

# MATEMÁTICA

## PROGRESSÃO ARITMÉTICA

### Sequência Numérica

Na matemática, a sequência numérica ou sucessão numérica corresponde a uma função dentro de um agrupamento de números.

De tal modo, os elementos agrupados numa sequência numérica seguem uma sucessão, ou seja, uma ordem no conjunto.

#### Classificação

As sequências numéricas podem ser finitas ou infinitas, por exemplo:

$$S_F = (2, 4, 6, \dots, 8)$$

$$S_I = (2, 4, 6, 8, \dots)$$

Note que quando as sequências são infinitas, elas são indicadas pelas reticências no final. Além disso, vale lembrar que os elementos da sequência são indicados pela letra  $a$ . Por exemplo:

$$1^\circ \text{ elemento: } a_1 = 2$$

$$4^\circ \text{ elemento: } a_4 = 8$$

O último termo da sequência é chamado de enésimo, sendo representado por  $a_n$ . Nesse caso, o  $a_n$  da sequência finita acima seria o elemento 8.

Assim, podemos representá-la da seguinte maneira:

$$S_F = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$$S_I = (a_1, a_2, a_3, a_n, \dots)$$

## **Lei de Formação**

A Lei de Formação ou Termo Geral é utilizada para calcular qualquer termo de uma sequência, expressa pela expressão:

$$a_n = 2n^2 - 1$$

## **Lei de Recorrência**

A Lei da Recorrência permite calcular qualquer termo de uma sequência numérica a partir de elementos antecessores:

$$a_n = a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$$

## **Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas**

Dois tipos de sequências numéricas muito utilizadas na matemática são as progressões aritmética e geométrica.

A progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais determinada por uma constante  $r$  (razão), a qual é encontrada pela soma entre um número e outro.

A progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica cuja razão ( $r$ ) constante é determinada pela multiplicação de um elemento com o quociente ( $q$ ) ou razão da PG.

Para compreender melhor, veja abaixo os exemplos:

PA = (4, 7, 10, 13, 16... $a_n$ ...) PA infinita de razão ( $r$ ) 3

PG (1, 3, 9, 27, 81, ...), PG crescente de razão ( $r$ ) 3

# MATEMÁTICA

## ADICIONAIS

### Fibonacci

A sequência de Fibonacci é composta por uma sucessão de números descrita pelo famoso matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, no final do século 12. O matemático percebeu uma regularidade matemática a partir de um problema criado por ele mesmo. Além disso, quando esses números são transformados em quadrados e dispostos de maneira geométrica, é possível traçar uma espiral, que curiosamente também pode ser vista em muitos fenômenos naturais.

Leonardo percebeu um dos exemplos da sequência ao observar a evolução de uma população de coelhos em um ano, originada por um único casal da espécie. Desde que nenhum coelho morra no processo, a sequência é infinita e começa com os números 0 e 1. A partir do 3º mês, quando os coelhos possuem maturidade sexual para procriar, o matemático notou que a quantidade de casais de coelhos mês a mês cresce segundo uma mesma ordem. Nesse caso, os números seguintes serão a soma dos dois números anteriores, ficando desta forma:

**0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584...**

Assim, a fórmula a seguir define a sequência:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

*(F<sub>n</sub> = Fator numeral)*

No caso, repetimos o número 1 e somamos os dois, ou seja,  $1 + 1 = 2$ . Em seguida, somamos o resultado com o número antecessor, ou seja,  $2 + 1 = 3$ , e assim continuamente, em uma sequência infinita:

