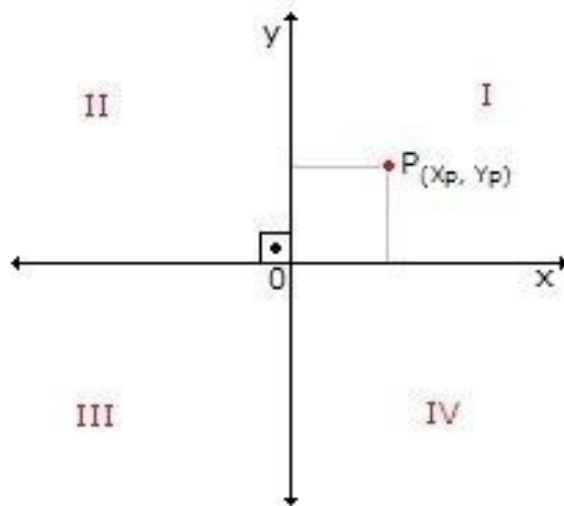


MATEMÁTICA

GEOMETRIA ANALÍTICA

Estudo do Ponto Analítico

Plano Cartesiano



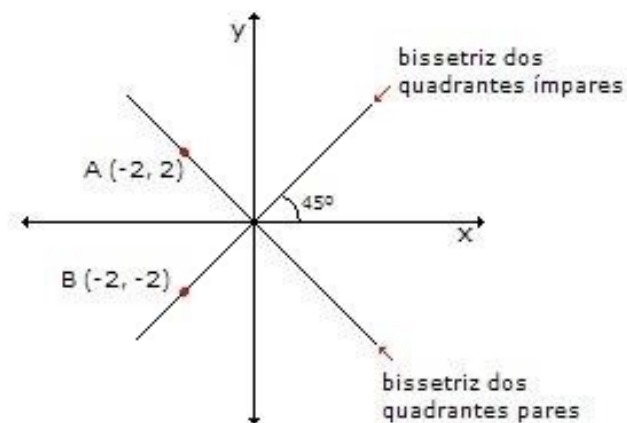
O Eixo Y (linha vertical) é chamado de eixo das ordenadas, enquanto que o Eixo X (linha horizontal), é chamado de eixo das abscissas.

O ponto P possui duas coordenadas: X e Y, que indicam em que lugar dos eixos das ordenadas e abscissas ele se encontra. Representa-se isso por (x_p, y_p)

Bissetrizes

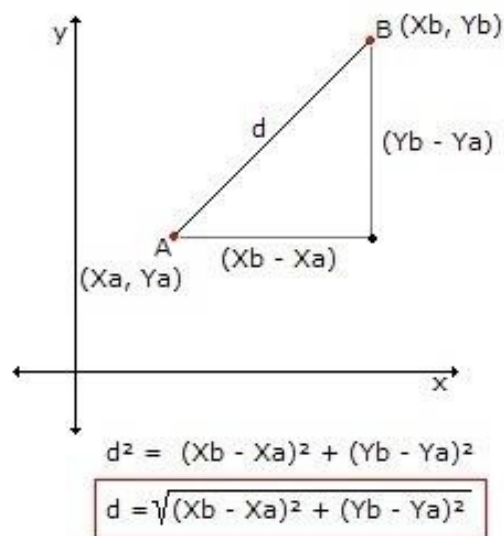
As bissetrizes são retas que cortam exatamente o centro do plano cartesiano (ponto $(0, 0)$), e formam um ângulo de 45° com os eixos X e Y. As coordenadas dos pontos que estão sobre a bissetriz que se encontra nos quadrantes **pares** são sempre opostos (se X for positivo, Y será

negativo, e vice-versa). Já os pontos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, terão os valores de X e Y iguais. Veja no desenho abaixo:



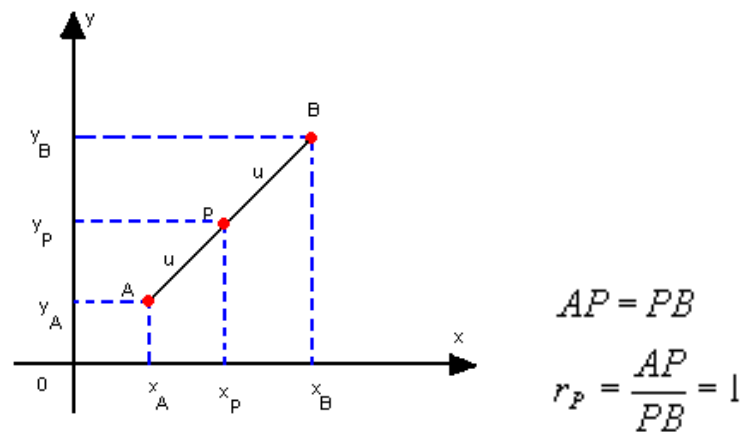
Distância entre dois pontos

Se soubermos as coordenadas de dois pontos no plano cartesiano (ponto A e B), é possível determinar a sua distância, utilizando o teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$).



Ponto médio de um segmento

Dados os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e P , que divide $\overline{AB}$ ao meio, temos:



Assim:

$$X_P - X_A = X_B - X_P \Rightarrow 2X_P = X_A + X_B \Rightarrow \frac{X_A + X_B}{2} \text{ (média aritmética de } X_A \text{ e } X_B \text{)}$$

$$Y_P - Y_A = Y_B - Y_P \Rightarrow 2Y_P = Y_A + Y_B \Rightarrow Y_P = \frac{Y_A + Y_B}{2} \text{ (média aritmética de } Y_A \text{ e } Y_B \text{)}$$

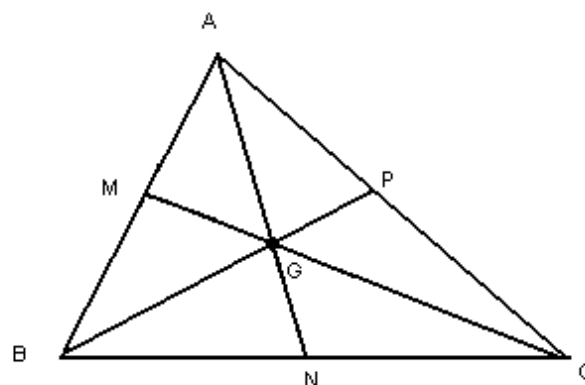
Logo, as coordenadas do ponto médio são dadas por:

$$P\left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}\right)$$

Baricentro de um triângulo

Observe o triângulo da figura a seguir, em que M, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente.

Portanto, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CM}$ são as medianas desse triângulo:



Chamamos de baricentro (G) o ponto de intersecção das medianas de um triângulo.

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Área de um triângulo

Seja o triângulo ABC de vértices $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$. A área S desse triângulo é dada por

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D|.$$

Temos, portanto,

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

Condição de Alinhamento de três pontos

Três pontos estão alinhados se são colineares, isto é, se pertencem a uma mesma reta.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

MATEMÁTICA

GEOMETRIA PLANA

Reta, Semirreta e Segmento de Reta

A reta é formada por infinitos pontos que estão alinhados. Ela é ilimitada nos dois sentidos. Quando construímos uma reta devemos utilizar letras minúsculas para representá-la. Observe:



Uma reta pode ser construída em três posições: horizontal, vertical ou inclinada.

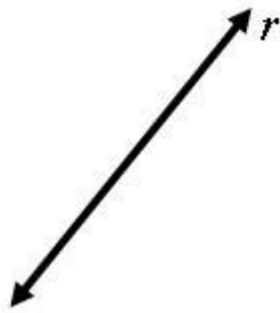
Horizontal



Vertical



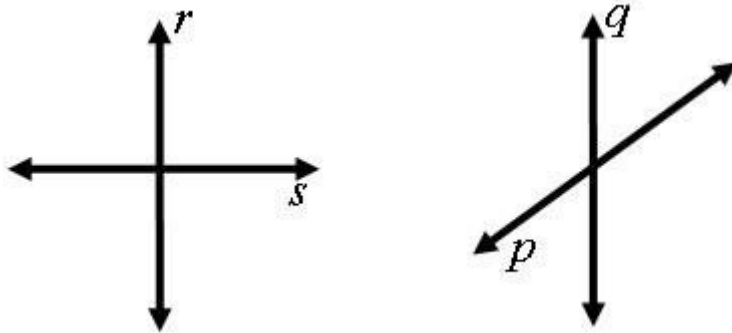
Inclinada



Duas ou mais retas podem ter as seguintes posições:

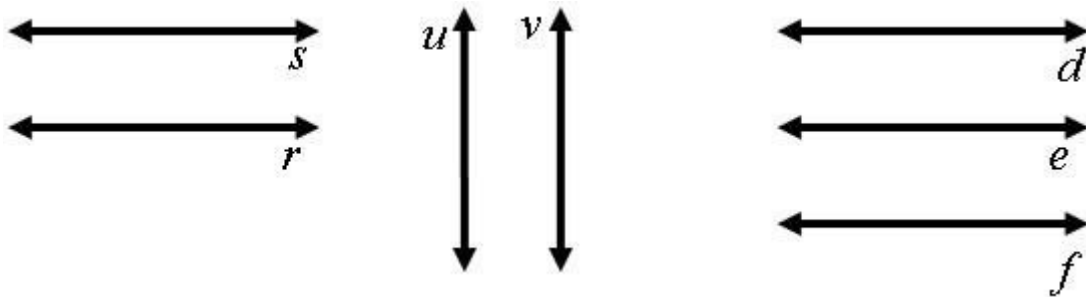
Concorrentes

Retas concorrentes possuem um ponto em comum, pois elas se cruzam.



Paralelas

As retas paralelas não possuem ponto em comum.

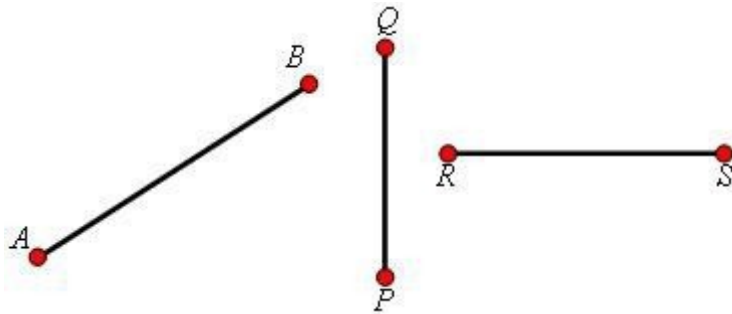


Segmento de Reta

O segmento de reta é limitado por dois pontos da reta. Observe:

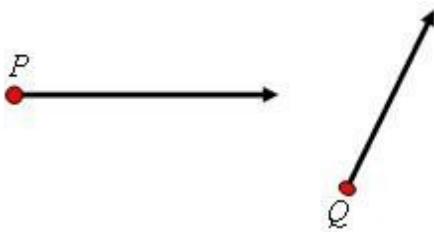


A parte entre os pontos A e B é chamado de segmento de reta. Veja mais segmentos de reta:



Semirreta

A semirreta possui origem, mas é ilimitada no outro sentido, isso é, possui início, mas não tem fim.



MATEMÁTICA

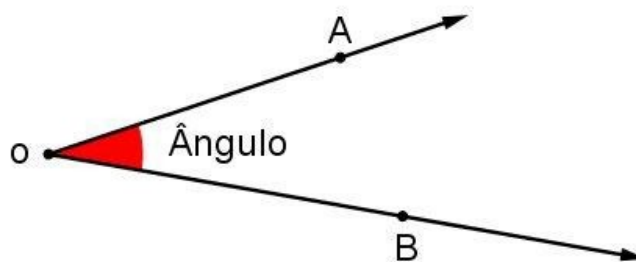
GEOMETRIA ESPACIAL

Ângulos

O estudo dos **ângulos** é fundamental para compreender conceitos ligados a geometria, trigonometria, entre outros ramos da Matemática. O estudo dos ângulos é um dos responsáveis pelos avanços que possuímos atualmente em vários ramos, como a navegação e a astronomia. Um exemplo notável é o astrolábio náutico (inventado pelo grego Hiparco) usado para medir ângulos. Nos séculos V e VI, os navegadores construíram esse instrumento para medir a elevação das estrelas e do sol com o intuito de localizar suas embarcações. Mais tarde, o astrolábio deu origem ao sextante, mais simplificado, mas que cumpria a mesma função.

Definição de ângulo

Chama-se ângulo a região entre duas semirretas que partem de uma mesma origem. Podemos dizer, ainda que um ângulo é a medida da abertura de duas semirretas que partem da mesma origem.



Indica-se: $\angle AOB$, $\angle BOA$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$ ou $\hat{O}$.

O ponto "O" é o vértice do ângulo e as semirretas OA e OB são os lados do ângulo.

Ângulos consecutivos

Dois ângulos são consecutivos se eles compartilham um mesmo lado, ou seja, se o lado de um, for também o mesmo lado do outro.

Ângulos adjacentes

Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não compartilham pontos internos, ou seja, não estão sobrepostos um ou outro.

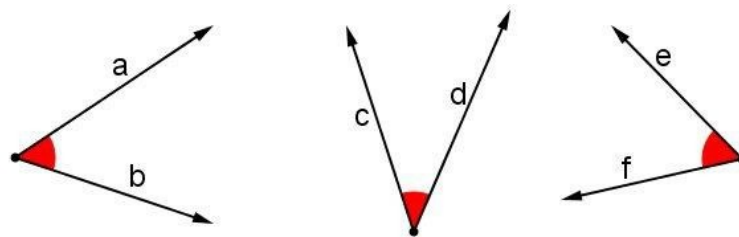
Congruência ($\cong$)

Para que ângulos possam ser considerados congruentes (iguais), devem satisfazer os seguintes postulados:

reflexiva: todo ângulo é congruente a si mesmo ($\hat{a}ob \cong \hat{a}ob$)

simétrica: se $\hat{a}ob \cong \hat{c}od$, então $\hat{c}od \cong \hat{a}ob$

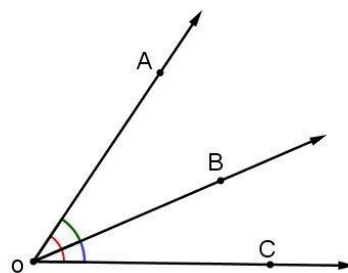
transitiva: se $\hat{a}ob \cong \hat{c}od$ e $\hat{c}od \cong \hat{e}of$ então $\hat{a}ob \cong \hat{e}of$



Adição de ângulos

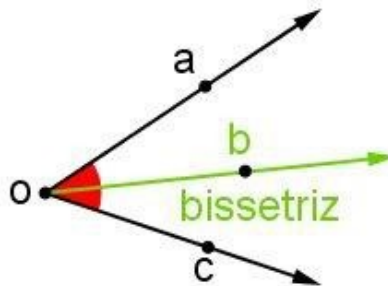
Se a semirreta OB é interna ao ângulo AÔC, o ângulo AÔC é a soma dos ângulos AÔB e BÔC. Assim:

$$\hat{A}OC = \hat{A}OB + \hat{BOC}$$



Bissetriz de um ângulo

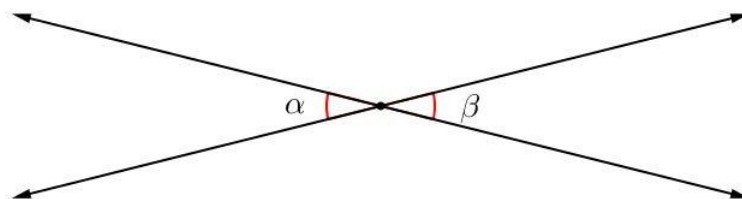
A bissetriz de um ângulo é a semirreta que parte do vértice do ângulo e o divide em dois ângulos congruentes (iguais).



Formalmente falando, uma semirreta ob interna ao ângulo aôc, é bissetriz desse ângulo se, e somente se, $aôb \cong bôc$.

Ângulos opostos pelo vértice

Dizemos que dois ângulos são opostos pelo vértice se as semirretas que os formam partem do mesmo vértice e são opostas aos lados do outro.



$$\alpha = \beta$$

Medida de um ângulo - amplitude

A medida de um ângulo é um número real positivo associado a ele, de forma que:

Ângulos congruentes têm medidas iguais e ângulos iguais são congruentes.

Se um ângulo α é maior que um ângulo β , então a medida de α será maior que a medida de β .

A soma de dois ou mais ângulos é a soma das medidas de cada um desses ângulos.

Chamamos a medida de um ângulo de amplitude.

Unidades de medida de um ângulo

Grau (°)

A unidade principal de medida de um ângulo é o grau (°).

1° (um grau) equivale a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência, ou seja, 1° corresponde a uma das 360 partes em que uma circunferência foi dividida. Assim, uma circunferência inteira possui 360°.

Minuto (')

Quando queremos expressar medidas de ângulos menores que 1°, utilizamos a medida *minuto* ('). Um minuto corresponde a $\frac{1}{60}$ de um grau, ou seja, 1 minuto (1') corresponde a uma das 60 partes em que um ângulo de 1° foi dividido.

$$1' = \frac{1^\circ}{60}$$

Um grau possui 60 minutos (1° = 60').

Segundo (")

Quando queremos expressar medidas de ângulos menores que 1°, utilizamos a medida *segundo* ("). Um segundo corresponde a $\frac{1}{60}$ de um minuto, ou seja, 1 segundo (1'') corresponde a uma das 60 partes em que um ângulo de 1' foi dividido.

$$1'' = \frac{1'}{60}$$

Um minuto possui 60 segundos (1' = 60'').

Grado

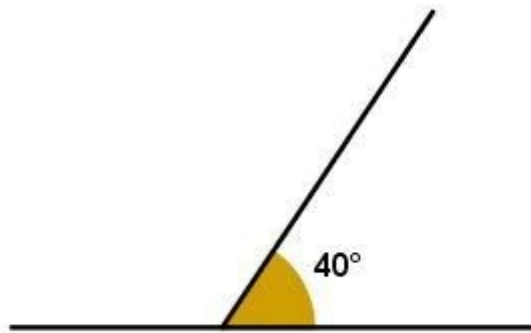
Esta medida não é muito usual.

Um grado corresponde a $\frac{1}{100}$ de um grau, ou seja, 1 grado (1 gr) corresponde a 9 das 10 partes em que um ângulo de 1° foi dividido.

