por r e s paralelas e distintas, tomando-se A e B distintos em r e P em s , teríamos:



$$\left. \begin{aligned} (\alpha = (r, s); A, B \in r; P \in s) &\Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, s); A, B \in r; P \in s) &\Rightarrow \alpha' = (A, B, P) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano (r, s) . (2)

Conclusão: ((1) e (2)) $\Rightarrow \exists \alpha \mid r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

EXERCÍCIOS

7. Quantos são os planos que passam por uma reta?

Solução

Infinitos.

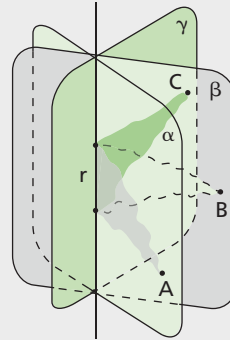
a) Construção:

Seja r a reta. Tomamos um ponto A fora de r . A reta r e o ponto A determinam um plano α . Fora de α , tomamos um ponto B . A reta r e o ponto B determinam um plano β . Fora de α e β , tomamos um ponto C . A reta r e o ponto C determinam um plano γ .

Desse modo podemos construir, por r , tantos planos quantos quisermos, isto é, construímos infinitos planos.

b) Prova:

Todos os planos assim construídos passam por r que, com os pontos correspondentes, os está determinando.



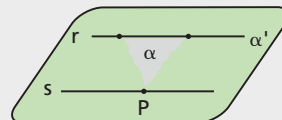
8. Quantos planos passam por dois pontos distintos?
9. Prove que duas retas paralelas distintas e uma concorrente com as duas são coplanares.
10. Mostre que, se duas retas são paralelas e distintas, todo plano que contém uma delas e um ponto da outra, contém a outra.

Solução

Sejam r e s as duas retas, P um ponto de s e α o plano (r, P) . As retas r e s determinam um plano α' . Temos, então:

$$(\alpha' = (r, s), P \in s) \Rightarrow \alpha' = (r, P) \Rightarrow \alpha' = \alpha.$$

Se $\alpha = \alpha'$ contém s , então o plano α contém a reta s .



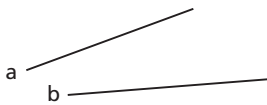
11. Num plano α há uma reta r e um ponto P não pertencente a r . Prove que: se conduzimos por P uma reta s , paralela a r , então s está contida em α .
12. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
 - a) Três pontos distintos determinam um plano.
 - b) Um ponto e uma reta determinam um único plano.
 - c) Duas retas distintas paralelas e uma concorrente com as duas determinam dois planos distintos.
 - d) Três retas distintas, duas a duas paralelas, determinam um ou três planos.
 - e) Três retas distintas, duas a duas concorrentes, determinam um ou três planos.

III. Posições das retas

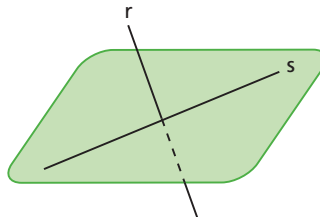
12. Retas reversas

Definição

Duas retas são chamadas retas **reversas** se, e somente se, não existe plano que as contenha.



a e b reversas
 não existe plano (a, b) e
 $a \cap b = \emptyset$

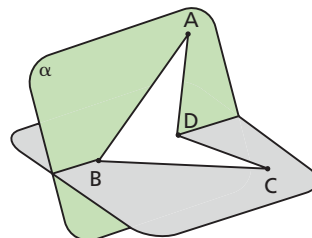
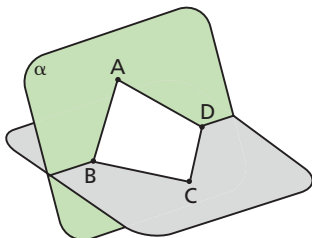


r reversa com s
 não existe plano (r, s) e
 $r \cap s = \emptyset$

13. Quadrilátero reverso

Definição

Um quadrilátero é chamado **quadrilátero reverso** se, e somente se, não existe plano contendo seus quatro vértices.