$$3 + 2 = 5$$

$$5 + 3 = 8$$

$$8 + 5 = 13$$

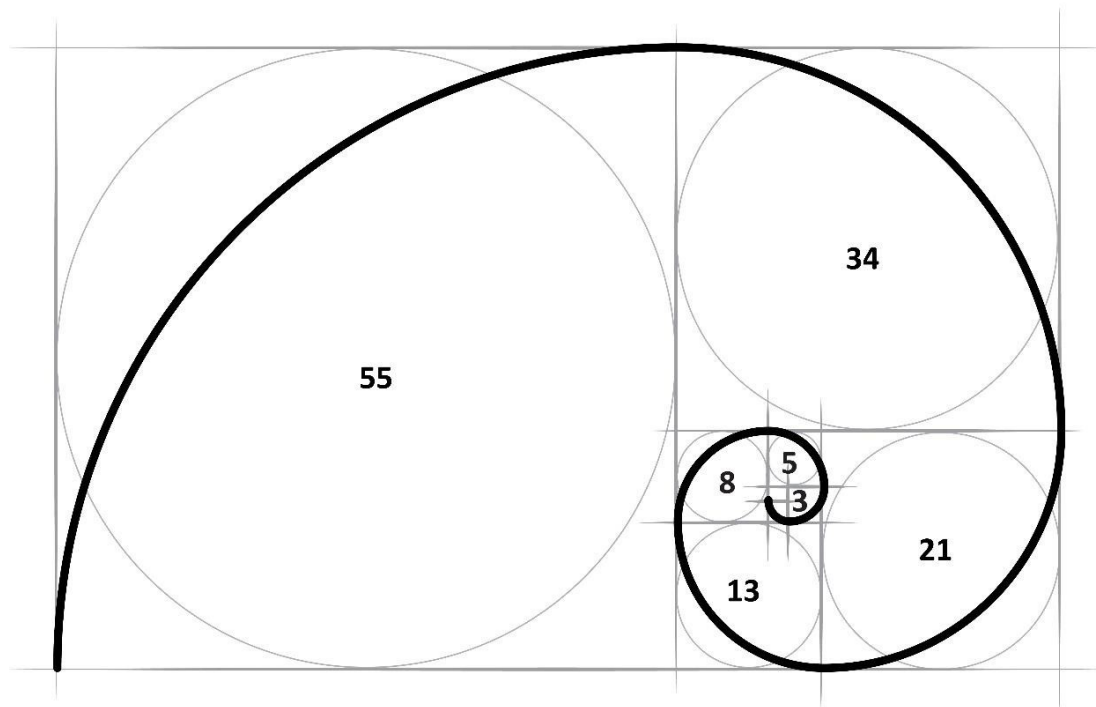
$$13 + 8 = 21$$

$$21 + 13 = 34$$

$$34 + 21 = 55$$

$$55 + 34 = 89$$

A partir dessa sequência, pode ser construído um retângulo, chamado de Retângulo de Ouro e, ao desenhar um arco dentro do retângulo, obtemos a Espiral de Fibonacci:



*Arco dentro do Retângulo de Ouro: Espiral de Fibonacci.*

Um fato interessante é que, a partir do número 3, podemos obter uma constante entre o coeficiente de um número com o seu anterior, cujo resultado é aproximadamente 1,618. Esse número também é chamado de “número de ouro” ou “proporção áurea”, utilizada na arte, na arquitetura

e no design por ser vista como agradável aos olhos humanos. Quando mais você desenvolve a sequência de Fibonacci, mais a divisão entre um termo e seu antecessor fica próxima a esse valor.

### **Curiosidades da sequência de Fibonacci**

Leonardo Pisa tornou essa sequência conhecida em seu livro *Liber Abaci*, ou *Livro do Ábaco*, o qual data de 1202. Porém, sabe-se que os indianos já haviam descrito essa sequência anteriormente.

A sequência de Fibonacci é usada em análises financeiras e na informática. Leonardo Da Vinci também a usou para fazer desenhos e chamou a sequência de Divina Proporção.

Existem alguns exemplos em que a espiral de Fibonacci aparece na natureza. Veja:

**Artes:** a sequência de Fibonacci foi uma das principais marcas do Renascimento. A Mona Lisa, de Leonardo da Vinci, é um dos exemplos que apresenta essa razão na relação entre tronco e cabeça e entre os elementos do rosto da personagem retratada.