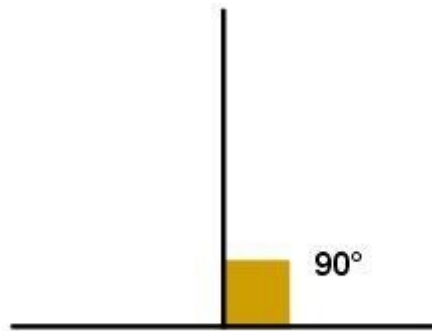
Classificação de ângulos

Os ângulos podem ser classificados de acordo com a sua medida.

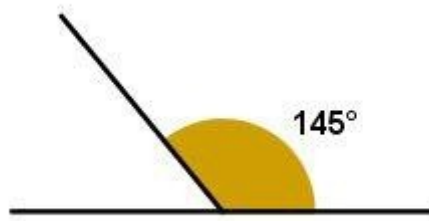
Ângulo agudo: ângulo com medida menor que 90° ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).



Ângulo reto: ângulo com medida igual a 90° .



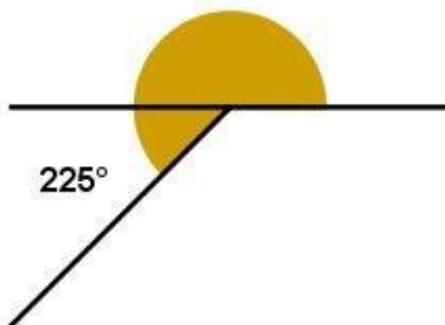
Ângulo obtuso: ângulo com medida maior que 90° ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$).



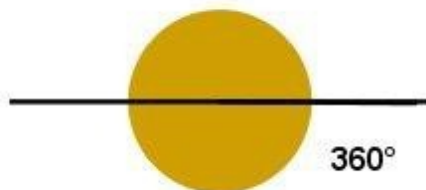
Ângulo raso: ângulo com medida igual a 0° ou 180° .



Ângulo Côncavo: ângulo com medida entre 180° e 360° .

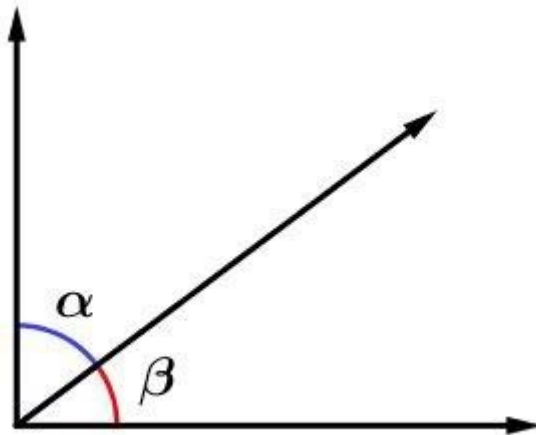


Ângulo completo ou de uma volta: ângulo com medida igual a 360° .



Ângulos complementares

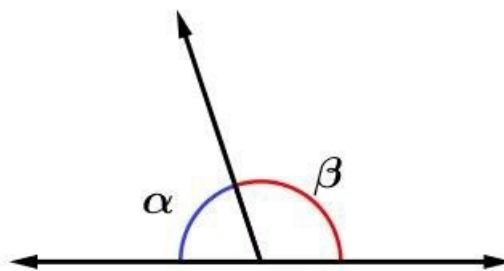
Dizemos que dois ângulos são complementares quando a sua soma equivale a 90° .



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Ângulos suplementares

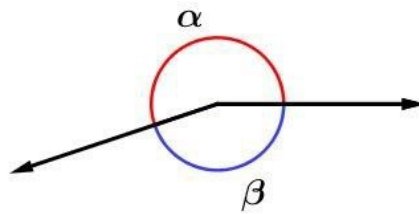
Dizemos que dois ângulos são suplementares se, e somente se, a sua soma for igual a 180° .



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Ângulos replementares

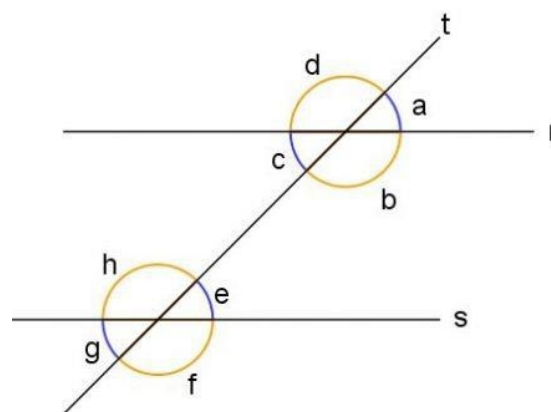
Dois ângulos são replementares quando a sua soma for igual a 360° .



$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

Retas paralelas cortadas por uma transversal

Duas retas paralelas e distintas, r e s , cortadas por uma outra reta transversal t delimitam oito ângulos, como na figura. Esses ângulos serão suplementares ou congruentes.



Nesses casos, podemos atribuir alguns nomes especiais, veja:

$$\text{Correspondentes: } \begin{cases} a = e \\ b = f \\ d = h \\ c = g \end{cases}$$

$$\text{Alternos: } \begin{cases} \text{internos: } \begin{cases} b = h \\ c = e \end{cases} \\ \text{externos: } \begin{cases} a = g \\ d = f \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Colaterais: } \begin{cases} \text{internos: } \begin{cases} b + e = 180^\circ \\ c + h = 180^\circ \end{cases} \\ \text{externos: } \begin{cases} a + f = 180^\circ \\ d + g = 180^\circ \end{cases} \end{cases}$$

MATEMÁTICA

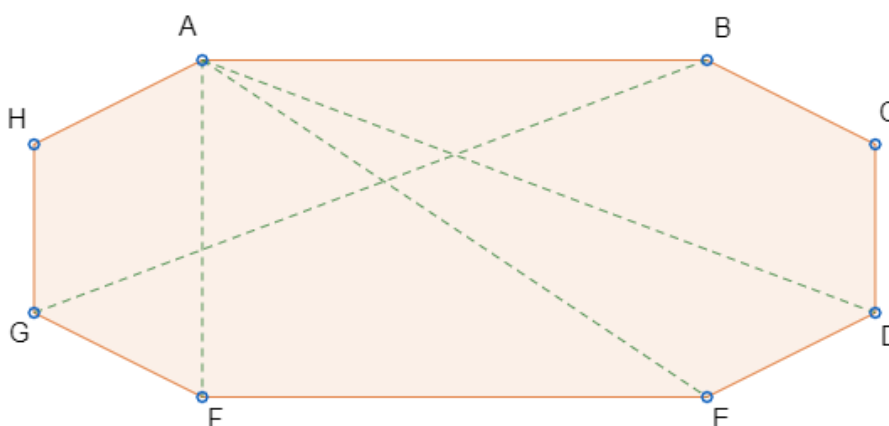
GEOMETRIA PLANA

polígonos

Polígonos são figuras geométricas planas e fechadas formadas por segmentos de reta. Os polígonos dividem-se em dois grupos, os **convexos** e os **não convexos**. Quando um polígono possui todos os seus lados iguais e, conseqüentemente, todos os ângulos internos iguais, trata-se de um polígono **regular**. Os polígonos regulares podem ser nomeados de acordo com a quantidade de seus lados.

Elementos de um polígono

Polígono é a figura plana e fechada formada pela união de um número finito de segmentos de retas. Assim, considere um polígono qualquer:



Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H são os **vértices** do polígono e são formados pelos encontros dos segmentos AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH e HA, chamados **lados** do polígono.

Os segmentos AF, AE, AD e BG são as **diagonais** do polígono. (Perceba que esses são alguns exemplos de diagonais, no polígono anterior temos mais dessas.) Diagonais são **segmentos de retas que “ligam” os vértices do polígono**.

Nomenclatura de um polígono

Podemos nomear os polígonos de acordo com seu **número de lados**. Veja na tabela a seguir o nome dos principais polígonos.

Número de lados (n)	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

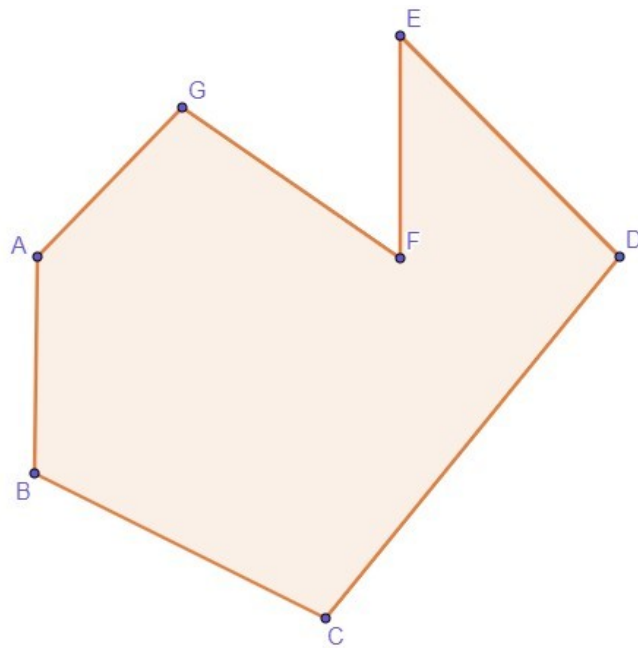
Note que não é necessário decorar a tabela e sim entendê-la. Com exceção do triângulo e do quadrilátero, a formação da palavra é:

Número de lados + gono

Por exemplo, quando temos o polígono de **cinco lados**, automaticamente nos lembramos do prefixo **penta** mais o sufixo gono: **pentágono**.

Exemplo

Determine o nome do polígono a seguir:



A quantidade de lados do polígono é sete, logo, o polígono é um heptágono.

Classificação dos polígonos

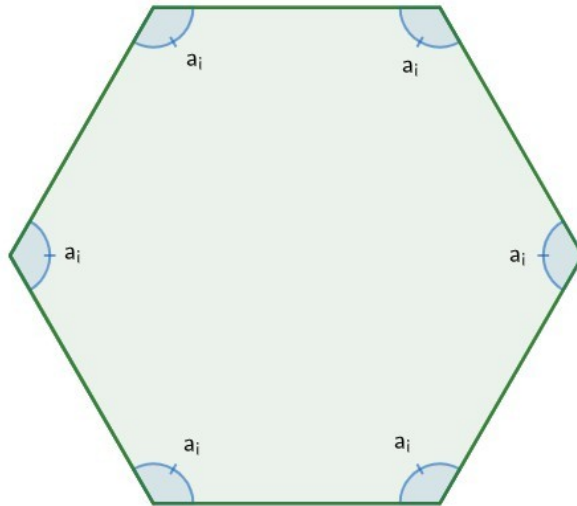
Os polígonos são classificados pela **medida de seus ângulos e lados**. Um polígono é dito equilátero quando possui lados congruentes, ou seja, todos lados iguais; e será dito equiângulo quando possuir ângulos congruentes, isto é, todos ângulos iguais.

Caso um polígono seja equilátero e equiângulo, então ele será um **polígono regular**.

Em todo polígono regular, o centro tem a mesma distância dos lados, ou seja, é equidistante dos lados. O centro do polígono é também o centro da circunferência inscrita no polígono, ou seja, a circunferência que está “dentro” da circunferência.

Soma dos ângulos internos de um polígono

Seja a_i um ângulo interno de um polígono regular de n lados, representaremos a soma desses ângulos internos por S_i .



Assim, a soma dos ângulos internos é dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Para calcular o valor de cada ângulo interno, basta pegar o valor da soma dos ângulos internos e dividir pelo número de lados, ou seja:

$$a_i = \frac{S_i}{n}$$

n

Exemplo 1

Determine a soma dos ângulos internos e, em seguida, a medida de cada ângulo interno de um icosaágono.

Sabemos que um icosaágono possui vinte lados, logo, $n = 20$. Substituindo nas relações, temos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$= (20 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 18 \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 3240^\circ$$

Agora, para determinar o valor de cada ângulo interno, basta dividir o valor encontrado pelo número de lados:

$$a_i = \frac{3240^\circ}{20}$$

$$20$$

$$a_i = 162^\circ$$

Exemplo 2

A soma dos ângulos internos de um polígono regular é 720° , determine o polígono.

Substituindo a informação do enunciado na fórmula, temos:

$$720^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$720^\circ = 180n - 360^\circ$$

$$180n = 720^\circ + 360^\circ$$

$$180n = 1080^\circ$$

$$n = \frac{1080^\circ}{180^\circ}$$

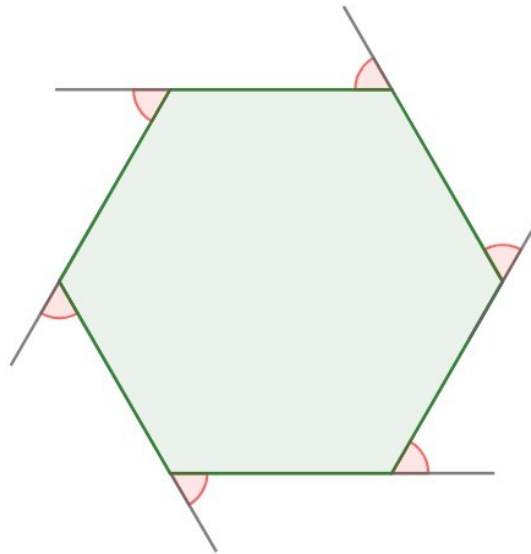
$$n = 6$$

$n = 6$ lados Assim,

o polígono procurado é o hexágono. **Soma dos ângulos**

externos de um polígono

A soma dos ângulos externos de um polígono é sempre **igual a 360°** .



$$S_e = 360^\circ$$

$$a_e = \frac{S_e}{n}$$

$$a_e = \frac{360^\circ}{6}$$

$$a_e = 60^\circ$$

$$a_e = 60^\circ$$

Diagonais dos polígonos

Considere um polígono de n lados. Para determinar o número de diagonais (d), utilizamos a seguinte relação:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Exemplo

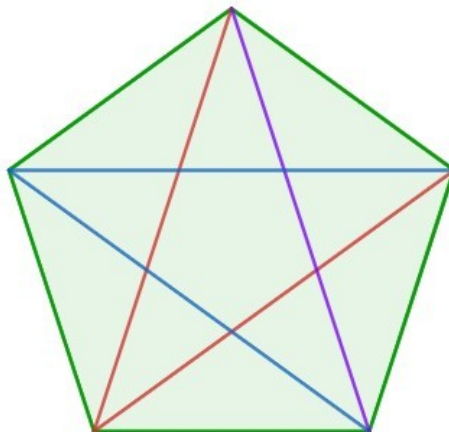
Determine o número de diagonais de um pentágono e represente-as graficamente.

Sabemos que um pentágono possui cinco lados, assim, $n = 5$. Substituindo na expressão, temos que:

$$d = \frac{5 \cdot (5 - 3)}{2}$$

$$d = \frac{5 \cdot 2}{2}$$

$$d = 5$$



Área e perímetro dos polígonos

O **perímetro** de polígonos é definido pela **soma de todos os lados**. A área de um polígono é calculada a partir da divisão do polígono em figuras cujo cálculo da área é mais fácil, como o triângulo e o quadrado.

$$A_{\Delta} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

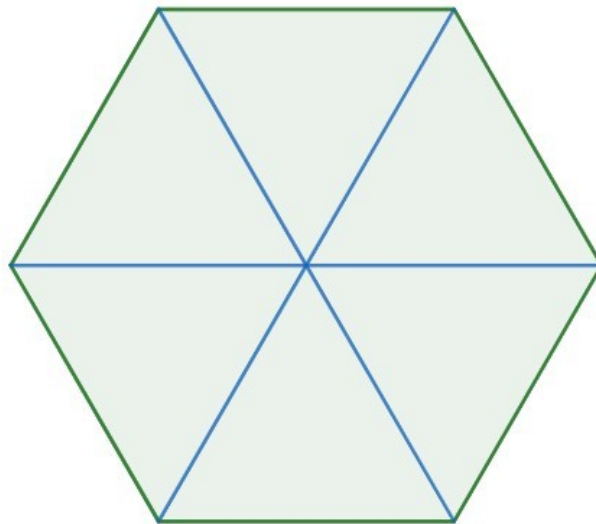
$$A_{\text{quadrado}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Exemplo

Determine uma expressão matemática que represente a área de um hexágono regular.

Solução:

Inicialmente, considere um hexágono regular e todos os segmentos de retas que liguem o centro do polígono a cada vértice. Assim:



Perceba que, devido ao fato do hexágono ser regular, ao dividi-lo, encontramos seis triângulos equiláteros, logo, a área do hexágono é seis vezes a área do triângulo equilátero, ou seja:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\Delta}$$

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}$$

4

$$A_{\text{hexágono}} = 3 \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}$$

2

$$A_{\text{hexágono}} = 3 \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}$$

2

MATEMÁTICA

ADICIONAIS

Cevianas e Pontos Notáveis do Triângulo

Ceviana

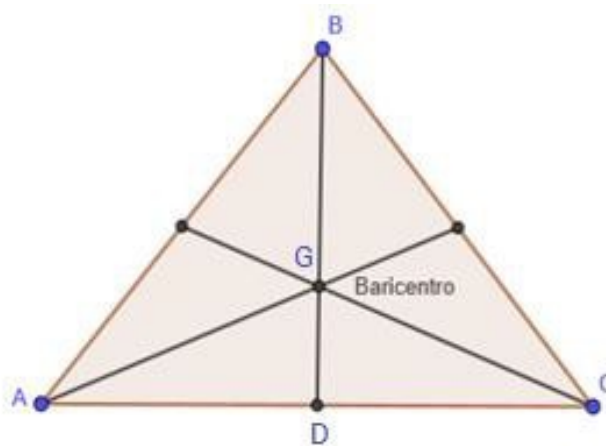
Ceviana é qualquer segmento que parte de um vértice de um triângulo e corta o lado oposto a esse vértice. São exemplos de cevianas: mediana, altura e bissetriz.

Mediana

Mediana é uma ceviana que liga o vértice de onde ela parte ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Baricentro

O baricentro é exatamente o ponto de encontro das medianas. É o centro de gravidade (ponto de equilíbrio) do triângulo.



