

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA BÁSICA

Razão, Proporção e Regra de Três

Razão é uma forma de se realizar a comparação de duas grandezas, no entanto, para isto é necessário que as duas estejam na mesma unidade de medida.

A razão entre dois números a e b é obtida dividindo-se a por b . Obviamente b deve ser diferente de zero.

$32 : 16$ é um exemplo de razão cujo valor é 2, isto é, a razão de 32 para 16 é igual a 2.

Você só poderá obter a razão entre o comprimento de duas avenidas, se as duas medidas estiverem, por exemplo, em quilômetros, mas não poderá obtê-la caso uma das medidas esteja em metros e a outra em quilômetros ou qualquer outra unidade de medida que não seja o metro. Neste caso seria necessário que fosse eleita uma unidade de medida e se convertesse para ela, a grandeza que estivesse em desacordo.

Na razão, o número a é chamado de antecedente e o b tem o nome de consequente.

Proporção nada mais é que a igualdade entre razões.

Digamos que em determinada escola, na sala A temos três meninos para cada quatro meninas, ou seja, temos a razão de 3 para 4, cuja divisão de 3 por 4 é igual 0,75. Suponhamos que na sala B, tenhamos seis meninos para cada oito meninas, então a razão é 6 para 8, que também é igual 0,75. Neste caso a igualdade entre estas duas razões vêm a ser o que chamamos de proporção, já que ambas as razões são iguais a 0,75.

A regra de três é uma técnica usada para encontrar uma medida quando conhecemos outras três, desde que essas quatro medidas formem uma proporção. Esse método, conhecido como regra de três, faz uso de alguns conhecimentos importantes: propriedade fundamental das proporções, grandezas e medidas, razões e proporções. Pode-se dizer que a união de todos esses conhecimentos resulta, entre outras coisas, no que conhecemos como regra de três.

Digamos que uma fábrica de brinquedos consiga produzir 500 peças diárias com apenas 12 funcionários. Quantos funcionários são necessários para produzir 750 peças diárias?

Para resolver esse tipo de problema, usamos regra de três. Note que existem duas grandezas proporcionais no problema, uma é a quantidade de funcionários e outra a quantidade de peças diárias. Perceba também que são conhecidas três medidas dessas grandezas e a outra queremos descobrir. É por isso que essa técnica é conhecida como regra de três.

Construindo a proporção relativa a esse problema, temos:

$$\frac{12}{500} = \frac{x}{750}$$

Para encontrar o valor de x, basta utilizar os conhecimentos provenientes das equações ou usar a propriedade fundamental das proporções: o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Essa propriedade também é conhecida como “multiplicação cruzada”. Para aplicá-la, basta multiplicar 500 por x e 12 por 750:

$$500x = 12 \cdot 750$$

Resolvendo essa equação, temos:

$$500x = 9000$$

$$x = \frac{9000}{500}$$

$$500$$

$$x = 18$$

Serão necessários 18 funcionários para produzir 750 brinquedos por dia.

Fundamentos da regra de três: razão e proporção

Uma razão é uma divisão geralmente expressa na forma de fração. As razões são usadas para representar divisões entre medidas de grandezas. O resultado obtido em uma razão pode ser avaliado de diversas maneiras, por exemplo, quando dividimos o número de pessoas do sexo masculino da população de uma cidade pelo total de pessoas que vivem nessa cidade, encontraremos um decimal chamado taxa, que é resultado da divisão entre medidas de duas grandezas.

Por outro lado, quando dividimos a medida da distância percorrida por um automóvel pelo tempo gasto por esse automóvel, obtemos uma outra grandeza, conhecida como velocidade média.

Uma igualdade entre duas razões é conhecida como proporção. Perceba que, para uma proporção existir, é necessário que haja quatro medidas, duas relativas a uma grandeza e duas relativas a outra.

Exemplo: para um teste, um automóvel foi colocado em um percurso de 100 km e gastou 2 horas para percorrê-lo. Em um segundo momento, foi colocado em um percurso de 200 km e gastou 4 horas para percorrê-lo. A proporção relativa a esse experimento é:

$$\frac{100}{2} = \frac{200}{4} = 50$$

Note que as duas razões entre distância percorrida e velocidade são iguais, pois ambas resultam em 50 (quilômetros por hora). Assim, as duas razões formam uma proporção e as grandezas distância e tempo são chamadas de proporcionais.

A regra de três é usada quando uma das quatro medidas presentes nas razões acima não é conhecida e precisamos descobri-la.

MATEMÁTICA

RAZÃO E PROPORÇÃO

Propriedade Fundamental das Proporções

A propriedade fundamental das proporções é uma forma de transformar uma igualdade entre razões em uma igualdade entre produtos e possibilita o cálculo da regra de três.

Uma razão é o resultado de uma divisão que pode ser indicado por meio de um número decimal, uma fração, ou pela representação usual da divisão. Quando duas **razões** têm como resultado um mesmo decimal, dizemos que elas formam uma proporção. Portanto, uma proporção é a igualdade entre duas razões.

A **propriedade fundamental das proporções** garante que a igualdade entre duas razões pode ser escrita na forma de igualdade entre dois produtos.