Se $\alpha = (A, B, D)$ e $C \notin \alpha$, então $ABCD$ é quadrilátero reverso.

14. Observação

Chamamos **figura** a todo conjunto de pontos. Uma **figura é plana** quando seus pontos pertencem a um mesmo plano, e os pontos são ditos **coplanares**; caso contrário, a figura é chamada **figura reversa** e os pontos, **não coplanares**.

15. Posições relativas de duas retas

Em vista de definições anteriores, dadas duas retas distintas r e s , ou elas são **concorrentes**, ou **paralelas** ou **reversas**.

Essas posições podem ser sintetizadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
 r \text{ e } s \\
 \text{distintas}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 r \text{ e } s \\
 \text{coplanares} \\
 \text{ou} \\
 r \text{ e } s \text{ reversas}
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 r \text{ e } s \text{ têm ponto comum} \rightarrow r \text{ e } s \text{ concorrentes} \\
 \text{ou} \\
 r \text{ e } s \text{ não têm ponto comum} \rightarrow r \text{ e } s \text{ paralelas}
 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 r \text{ e } s \\
 \text{distintas}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 r \text{ e } s \text{ têm ponto comum} \rightarrow r \text{ e } s \text{ são concorrentes} \\
 \text{ou} \\
 r \text{ e } s \text{ não} \\
 \text{têm ponto comum}
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 r \text{ e } s \text{ coplanares} \rightarrow r \text{ e } s \text{ são paralelas} \\
 \text{ou} \\
 r \text{ e } s \text{ não coplanares} \rightarrow r \text{ e } s \text{ são reversas}
 \end{array} \right.$$

Se as retas r e s são **coincidentes** (ou iguais), elas são **paralelas**.

EXERCÍCIOS

13. Prove a existência de retas reversas.

Solução

a) Construção:

Consideremos uma reta r e um ponto P fora de r . A reta r e o ponto P determinam um plano $\alpha = (r, P)$.

Tomemos fora de α um ponto X .
Os pontos distintos P e X determinam uma reta $s = \overleftrightarrow{PX}$.

b) Prova de que r e s são reversas:

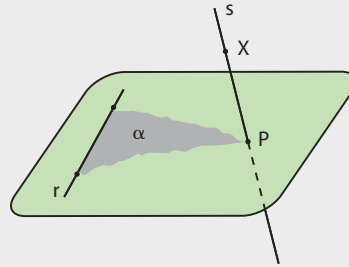
Se existe um plano $\beta = (r, s)$, temos:

$$(r \subset \beta \text{ e } P \in \beta) \Rightarrow \beta = (r, P) \Rightarrow \beta = \alpha$$

$$(\beta = \alpha, s \subset \beta, X \in s) \Rightarrow X \in \alpha \text{ (o que é absurdo, pois tomamos } X \notin \alpha).$$

Logo, não existe um plano contendo r e s .

Assim, obtivemos duas retas r e s , reversas.



14. Prove que um quadrilátero reverso não é paralelogramo.
15. Mostre que as diagonais de um quadrilátero reverso são reversas.
16. Duas retas distintas r e s , reversas a uma terceira reta t , são reversas entre si?
17. Prove que duas retas reversas e uma concorrente com as duas determinam dois planos distintos.

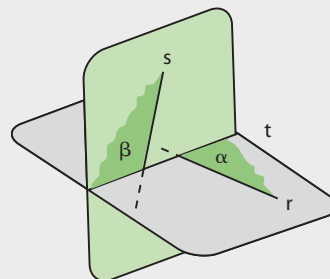
Solução

Sejam r e s duas retas reversas e t uma reta concorrente com r e concorrente com s .

As retas concorrentes r e s determinam um plano α .

As retas concorrentes s e t determinam um plano β .

Os planos α e β são distintos pois, se $\alpha = \beta$, as retas r (de α) e s (de β) estariam neste plano $\alpha = \beta$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese de serem reversas.



18. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

- Duas retas ou são coincidentes ou são distintas.
- Duas retas ou são coplanares ou são reversas.
- Duas retas distintas determinam um plano.
- Duas retas concorrentes têm um ponto comum.
- Duas retas concorrentes têm um único ponto comum.
- Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
- Duas retas concorrentes são coplanares.
- Duas retas coplanares são concorrentes.
- Duas retas distintas não paralelas são reversas.
- Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.
- Duas retas que não têm ponto comum são reversas.
- Duas retas coplanares ou são paralelas ou são concorrentes.
- Duas retas não coplanares são reversas.

19. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

- $r \cap s = \emptyset \Rightarrow r$ e s são reversas.
- r e s são reversas $\Rightarrow r \cap s = \emptyset$.
- $r \cap s = \emptyset \Rightarrow r$ e s são paralelas.
- $r // s, r \neq s \Rightarrow r \cap s = \emptyset$.
- A condição $r \cap s = \emptyset$ é necessária para que r e s sejam reversas.
- A condição $r \cap s = \emptyset$ é suficiente para que r e s sejam reversas.
- A condição $r \cap s = \emptyset$ é necessária para que duas retas distintas r e s sejam paralelas.
- A condição $r \cap s = \emptyset$ é suficiente para que duas retas r e s sejam paralelas.

IV. Interseção de planos

16. Postulado da interseção

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm pelo menos um outro ponto comum.

$$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha \text{ e } P \in \beta) \Rightarrow (\exists Q \mid Q \neq P, Q \in \alpha \text{ e } Q \in \beta)$$

17. Teorema da interseção

Se dois planos distintos têm um ponto comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

Hipótese	Tese
$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta)$	$\Rightarrow (\exists i \mid \alpha \cap \beta = i \text{ e } P \in i)$

Demonstração:

1ª parte: Existência

$$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta) \Rightarrow (\exists Q \neq P, Q \in \alpha \text{ e } Q \in \beta)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta \\ Q \neq P, Q \in \alpha, Q \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow (\exists i \mid i = \overleftrightarrow{PQ}, i \subset \alpha \text{ e } i \subset \beta)$$

A reta i determinada pelos pontos P e Q é comum aos planos α e β .

2ª parte: Unicidade

Da 1ª parte concluímos que todos os pontos de i estão em α e em β . Para provarmos que i é a interseção de α e β , basta provarmos que todos os pontos que estão em α e em β estão em i . É o que segue:

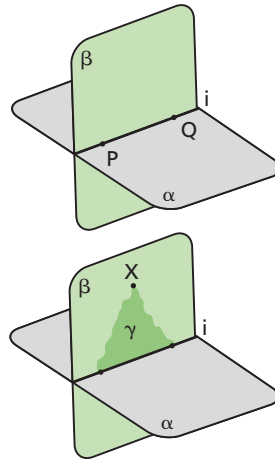
Se existe um ponto X tal que $X \in \alpha, X \in \beta$ e $X \notin i$, temos:

$$X \notin i \Rightarrow \exists \gamma \mid \gamma = (i, X)$$

$$\left. \begin{array}{l} (i \subset \alpha, X \in \alpha, \gamma = (i, X)) \Rightarrow \gamma = \alpha \\ (i \subset \beta, X \in \beta, \gamma = (i, X)) \Rightarrow \gamma = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta$$

Os planos α e β coincidem com o plano $\gamma = (i, X)$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese de que $\alpha \neq \beta$.

Logo, i é a interseção de α e β .



18. Planos secantes

Definição

Dois planos distintos que se interceptam (ou se cortam) são chamados planos **secantes** (ou **concorrentes**). A reta comum é a **interseção** desses planos ou o **traço** de um deles no outro.

19. Observações

1ª) Para se obter a interseção de dois planos distintos, basta obter dois pontos distintos comuns a esses planos.

2ª) Para se provar que três ou mais pontos do espaço são colineares, basta provar que eles pertencem a dois planos distintos.