Importante saber que se BD for a mediana do triângulo temos algumas relações importantes:

$$\overline{BG} = 2\overline{DG}$$

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BD}$$

$$\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{BD}$$

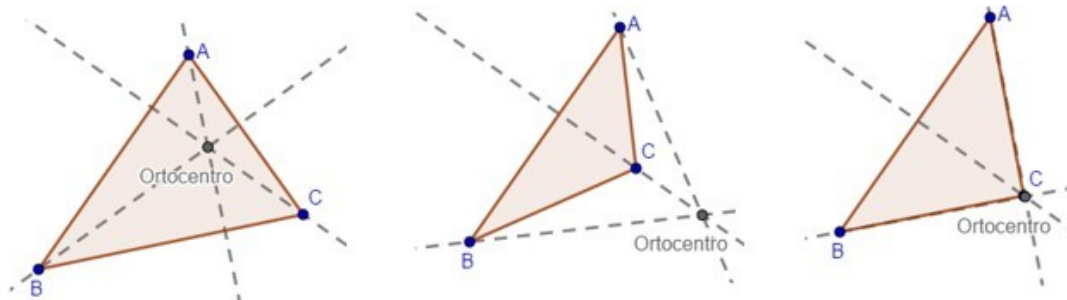
Obs: É importante ressaltar que um triângulo possui três medianas e a propriedade do baricentro funciona com todas elas.

Altura

A altura é uma ceviana que parte de um vértice e faz 90° com o lado oposto ao mesmo, ou seja, ela é perpendicular ao lado oposto a esse vértice. De cada vértice do triângulo parte UMA altura.

Ortocentro

O ortocentro é exatamente o ponto de encontro das três alturas desse triângulo, podendo pertencer ao exterior do triângulo.

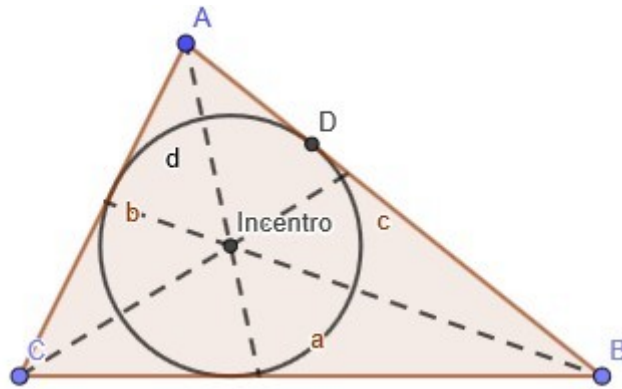


Bissetriz

A bissetriz é uma ceviana que parte de um vértice do triângulo e que divide ao meio o ângulo referente a esse vértice. Em um triângulo, de cada vértice parte UMA bissetriz.

Incentro

O incentro é o ponto onde se encontram as três bissetrizes do triângulo.



O incentro também é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo, pois equidista dos três lados.

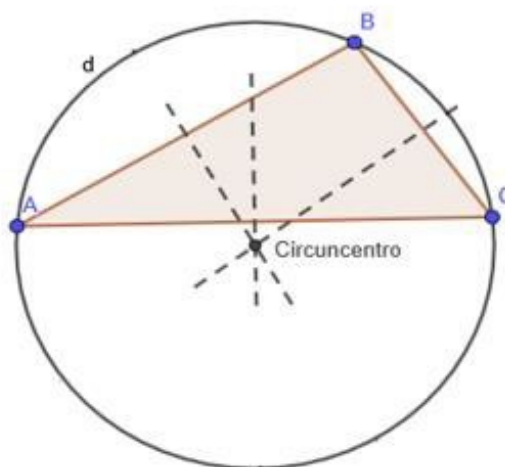
Mediatriz

Qualquer segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo e que passa por seu ponto médio.

A reta r é a mediatriz do triângulo ABC relativa ao lado BC pois é perpendicular a BC e M é ponto médio deste lado.

Circuncentro

Todo triângulo possui três mediatrizes que se encontram em um ponto denominado circuncentro, simbolizado na figura pela letra C:



O Circuncentro é equidistante dos lados do triângulo, logo é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Informações importantes:

No triângulo equilátero, os pontos notáveis são coincidentes.

No triângulo isósceles, a altura relativa à base também é bissetriz, mediana e mediatriz.

A Mediatriz não é dita ceviana, pois não necessariamente parte do vértice.

MATEMÁTICA

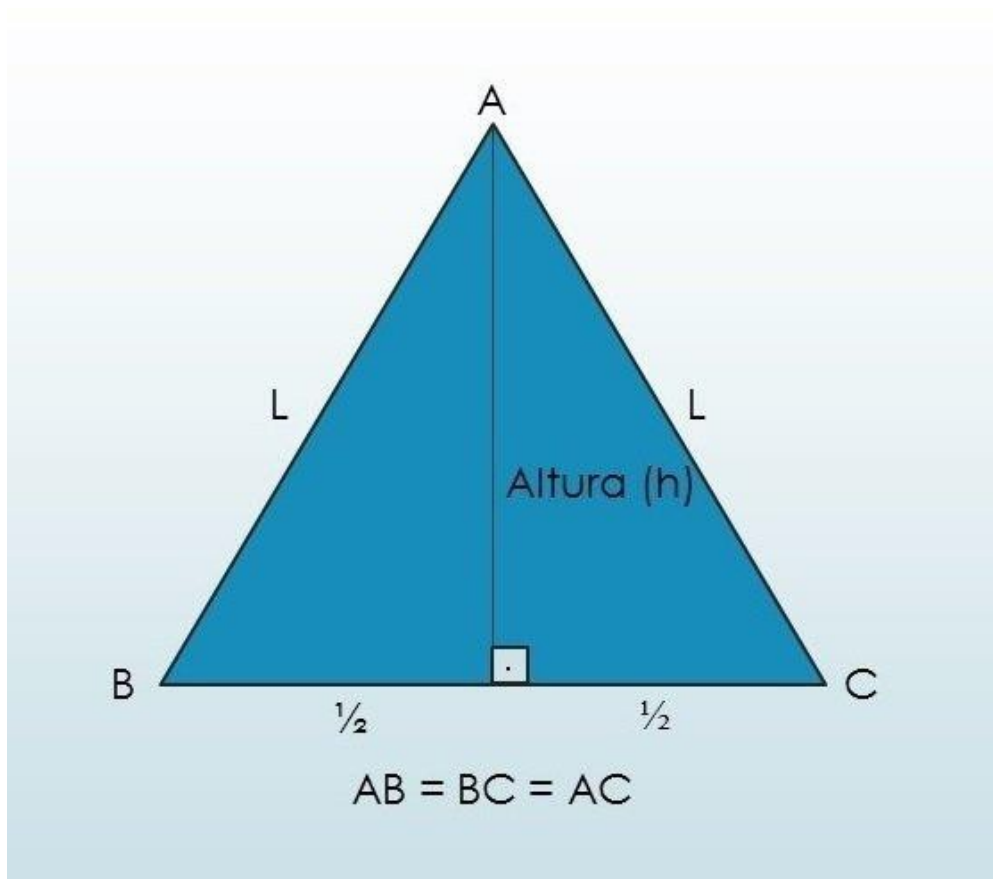
GEOMETRIA PLANA

Triângulo Equilátero

O **triângulo equilátero** é um tipo de triângulo que possui os três lados congruentes (mesma medida).

Além dos lados, os ângulos internos dessa figura apresentam as mesmas medidas: 3 ângulos de 60° , os quais totalizam 180° .

Lembre-se que os triângulos são figuras planas e fechadas constituídas por segmentos de reta, as quais são chamadas de polígonos.



Tipos de Triângulos

Além do triângulo equilátero existem outros tipos de triângulos:

Em relação aos **lados**:

Triângulo Isósceles: apresenta dois lados iguais e um diferente. Dois ângulos internos são congruentes.

Triângulo Escaleno: os três lados e os ângulos internos são diferentes.

Em relação aos **ângulos internos**:

Triângulo Retângulo: formado por um ângulo interno reto (90°).

Triângulo Obtusângulo: formado por dois ângulos internos agudos (menor que 90°) e um ângulo interno obtuso (maior que 90°).

Triângulo Acutângulo: formado por três ângulos internos menores que 90°.

Área e Perímetro

Área: a área de uma figura plana representa o tamanho de sua superfície.

Perímetro: o perímetro corresponde a soma de todos os lados de uma figura geométrica.

Fórmulas

Agora que você já sabe a diferença entre a área e o perímetro, veja abaixo as fórmulas utilizadas:

Área do Triângulo Equilátero

$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

A: área

L: lado

Perímetro do Triângulo Equilátero

$$P = 3 \cdot L$$

OU

$$P = L + L + L$$

P: perímetro

L: lado

Altura do Triângulo Equilátero

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

h: altura

L: lado

Fique Atento!

Lembre-se que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo totaliza 180°. Já a soma dos ângulos externos sempre resulta em 360°.

MATEMÁTICA

ADICIONAIS

Teorema de Pitágoras

O **Teorema de Pitágoras** relaciona o comprimento dos lados do triângulo retângulo. Essa figura geométrica é formada por um ângulo interno de 90°, chamado de ângulo reto.

O enunciado desse teorema é:

"A soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa."

Fórmula do teorema de Pitágoras

Segundo o enunciado do Teorema de Pitágoras, a fórmula é representada da seguinte maneira:

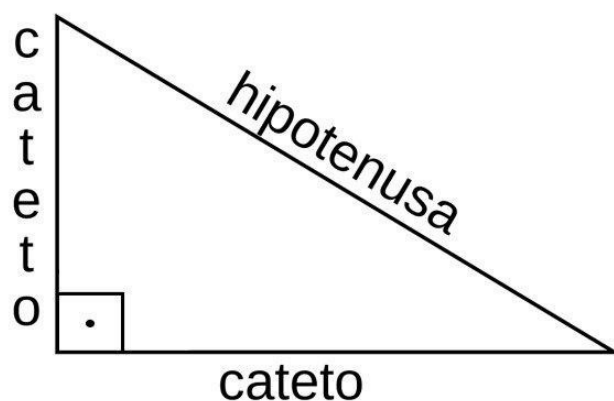
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Sendo,

a: hipotenusa

b: cateto

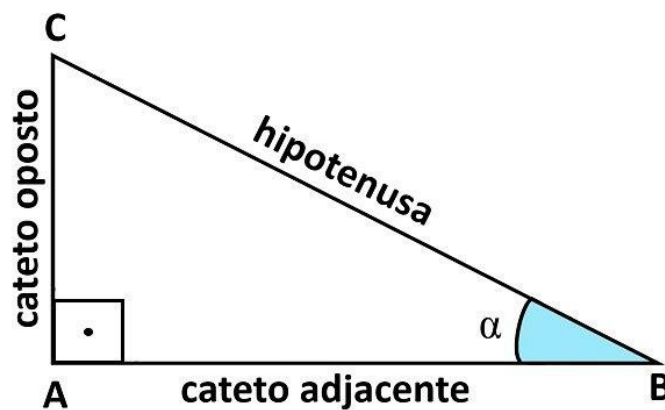
c: cateto



A **hipotenusa** é o maior lado de um triângulo retângulo e o lado oposto ao ângulo reto. Os outros dois lados são os catetos. O ângulo formado por esses dois lados tem medida igual a 90° (ângulo reto).

Identificamos ainda os catetos, de acordo com um ângulo de referência. Ou seja, o cateto poderá ser chamado de cateto adjacente ou cateto oposto.

Quando o cateto está junto ao ângulo de referência, é chamado de **adjacente**, por outro lado, se está contrário a este ângulo, é chamado de **oposto**.



Veja a seguir três exemplos de aplicações do teorema de Pitágoras para as relações métricas de um triângulo retângulo.

Exemplo 1: calcular a medida da hipotenusa

Se um triângulo retângulo apresenta 3 cm e 4 cm como medidas dos catetos, qual a hipotenusa desse triângulo?

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 4^2 + 3^2$$

$$a^2 = 16 + 9$$

$$a^2 = 25$$

$$a = \sqrt{25}$$

$$a = 5$$

Portanto, os lados do triângulo retângulo são 3 cm, 4 cm e 5 cm.

Exemplo 2: calcular a medida de um dos catetos

Determine a medida de um cateto que faz parte de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é 20 cm e o outro cateto mede 16 cm.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 20^2 - 16^2$$

$$b^2 = 400 - 256$$

$$b^2 = 144$$

$$b = \sqrt{144}$$

$$b = 12$$

Portanto, as medidas dos lados do triângulo retângulo são 12 cm, 16 cm e 20 cm.

Exemplo 3: comprovar se um triângulo é retângulo

Um triângulo apresenta os lados com medidas 5 cm, 12 cm e 13 cm. Como saber se é um triângulo retângulo?

Para provar que um triângulo retângulo é verdadeiro as medidas dos seus lados devem obedecer ao Teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$13^2 = 12^2 + 5^2$$

$$169 = 144 + 25$$

$$169 = 169$$

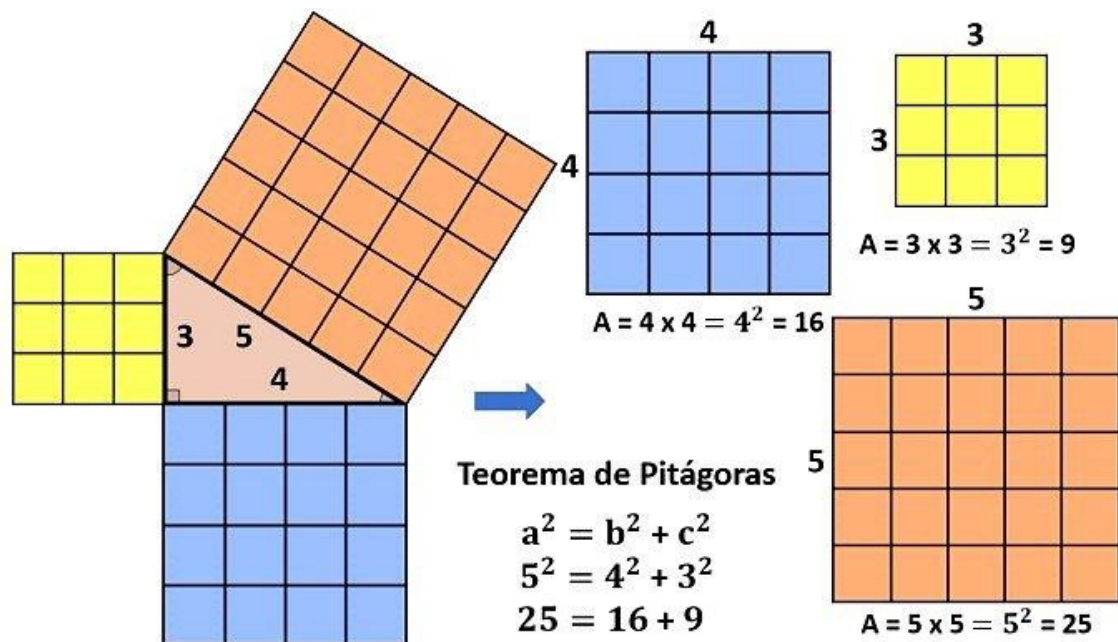
Como as medidas dadas satisfazem o teorema de Pitágoras, ou seja, o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos, então podemos dizer que o triângulo é retângulo.

Triângulo Pitagórico

Quando as medidas dos lados de um triângulo retângulo são números inteiros positivos, o triângulo é chamado de triângulo pitagórico.

Neste caso, os catetos e a hipotenusa são denominados de “terno pitagórico” ou “trio pitagórico”. Para verificar se três números formam um trio pitagórico, usamos a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

O mais conhecido trio pitagórico é representado pelos números: 3, 4, 5. Sendo a hipotenusa igual a 5, o cateto maior igual a 4 e o cateto menor igual a 3.



Observe que a área dos quadrados desenhados em cada lado do triângulo relaciona-se tal como o teorema de Pitágoras: a área do quadrado no lado maior corresponde à soma das áreas dos outros dois quadrados.

É interessante notar que, os múltiplos desses números também formam um terno pitagórico. Por exemplo, se multiplicarmos por 3 o trio 3, 4 e 5, obtemos os números 9, 12 e 15 que também formam um terno pitagórico.

Além do terno 3, 4 e 5, existe uma infinidade de outros ternos. Como exemplo, podemos citar:

5, 12 e 13

7, 24, 25

20, 21 e 29

12, 35 e 37

Quem foi Pitágoras?

Segundo a história Pitágoras de Samos (570 a.C. - 495 a.C.) foi um filósofo e matemático grego que fundou a Escola Pitagórica, localizada no sul da Itália. Também chamada de Sociedade Pitagórica, incluía estudos de Matemática, Astronomia e Música.

Embora as relações métricas do triângulo retângulo já fossem conhecidas pelos babilônicos, que viveram muito antes de Pitágoras, acredita-se que a primeira demonstração que esse teorema se aplicava a qualquer triângulo retângulo tenha sido feita por Pitágoras.

O Teorema de Pitágoras é um dos teoremas mais conhecidos, importantes e utilizados na matemática. Ele é imprescindível na resolução de problemas da geometria analítica, geometria plana, geometria espacial e trigonometria.

Além do teorema, outras importantes contribuições da Sociedade Pitagórica para a Matemática foram:

- Descoberta dos números irracionais;

- Propriedades dos números inteiros;

- MMC e MDC.

Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Existem diversas formas de provar o teorema de Pitágoras. Por exemplo, o livro *The Pythagorean Proposition*, publicado em 1927, apresentava 230 formas de demonstrá-lo e uma outra edição, lançada em 1940, aumentou para 370 demonstrações.

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Triângulo Retângulo Pitagórico

Introdução

Sabemos que se a, b e c forem, respectivamente, as medidas dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo, então é válido o **Teorema de Pitágoras**:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Triângulos retângulos são chamados de **triângulos pitagóricos** quando as medidas de seus lados forem números inteiros.

Por exemplo, podemos tomar os triângulos com as seguintes medidas:

$$3, 4 \text{ e } 5, \text{ pois } 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$6, 8 \text{ e } 10, \text{ pois } 6^2 + 8^2 = 10^2$$

$$5, 12 \text{ e } 13, \text{ pois } 5^2 + 12^2 = 13^2$$

Tal trio de números também podem ser denominados como **terno pitagóricos**.