Propriedade fundamental das proporções

Digamos que quatro números quaisquer “a”, “b”, “c” e “d” formem uma **proporção**, nessa ordem. Essa proporção pode ser apresentada na forma de **igualdade entre razões**. Se optarmos pela notação usual das divisões, teremos:

$$a:b = c:d$$

Note que os números “a” e “d” ocupam as posições **extremas** da igualdade, já os números “b” e “c” ocupam as **posições centrais**. Em razão disso, em uma proporção assim definida, “a” e “d” são chamados de **extremos**, e “b” e “c” são chamados de **meios**.

Dito isso, a propriedade fundamental das proporções é:

O produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Algebricamente, isso significa que:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Se a proporção estiver escrita na forma de fração, identificar extremos e meios não é uma tarefa tão simples. Entretanto, observe que a igualdade acima, obtida a partir da aplicação da propriedade fundamental das proporções, possui multiplicações em ambos os membros. É possível mudar a ordem desses fatores para obter:

$$d \cdot a = c \cdot b$$

Reescrevendo essa igualdade na forma de proporção, teremos:

$$d:c = b:a$$

Isso significa que as igualdades a seguir, obtidas apenas reescrevendo as duas proporções apresentadas, são equivalentes.

$$a = c$$

$$b = d$$

$$d = b$$

$$c = a$$

Além disso, também é possível trocar os membros de lugar em ambas as proporções, pois elas são igualdades. É a partir das combinações entre essas trocas que criamos as propriedades das proporções.

Uso da propriedade fundamental das proporções

Uma das maiores aplicações da propriedade fundamental das proporções é na regra de três. Quando duas grandezas são proporcionais, é possível construir uma proporção usando algumas de suas medidas. A regra de três é uma técnica usada para descobrir uma das medidas relativas a uma grandeza quando essa medida está dentro de uma proporção na qual as outras três medidas são conhecidas.

Exemplo: um automóvel desloca-se a uma velocidade de 60 km/h e consegue percorrer 180 km em determinado período de tempo. Se esse automóvel estivesse a 80 km/h, quantos quilômetros percorreria no mesmo período de tempo?

Solução: em primeiro lugar, monte uma proporção entre essas grandezas. Aconselhamos as medidas referentes à mesma grandeza ocupem a mesma fração.

$$\frac{180}{60} = \frac{x}{80}$$

Usando a **propriedade fundamental das proporções**, podemos escrever:

$$180 \cdot 80 = 60x$$

Como se trata de uma igualdade, podemos inverter a equação sem modificar seu resultado:

$$60x = 180 \cdot 80$$

$$60x = 14400$$

$$x = \frac{14400}{60}$$

$$60$$

$$x = 240$$

Esse automóvel pode percorrer 240 km a uma velocidade de 80 km/h.

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA BÁSICA

Porcentagem

Porcentagem envolve diversas situações com que nos deparamos frequentemente em nosso cotidiano, por exemplo em indicadores econômicos, resultados de pesquisas ou promoções. Entendemos porcentagem como sendo a razão entre um número qualquer e 100, sendo representada pelo símbolo %. Utilizamos a ideia de porcentagem para representar partes de algo inteiro.

Sabemos que a porcentagem é uma razão, logo, pode ser representada por uma fração, que, por sua vez, pode ser escrita na forma decimal. De modo geral, se temos um número acompanhado pelo símbolo %, basta dividi-lo por 100, ou seja:

$$x\% = \frac{x}{100}$$

Lembre-se, para “transformar” a porcentagem em fração, basta dividir o número que acompanha o símbolo % por 100 e simplificar a fração; para “transformar” a fração em forma decimal, basta realizar a divisão.

Exemplos:

$$2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0,02$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1$$

$$210\% = \frac{210}{100} = \frac{21}{10} = 2,1$$

Perceba que quando escrevemos a porcentagem 100% é o mesmo que considerar um inteiro, ou seja, quando consideramos 100% de algo, estamos levando em conta o total daquilo. No caso de 210%, estamos considerando mais que um inteiro, isto é, consideramos 2,1 vezes o total.

Para fazer o caminho de volta, ou seja, dado uma fração ou um número decimal para ser escrito na forma percentual, basta multiplicar o número em questão por 100.

$$0,13 \cdot 100 = 13\%$$

$$0,05 \cdot 100 = 5\%$$

$$0,8 \cdot 100 = 80\%$$

$$4 \cdot 100 = 400\%$$

Como calcular a porcentagem?

Para realizar o cálculo da porcentagem de um valor, basta multiplicar esse valor pela porcentagem em sua forma decimal ou fracionária.

Exemplos

Calcule 50% de 600.

Sabemos que 50% = 0,5, assim, basta fazer a substituição e multiplicar os valores.

$$\begin{array}{r} 0,5 \cdot 600 \\ 300 \end{array}$$

Podendo também substituir os 50% na forma fracionária, ficando:

$$50\% \text{ de } 600$$

$$\frac{50}{100} \cdot 600$$

$$\frac{1}{2} \cdot 600$$

$$\frac{600}{2} = 300$$

Logo, 50% de 600 = 300. Veja que 50% representam a metade do total que é 600.

MATEMÁTICA

BÁSICA

Juros Simples

Juros simples é um acréscimo calculado sobre o valor inicial de uma aplicação financeira ou de uma compra feita a crédito, por exemplo.

O valor inicial de uma dívida, empréstimo ou investimento é chamado de capital. A esse valor é aplicada uma correção, chamada de taxa de juros, que é expressa em porcentagem.