**Camaleão:** quando seu rabo está enrolado, é vista uma das representações mais perfeitas da espiral de Fibonacci entre os animais.

**Corpo humano:** se um ser humano com altura mediana dividir sua altura pela distância entre o umbigo e a cabeça, o resultado será um número em torno de 1,618.

**Concha do caramujo:** cada novo pedaço formado possui a dimensão dos dois antecessores somados.

**Girassol:** as sementes dessa flor preenchem o miolo organizadas em dois conjuntos de espirais, geralmente 21 no sentido horário e 34 no anti-horário.

**Mãos:** as articulações de todos os dedos se relacionam na razão áurea, com exceção do polegar.

**Rosto:** algumas pessoas dizem que em rostos considerados harmoniosos, a divisão da distância entre o centro da boca e o “terceiro olho” pela distância entre esse mesmo ponto e uma das pupilas é 1,618.

# MATEMÁTICA

## PROGRESSÕES

### Progressão Aritmética (p.a.)

A **Progressão Aritmética (P.A.)** é uma sequência de números onde a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma. Essa diferença constante é chamada de razão da P.A..

Sendo assim, a partir do segundo elemento da sequência, os números que surgem são resultantes da soma da constante com o valor do elemento anterior.

Isso é o que a diferencia da progressão geométrica (P.G.), pois nesta, os números são multiplicados pela razão, enquanto na progressão aritmética, eles são somados.

As progressões aritméticas podem apresentar um número determinado de termos (P.A. finita) ou um número infinito de termos (P.A. infinita).

Para indicar que uma sequência continua indefinidamente utilizamos reticências, por exemplo:

a sequência (4, 7, 10, 13, 16, ...) é uma P.A. infinita.

a sequência (70, 60, 50, 40, 30, 20, 10) é uma P.A. finita.

Cada termo de uma P.A. é identificado pela posição que ocupa na sequência e para representar cada termo utilizamos uma letra (normalmente a letra **a**) seguida de um número que indica sua posição na sequência.

Por exemplo, o termo **a<sub>4</sub>** na P.A (2, 4, 6, 8, 10) é o número 8, pois é o número que ocupa a 4ª posição na sequência.

## Classificação de uma P.A.

De acordo com o valor da razão, as progressões aritméticas são classificadas em:

**Constante:** quando a razão for igual a zero. Por exemplo: (4, 4, 4, 4, 4...), sendo  $r = 0$ .

**Crescente:** quando a razão for maior que zero. Por exemplo: (2, 4, 6, 8, 10...), sendo  $r = 2$ .

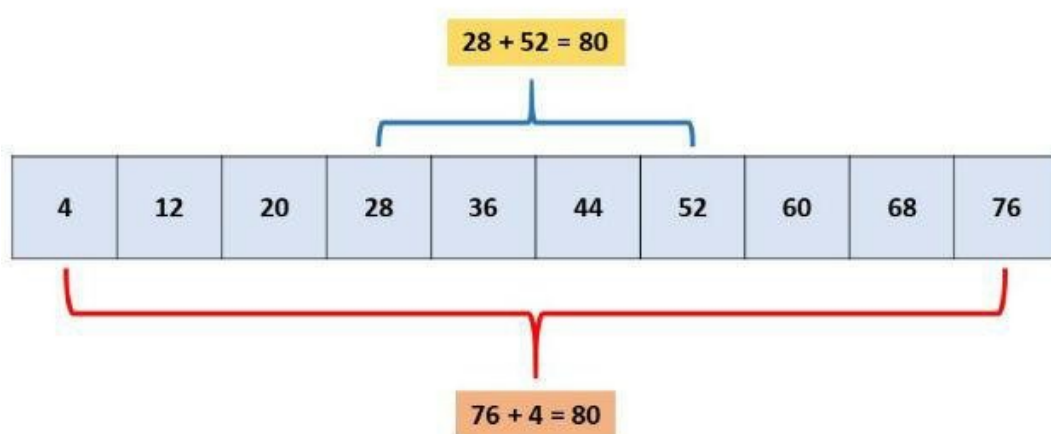
**Decrescente:** quando a razão for menor que zero (15, 10, 5, 0, -5,...), sendo  $r = -5$ .