Obtenção de triângulos pitagóricos

Para se obter um triângulo pitagórico, basta tomar quaisquer valores inteiros a e b , e supondo $a > b$, de modo que os catetos terão medidas

$$2ab$$

e

$$a^2 - b^2$$

com a hipotenusa medindo

$$a^2 + b^2$$

Por exemplo, sendo $a=5$ e $b=3$, então

$$2ab=2\cdot 5\cdot 3=30$$

e

$$a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

e ainda

$$a^2 + b^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$$

ou seja, temos um triângulo cujos catetos medem 30 e 16 e a hipotenusa é igual a 34; evidentemente este triângulo é pitagórico visto que

$$30^2 + 16^2 = 34^2$$

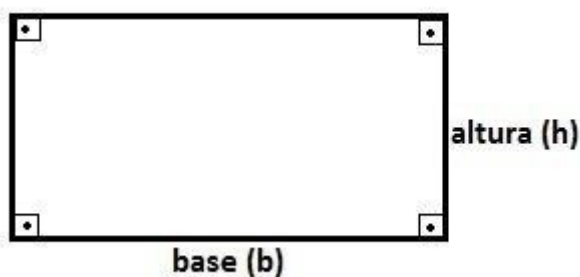
MATEMÁTICA

GEOMETRIA PLANA

Retângulo

O **retângulo** é uma figura geométrica plana formada por quatro lados (quadrilátero) e apresenta os quatro ângulos internos congruentes (mesma medida) e retos (90°).

Além disso, seus lados opostos são paralelos, por isso, o retângulo é um paralelogramo. Quando seus lados tiverem mesma medida ele também será um quadrado. Ou seja, um quadrado é um retângulo especial.



Área do Retângulo

Para encontrar a área da superfície de um retângulo, basta multiplicar o valor da base pelo da altura.



Assim, a fórmula da área do retângulo é expressa da seguinte forma:

$$A = b \cdot h$$

Donde,

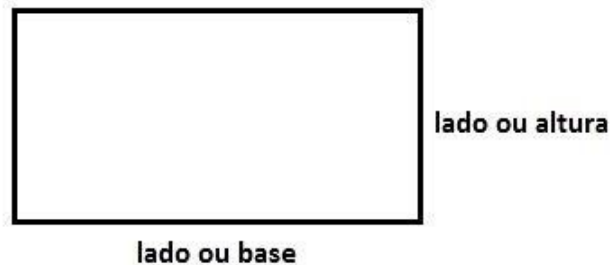
A: área **b:**

base **h:**

altura

Perímetro do Retângulo

Já o conceito de perímetro é determinado pela soma de todos os lados da figura. Como os lados paralelos do retângulo apresentam mesma medida, seu perímetro será igual a soma de duas vezes o valor da base e da altura.

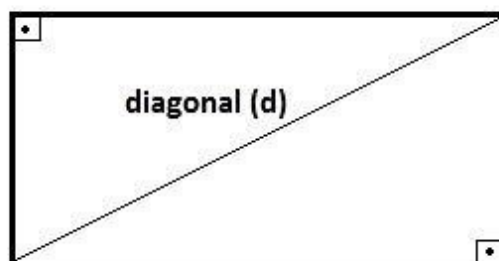


É expresso pela fórmula:

$$P = 2(b + h)$$

Diagonal do Retângulo

Quando traçamos uma diagonal no retângulo, ela formará dois triângulos retângulos. Assim, para calcular a diagonal do retângulo utilizamos o Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.



Note que a diagonal corresponde a **hipotenusa** do triângulo retângulo. Logo, a fórmula da diagonal do retângulo é expressa da seguinte forma:

$$d^2 = b^2 + h^2 \text{ ou } d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

Donde,

d: diagonal

b: base

h: altura

Fique Atento!

Quando calculamos a área ou perímetro devemos levar em conta as **unidades de medida**. Ou seja, os valores devem estar na mesma unidade: centímetros, centímetros quadrados, metros, metro quadrados, etc.

Triângulo Retângulo

O triângulo é uma figura geométrica plana formada por três lados.

O triângulo retângulo é uma figura que também faz parte da geometria plana. Recebe esse nome pois apresenta um ângulo reto, ou seja, de 90°.

Trapézio Retângulo

O trapézio é uma figura geométrica plana que possui quatro lados e bases paralelas, donde uma é maior e outra menor.

Da mesma forma que os triângulos retângulos, o chamado trapézio retângulo recebe esse nome pois possui dois ângulos retos de 90°.

Retângulo Áureo

O **retângulo áureo** ou **retângulo de ouro** é um conceito da geometria euclidiana, o qual é também aplicado no campo das artes.

Trata-se de um caso de retângulo em que ao dividir a base pela sua altura, obtêm-se o valor de aproximadamente 1,618. Esse número é chamado de número de ouro.

Você Sabia?

Todos os retângulos são paralelogramos, mas nem todo paralelogramo é um retângulo. Assim como, os quadrados são retângulos, todavia, nem todos os retângulos são quadrados.

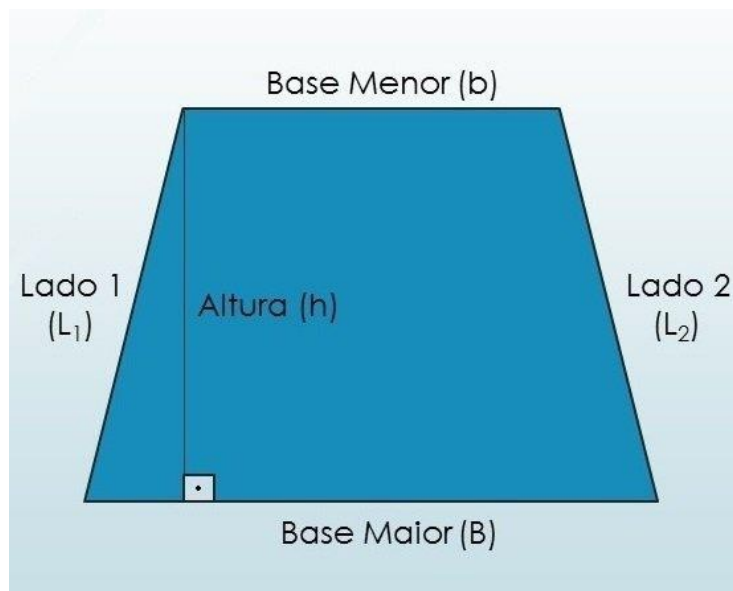
MATEMÁTICA

GEOMETRIA PLANA

Trapézio

O **trapézio** é uma figura da geometria plana formada por quatro lados. Dois deles são paralelos e chamados de bases. Ele é considerado um quadrilátero, tal qual o retângulo, o losango e o quadrado.

Importante destacar que ele é chamado de quadrilátero notável. Isso porque a soma de seus quatro ângulos internos totaliza 360° .



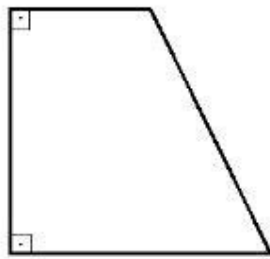
Tipos de Trapézio

Dependendo de sua forma, o trapézio é classificado de três maneiras:

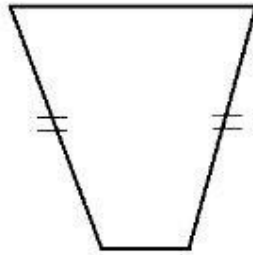
Trapézio Retângulo: esse tipo de trapézio apresenta dois ângulos de 90° , chamados de ângulos retos.

Trapézio Isósceles: também chamado de trapézio simétrico, ele apresenta dois lados congruentes (possuem a mesma medida) e dois lados diferentes.

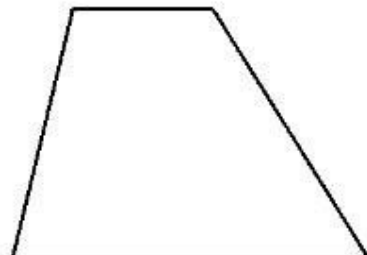
Trapézio Escaleno: todos os lados desse trapézio apresentam medidas diferentes.



Trapézio
Retângulo



Trapézio
Isósceles



Trapézio
Escaleno

Área do Trapézio

Para medir o valor da superfície do trapézio utilizamos a seguinte fórmula:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Onde:

A: área da figura

B: base maior

b: base menor

h: altura

Perímetro do Trapézio

Para calcular o perímetro do trapézio, ou seja, a soma de todos os lados, utiliza-se a fórmula:

$$P = B + b + L_1 + L_2$$

Onde:

P: perímetro

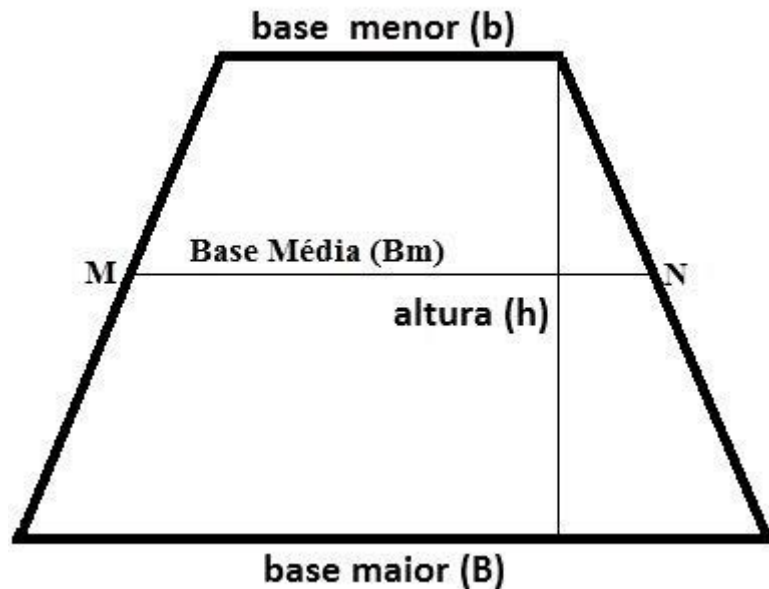
B: base maior

b: base menor

L₁ e **L₂**: lados da figura

Base Média do Trapézio

Quando um segmento de reta corta o trapézio em duas figuras, temos a chamada base média de um trapézio. Esse segmento é paralelo as bases da figura.



Para encontrar o valor da base média do trapézio utilizamos a seguinte fórmula:

$$B_m = \frac{B + b}{2}$$

Curiosidade: Você Sabia?

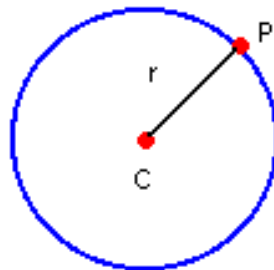
Na anatomia, o trapézio é um músculo triangular que fica na região posterior da coluna cervical.

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ANALÍTICA

Circunferência

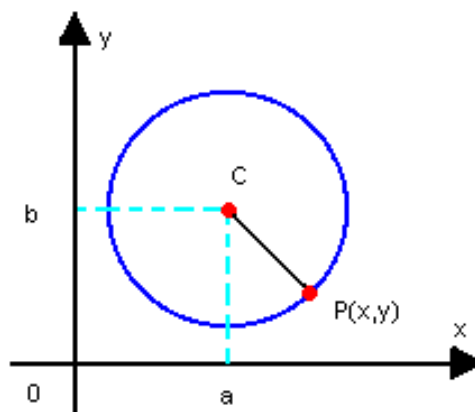
Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo desse mesmo plano, denominado centro da circunferência:



Equações da circunferência

Equação reduzida

Sendo $C(a, b)$ o centro e $P(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência, a distância de C a $P(d_{CP})$ é o raio dessa circunferência. Então:



$$d_{CP} = \sqrt{(X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Portanto, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a equação reduzida da circunferência e permite determinar os elementos essenciais para a construção da circunferência: as coordenadas do centro e o raio.

Observação: Quando o centro da circunferência estiver na origem (C(0,0)), a equação da circunferência será $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação geral

Desenvolvendo a equação reduzida, obtemos a equação geral da circunferência:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Como exemplo, vamos determinar a equação geral da circunferência de centro C (2, -3) e raio r = 4.

A equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Desenvolvendo os quadrados dos binômios, temos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

MATEMÁTICA

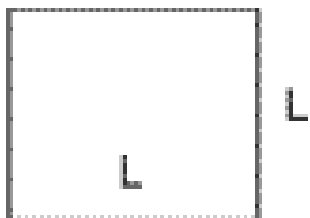
GEOMETRIA PLANA

Área das figuras planas

Área ou superfície de uma figura plana tem a ver com o conceito (*primitivo*) de sua extensão (*bidimensional*).

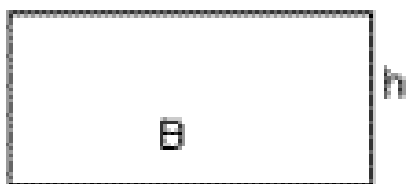
Usamos a área do quadrado de lado unitário como referência de unidade de área, chamando de metro quadrado (m^2) sua unidade de medida principal.

Área do Quadrado



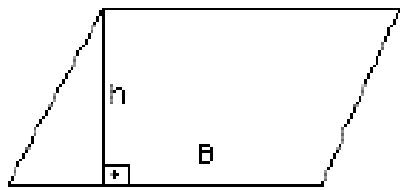
$$A_Q = L^2$$

Área do Retângulo



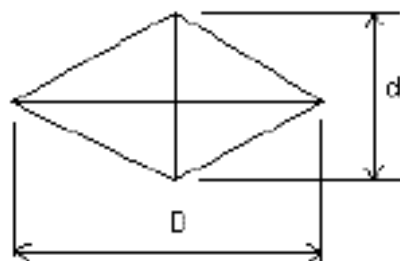
$$A_R = B \cdot h$$

Área do Paralelogramo



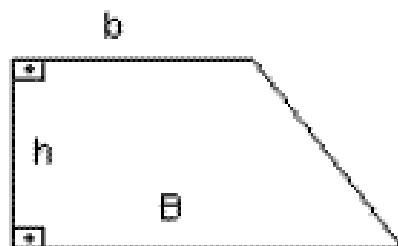
$$A_P = B \cdot h$$

Área do Losango



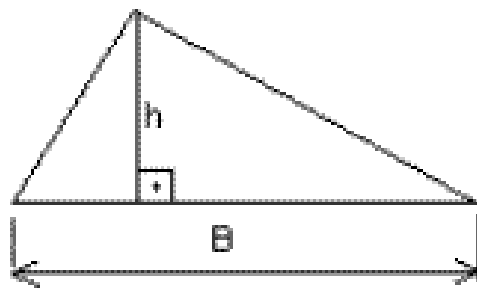
$$A_L = D \cdot d / 2$$

Área do Trapézio



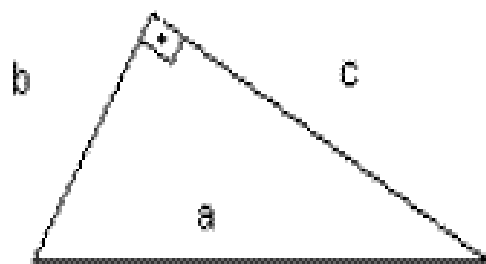
$$A_T = (B + b) \cdot h / 2$$

Triângulos Quaisquer



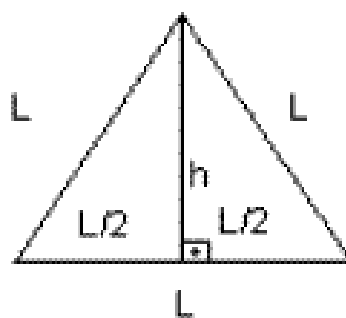
$$A_T = B \cdot h / 2$$

Triângulo Retângulo



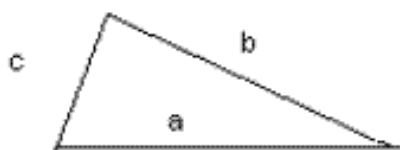
$$A_T = b \cdot c / 2$$

Triângulo Equilátero



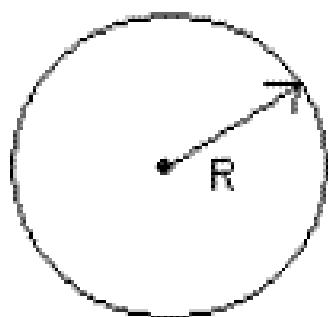
$$A_T = L^2 \sqrt{3} / 4$$

Fórmula de Heron



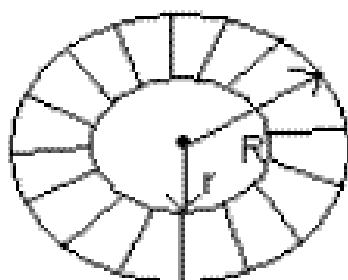
$$A_T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Área do Círculo



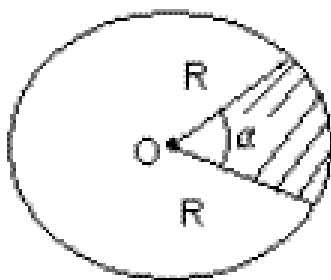
$$A_C = \pi R^2$$

Área da Coroa Circular



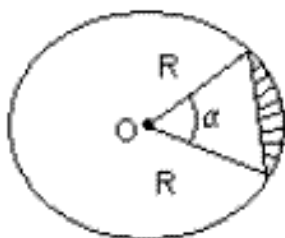
$$A_{CC} = \pi (R^2 - r^2)$$

Área Setor Circular



$$A_{SC} = \pi R^2 \alpha / 360^\circ$$

Área Segmento Circular



$$A_{SEG} = A_{\text{triângulo}} - A_{\text{setor}}$$

Dica! Muitos exercícios de áreas cobram conhecimentos de tópicos anteriores, principalmente relações métricas e semelhança; portanto fique atento!

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Geometria Espacial

A **Geometria Espacial** corresponde a área da matemática que se encarrega de estudar as figuras no espaço, ou seja, aquelas que possuem mais de duas dimensões.

De modo geral, a Geometria Espacial pode ser definida como o estudo da **geometria no espaço**.

Assim, tal qual a **Geometria Plana**, ela está pautada nos conceitos basilares e intuitivos que chamamos "**conceitos primitivos**" os quais possuem origem na Grécia Antiga e na Mesopotâmia (cerca de 1000 anos a.C.).