Os juros são calculados considerando o período de tempo em que o capital ficou aplicado ou emprestado.

Exemplo

Um cliente de uma loja pretende comprar uma televisão, que custa 1000 reais à vista, em 5 parcelas iguais. Sabendo que a loja cobra uma taxa de juros de 6% ao mês nas compras a prazo, qual o valor de cada parcela e o valor total que o cliente irá pagar?

Quando compramos algo parcelado, os juros determinam o valor final que iremos pagar. Assim, se compramos uma televisão a prazo iremos pagar um valor corrigido pela taxa cobrada.

Ao parcelamos esse valor em cinco meses, se não houvesse juros, pagaríamos 200 reais por mês (1000 divididos por 5). Mas foi acrescido 6 % a esse valor, então temos:

$$\frac{6}{100} \cdot 200 = 12$$

Desta forma, teremos um acréscimo de R\$ 12 ao mês, ou seja, cada prestação será de R\$ 212. Isso significa que, no final, pagaremos R\$ 60 a mais do valor inicial.

Logo, o valor total da televisão a prazo é de R\$1060.

Fórmula: Como Calcular o Juros Simples?

A fórmula para calcular os juros simples é expressa por:

$$J = C . i . t$$

Onde,

J: juros

C: capital

i: taxa de juros. Para substituir na fórmula, a taxa deverá estar escrita na forma de número decimal. Para isso, basta dividir o valor dado por 100.

t: tempo. A taxa de juros e o tempo devem se referir à mesma unidade de tempo.

Podemos ainda calcular o montante, que é o valor total recebido ou devido, ao final do período de tempo. Esse valor é a soma dos juros com valor inicial (capital).

Sua fórmula será:

$$M = C + J \rightarrow M = C + C . i . t$$

Da equação acima, temos, portanto, a expressão:

$$M = C . (1 + i . t)$$

Exemplos

Quanto rendeu a quantia de R\$ 1200, aplicado a juros simples, com a taxa de 2% ao mês, no final de 1 ano e 3 meses?

Sendo:

$$C = 1200$$

$$i = 2\% \text{ ao mês} = 0,02$$

$t = 1 \text{ ano e } 3 \text{ meses} = 15 \text{ meses}$ (tem que transformar em meses para ficar na mesma unidade de tempo da taxa de juros).

$$J = C \cdot i \cdot t = 1200 \cdot 0,02 \cdot 15 = 360$$

Assim, o rendimento no final do período será de **R\$ 360**.

Um capital de R\$ 400, aplicado a juros simples com uma taxa de 4% ao mês, resultou no montante de R\$ 480 após um certo tempo. Qual foi o tempo da aplicação?

Considerando,

$$C = 400$$

$$i = 4\% \text{ ao mês} = 0,04$$

$$M = 480$$

temos:

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1 + i \cdot t) \\ 480 &= 400 \cdot (1 + 0,04 \cdot t) \\ 480 &= 400 \cdot 1 + 400 \cdot 0,04 \cdot t \\ 480 &= 400 + 16 \cdot t \\ 480 - 400 &= 16 \cdot t \\ 80 &= 16 \cdot t \\ t &= \frac{80}{16} \\ t &= 5 \text{ meses} \end{aligned}$$

Juros Compostos

Existe ainda uma outra forma de correção financeira chamada de juros compostos. Esse tipo de correção é usada com mais frequência nas transações comerciais e financeiras.

Diferente dos juros simples, os juros compostos são aplicados nos juros sobre os juros. Assim, o sistema dos juros compostos é denominado de "capitalização acumulada".

Lembre-se que no cálculo dos juros simples, a taxa de juros é calculada sobre o mesmo valor (capital). Não é o que acontece com os juros compostos, pois neste caso o valor aplicado se altera a cada período.

MATEMÁTICA

BÁSICA

Juros Compostos

Os **Juros Compostos** são calculados levando em conta a atualização do capital, ou seja, o juro incide não apenas no valor inicial, mas também sobre os juros acumulados (juros sobre juros).

Esse tipo de juros, chamado também de “capitalização acumulada”, é muito utilizado nas transações comerciais e financeiras (sejam dívidas, empréstimos ou investimentos).

Exemplo

Uma aplicação de R\$10.000, no regime de juros compostos, é feita por 3 meses a juros de 10% ao mês. Qual o valor que será resgatado ao final do período?

Mês	Juros	Valor
1	10% de 10000 = 1000	10000 + 1000 = 11000
2	10% de 11000 = 1100	11000 + 1100 = 12100
3	10% de 12100 = 1210	12100 + 1210 = 13310

Note que o juro é calculado usando o valor já corrigido do mês anterior. Assim, ao final do período será resgatado o valor de R\$13.310,00.

Para compreendermos melhor, é necessário conhecer alguns conceitos utilizados em matemática financeira. São eles:

Capital: valor inicial de uma dívida, empréstimo ou investimento.

Juros: valor obtido quando aplicamos a taxa sobre o capital.

Taxa de Juros: expressa em porcentagem (%) no período aplicado, que pode ser dia, mês, bimestre, trimestre ou ano.

Montante: o capital acrescido dos juros, ou seja, Montante = Capital + Juros.

Fórmula: Como Calcular os Juros Compostos?