EXERCÍCIOS

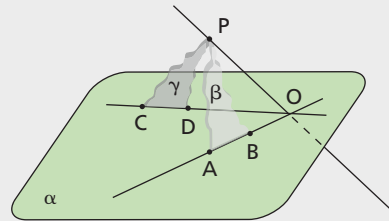
20. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):
- Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto.
 - Dois planos distintos que têm uma reta comum são secantes.
 - Se dois planos têm uma reta comum, eles são secantes.
 - Se dois planos têm uma única reta comum, eles são secantes.
 - Dois planos secantes têm interseção vazia.
 - Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.
 - Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.
 - Se dois planos têm um ponto comum, eles têm uma reta comum.
21. Num plano α há duas retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} concorrentes num ponto O . Fora de α há um ponto P . Qual é a interseção dos planos $\beta = (P, A, B)$ e $\gamma = (P, C, D)$?

Solução

Os planos β e γ são distintos e P pertence a ambos.

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{O\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} O \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow O \in \beta \\ O \in \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow O \in \gamma \end{cases}$$



Logo, $\beta \cap \gamma = \overleftrightarrow{OP}$.

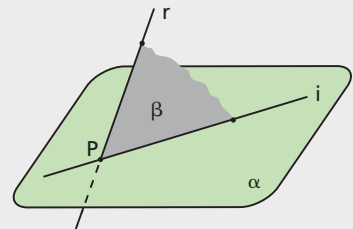
22. Num plano α há dois segmentos de reta \overline{AB} e \overline{CD} , contidos em retas não paralelas e, fora de α , há um ponto P . Qual é a interseção dos planos $\beta = (P, A, B)$ e $\gamma = (P, C, D)$?
23. Um ponto P é o traço de uma reta r num plano α . Se β é um plano qualquer que passa por r , o que ocorre com a interseção $\alpha \cap \beta = i$?

Solução

$$(P \in r, r \subset \beta) \Rightarrow P \in \beta$$

$$(\alpha \neq \beta, P \in \alpha, P \in \beta) \Rightarrow P \in i$$

Logo, a interseção de β com α passa por P .



24. Duas retas r e s são reversas. Em r há um ponto R e em s há um ponto S . Qual é a interseção dos planos $\alpha = (r, S)$ e $\beta = (s, R)$?
25. Qual é a interseção de duas circunferências de raios congruentes, centros comuns e situadas em planos distintos?
26. As retas que contêm os lados de um triângulo ABC furam um plano α nos pontos O, P e R . Prove que O, P e R são colineares.
27. Os triângulos não coplanares ABC e $A'B'C'$ são tais que as retas \overleftrightarrow{AB} e $\overleftrightarrow{A'B'}$ são concorrentes em O ; \overleftrightarrow{AC} e $\overleftrightarrow{A'C'}$ são concorrentes em P ; \overleftrightarrow{BC} e $\overleftrightarrow{B'C'}$ são concorrentes em R . Prove que O, P e R são colineares.

Solução

Seja $\alpha = (A, B, C)$ e $\alpha' = (A', B', C')$, temos:

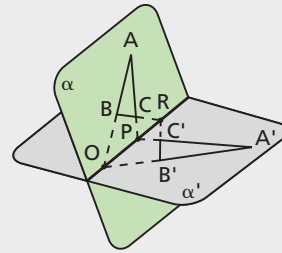
$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{O\} \Rightarrow O \in \overleftrightarrow{AB} \text{ e } O \in \overleftrightarrow{A'B'}$$

$$(O \in \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha) \Rightarrow O \in \alpha$$

$$(O \in \overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{A'B'} \subset \alpha') \Rightarrow O \in \alpha'$$

O ponto O pertence a α e α' distintos. Analogamente, $P \in \alpha$ e $P \in \alpha'$, $R \in \alpha$ e $R \in \alpha'$.

Os pontos O, P e R , sendo comuns a α e α' distintos, são colineares, pois pertencem à interseção desses planos, que é uma única reta.