Pitágoras e Platão associavam o estudo da Geometria Espacial ao estudo da Metafísica e da religião; contudo, foi Euclides a se consagrar com sua obra "*Elementos*", onde sintetizou os conhecimentos acerca do tema até os seus dias.

Entretanto, os estudos de Geometria Espacial permaneceram estanques até o fim da Idade Média, quando Leonardo Fibonacci (1170-1240) escreve a "*Practica Geometriae*".

Séculos depois, Joannes Kepler (1571-1630) rotula o "*Steometria*" (stereo: volume/metria: medida) o cálculo de volume, em 1615.

Características da Geometria Espacial

A Geometria Espacial estuda os objetos que possuem mais de uma dimensão e ocupam lugar no espaço. Por sua vez, esses objetos são conhecidos como "**sólidos geométricos**" ou "**figuras geométricas espaciais**". Conheça melhor alguns deles:

prisma

cubo

paralelepípedo

pirâmide

cone

cilindro

esfera

Dessa forma, a geometria espacial é capaz de determinar, por meio de cálculos matemáticos, o volume destes mesmos objetos, ou seja, o espaço ocupado por eles.

Contudo, o estudo das estruturas das figuras espaciais e suas inter-relações é determinado por alguns **conceitos básicos**, a saber:

Ponto: conceito fundamental a todos os subsequentes, uma vez que todos sejam, em última análise, formados por inúmeros pontos. Por sua vez, os pontos são infinitos e não possuem dimensão mensurável (adimensional). Portanto, sua única propriedade garantida é sua localização.

Reta: composta por pontos, é infinita nos dois lados e determina a distância mais curta entre dois pontos determinados.

Linha: possui algumas semelhanças com a reta, pois é igualmente infinita para cada lado, contudo, têm a propriedade de formar curvas e nós sobre si mesma.

Plano: é outra estrutura infinita que se estende em todas as direções.

Figuras Geométricas Espaciais

Segue abaixo algumas das figuras geométricas espaciais mais conhecidas:

Cubo



O cubo é um hexaedro regular composto de 6 faces quadrangulares, 12 arestas e 8 vértices sendo:

Área lateral: $4a^2$

Área total: $6a^2$

Volume: $a.a.a = a^3$

Dodecaedro



O Dodecaedro é um poliedro regular composto de 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices sendo:

Área Total: $3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$

Volume: $\frac{1}{4} (15+7\sqrt{5}) a^3$

Tetraedro



O Tetraedro é um poliedro regular composto de 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices sendo:

Área total: $4a^2\sqrt{3}/4$

Volume: $1/3 Ab.h$

Octaedro



O Octaedro é um poliedro regular de 8 faces formada por triângulos equiláteros, 12 arestas e 6 vértices sendo:

Área total: $2a^2\sqrt{3}$

Volume: $1/3 a^3\sqrt{2}$

Icosaedro



O Icosaedro é um poliedro convexo composto de 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices sendo:

Área total: $5\sqrt{3}a^2$

Volume: $\frac{5}{12} (3+\sqrt{5}) a^3$

Prisma



O Prisma é um poliedro composto de duas faces paralelas que formam a base, que por sua vez, podem ser triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal.

Além das faces, o prisma é composto de altura, lados, vértices e arestas unidos por paralelogramos. De acordo com sua inclinação, os prismas podem ser retos, aqueles em que a aresta e a base fazem um ângulo de 90° ou os oblíquos compostos de ângulos diferentes de 90°.

Área da Face: $a.h$

Área Lateral: $6.a.h$

Área da base: $3.a^2\sqrt{3}/2$

Volume: $Ab.h$

Onde:

Ab: Área da base

h: altura

Pirâmide



A pirâmide é um poliedro composto por uma base (triangular, pentagonal, quadrada, retangular, paralelogramo), um vértice (vértice da pirâmide) que une todas as faces laterais triangulares.

Sua altura corresponde a distância entre o vértice e sua base. Quanto à sua inclinação podem ser classificadas em retas (ângulo de 90°) ou oblíquas (ângulos diferentes de 90°).

Área total: $Al + Ab$

Volume: $1/3 \quad Ab.h$

Onde:

Al: Área lateral

Ab: Área da base

h: altura

Curiosidades

A palavra "geometria" vem do grego e corresponde a união dos termos "geo" de terra e "metria" de medida, que significa "medir terra."

Os cálculos mais comuns em Geometria espacial são para determinar os comprimentos de curvas, áreas de superfícies e volumes de regiões sólidas.

Outras figuras geométricas espaciais: cilindro, cone, esfera.

Os "Sólidos Platônicos" são poliedros convexos conhecidos desde a antiguidade clássica. Os cinco "sólidos platônicos" são: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Geometria de Posição e Poliedros

Geometria de posição é a área da Matemática que estuda as posições relativas entre formas geométricas presentes no espaço. As principais noções que colocam esse estudo em movimento são as de **forma**, **tamanho** e **posição**.

Essas noções são *primitivas* e, por isso, não possuem definição. De qualquer modo, a **forma** está ligada ao modo como um objeto ocupa o espaço; o **tamanho** está ligado à quantidade de espaço que esse objeto ocupa; e a **posição** faz referência à localização do objeto no espaço.

Outras noções que dispensam definição na **Geometria de posição** são as de *ponto*, *reta*, *plano* e *espaço*. *Ponto* não possui definição, contudo, sua natureza é: um objeto que representa uma localização no espaço. Um conjunto de pontos alinhados e ininterruptos é o que conhecemos como *reta*. Retas também não possuem definição formal, exceto pela ideia que se possui a respeito delas em virtude de suas representações geométricas e suas propriedades. O mesmo ocorre com *plano* e *espaço*.

Os **poliedros**, por sua vez, são sólidos geométricos pertencentes ao espaço tridimensional que são limitados por partes de planos. Esses sólidos, possuidores de forma, tamanho e ocupantes de determinada posição no espaço, também são objeto de estudo da **geometria de posição**.

Breve histórico da Geometria de Posição

A **geometria de posição** nasceu muitos séculos antes de Cristo, junto à *geometria plana*. Civilizações mesopotâmicas desenvolveram conhecimentos geométricos entre os anos de 2500 a.C. e 600 a.C., mesmo

período em que os egípcios utilizavam geometria para as mais variadas funções: desde demarcar terrenos agrícolas até a construção das pirâmides.

Após esse período, com a ascensão da Grécia como “capital da sabedoria”, houve grandes avanços no desenvolvimento da geometria. Tales de Mileto (624-548 a.C.) e Pitágoras (580-500 a.C.) demonstraram o que conhecemos hoje como **Teorema de Tales** e **Teorema de Pitágoras**, entre outros.

Um dos maiores nomes da geometria plana, espacial e de posição é Euclides (320-270 a.C.). Esse homem sistematizou toda a geometria de sua época em uma obra chamada “Os Elementos”. Essa obra é uma coletânea de treze livros, dos quais dez relacionam-se à geometria e três, à teoria dos números. Além disso, Euclides demonstrou vários dos resultados presentes nessa obra. Alguns desses resultados foram demonstrados mais de uma vez, mas de maneiras diferentes.

As bases da geometria de posição

Toda a geometria é baseada em regras que devem ser aceitas como verdadeiras sem necessidade de uma demonstração, chamadas de **postulados ou axiomas**; nas definições dos objetos que ocupam esse espaço e nas propriedades decorrentes do estudo desses objetos, postulados e suas interações.

Hoje os postulados são organizados da seguinte maneira:

Postulados de existência:

P1 – Existem infinitos pontos;

P2 – Existem infinitas retas. Em cada reta, assim como fora dela, existem infinitos pontos;

P3 – Existem infinitos planos. Em cada plano, assim como fora dele, existem infinitos pontos.

Postulados de determinação:

D4 – Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles;

D5 – Três pontos não colineares determinam um único plano.

Postulado da inclusão:

I6 – Se uma reta contém dois pontos distintos de um plano, então, essa reta está contida nesse plano.

Postulado da separação da reta:

S7 – Um ponto qualquer pertencente a uma reta separa essa reta em duas partes. Esse ponto pertence a essas duas partes da reta.

Observação: esse postulado pode ser expandido para os casos de separação do plano e do espaço.

Postulado das paralelas (quinto postulado de Euclides):

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Esse último postulado é o que diferencia a Geometria Euclidiana Clássica (Geometria Plana e Espacial) de outras Geometrias Modernas criadas a partir do século XVII.

Unindo esses postulados às definições de formas e sólidos geométricos, é possível construir toda a Geometria Plana e Espacial, bem como a **Geometria de Posição**, do modo como a conhecemos hoje em dia.

O que estuda a Geometria de Posição?

A Geometria de Posições ocupa-se dos estudos referentes às posições relativas entre objetos matemáticos, formas e sólidos geométricos.

– **Posição relativa** entre duas retas: que classifica as retas como coincidentes, concorrentes, paralelas ou reversas;

– Posição relativa entre retas e planos: uma reta pode estar contida em um plano, ser secante a um plano ou paralela a um plano;

- Posição relativa entre planos: dois planos podem ser coincidentes, secantes ou paralelos;
- Distância **entre dois pontos**: comprimento da linha reta que os liga;
- Distâncias **entre ponto e reta**, entre ponto e plano, entre reta e plano, entre plano e plano etc., definidas como a menor distância entre os objetos observados;
- Ângulo entre duas retas, entre reta e plano, entre plano e plano etc.;
- Perpendicularidade: estuda os casos em que retas e planos formam ângulo de 90° ;
- Paralelismo: estuda os casos em que retas e planos não possuem nenhum ponto em comum;
- Definições básicas de poliedros: o que são poliedros e os elementos que os compõem;
- Propriedades básicas de poliedros: Relações básicas que podem ser construídas a partir de definições e resultados envolvendo poliedros. Por exemplo: **Relação de Euler**;
- Poliedros notáveis: alguns casos de poliedros que possuem propriedades especiais que os destacam entre os outros.
- Classificação de poliedros: poliedros podem ser retos, oblíquos, paralelepípedos etc.
- Área e volume de poliedros.

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Prisma

O **prisma** é um sólido geométrico que faz parte dos estudos de geometria espacial.

É caracterizado por ser um poliedro convexo com duas bases (polígonos iguais) congruentes e paralelas, além das faces planas laterais (paralelogramos).

Composição do Prisma

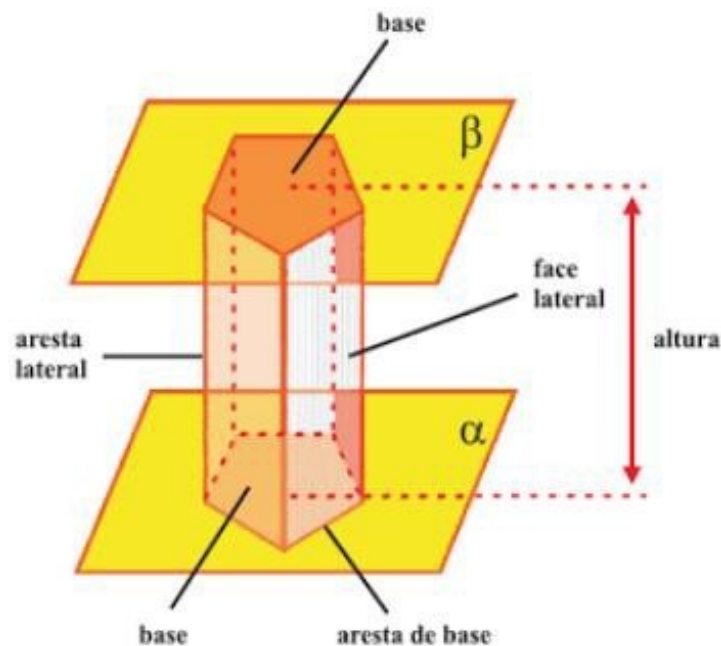


Ilustração de um prisma e seus elementos

Os **elementos** que compõem o prisma são: base, altura, arestas, vértices e faces laterais.

Assim, as **arestas das bases** do prisma são os lados das bases do polígono, enquanto que as **arestas laterais** correspondem aos lados das faces que não pertencem às bases.

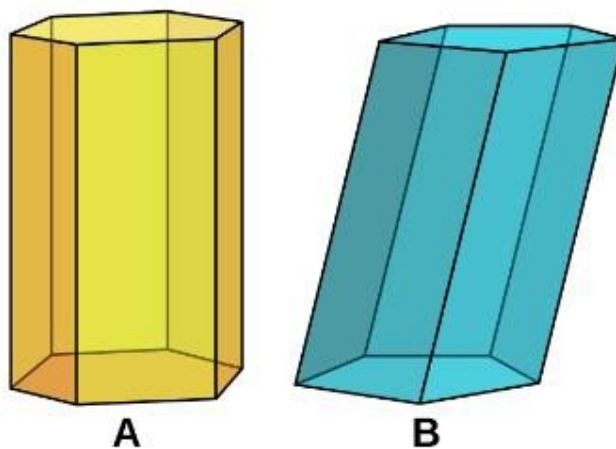
Os **vértices** do prisma são os pontos de encontro das arestas e a **altura** é calculada pela distância entre os planos das bases.

Classificação dos Prismas

Os prismas são classificados em **Retos** e **Oblíquos**:

Prisma Reto: possui arestas laterais perpendiculares à base, cujas faces laterais são retângulos.

Prisma Oblíquo: possui arestas laterais oblíquas à base, cujas faces laterais são paralelogramos.



Prisma reto (A) e prisma oblíquo (B)

Bases do Prisma

De acordo com o **formato das bases**, os prismas são classificados em:

Prisma Triangular: base formada por triângulo.

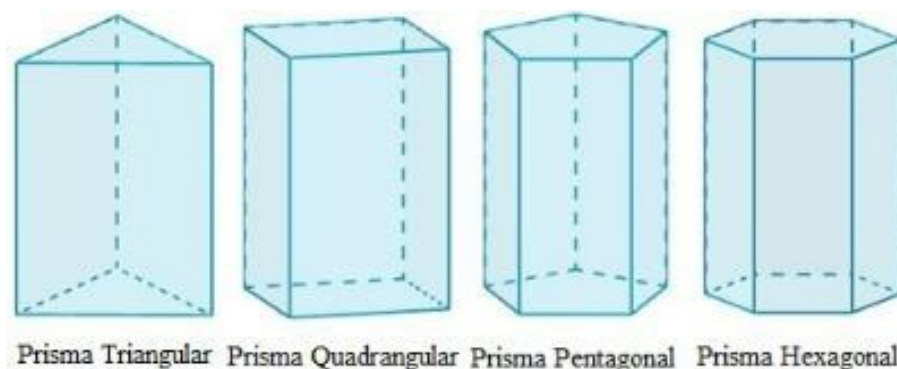
Prisma Quadrangular: base formada por quadrado.

Prisma Pentagonal: base formada por pentágono.

Prisma Hexagonal: base formada por hexágono.

Prisma Heptagonal: base formada por heptágono.

Prisma Octogonal: base formada por octógono.



Figuras de prisma segundo suas bases

Importante ressaltar que os chamados “**prismas regulares**” são aqueles cujas bases são polígonos regulares e, portanto, formados por prismas retos.

Note que se todas as faces do prisma forem quadrados, trata-se de um cubo; e, se todas as faces são paralelogramos, o prisma é um paralelepípedo.

Fique Atento!

Para calcular a área da base (A_b) de um prisma deve-se levar em conta o formato que apresenta. Por exemplo, se for um prisma triangular a área da base será um triângulo.

Fórmulas do Prisma

Áreas do Prisma

Área Lateral: para calcular a área lateral do prisma, basta somar as áreas das faces laterais. Num prisma reto, que possui todas as áreas das faces laterais congruentes, a fórmula da área lateral é:

$$A_l = n \cdot a$$

n: número de lados

a: face lateral

Área Total: para calcular a área total de um prisma, basta somar as áreas das faces laterais e as áreas das bases:

$$A_t = S_l + 2S_b$$

S_l : Soma das áreas das faces laterais

S_b : soma das áreas das bases

Volume do Prisma

O volume do prisma é calculado pela seguinte fórmula:

$$V = A_b \cdot h$$

A_b : área da base

h : altura

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

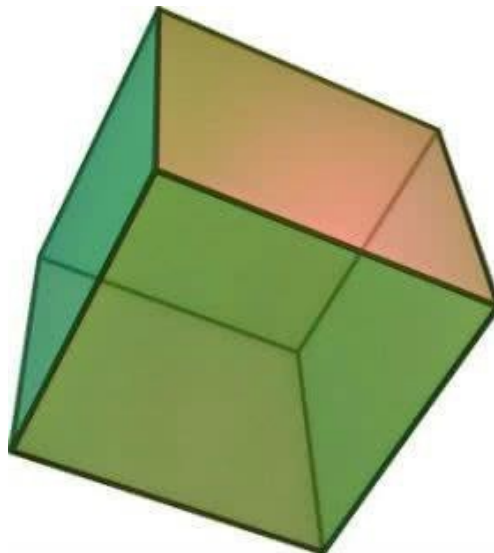
Cubo

O **cubo** é uma figura que faz parte da geometria espacial. É caracterizado como um **poliedro** (hexaedro) regular ou ainda, um **paralelepípedo retângulo** com todas as faces e arestas congruentes e perpendiculares ($a = b = c$).

Tal como o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro é considerado um dos “Sólidos de Platão” (sólidos formados por faces, arestas e vértices).

Composição do Cubo

O cubo é formado por 12 arestas (segmentos de retas) congruentes, 6 faces quadrangulares e 8 vértices (pontos).



Diagonais do Cubo

As linhas diagonais são segmentos de reta entre dois vértices e, no caso do cubo tem-se:

Diagonal Lateral: $d = a\sqrt{2}$

Diagonal do Cubo: $d = a\sqrt{3}$

Área do Cubo

A área corresponde a quantidade de espaço (superfície) necessária para determinado objeto.