Para calcular os juros compostos, utiliza-se a expressão:

$$M = C (1+i)^t$$

Onde,

M: montante

C: capital

i: taxa fixa

t: período de tempo

Para substituir na fórmula, a taxa deverá estar escrita na forma de número decimal. Para isso, basta dividir o valor dado por 100. Além disso, a taxa de juros e o tempo devem se referir à mesma unidade de tempo.

Se pretendemos calcular somente os juros, aplicamos a seguinte fórmula:

$$J = M - C$$

Exemplos

Para entender melhor o cálculo, vejamos abaixo exemplos sobre a aplicação dos juros compostos.

1) Se um capital de R\$500 é aplicado durante 4 meses no sistema de juros compostos sob uma taxa mensal fixa que produz um montante de R\$800, qual será o valor da taxa mensal de juros?

Sendo:

$$C = 500$$

$$M = 800$$

$$t = 4$$

Aplicando na fórmula, temos:

$$800 = 500 (1 + i)^4$$

$$\frac{800}{500} = (1 + i)^4$$

$$1,6 = (1 + i)^4$$

$$\sqrt[4]{1,6} = 1 + i$$

$$1,125 = 1 + i$$

$$1,125 - 1 = i$$

$$i = 0,125$$

Uma vez que a taxa de juros é apresentada na forma de porcentagem, devemos multiplicar o valor encontrado por 100. Assim, o valor da taxa mensal de juros será de **12,5 %** ao mês.

2) Quanto receberá de juros, no fim de um semestre, uma pessoa que investiu, a juros compostos, a quantia de R\$5.000,00, à taxa de 1% ao mês?

Sendo:

$$C = 5000$$

$$i = 1\% \text{ ao mês } (0,01)$$

$$t = 1 \text{ semestre} = 6 \text{ meses}$$

Substituindo, temos:

$$M = 5000 (1 + 0,01)^6$$

$$M = 5000 (1,01)^6$$

$$M = 5000 \cdot 1,061520150601$$

$$M = 5307,60$$

Para encontrar o valor dos juros devemos diminuir do montante o valor do capital, assim:

$$J = 5307,60 - 5000 = 307,60$$

O juro recebido será de R\$ 307,60.

3) Qual deve ser o tempo para que a quantia de R\$20 000,00 gere o montante de R\$ 21 648,64, quando aplicado à taxa de 2% ao mês, no sistema de juros compostos?

Sendo:

$$C = 20000$$

$$M = 21648,64$$

$$i = 2\% \text{ ao mês } (0,02)$$

Substituindo:

$$21648,64 = 20000(1 + 0,02)^t$$

$$21648,64 = 20000(1,02)^t$$

$$\frac{21648,64}{20000} = (1,02)^t$$

$$1,082432 = (1,02)^t$$

O valor de t é encontrado calculando o logaritmo na base 1,02

$$t = \log_{1,02} 1,082432$$

Mudando para o logaritmo de base 10, temos:

$$t = \frac{\log 1,082432}{\log 1,02} = 4$$

O tempo deverá ser de 4 meses.

MATEMÁTICA

BÁSICA

Unidades de Medida

As unidades de medida são modelos estabelecidos para medir diferentes grandezas, tais como comprimento, capacidade, massa, tempo e volume.

O Sistema Internacional de Unidades (SI) define a unidade padrão de cada grandeza. Baseado no sistema métrico decimal, o SI surgiu da necessidade de uniformizar as unidades que são utilizadas na maior parte dos países.

Medidas de Comprimento

Existem várias medidas de comprimento, como por exemplo a jarda, a polegada e o pé.

No SI a unidade padrão de comprimento é o metro (m). Atualmente ele é definido como o comprimento da distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $1/299.792.458$ de um segundo.

Os múltiplos e submúltiplos do metro são: quilômetro (km), hectômetro (hm), decâmetro (dam), decímetro (dm), centímetro (cm) e milímetro (mm).

Medidas de Capacidade

A unidade de medida de capacidade mais utilizada é o litro (l). São ainda usadas o galão, o barril, o quarto, entre outras.

Os múltiplos e submúltiplos do litro são: quilolitro (kl), hectolitro (hl), decalitro (dal), decilitro (dl), centilitro (cl), mililitro (ml).

Medidas de Massa

No Sistema Internacional de unidades a medida de massa é o quilograma (kg). Um cilindro de platina e irídio é usado como o padrão universal do quilograma.

As unidades de massa são: quilograma (kg), hectograma (hg), decagrama (dag), grama (g), decigrama (dg), centigrama (cg) e miligrama (mg).

São ainda exemplos de medidas de massa a arroba, a libra, a onça e a tonelada. Sendo 1 tonelada equivalente a 1000 kg.

Medidas de Volume

No SI a unidade de volume é o metro cúbico (m^3). Os múltiplos e submúltiplos do m^3 são: quilômetro cúbico (km^3), hectômetro cúbico (hm^3), decâmetro cúbico (dam^3), decímetro cúbico (dm^3), centímetro cúbico (cm^3) e milímetro cúbico (mm^3).

Podemos transformar uma medida de capacidade em volume, pois os líquidos assumem a forma do recipiente que os contém. Para isso usamos a seguinte relação:

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

Tabela de conversão de Medidas

O mesmo método pode ser utilizado para calcular várias grandezas.