## Propriedades da P.A.

### 1ª propriedade:

Em uma P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

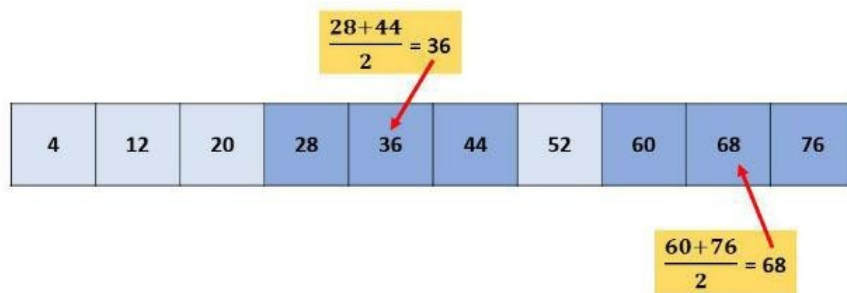
### Exemplo



### 2ª propriedade:

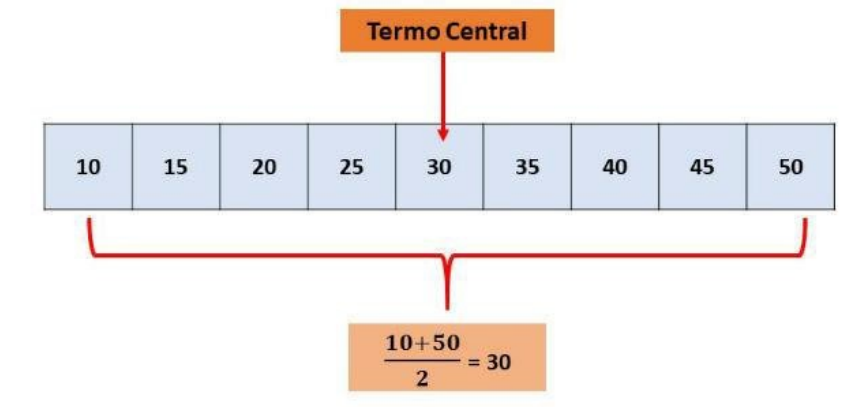
Considerando três termos consecutivos de uma P.A., o termo do meio será igual a média aritmética dos outros dois termos.

## Exemplo



## 3ª propriedade:

Em uma P.A. finita com número de termos ímpar, o termo central será igual a média aritmética do primeiro termo com o último termo.



## Fórmula do Termo Geral

Como a razão de uma P.A. é constante, podemos calcular seu valor a partir de quaisquer termos consecutivos, ou seja:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

Sendo assim, podemos encontrar o valor do segundo termo da P.A. fazendo:

$$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$$

Para encontrar o terceiro termo utilizaremos o mesmo cálculo:

$$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r$$

Substituindo o valor de  $a_2$ , que encontramos anteriormente, temos:

$$a_3 = (a_1 + r) + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

Se seguirmos o mesmo raciocínio, podemos encontrar:

$$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$

Observando os resultados encontrados, notamos que cada termo será igual a soma do primeiro termo com a razão multiplicada pela posição anterior.

Esse cálculo é expresso através da fórmula do termo geral da P.A., que nos permite conhecer qualquer elemento de uma progressão aritmética.

Assim, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Onde,

**$a_n$** : termo que queremos calcular

**$a_1$** : primeiro termo da P.A.

**$n$** : posição do termo que queremos descobrir

**$r$** : razão

### **Exemplo**

Calcule o 10º termo da P.A.: (26, 31, 36, 41, ...)

### **Solução**

Primeiro, devemos identificar que  $a_1 = 26$ ,  $r = 31 - 26 = 5$  e  $n = 10$  (10º termo). Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{10} = 26 + (10-1) \cdot 5$$

$$a_{10} = 26 + 9 \cdot 5$$

$$a_{10} = 71$$

Portanto, o décimo termo da progressão aritmética indicada é igual a 71.