Nesse caso, para calcular a **área total do cubo**, que possui 6 faces, utilizamos a seguinte fórmula:

$$A_t = 6a^2$$

Sendo,

A_t : área total

a : aresta

Para tanto, a **área lateral do cubo**, ou seja, a soma das áreas dos quatro quadrados que formam esse poliedro regular, é calculada a partir da fórmula abaixo:

$$A_l = 4a^2$$

Sendo,

A_l : área lateral

a : aresta

Além disso, é possível calcular a **área da base do cubo**, dada pela fórmula:

$$A_b = a^2$$

Sendo,

A_b : área da base

a : aresta

Volume do Cubo

O volume de uma figura geométrica corresponde ao espaço ocupado por determinado objeto. Assim, para calcular o volume do cubo utiliza-se a fórmula:

$$V = a^3$$

Sendo,

V : volume do cubo

a : aresta

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Paralelepípedo

O **Paralelepípedo** é uma figura geométrica espacial que faz parte dos sólidos geométricos.

Trata-se de um prisma que possui base e faces em formato de paralelogramos (polígono de quatro lados).

Em outras palavras, o paralelepípedo é um prisma quadrangular com base de paralelogramos.

Faces, Vértices e Arestas do paralelepípedo

O paralelepípedo possui:

6 faces (paralelogramos)

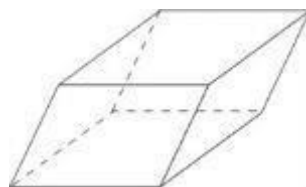
8 vértices

12 arestas

Classificação do paralelepípedo

De acordo com a perpendicularidade de suas arestas em relação a base, os paralelepípedos são classificados em:

Paralelepípedos Oblíquos: possuem arestas laterais oblíquas à base.

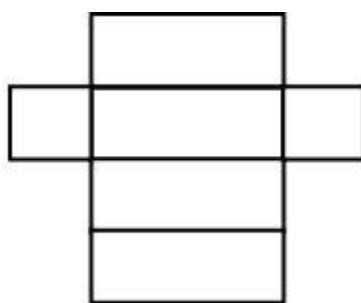
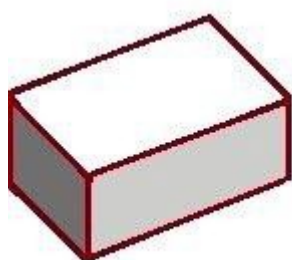


Paralelepípedos Reto: possuem arestas laterais perpendiculares à base, ou seja, apresentam ângulos retos (90°) entre cada uma das faces.



Lembre-se que o paralelepípedo é um sólido geométrico, ou seja, uma figura com três dimensões (altura, largura e comprimento).

Todos os sólidos geométricos são formados pela união de figuras planas. Para exemplificar melhor, confira abaixo a planificação do paralelepípedo reto:



Fórmulas do paralelepípedo

Segue abaixo as principais fórmulas do paralelepípedo, onde a , b e c são as arestas do paralelogramo:

Área da Base: $A_b = a.b$

Área Total: $A_t = 2ab + 2bc + 2ac$

Volume: $V = a.b.c$

Diagonais: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Fique Atento!

Os paralelepípedos retângulos são prismas retos que apresentam base e face retangulares.

Um caso especial de paralelepípedo retângulo é o cubo, figura geométrica com seis faces quadrangulares. Para calcular a área lateral de um paralelepípedo retângulo utiliza-se a fórmula:

$$A_l = 2(ac+bc)$$

Donde a, b e c são arestas da figura.

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Pirâmide

A **pirâmide** é uma figura geométrica espacial, mais precisamente um poliedro.

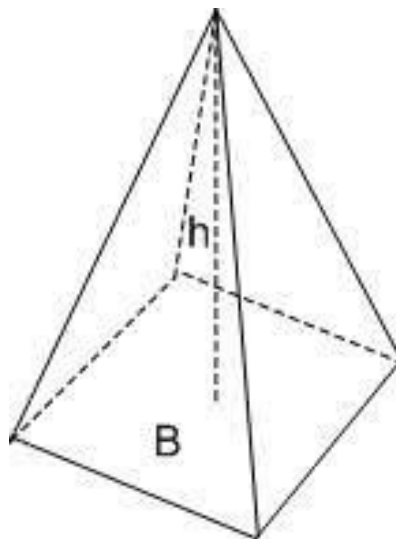
Ela é composta por uma **base** e um **vértice**. Sua base pode ser triangular, pentagonal, quadrada, retangular, paralelogramo.

Já o vértice, corresponde ao ponto mais distante da base da pirâmide e que une todas as faces laterais triangulares.

Em outros termos, a pirâmide é um **sólido geométrico** de **base poligonal** que possui todos os vértices num plano (plano da base). Sua altura corresponde a distância entre o vértice e sua base.

Observe que o número de lados do polígono da base corresponde o número de faces laterais da pirâmide.

Elementos da Pirâmide



Base: corresponde à região plana poligonal na qual se sustenta a pirâmide.

Altura: designa a distância do vértice da pirâmide ao plano da base.

Arestas: são classificadas em arestas da base, ou seja, todos os lados do polígono da base, e arestas laterais, segmentos formados pela distância do vértice da pirâmide até sua base.

Apótemas: corresponde à altura de cada face lateral; são classificadas em apótema da base e apótema da pirâmide.

Superfície Lateral: É a superfície poliédrica composta por todas as faces laterais da pirâmide.

Tipos de Pirâmide

Segundo as bases e o número arestas que formam as pirâmides, elas são classificadas em:

Pirâmide Triangular: sua base é um triângulo, composta de quatro faces: três faces laterais e a face da base.

Pirâmide Quadrangular: sua base é um quadrado, composta de cinco faces: quatro faces laterais e a face da base.

Pirâmide Pentagonal: sua base é um pentágono, composta de seis faces: cinco faces laterais e a face da base.

Pirâmide Hexagonal: sua base é um hexágono, composta de sete faces: seis faces laterais e face da base.

No tocante à inclinação da base, as pirâmides são classificadas de duas maneiras:

Pirâmides Retas, que formam um ângulo de 90° ;

Pirâmides Oblíquas, que apresentam ângulos diferentes de 90° .

Área da Pirâmide

Para calcular a área total da pirâmide, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\text{Área total: } A_l + A_b$$

Onde,

A_l : Área lateral (soma das áreas de todas as faces laterais)

A_b : Área da base

Volume da Pirâmide

Para calcular o volume da pirâmide, tem-se a expressão:

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

Onde:

A_b : Área da base

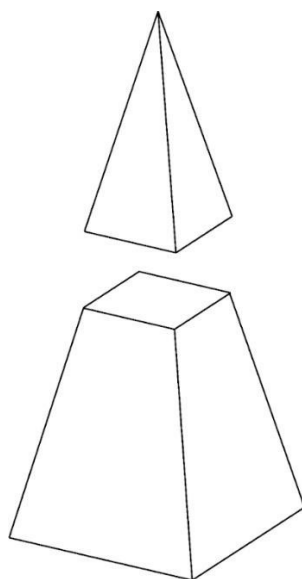
h : altura

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Tronco de Pirâmide

O tronco de pirâmide é o sólido geométrico formado pela parte inferior da pirâmide quando é feita uma secção transversal nesta por um plano a qualquer altura.



O tronco de pirâmide é a parte inferior do sólido geométrico.

Tronco de pirâmide é o sólido geométrico encontrado na parte inferior da pirâmide quando nela é realizada uma secção transversal, a qualquer altura. A secção transversal é um corte feito por um plano paralelo à base

do sólido geométrico. Quando é feita a secção transversal, formam-se dois sólidos geométricos: um deles é uma pirâmide menor e o outro, o tronco de pirâmide.

O tronco de pirâmide **possui como principais elementos a base menor, a base maior e a altura**, que são úteis para o cálculo de seu volume e área total. Para realizar tais cálculos, utilizam-se fórmulas específicas.

Resumo sobre tronco de pirâmide

O tronco de pirâmide é o sólido obtido da parte inferior de uma pirâmide quando realizada uma secção transversal.

Para calcular a área total do tronco de pirâmide, somamos as suas áreas laterais e as áreas das bases maior e menor.

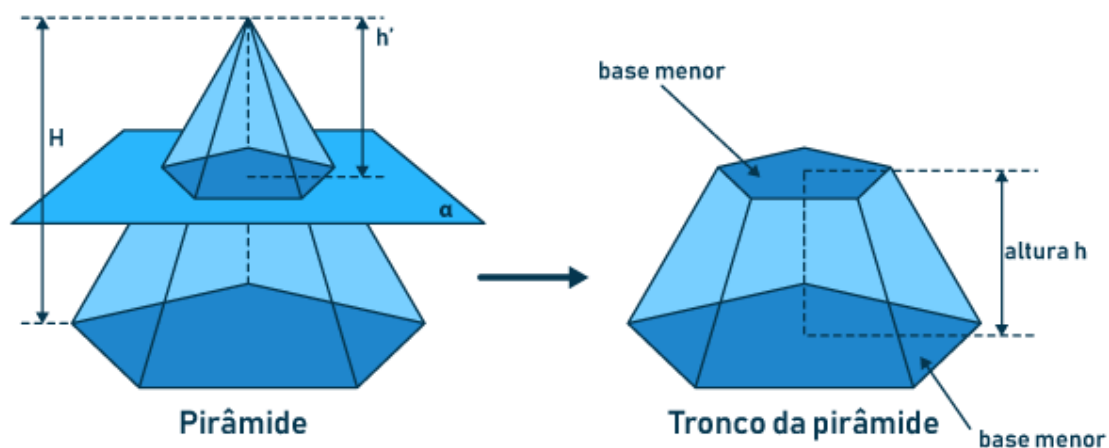
$$A_T = A_B + A_b + A_l$$

O cálculo do volume do tronco de pirâmide é dado pela fórmula:

$$V = \frac{h(A_b + A_B + \sqrt{A_b \cdot A_B})}{3}$$

Elementos do tronco de pirâmide

O tronco de pirâmide é o sólido geométrico obtido pela secção transversal de uma pirâmide qualquer, a qualquer altura.

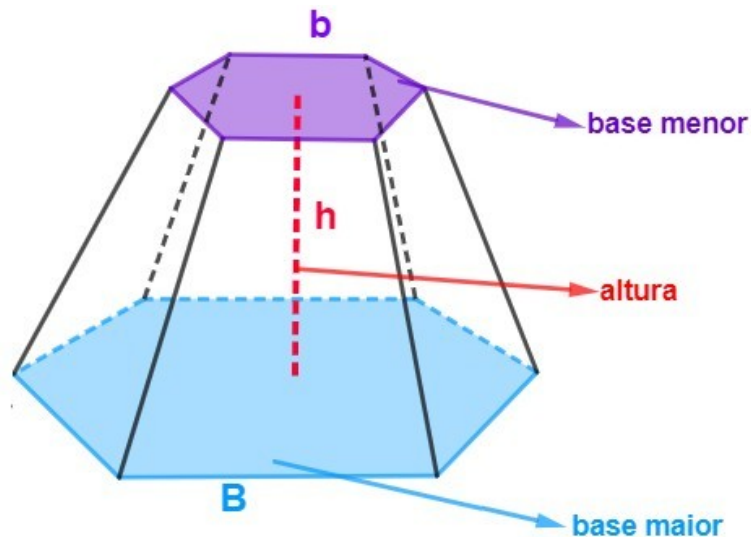


Como todo sólido geométrico, o tronco de pirâmide **possui elementos importantes**:

altura;

base maior;

base menor.



$B \rightarrow$ base maior;

$b \rightarrow$ base menor;

$h \rightarrow$ comprimento da altura.

Observação:

Note que a **base maior e a base menor sempre são compostas por polígonos semelhantes**, podendo ser triângulos, quadrados, retângulos, pentágonos, hexágonos ou qualquer outro polígono. Além disso, as **faces laterais de um tronco de pirâmide são sempre trapézios**.

Área de um tronco de pirâmide

A área total do tronco de pirâmide é a **soma das áreas da base com a área lateral**.

$$A_T = A_B + A_b + A_l$$

$A_T \rightarrow$ área total do tronco de pirâmide;

$A_B \rightarrow$ área da base maior;

$A_b \rightarrow$ área da base menor;

$A_l \rightarrow$ área lateral, encontrada pela soma das áreas dos trapézios que compõem o sólido.

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

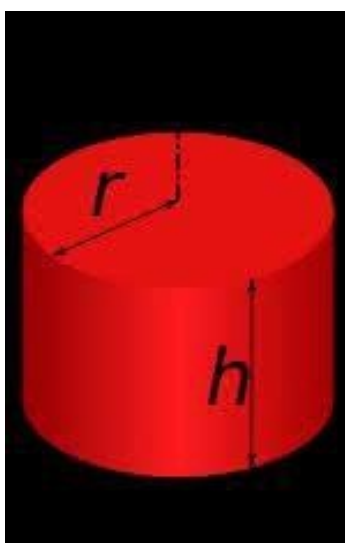
Cilindro

O **cilindro** ou **cilindro circular** é um sólido geométrico alongado e arredondado que possui o mesmo diâmetro ao longo de todo o comprimento.



Essa figura geométrica, que faz parte dos estudos de geometria espacial, apresenta dois círculos com raios de medidas equivalentes os quais estão situados em planos paralelos.

Componentes do Cilindro



Raio: distância entre o centro do cilindro e a extremidade.

Base: plano que contém a diretriz e no caso dos cilindros são duas bases (superior e inferior).

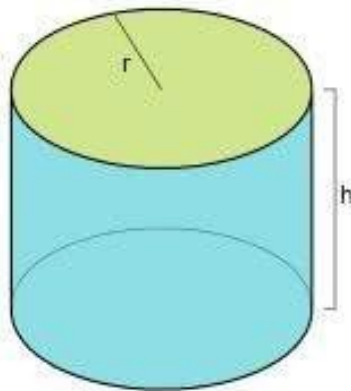
Geratriz: corresponde à altura ($h=g$) do cilindro.

Diretriz: corresponde à curva do plano da base.

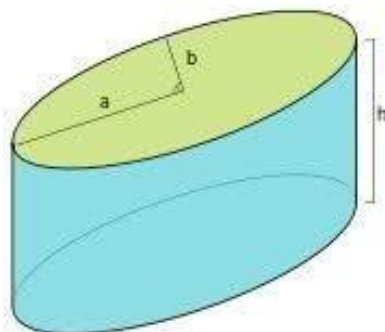
Classificação dos Cilindros

Dependendo da **inclinação do eixo**, ou seja, do ângulo formado pela geratriz, os cilindros são classificados em:

Cilindro Reto: Nos cilindros circulares retos, a geratriz (altura) está perpendicular ao plano da base.



Cilindro Oblíquo: Nos cilindros circulares oblíquos, a geratriz (altura) está oblíqua ao plano da base.



O chamado “cilindro equilátero” ou “cilindro de revolução” é caracterizado pela mesma medida do diâmetro da base e da geratriz ($g=2r$). Isso porque sua seção meridiana corresponde a um quadrado.

Fórmulas do Cilindro

Segue abaixo as fórmulas para calcular as áreas e o volume do cilindro:

Áreas do Cilindro

Área da Base: Para calcular a área da base do cilindro, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$A_b = \pi \cdot r^2$$

Onde:

A_b: área da base

π (Pi): 3,14

r: raio

Área Lateral: Para calcular a área lateral do cilindro, ou seja, a medida da superfície lateral, utiliza-se a fórmula:

$$A_l = 2 \pi \cdot r \cdot h$$

Onde:

A_l: área lateral

π (Pi): 3,14

r: raio

h: altura

Área Total: Para calcular a área total do cilindro, ou seja, a medida total da superfície da figura, soma-se 2 vezes a área da base à área lateral, a saber:

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_l \text{ ou } A_t = 2(\pi \cdot r^2) + 2(\pi \cdot r \cdot h)$$

Onde:

A_t: área total

A_b: área da base

A_l: área lateral

π (Pi): 3,14

r: raio

h: altura

Volume do Cilindro

O volume do cilindro é calculado a partir do produto da área da base pela altura (geratriz):

$$\mathbf{V = A_b.h \text{ ou } V = \pi.r^2.h}$$

Onde:

V: volume

A_b: área da base

π (Pi): 3,14

r: raio

h: altura

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Cones

Cone é um sólido geométrico que faz parte dos estudos da geometria espacial.

Ele possui uma base circular (r) formada por segmentos de reta que têm uma extremidade num vértice (V) em comum.

Além disso, o cone possui a altura (h), caracterizada pela distância do vértice do cone ao plano da base.

Possui também a denominada **geratriz**, ou seja, a lateral formada por qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice e a outra na base do cone.

Classificação dos Cones

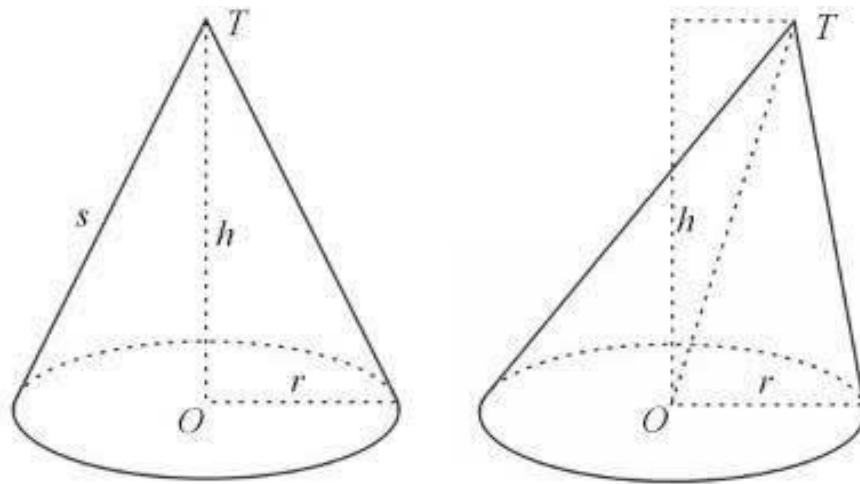
Os cones, dependendo da posição do eixo em relação à base, são classificados em:

Cone Reto: No cone reto, o eixo é perpendicular à base, ou seja, a altura e o centro da base do cone formam um ângulo de 90° , donde todas as geratrizes são congruentes entre si e, de acordo com o Teorema de Pitágoras, tem-se a relação: $g^2 = h^2 + r^2$. O cone reto é também chamado de “**cone de revolução**” obtido pela rotação de um triângulo em torno de um de seus catetos.

Cone Oblíquo: No cone oblíquo, o eixo não é perpendicular à base da figura.

Observe que o chamado “**cone elíptico**” possui base elíptica e pode ser reto ou oblíquo.