Primeiro, vamos desenhar uma tabela e colocar no seu centro as unidades de medidas bases das grandezas que queremos converter, por exemplo:

Capacidade: litro (l)

Comprimento: metro (m)

Massa: grama (g)

Volume: metro cúbico (m^3)

Tudo o que estiver do lado direito da medida base são chamados submúltiplos. Os prefixos deci, centi e mili correspondem respectivamente à décima, centésima e milésima parte da unidade fundamental.

Do lado esquerdo estão os múltiplos. Os prefixos deca, hecto e quilo correspondem respectivamente a dez, cem e mil vezes a unidade fundamental.

Múltiplos			Medida Base	Submúltiplos		
quilo (k)	hecto (h)	deca (da)		deci (d)	centi (c)	mili (m)
quilolitro (kl)	hectolitro (hl)	decalitro (dal)	litro (l)	decilitro (dl)	centilitro (cl)	mililitro (ml)
quilômetro (km)	hectômetro (hm)	decâmetro (dam)	metro (m)	decímetro (dm)	centímetro (cm)	milímetro (mm)
quilograma (kg)	hectograma (hg)	decagrama (dag)	grama (g)	decigrama (dg)	centigrama (cg)	miligrama (mg)
quilômetro cúbico (km ³)	hectômetro cúbico (hm ³)	decâmetro cúbico (dam ³)	metro cúbico (m ³)	decímetro cúbico (dm ³)	centímetro cúbico (cm ³)	milímetro cúbico (mm ³)

Exemplos

Quantos mililitros correspondem 35 litros?

Para fazer a transformação pedida, vamos escrever o número na tabela das medidas de capacidade. Lembrando que a medida pode ser escrita como 35,0 litros . A vírgula e o algarismo que está antes dela devem ficar na casa da unidade de medida dada, que neste caso é o litro.

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
		3	5,	0		

Depois completamos as demais caixas com zeros até chegar na unidade pedida. A vírgula ficará sempre atrás dos algarismos que estiver na caixa da unidade pedida, que neste caso é o ml.

kl	hl	dal	l	dl	cl	ml
		3	5	0	0	0,

Assim 35 litros correspondem a 35000 ml.

Transforme 700 gramas em quilogramas.

Lembrando que podemos escrever 700,0 g. Colocamos a vírgula e o 0 antes dela na unidade dada, neste caso g e os demais algarismos nas casas anteriores

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
	7	0	0,	0		

Depois completamos com zeros até chegar na casa da unidade pedida, que neste caso é o quilograma. A vírgula passa então para atrás do algarismo que está na casa do quilograma.

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,	7	0	0			

Então 700 g corresponde a 0,7 kg.

Quantos metros cúbicos possui um paralelepípedo de 4500 centímetros cúbicos?

Nas transformações de volume (m^3), iremos proceder da mesma maneira dos exemplos anteriores. Contudo, devemos colocar 3 algarismos em cada casa.

Escrevemos a medida como 4500,0 cm^3 .

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
				4	500,	0

Agora completamos com 3 algarismos cada casa até chegar a unidade pedida.

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			000,	004	500	

Encontramos que 4500 cm^3 correspondem a 0,0045 m^3 .

E o Tempo?

A unidade de medida base do tempo no SI é o segundo (s). Atualmente o segundo é definido como o tempo de duração de 9.192.631.770 vibrações da radiação emitida pela transição eletrônica entre os níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133.

Os múltiplos do segundo são o minuto, a hora e o dia. Essas medidas não são decimais, por isso usa-se as seguintes relações:

1 minuto (min) = 60 segundos (s)

1 hora = 3 600 segundos (s)

60 minutos (min) = 1 hora (h)

24 horas (h) = 1 dia (d)

Os submúltiplos do segundo são:

Décimo de segundo = 0,1 s ou $1/10$ s

Centésimo de segundo = 0,01 s ou $1/100$ s

Milésimo de segundo = 0,001 s ou $1/1000$ s

Há uma unidade de medida usada na Astronomia para indicar enormes distâncias.

MATEMÁTICA

BÁSICA

Escala

O que é Escala Matemática?

A Escala é uma **fórmula da razão** que há entre medidas proporcionais. Ela é uma constante que nos permitirá **comparar as medidas de uma situação real com a sua representação**.

As distâncias representadas em **miniaturas, esculturas não-realistas, mapas, plantas e maquetes** são apenas a representação de algo do mundo real. Para **manter a proporção do que se deseja representar**, utilizamos um **cálculo matemático bem simples**, chamado escala!

Não entendeu ainda? Vamos **relembrar os conceitos de razão e proporção**, vendo um **exemplo**:

O que é Razão e Proporção?

Vamos supor que uma parede mede 10m na vida real e está representada na maquete com 1m. Já a árvore mede 2m na vida real e está na maquete com 0,2m.

Se compararmos a relação que existe entre a árvore e a parede, ela será a mesma, seja na maquete ou na vida real, veja:

$10\text{m (parede real)} / 2\text{m (árvore real)} = 5$, ou seja, a árvore é 5x menor que a parede, na realidade.

$1\text{m (parede maquete)} / 0,2\text{m (árvore maquete)} = 5$, ou seja, a árvore permanece 5x menor que a parede na representação.