### **Soma dos Termos de uma P.A.**

Para encontrar a soma dos termos de uma P.A. finita, basta utilizar a fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Onde,

**S<sub>n</sub>**: soma dos n primeiros termos da P.A.

**a<sub>1</sub>**: primeiro termo da P.A.

**a<sub>n</sub>**: ocupa a enésima posição na sequência

**n**: posição do termo

# MATEMÁTICA

## PROGRESSÕES

### Progressão Geométrica (P.G.)

**Progressão Geométrica (PG)** corresponde a uma sequência numérica cujo quociente (**q**) ou razão entre um número e outro (exceto o primeiro) é **sempre igual**.

Em outras palavras, o número **multiplicado** pela razão (**q**) estabelecida na sequência, corresponderá ao próximo número, por exemplo:

**PG: (2,4,8,16, 32, 64, 128, 256...)**

No exemplo acima, podemos constatar que na razão ou quociente (**q**) da PG entre os números, o número que multiplicado pela razão (**q**) determina seu consecutivo, é o número 2:

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$8 \cdot 2 = 16$$

$$16 \cdot 2 = 32$$

$$32 \cdot 2 = 64$$

$$64 \cdot 2 = 128$$

$$128 \cdot 2 = 256$$

Vale lembrar que a razão de uma PG é sempre **constante** e pode ser qualquer número racional (positivos, negativos, frações) exceto o número zero (0).

### Classificação das Progressões Geométricas

De acordo com o **valor da razão (q)**, podemos dividir as Progressões Geométricas (PG) em 4 tipos:

### **PG Crescente**

Na PG crescente a razão é sempre positiva ( $q > 0$ ) formada por números crescentes, por exemplo:

(1, 3, 9, 27, 81, ...), onde  $q = 3$

### **PG Decrescente**

Na PG decrescente, a razão é sempre positiva ( $q > 0$ ) e diferente de zero (0) formada por números decrescentes.

Ou seja, os números da sequência são sempre menores do que seus antecessores, por exemplo:

(-1, -3, -9, -27, -81, ...) onde  $q = 3$

### **PG Oscilante**

Na PG oscilante, a razão é negativa ( $q < 0$ ), formada por números negativos e positivos, por exemplo:

(3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384, 768, ...), onde  $q = -2$

### **PG Constante**

Na PG constante, a razão é sempre igual a 1 formada pelos mesmos números  $a$ , por exemplo:

(5, 5, 5, 5, 5, 5, ...) onde  $q = 1$

### **Fórmula do Termo Geral**

Para encontrar qualquer elemento da PG, utiliza-se a expressão:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Onde:

$a_n$ : número que queremos obter

$a_1$ : o primeiro número da sequência

$q^{(n-1)}$ : razão elevada ao número que queremos obter, menos 1

Assim, para identificar o termo 20 de uma PG de razão  $q = 2$  e número inicial 2, calcula-se:

PG: (2,4,8,16, 32, 64, 128,...)

$$a_{20} = 2 \cdot 2^{(20-1)}$$

$$a_{20} = 2 \cdot 2^{19}$$

$$a_{20} = 1048576$$

### Soma dos Termos da PG

Para calcular a soma dos números presentes numa PG, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

onde:

**$S_n$** : Soma dos números da PG

**$a_1$** : primeiro termo da sequência

**$q$**  : razão

**$n$** : quantidade de elementos da PG

Dessa forma, para calcular a soma dos 10 primeiros termos da seguinte PG (1,2,4,8,16, 32,...):

$$S_{10} = \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{10} = 1023$$

### Curiosidade

Como na PG, a Progressão Aritmética (PA), corresponde a uma sequência numérica cujo quociente ( $q$ ) ou razão entre um número e outro (exceto o primeiro) é constante. A diferença é que enquanto na PG o número é multiplicado pela razão, na PA o número é somado.