Para compreender melhor a classificação dos cones, observe as figuras abaixo:



Fórmulas do Cone

Segue abaixo as fórmulas para encontrar as áreas e o volume do cone:

Áreas do Cone

Área da Base: Para calcular a área da base de um cone (circunferência), utiliza-se a seguinte fórmula:

$$A_b = \pi \cdot r^2$$

Donde:

A_b : área da base

π (Pi) = 3,14

r : raio

Área Lateral: formada pela geratriz do cone, a área lateral é calculada através da fórmula:

$$A_l = \pi \cdot r \cdot g$$

Donde:

A_l : área lateral

π (Pi) = 3,14

r : raio

g : geratriz

Área Total: para calcular a área total do cone, soma-se a área da lateral e a área da base. Para isso utiliza-se a seguinte expressão:

$$A_t = \pi \cdot r (g+r)$$

Donde:

A_t: área total

π = 3,14

r: raio

g: geratriz

Volume do Cone

O volume do cone corresponde a 1/3 do produto da área da base pela altura, calculado pela seguinte fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Donde:

V = volume

π = 3,14

r: raio

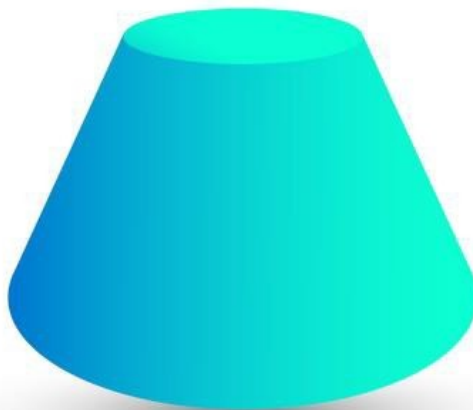
h: altura

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

Tronco de Cone

Tronco de um cone é um sólido geométrico formado pela parte inferior de um cone após ser seccionado de forma paralela à sua base.



O tronco de um cone é um sólido geométrico formado pela parte inferior de um cone após ser seccionado de forma paralela à base.

Conhecemos como **tronco de um cone** o sólido geométrico formado pela **parte inferior de um cone quando realizamos uma secção desse sólido, em uma altura qualquer, paralela a sua base**. Quando realizamos a secção, dividimos a figura em duas, uma delas é um cone menor e a outra é um tronco de um cone. Este possui duas bases formadas por círculos de raios distintos.

Assim como no cone, existem **elementos importantes no tronco do cone**, como a geratriz, a altura, e o raio de cada uma das suas bases. O tronco de cone possui fórmulas específicas para que seja possível calcular a sua área total e seu volume.

Resumo sobre o tronco de um cone

O tronco de cone é um sólido geométrico formado pela parte inferior da secção de um cone por um plano paralelo a sua base.

Para calcular a área total do tronco de um cone, utilizamos a fórmula:

$$A_T = A_B + A_b + A_L$$

$A_T \rightarrow$ área total

$A_B \rightarrow$ área da base maior

$A_b \rightarrow$ área da base menor

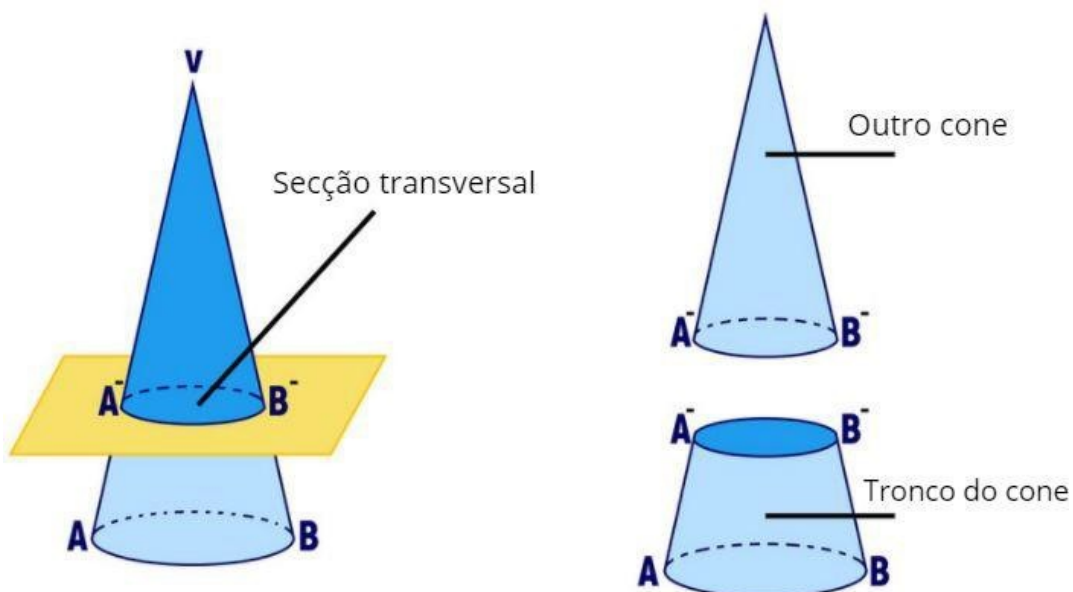
$A_L \rightarrow$ área lateral

Para calcular o volume do tronco de um cone, utilizamos a fórmula:

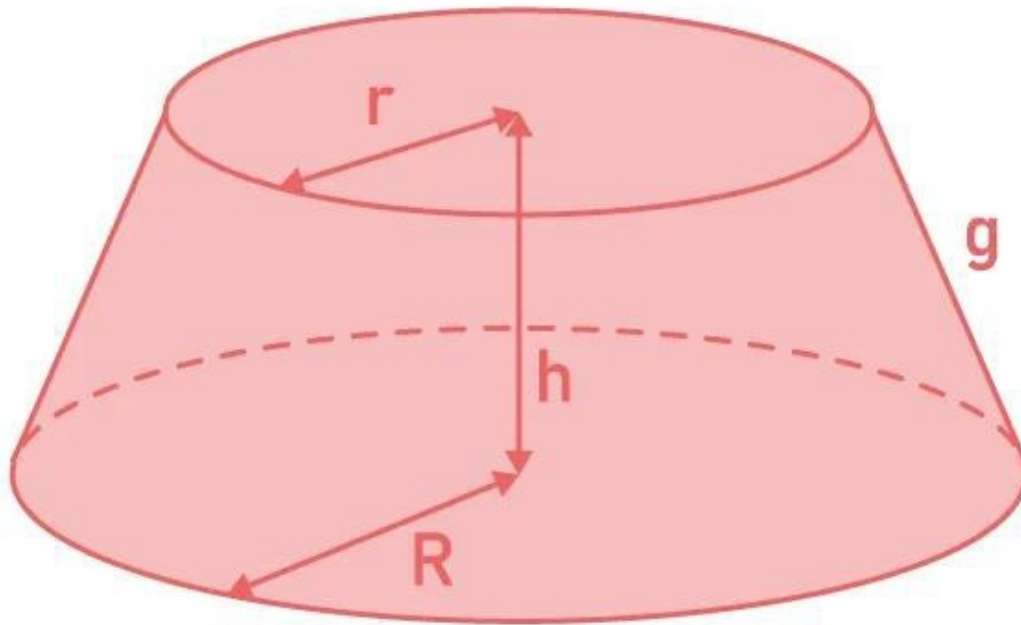
$$V = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$$

Quais são os elementos do tronco de um cone?

O tronco de um cone é um sólido geométrico encontrado pela secção transversal de um cone. Quando realizamos a secção paralela à base de um cone, é possível extrair dois sólidos, sendo um cone menor, da parte superior, e um tronco de um cone, da parte inferior.



A principal característica de um tronco de cone é que ele **possui duas bases circulares**, uma delas conhecida como base maior, e a outra, como base menor. Assim como o cone, o tronco de cone possui elementos importantes que nos ajudam a calcular sua área e seu volume, são eles: a altura, o raio da base maior, o raio da base menor, e a geratriz.



$h \rightarrow$ altura do tronco de cone

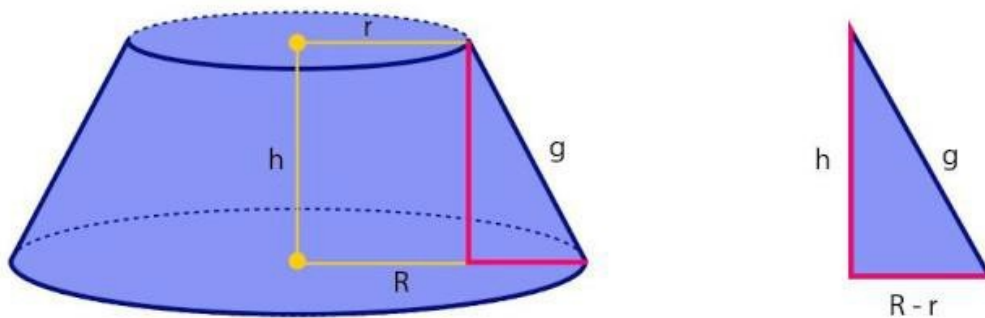
$r \rightarrow$ raio da base menor

$R \rightarrow$ raio da base maior

$g \rightarrow$ geratriz do tronco de cone

Geratriz do tronco de cone

A geratriz do tronco de um cone é utilizada para calcular a área total do tronco de um cone. Quando estudamos o cone, utilizamos o teorema de Pitágoras para calcular sua geratriz, e no tronco de um cone a ideia é muito parecida. É possível encontrar um triângulo retângulo que relacione a altura do tronco de um cone, os raios e a geratriz:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos que:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2$$

Exemplo:

Qual é a geratriz do tronco de um cone com raios medindo 13 cm e 5 cm e que possui 6 cm de altura?

Para encontrar a geratriz do tronco de um cone, temos que:

$$h = 6$$

$$R = 13$$

$$r = 5$$

Substituindo na fórmula:

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2$$

$$g^2 = 6^2 + (13 - 5)^2$$

$$g^2 = 36 + 8^2$$

$$g^2 = 36 + 64$$

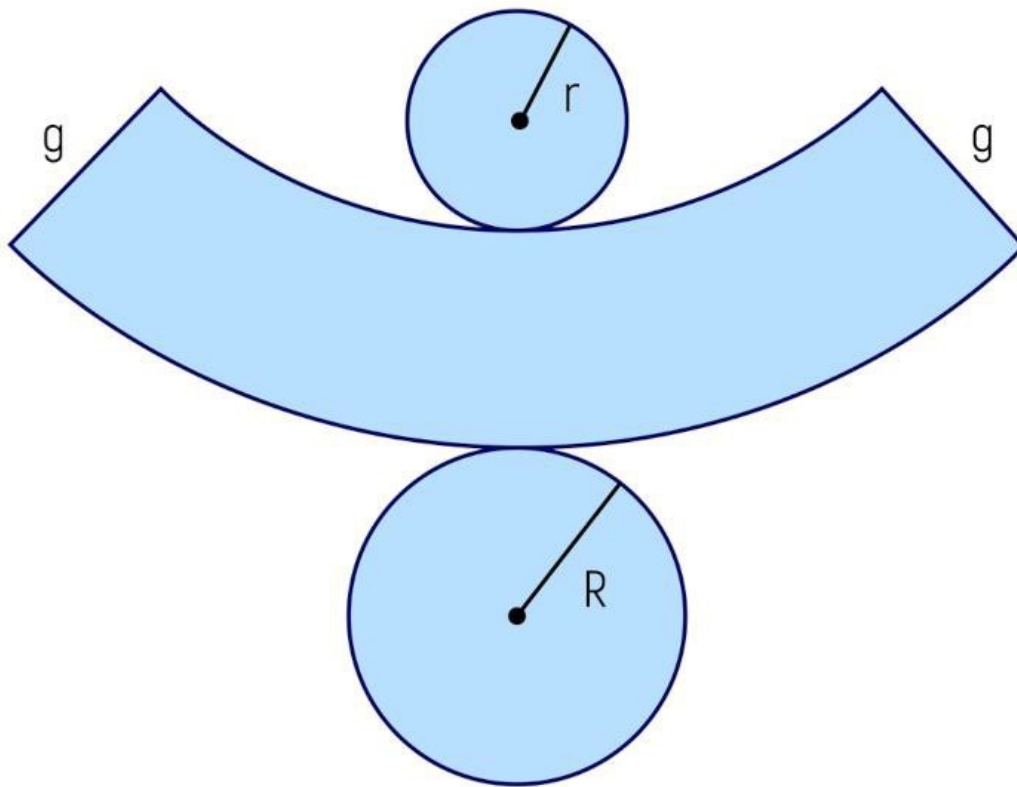
$$g^2 = 100$$

$$g = \sqrt{100}$$

$$g = 10 \text{ cm}$$

Planificação do tronco de um cone

Conhecemos como planificação a **representação bidimensional** do sólido geométrico. Fazendo a representação do tronco de um cone, é possível perceber que esse sólido é formado por bases que possuem formato de círculo, e também pela sua área lateral.



Planificação do tronco de um cone.

Conhecendo a sua planificação, é possível falar em área total do tronco de cone.

Área total do tronco de um cone

Conhecendo a planificação do tronco de um cone, é possível calcular o valor da área total desse sólido geométrico. Sabemos que ele é composto por **duas bases no formato de um círculo e também da sua área lateral**. A área total do tronco de um cone é a soma das áreas dessas três regiões:

$$A_T = A_B + A_b + A_l$$

$A_T \rightarrow$ área total

$A_B \rightarrow$ área da base maior

$A_b \rightarrow$ área da base menor

$A_L \rightarrow$ área lateral

Sabemos que as bases são círculos, logo, para calcular a área da base, utilizamos a fórmula da área de um círculo; já a área lateral é parte de um arco. As áreas são calculadas pelas seguintes fórmulas:

$$A_L = \pi g (R +$$

$$r) \quad A_B = \pi R^2$$

$$A_b = \pi r^2$$

Desse modo, é possível reescrever a fórmula para o cálculo da área total:

$$A_T = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi g (R + r)$$

Exemplo:

Calcule a área total do tronco de um cone que possui altura igual a 15 cm, raio da base maior igual a 14 cm e raio da base menor ou igual a 6 cm. (use $\pi = 3$)

Dados:

$$h = 15$$

$$R = 14$$

$$r = 6$$

$$\pi = 3$$

Primeiro encontraremos o valor da área da base maior:

$$A_B = \pi R^2$$

$$A_B = 3 \cdot 14^2$$

$$A_B = 3 \cdot 196$$

$$A_B = 588 \text{ cm}^2$$

Agora calcularemos a área da base menor:

$$A_b = \pi r^2$$

$$A_b = 3 \cdot 6^2$$

$$A_b = 3 \cdot 36$$

$$A_b = 108 \text{ cm}^2$$

Por fim, para calcular a área total e a lateral, é necessário calcular a geratriz, então, temos que:

$$g^2 = 15^2 + (14 - 6)^2$$

$$g^2 = 15^2 + 8^2$$

$$g^2 = 225 + 64$$

$$g^2 = 289$$

$$g = \sqrt{289}$$

$$g = 17$$

$$A_l = \pi g (R + r)$$

$$A_l = 3 \cdot 17 (14 + 6)$$

$$A_l = 51 \cdot 20$$

$$A_l = 51 \cdot 20$$

$$A_l = 1020 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_B + A_b + A_l$$

$$A_T = 588 + 108 + 1020 = 1716 \text{ cm}^2$$

MATEMÁTICA

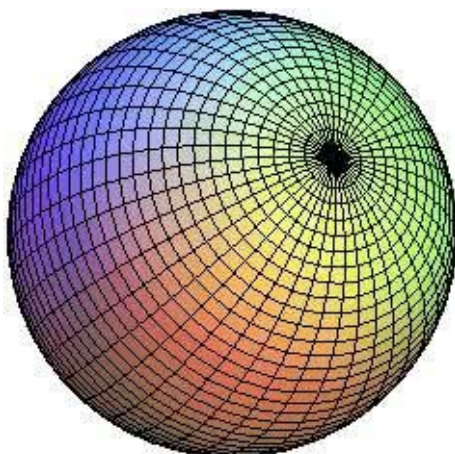
GEOMETRIA ESPACIAL

Esfera

A **Esfera** é uma figura simétrica tridimensional que faz parte dos estudos de geometria espacial.

A esfera é um sólido geométrico obtido através da rotação do semicírculo em torno de um eixo. É composto por uma superfície fechada na medida que todos os pontos estão equidistantes do centro (O).

Alguns exemplos de esfera são o planeta, uma laranja, uma melancia, uma bola de futebol, dentre outros.



Componentes da Esfera

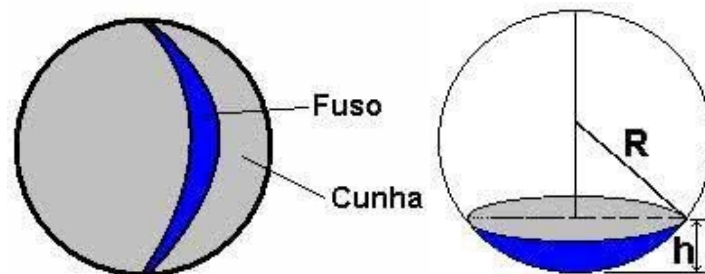
Superfície Esférica: corresponde ao conjunto de pontos do espaço no qual a distância do centro (O) é equivalente ao raio (R).

Cunha Esférica: corresponde à parte da esfera obtida ao girar um semicírculo em torno de seu eixo.

Fuso Esférico: corresponde à parte da superfície esférica que se obtém ao girar uma semicircunferência de um ângulo em torno de seu eixo.

Calota Esférica: corresponde a parte da esfera (semiesfera) cortada por um plano.

Para compreender melhor os componentes da esfera, analise as figuras abaixo:



Fórmulas da Esfera

Veja abaixo as fórmulas para calcular a área e o volume de uma esfera:

Área da Esfera

Para calcular a área da superfície esférica, utiliza-se a fórmula:

$$A_e = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Donde:

A_e = área da esfera

π (Pi): 3,14

r: raio

Volume da Esfera

Para calcular o volume da esfera, utiliza-se a fórmula:

$$V_e = 4 \cdot \pi \cdot r^3 / 3$$

Donde:

V_e : volume da esfera

π (Pi): 3,14

r: raio

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ANALÍTICA

Geometria Analítica

Geometria analítica é parte da Matemática que relaciona a geometria à álgebra e estuda os resultados dessa relação.