Isso ocorre porque mesmo sendo representadas em outra dimensão (real ou representativa) a **razão de proporcionalidade permaneceu a mesma, ao se fazer a transformação do objeto real na representação:**

$$10\text{m (parede real)} / 1\text{m (parede maquete)} = 10$$

$$2\text{m (árvore real)} / 0,2\text{m (árvore maquete)} = 10.$$

Assim, a **proporção é manter as coisas equidistantes entre si**, ainda que se amplie o objeto ou o diminua. A **razão é a divisão** que se faz entre o objeto real e sua representação, para averiguar de quanto foi essa mudança.

Mas o que a escala tem a ver com isso?

Ela é justamente a fórmula que irá representar todos esses dados!
Vamos ver alguns exemplos e **aprender a lê-las e calcular:**

Como calcular Escala? Veja a Fórmula!

Uma escala se apresenta sempre pelo número um seguido de dois pontos e um número específico depois. Dessa forma:

$$1: 100$$

A **forma como lemos** isso é:

“1 unidade na representação equivale a 100 unidades na realidade”

Sempre **o primeiro número refere-se ao desenho e o segundo a sua equivalência na vida real.**

Assim, lembrando do significado de razão, podemos dizer que **os dois pontos indicam uma divisão**, e teremos a **seguinte fórmula:**

$$\text{Escala} = \text{medida do desenho} / \text{medida do real}$$

Como você viu, podemos escrever em forma de fração, e daí vem a explicação de o primeiro número ser o 1, porque fazemos uma simplificação! Mas se você vir algo como 3:6 não se preocupe, o modo como fazemos a leitura é sempre o mesmo!

Por fim, é importante ressaltar que **quando não houver indicação de unidade de medida**, sempre **consideramos o cm**. Mas, se o primeiro número **estiver em centímetros e o segundo em metros**, precisamos **fazer a conversão de tudo para a mesma unidade!**

Exemplos de cálculos resolvidos

Vamos supor que em um mapa a legenda seja a seguinte 1 cm : 500 km. Como foi dito, lemos essa escala da seguinte maneira: um centímetro está para quinhentos quilômetros. Ou seja, cada centímetro de distância no mapa corresponde a quinhentos quilômetros na realidade.

Se utilizarmos uma régua e medirmos **a distância entre duas cidades no mapa**, e **obtermos 2 cm**, poderemos calcular qual a distância real entre as cidades. Para isso, basta fazer uma regra de três!

1 cm – 500 km

2 cm – x km

Assim, percebemos que a **distância real entre as cidades é de 1000 km!**

Um escultor disse que viu uma maçã que media 10 cm de altura, mas na hora de fazer sua escultura, resolveu fazer uma miniatura com 2 cm de altura. Descubra qual foi a escala que o artista utilizou!

Aqui, basta aplicar a fórmula: $10/2 = 5$, ou seja, escala 1:5.

Tipos de Escala Matemática

Existem alguns tipos de escala dependendo de como fica o desenho final de sua representação ou de qual o contexto em que é aplicada. Vamos conhecê-las:

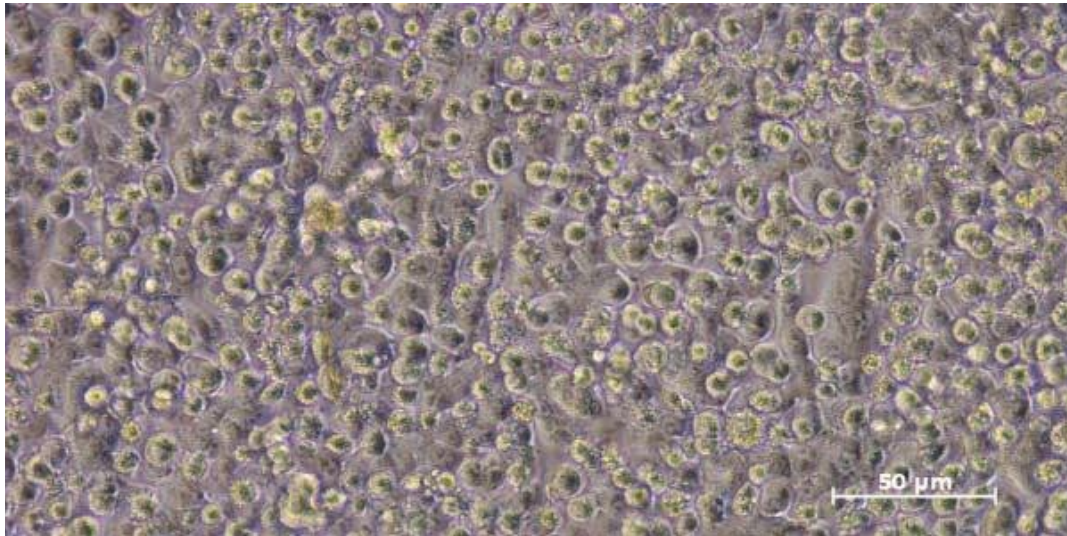
Escala natural

É aquela representada numericamente como 1:1 ou 1/1. Ela só acontece quando o tamanho do objeto real é igual ao da representação.

Escala reduzida:

Ocorre quando queremos diminuir a representação do objeto real. É a **mais utilizada nos mapas** e a que trabalhamos nos exemplos acima e na maioria das questões. Exemplos: 1:2, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100, 1:500, 1:1000, 1:5000, 1:20000.