28. Teorema dos três planos secantes
Estude as retas a, b, c ($\beta \cap \gamma = a, \alpha \cap \gamma = b, \alpha \cap \beta = c$) sabendo que:
Três planos α, β e γ são distintos e dois a dois secantes, segundo as três retas.

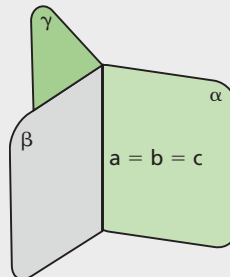
Solução

1º caso:

Por uma reta passam infinitos planos.

Então, por $a = b = c$ passam α, β e γ .

As retas a, b e c podem ser coincidentes.



2º caso:

Supondo que as retas a , b e c são duas a duas distintas ($a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$), para estudarmos as três, começaremos por duas delas: a e b . Essas duas retas (a e b) são distintas e coplanares ($a \subset \gamma$ e $b \subset \gamma$) pela hipótese. Então, ou a e b são concorrentes, ou a e b são paralelas.

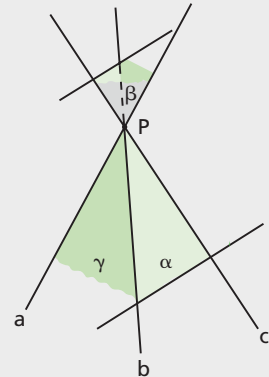
1º) a e b são concorrentes:

Supondo, então, que existe P tal que $a \cap b = \{P\}$ e usando as igualdades $a = b \cap \gamma$, $b = \alpha \cap \gamma$ e $\alpha \cap \beta = c$, para substituições, temos:

$$\begin{aligned} a \cap b = \{P\} &\Rightarrow (\beta \cap \gamma) \cap (\alpha \cap \gamma) = \{P\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow c \cap \gamma = \{P\} \Rightarrow P \in c. \end{aligned}$$

Logo, se $a \cap b = \{P\}$, então $a \cap b \cap c = \{P\}$.

1ª conclusão: Se três planos são distintos e dois a dois secantes, segundo três retas distintas, e duas dessas retas são concorrentes, então todas as três incidem num mesmo ponto.



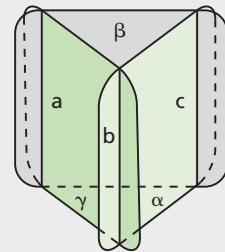
2º) a e b são paralelas (distintas):

Estudemos as retas a e c . As retas a e c distintas são coplanares ($a, c \subset \beta$) por hipótese.

Se $\exists Q \mid a \cap c = \{Q\}$, temos, pelo item anterior:

$$a \cap c = \{Q\} \Rightarrow a \cap b \cap c = \{Q\},$$

o que é absurdo, por contrariar a hipótese em estudo (a e b não têm ponto comum).



Logo, a e c são paralelas.

Considerando b e c , de modo análogo, concluímos que b e c são paralelas.

2ª conclusão: Se três planos são distintos e dois a dois secantes, segundo três retas distintas, e duas dessas retas são paralelas, todas as três são paralelas (duas a duas).

Reunindo as conclusões, temos o teorema dos três planos secantes:

Se três planos distintos são dois a dois secantes, segundo três retas, ou essas retas passam por um mesmo ponto ou são paralelas duas a duas.

- 29.** Mostre que, se dois planos que se cortam passam respectivamente por duas retas paralelas distintas (cada um por uma), a interseção desses planos é paralela às retas.
- 30.** Duas retas distintas a e b estão num plano α e fora de α há um ponto P . Estude a interseção dos planos $\beta = (a, P)$ e $\gamma = (b, P)$ com relação às retas a e b .
- 31.** Complete:
- a) $(a = \beta \cap \gamma, b = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta \text{ e } a \cap c = \{P\}) \Rightarrow \dots$
- b) $(a = \beta \cap \gamma, b = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta \text{ e } a // c) \Rightarrow \dots$
- c) $(a = \beta \cap \gamma, b = \alpha \cap \gamma, c = \alpha \cap \beta) \Rightarrow \dots$