As bases da Geometria Analítica

A base da **geometria analítica** está em representar os pontos de uma reta utilizando os números reais. Cada ponto de uma reta é representado por (ou representa) um único número real. Esse número real é obtido pela distância entre o referido ponto e a origem da reta, que é o ponto relacionado com o número zero.

O conceito de distância, portanto, é um dos mais importantes dentro da **Geometria Analítica**. Por meio dele são definidos outros conceitos importantes, como os de círculo e circunferência. Além disso, a maioria das definições algébricas de figuras geométricas é obtida por intermédio do conceito de distância.

As bases da Geometria Analítica

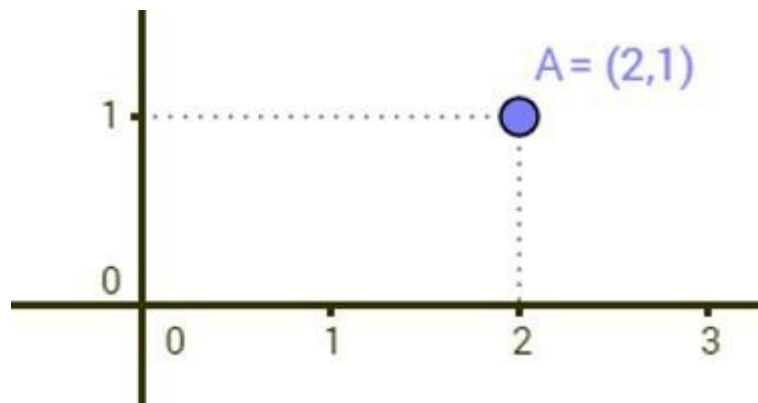
A base da **geometria analítica** está em representar os pontos de uma reta utilizando os números reais. Cada ponto de uma reta é representado por (ou representa) um único número real. Esse número real é obtido pela distância entre o referido ponto e a origem da reta, que é o ponto relacionado com o número zero.

O conceito de distância, portanto, é um dos mais importantes dentro da **Geometria Analítica**. Por meio dele são definidos outros conceitos importantes, como os de círculo e circunferência. Além disso, a maioria das definições algébricas de figuras geométricas é obtida por intermédio do conceito de distância.



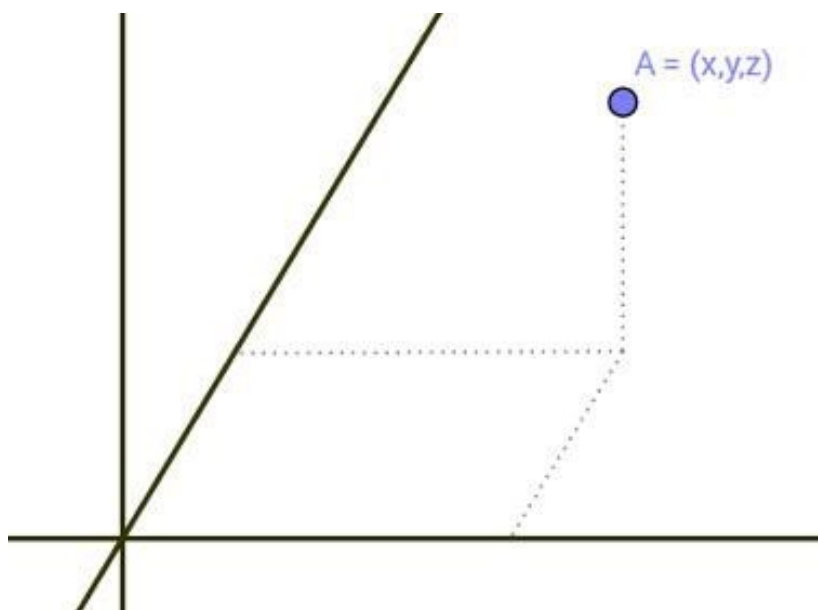
Exemplo de representação do ponto de uma reta por um número real

Posteriormente, essa ideia foi expandida para a representação de pontos no plano, de modo que cada ponto do plano é representado por um único par de números reais conhecido como par ordenado. A imagem abaixo ilustra como o par ordenado $(2,1)$ representa o ponto A.



Exemplo da representação de um ponto no plano por um par de números reais

Já os pontos do espaço são representados por um conjunto de três números reais, conhecidos como *ternos ordenados*. Cada terno ordenado representa apenas um único ponto no espaço.



Exemplo da representação de um ponto no espaço por um terno ordenado

Se um ponto pertence a uma reta e é representado por um número real, dizemos que o espaço onde esse ponto está localizado (a reta) possui apenas uma dimensão e o número real é chamado de *coordenada do ponto*.

Caso o ponto pertença a um plano, é representado por um par de números reais. O espaço onde está localizado (o plano) possui duas dimensões e esse ponto possui duas *coordenadas*.

Desse modo, o número de coordenadas que um ponto possui é igual ao número de dimensões que possui o espaço onde esse ponto está localizado. O ponto pertencente ao espaço tridimensional, por exemplo, possuirá três dimensões e será representado por três coordenadas. A figura acima retrata o ponto A, que pertence ao espaço tridimensional e é representado pelo terno ordenado (x,y,z) .

O que a Geometria Analítica estuda?

Qualquer objeto matemático, figura geométrica, forma, etc., que esteja no espaço pode ser representado geometricamente por um desenho ou algebricamente por uma fórmula matemática. Essa fórmula é o que materializa a **Geometria Analítica** e conecta a geometria à álgebra.

O estudo de Geometria Analítica geralmente é dividido nos seguintes tópicos:

Estudo Analítico do Ponto

- 1 – O que é ponto e localização?
- 2 – Plano Cartesiano
- 3 – Distância entre dois pontos
- 4 – Conjuntos de pontos

Estudo Analítico da Reta

- 1 – Equação geral da reta
- 2 – Posições relativas entre retas

3 – Ângulo entre retas

4 – Paralelismo

5 – Perpendicularidade

6 – Distância entre ponto e reta

Estudo analítico da circunferência

1 – Equação da circunferência

2 – Posição relativa entre ponto e circunferência

3 – Posição relativa entre reta e circunferência

4 – Posição relativa entre circunferência e circunferência

Vetores

1 – O que são e representação de vetores

2 – Operações básicas envolvendo vetores

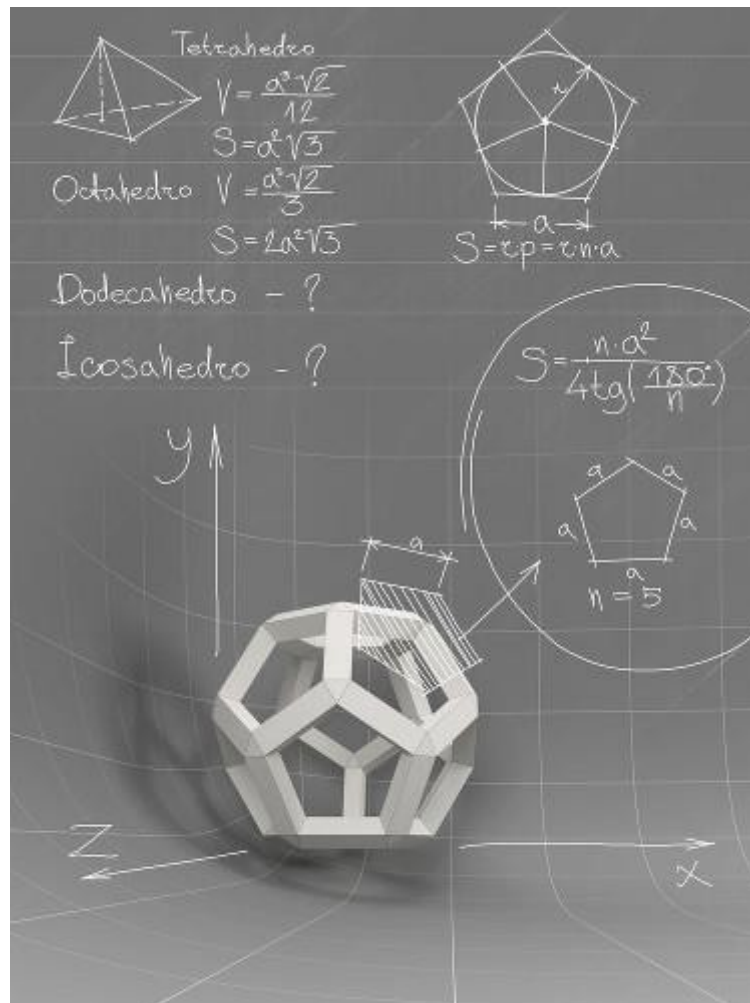
3 – Ângulo entre vetores

Cônicas

– Elipse

– Hipérbole

– Parábola



Algumas relações entre figuras geométricas e fórmulas algébricas

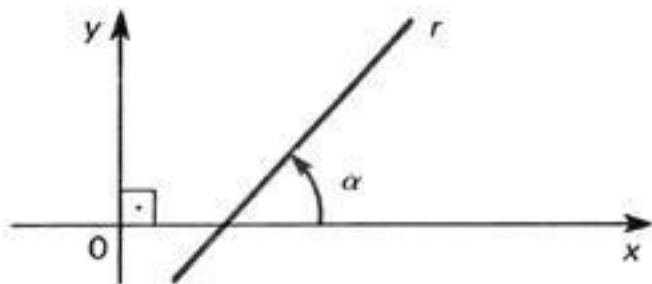
MATEMÁTICA

GEOMETRIA ANALÍTICA

Reta

Coeficiente angular (m) de uma reta r não perpendicular ao eixo das abscissas é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α , ou seja:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$



EQUAÇÃO DA RETA

Equação geral da reta

Toda reta do plano possui uma equação da forma: $ax + by +$

$$c = 0$$

na qual a , b , c são constantes e a e b não simultaneamente nulos. Exemplos:

a) $-5x + 3y - 1 = 0$

b) $9x - 4y - 13 = 0$

Equação reduzida da reta

É toda equação de reta onde a variável y fica isolada. Na equação da reta na forma reduzida podemos identificar o coeficiente angular do lado da variável x e o coeficiente linear (termo independente da equação).

Exemplos:

a) $y = 8x - 10$ Coeficiente

angular = 8 Coeficiente

linear = -10 b) $y = -4x + 12$

Coeficiente angular = -4

Coeficiente linear = 12

CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR E DA EQUAÇÃO DA RETA

Para calcular o coeficiente angular (não possuindo o valor da inclinação α) e achar a equação da reta, utiliza-se uma única fórmula:

Importante: A partir da fórmula acima, podemos determinar o coeficiente angular e a equação da reta da seguinte forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Coeficiente angular Equação da reta

2 valores para o y . O valor do m .

2 valores para o n . 1 valor para o n . 1

valor para o x .

Aplicação

Determine a equação da reta que passa pelos A (4, 12) e B (0, 4)

Solução:

º **passo** (cálculo do m – 2 valores para o y e 2 para o x):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{12 - 4}{4 - 0} \Rightarrow m = \frac{8}{4} \Rightarrow m = 2$$

º **passo** (equação da reta – o valor do m, 1 valor de y e um valor de x);,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 2 = \frac{y - 4}{x - 0} \Rightarrow 2x = y - 4 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0$$

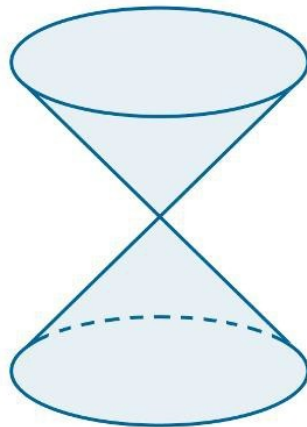
MATEMÁTICA

GEOMETRIA ANALÍTICA

Cônicas

As figuras geométricas planas conhecidas como **cônicas** são formadas pela intersecção entre um plano e um cone duplo de revolução. São elas: circunferência, parábola, hipérbole e elipse.

O cone duplo de revolução é um sólido geométrico tridimensional obtido por meio do giro de uma reta. A figura formada por esse giro, ou seja, o **cone** duplo de revolução, é representada a seguir:

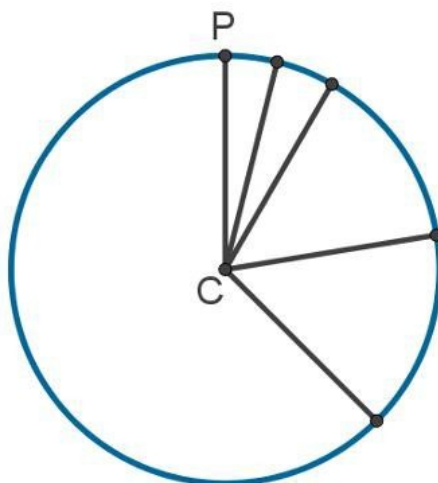


Cada um dos quatro tipos de figuras formados pela **intersecção do plano** com o cone está relacionado a um tipo de equação, portanto, essas figuras também podem ser definidas de forma algébrica. Tanto a definição de cada uma delas quanto suas respectivas equações serão discutidas no decorrer deste artigo.

Circunferência

As **circunferências** podem ser obtidas por meio da **intersecção** de um plano com um **cone**. A definição delas é: dado um ponto C , chamado de centro, e um comprimento r , chamado de raio, a circunferência é o conjunto de pontos do plano cuja distância até C é sempre igual a r .

A imagem a seguir mostra um exemplo de circunferência com alguns de seus raios. Note que, de acordo com a definição dada, todos os segmentos de reta cujas extremidades são o centro e qualquer ponto da circunferência possuem a mesma medida.



A **equação reduzida** da **circunferência** também pode ser obtida usando a distância entre dois pontos. Dados os pontos C (a, b), centro da circunferência, e P (x, y) ponto qualquer pertencente a ela, a equação reduzida da circunferência é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

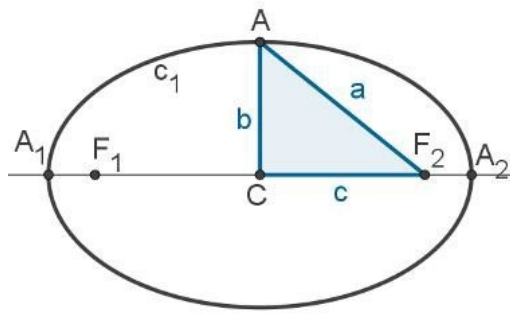
Elipse

Em uma **elipse**, os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos, e a **distância** entre eles é igual a $2c$. Sua definição formal é: dados os pontos F_1 e F_2 , a elipse é o conjunto de pontos P em que vale a seguinte expressão:

$$d_{PF1} + d_{PF2} = 2a$$

Isso significa que a elipse é o conjunto dos pontos cuja **soma das distâncias** até os focos é igual a uma constante. Em outras palavras, o ponto P pertence a uma elipse se a soma da distância de P até F_1 com a distância de P até F_2 é igual a $2a$.

A figura a seguir ilustra uma elipse com as medidas de segmentos importantes encontrados nela:



As **elipses** possuem duas **equações reduzidas**. A primeira delas é válida para o caso em que os focos dessa figura estão sobre o eixo x e o centro da elipse coincide com a origem de um plano cartesiano:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A segunda equação reduzida é válida para os casos em que os vértices da elipse estão sobre o eixo y e seu centro sobre a origem do plano cartesiano.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

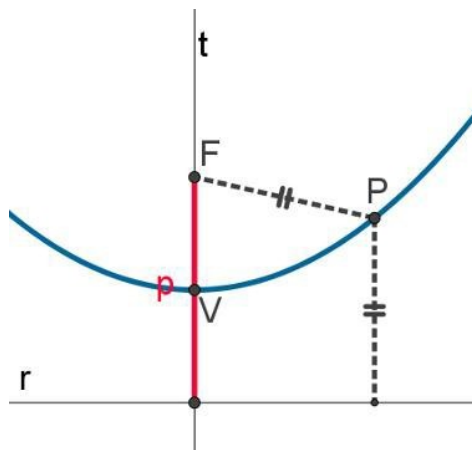
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Parábola

Dada uma reta r e um foco F, a **parábola** é a **cônica** na qual todos os seus pontos têm a distância até r igual à distância até F.

A figura a seguir mostra um exemplo de parábola com o ponto P, em que vale:

$$d_{PF} = d_{Pr}$$



Toda parábola possui um **eixo de simetria**, que é a reta “t” na imagem acima. Quando esse eixo coincide com o eixo x do plano cartesiano e o vértice da parábola coincide com a origem do plano cartesiano, a **equação reduzida** da parábola é:

$$y^2 = 2px$$

Quando o eixo de simetria está sobre o eixo y e o vértice da parábola coincide com a origem do plano cartesiano, a equação reduzida da parábola é:

$$x^2 = 2py$$

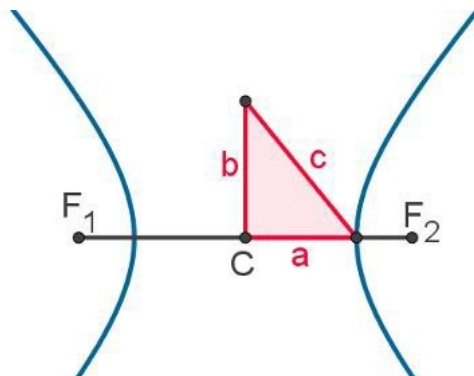
Hipérbole

Dados os pontos F_1 e F_2 , chamados de **focos** da **hipérbole**, e a distância $2c$ entre eles, uma hipérbole é o conjunto de pontos do plano cuja diferença das distâncias até os focos é igual à constante $2a$.

Assim, se P é um ponto da hipérbole, vale a expressão:

$$|d_{PF1} - d_{PF2}| = 2a$$

A imagem a seguir mostra um exemplo de **hipérbole** e alguns segmentos importantes em sua formação:



As equações reduzidas da hipérbole também são duas. A primeira é obtida quando os focos dessa figura estão sobre o eixo x e seu centro coincide com a origem do plano cartesiano:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$a^2 \quad b^2$$

A segunda é obtida quando os focos da hipérbole estão sobre o eixo y e seu centro coincide com a origem do plano cartesiano:

$$y^2 - x^2 = 1$$

$$a^2 \quad b^2$$