Escala ampliada



Ocorre quando queremos ampliar a representação do objeto real. É usada para mostrar detalhes mínimos de determinada área, como imagens de microscópio. Exemplos: 50:1, 100:1, 400:1, 1000:1.

Escala cartográfica ou geográfica



As escalas estão diretamente ligadas aos estudos da **Geografia** para a construção de mapas e na Engenharia e na Arquitetura para confecção de maquetes e plantas). Além disso, na Navegação Marítima e Aérea e nas táticas militares também!

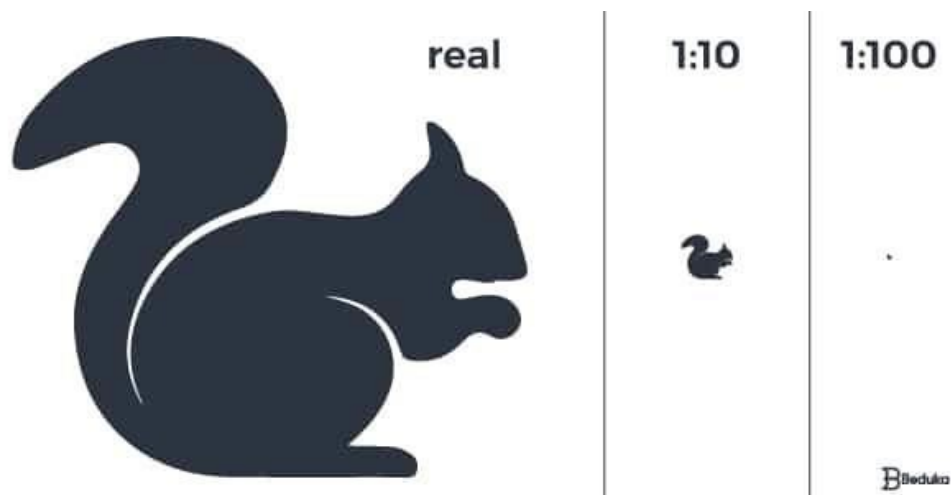
Mas, toda vez que falarmos em **mapas**, a escala ganhará o apelidinho especial de **cartográfica**, pois a ciência que estuda mapas se chama **cartografia**. O seu cálculo se mantém exatamente o mesmo!

Escala Gráfica



É aquela em que não existe a fórmula com os dois pontos, mas um desenho gráfico de uma régua indicando a medida que aquela distância ali marcada vale. É muito comum em mapas.

Escala grande e pequena



Como se trata de uma divisão, quando queremos **comparar qual escala é maior ou menor** que a outra, precisamos **ter um raciocínio inverso!**

Dizemos que uma escala é pequena quando os seus números são maiores. Isso acontece porque quanto maior for o denominador da divisão, menor o resultado. Consequentemente, o objeto representado fica pequeno. **Ex: 1:100**

Dizemos que uma escala é grande quando os seus números são menores. Isso acontece porque quanto menor for o denominador, maior o resultado. Assim, o objeto representado não fica tão pequeno. **Ex: 1:10**

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Projeções Ortogonais

Projeções ortogonais são figuras formadas em um plano a partir de outras figuras fora dele e já foram tema de questões do Enem.

A **projeção ortogonal** das figuras geométricas sobre um **plano** pode ser comparada à sombra desse mesmo objeto no horário em que o sol está mais alto no dia. Nesse horário, a sombra possui dimensões iguais às do objeto, mas não possui profundidade alguma.

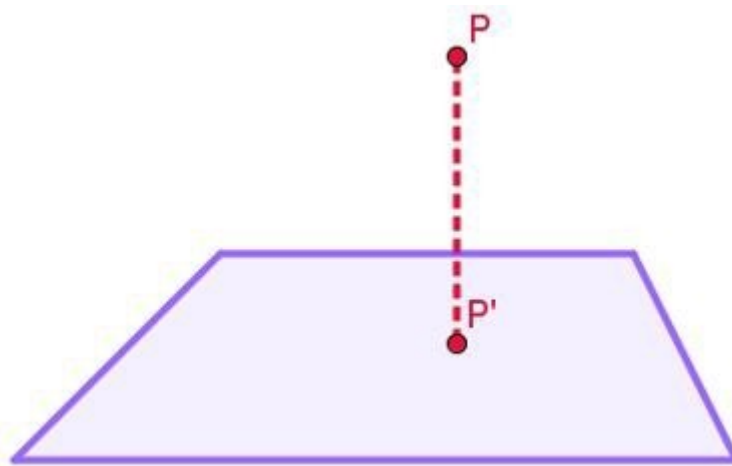
As **projeções ortogonais** sempre são exploradas nas avaliações do Enem porque a única forma de resolver problemas sobre o possível formato de uma projeção é por meio de raciocínio lógico.

Veja a seguir as definições das **projeções** mais básicas e um exemplo de questão do Enem sobre esse conteúdo.

Projeção do ponto sobre o plano

A figura formada pela **projeção ortogonal** de um ponto P sobre o **plano** é o ponto P' . Essa **projeção** é definida como a extremidade do segmento de reta perpendicular ao plano cuja outra extremidade seja o ponto P .

Observe que um segmento de reta é perpendicular a um **plano** quando, dado o ponto P' de intersecção entre os dois, todas as retas pertencentes a esse plano que passam por esse ponto P' são perpendiculares ao segmento de reta dado. Para verificar isso, é suficiente observar duas retas perpendiculares contidas no plano.

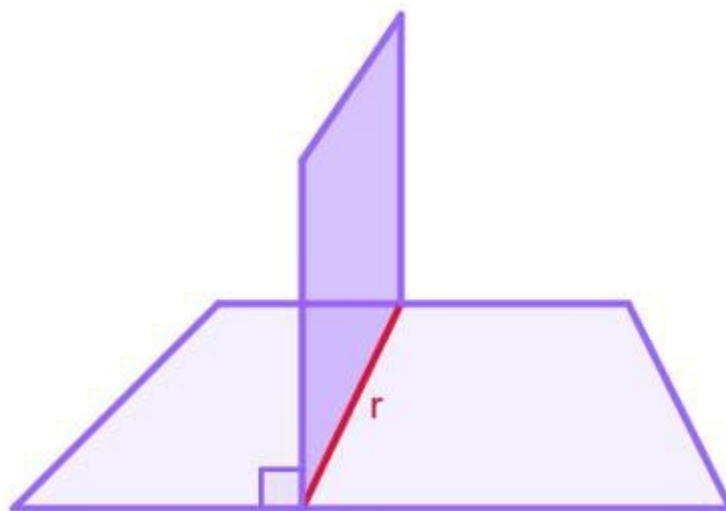


Projeção ortogonal P' do ponto P sobre o plano

Projeção da reta sobre o plano

A figura formada pela **projeção ortogonal** de uma reta r sobre o plano é outra reta s . Essa projeção é definida como a intersecção entre o plano que contém a reta r e o plano que contém a reta s quando os dois são **perpendiculares**.

No caso particular em que a reta r já é perpendicular ao plano, a sua **projeção** sobre esse **plano** é apenas um ponto.

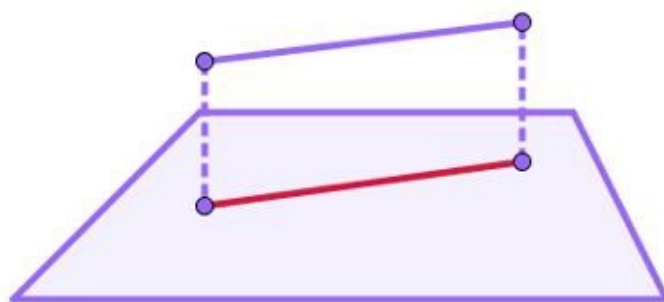


Projeção ortogonal da reta r sobre um plano

Projeção do segmento de reta sobre o plano

A figura formada pela **projeção ortogonal** de um segmento de reta sobre o plano é outro segmento de reta. Essa projeção é definida como o segmento de reta cujas extremidades são as projeções ortogonais dos pontos extremos do segmento de reta inicial. A imagem a seguir ilustra essa situação.

Os segmentos de reta também possuem uma particularidade: se o segmento for perpendicular ao plano, sua projeção ortogonal será apenas um ponto.

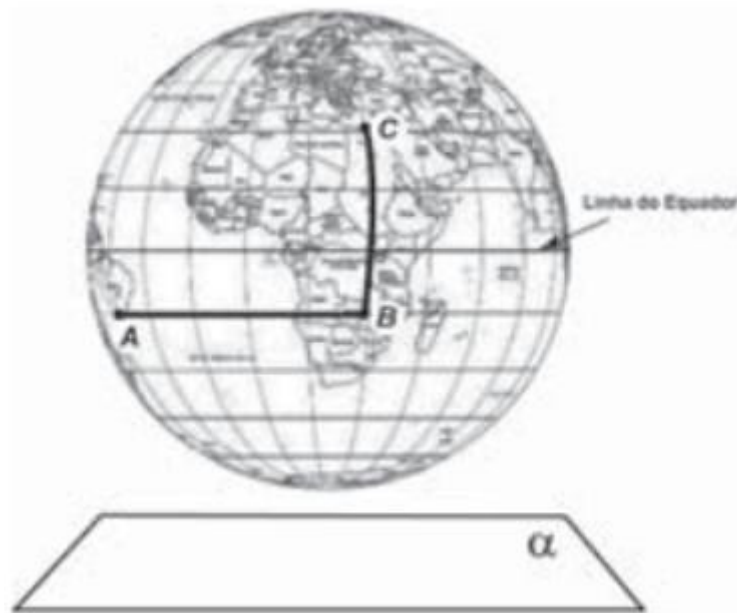


Projeção de uma figura sobre o plano

A **projeção ortogonal** de uma figura geométrica qualquer sobre o **plano** é o conjunto das **projeções ortogonais** de seus pontos sobre o plano. Sendo assim, cada ponto dessa figura representa a extremidade de um segmento de reta. A outra extremidade está no plano, e a figura formada por todas essas últimas é a **projeção ortogonal** da figura geométrica.

Exemplo

(Enem-2016) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



A **projeção ortogonal**, no plano α , do caminho traçado no globo pode ser representada por:

- A**
- B**
- C**
- D**
- E**

Solução:

Observe que, para quem olha de cima para baixo, a projeção ortogonal forma uma curva que se estende de A até B e, depois disso, faz um pequeno movimento para dentro e para a esquerda, quando “sobe” no mapa. Assim, a alternativa correta é a **letra E**.